Isometriegruppen von Lorentz-Mannigfaltigkeiten von endlichem Volumen und Lokale Geometrie kompakter homogener Lorentz-Räume

Felix Günther

Humboldt-Universität zu Berlin

Studierendenkonferenz der DMV, 21. September 2011

Inhaltsverzeichnis

VORAUSSETZUNGEN

- $M = (M, g)$ Lorentz-Mannigfaltigkeit von endlichem Volumen
- G Lie-Gruppe, die isometrisch und lokal effektiv auf M wirkt
- lokal effektiv: $\varrho : G \to \mathrm{Isom}(M)$ hat diskreten Kern
- $\mathfrak{g}$ Lie-Algebra von G

Ziel: Klassifikation der Lie-Algebren $\mathfrak{g}$

KLASSIFIKATIONSTHEOREM

THEOREM

Mannigfaltigkeit M und Gruppe G wie oben.
Dann $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s}$ *mit:*

- $\mathfrak{k}$ *kompakt halbeinfach,* $\mathfrak{a}$ *abelsch*
- $\mathfrak{s}$ *trivial oder isomorph zu:*
  1. $\mathfrak{aff}(\mathbb{R})$
  2. $\mathfrak{he}_d$
  3. $\mathfrak{he}_d^\lambda$ $(\lambda \in \mathbb{Z}_+^d)$
  4. $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$

KLASSIFIKATIONSTHEOREM

THEOREM

Mannigfaltigkeit M und Gruppe G wie oben.
Dann $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s}$ *mit:*

- $\mathfrak{k}$ *kompakt halbeinfach,* $\mathfrak{a}$ *abelsch*
- $\mathfrak{s}$ *trivial oder isomorph zu:*
  1. $\mathfrak{aff}(\mathbb{R})$
  2. $\mathfrak{he}_d$
  3. $\mathfrak{he}_d^\lambda$ $(\lambda \in \mathbb{Z}_+^d)$
  4. $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$

Ist $G \subseteq \mathrm{Isom}(M)$ *und* $\mathfrak{s} \cong \mathfrak{he}_d^\lambda$ *oder* $\mathfrak{s} \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$*:*

- $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{s})$ *erzeugt kompakte Untergruppe*

Induzierte Bilinearform κ auf $\mathfrak{g}$

- Vektor $X \in \mathfrak{g} \mapsto$ Killing-Vektorfeld $\widetilde{X}$ auf M:

$$\widetilde{X}(x) := \frac{\partial}{\partial t} (\exp(tX) \cdot x)\,|_{t=0}$$

Induzierte Bilinearform κ auf $\mathfrak{g}$

- Vektor $X \in \mathfrak{g} \mapsto$ Killing-Vektorfeld $\widetilde{X}$ auf M:

$$\widetilde{X}(x) := \frac{\partial}{\partial t}(\exp(tX) \cdot x)|_{t=0}$$

- $\emptyset \neq U \subseteq M$ G-invariant und offen, sodass $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$:

$$\left|g(\widetilde{X}, \widetilde{Y})(x)\right| \leq const.(X, Y) \quad \forall x \in U$$

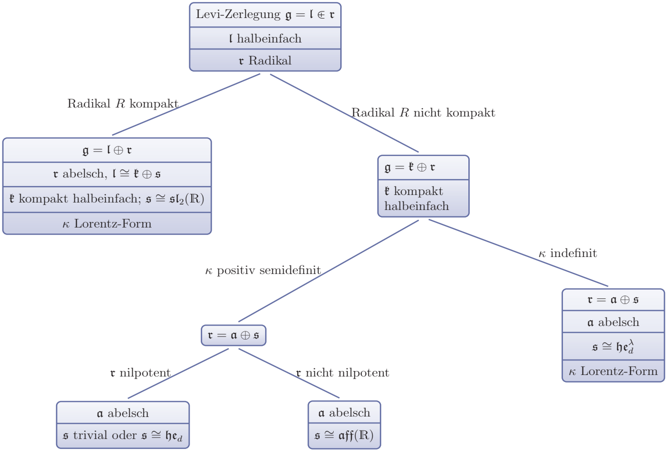
- Satz: So ein U existiert.
- definiere symmetrische Bilinearform κ durch

$$\kappa(X, Y) := \int_U g(\widetilde{X}, \widetilde{Y})(x) d\mu(x)$$

EIGENSCHAFTEN VON κ

- κ ist Ad-invariant
- $G = \mathrm{Isom}(M)$: Wenn für $V \subseteq \mathfrak{g}$ fast alle $X \in V$ keine präkompakte Untergruppe erzeugen, dann $\kappa|_{V \times V}$ positiv semidefinit und Kern höchstens 1-dimensional.

Beweisskizze zum Klassifikationstheorem



GEOMETRISCHES THEOREM

THEOREM

M: kompakte Lorentz-Mannigfaltigkeit
G: Lie-Gruppe, die isometrisch und lokal effektiv auf M wirkt
Nach Klassifikationstheorem $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s}$.
Es gilt: Von $\mathfrak{s}$ erzeugte Untergruppe S wirkt lokal frei auf M.

Strukturtheorem (homogener Fall)

Theorem

M kompakte homogene Lorentz-Mannigfaltigkeit,
$G := \mathrm{Isom}^0(M)$ nicht-kompakt.
Nach Klassifikationstheorem $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s}$.
Dann $\mathfrak{s} \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ oder $\mathfrak{s} \cong \mathfrak{he}_d^\lambda$.
S: von $\mathfrak{s}$ erzeugte Untergruppe mit Zentrum $Z(S)$
N: kompakte homogene Riemannsche Mannigfaltigkeit

1. $\mathfrak{s} \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$: *$M$ isometrisch zu* $\Gamma \backslash \left(N \times \widetilde{SL_2(\mathbb{R})} \right)$

Strukturtheorem (homogener Fall)

Theorem

M kompakte homogene Lorentz-Mannigfaltigkeit,
$G := \mathrm{Isom}^0(M)$ nicht-kompakt.
Nach Klassifikationstheorem $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s}$.
Dann $\mathfrak{s} \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ oder $\mathfrak{s} \cong \mathfrak{he}_d^\lambda$.
S: von $\mathfrak{s}$ erzeugte Untergruppe mit Zentrum $Z(S)$
N: kompakte homogene Riemannsche Mannigfaltigkeit

1. $\mathfrak{s} \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$: *$M$ isometrisch zu* $\Gamma \backslash \left(N \times \widetilde{SL_2(\mathbb{R})} \right)$
2. $\mathfrak{s} \cong \mathfrak{he}_d^\lambda$: *$M$ isometrisch zu* $\Gamma \backslash \left(S \times_{Z(S)} N \right)$

Beweisidee zum Strukturtheorem

1. $\mathcal{S}$ (Orbits von S) überall Lorentz

Beweisidee zum Strukturtheorem

1. $\mathcal{S}$ (Orbits von S) überall Lorentz
2. $\mathcal{O} = \mathcal{S}^{\perp}$; $\mathcal{Z}$ erzeugt von $Z(S)$ ($\mathfrak{s} \cong \mathfrak{he}_d^{\lambda}$)

Beweisidee zum Strukturtheorem

1. $\mathcal{S}$ (Orbits von S) überall Lorentz
2. $\mathcal{O} = \mathcal{S}^\perp$; $\mathcal{Z}$ erzeugt von $Z(S)$ ($\mathfrak{s} \cong \mathfrak{he}_d^\lambda$)
3. $\mathcal{O}$ bzw. $\mathcal{O} + \mathcal{Z}$ involutiv, N Blatt

Beweisidee zum Strukturtheorem

1. $\mathcal{S}$ (Orbits von S) überall Lorentz
2. $\mathcal{O} = \mathcal{S}^{\perp}$; $\mathcal{Z}$ erzeugt von $Z(S)$ ($\mathfrak{s} \cong \mathfrak{he}_d^{\lambda}$)
3. $\mathcal{O}$ bzw. $\mathcal{O} + \mathcal{Z}$ involutiv, N Blatt
4. $N \times S \to M$ bzw. $S \times_{Z(S)} N \to M$ topologische Überlagerungen

Beweisidee zum Strukturtheorem

1. $\mathcal{S}$ (Orbits von S) überall Lorentz
2. $\mathcal{O} = \mathcal{S}^{\perp}$; $\mathcal{Z}$ erzeugt von $Z(S)$ ($\mathfrak{s} \cong \mathfrak{he}_d^{\lambda}$)
3. $\mathcal{O}$ bzw. $\mathcal{O} + \mathcal{Z}$ involutiv, N Blatt
4. $N \times S \to M$ bzw. $S \times_{Z(S)} N \to M$ topologische Überlagerungen
5. Decktransformationen Γ wirken transitiv auf Fasern

Beweisidee zum Strukturtheorem

1. $\mathcal{S}$ (Orbits von S) überall Lorentz
2. $\mathcal{O} = \mathcal{S}^{\perp}$; $\mathcal{Z}$ erzeugt von $Z(S)$ ($\mathfrak{s} \cong \mathfrak{he}_d^{\lambda}$)
3. $\mathcal{O}$ bzw. $\mathcal{O} + \mathcal{Z}$ involutiv, N Blatt
4. $N \times S \to M$ bzw. $S \times_{Z(S)} N \to M$ topologische Überlagerungen
5. Decktransformationen Γ wirken transitiv auf Fasern
6. Zurückziehen von Metrik auf M entlang $\mathcal{S}$ liefert bi-invariante Metrik auf S

Reduktivitätstheorem

Theorem

M kompakte homogene Lorentz-Mannigfaltigkeit,
$G := Isom^0(M)$.
Dann hat Isotropiegruppe $H \subseteq G$ von $x \in M$ kompakte Zusammenhangskomponenten. Außerdem ist $M \cong G/H$ reduktiv.

Ricci-Krümmung

Theorem

M Ricci-flache kompakte homogene Lorentz-Mannigfaltigkeit.
Dann ist $\mathrm{Isom}^0(M)$ kompakt.
Ist M zusätzlich nicht flach, so ist sogar $\mathrm{Isom}(M)$ kompakt.

ENDE

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!