Séminaire BOURBAKI Novembre 2005
58ème année, 2005-2006, n$^{\text{o}}$ 955

GENRES DE TODD ET VALEURS AUX ENTIERS DES DÉRIVÉES DE FONCTIONS L

par **Christophe SOULÉ**

Le théorème de Hirzebruch-Riemann-Roch calcule la caractéristique d'Euler-Poincaré d'un fibré holomorphe E sur une variété complexe X projective et lisse :

$$\chi(E) = \int_X \mathrm{ch}(E)\,\mathrm{Td}(TX)\,. \tag{1}$$

Dans cette identité le genre de Todd $\mathrm{Td}(\cdot)$ est la classe caractéristique multiplicative associée à la série formelle

$$\mathrm{Td}(x) = \frac{x}{1-e^{-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + \cdots\,,$$

que l'on peut aussi écrire

$$\mathrm{Td}(x) = 1 - \sum_{m\geq 0} \zeta(-m)\,\frac{x^{m+1}}{m!}\,,$$

où $\zeta(s)$ est la fonction zêta de Riemann. Ce lien entre le genre de Todd et les valeurs aux entiers de la fonction zêta peut paraître fortuit. Mais l'analogue de l'égalité (1) en géométrie d'Arakelov fait intervenir, en plus du genre de Todd classique, la classe caractéristique additive associée à la série

$$R(x) = \sum_{\substack{m\geq 1\\ m \text{ impair}}} \left(2\zeta'(-m) + \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right)\zeta(-m)\right)\frac{x^m}{m!}\,,$$

où $\zeta'(s)$ est la *dérivée* de la fonction zêta. Et si les nombres rationnels $\zeta(-m)$ (autrement dit les nombres de Bernoulli) apparaissent dans de nombreux calculs, il est par contre très rare de rencontrer les nombres réels $\zeta'(-m)$ avec m impair. Le but de cet exposé est de montrer comment, plus généralement, les avatars du genre de Todd en géométrie d'Arakelov permettent d'obtenir des formules, nouvelles ou déjà connues, impliquant les valeurs aux entiers des dérivées des fonctions L de la théorie des nombres.Si X est un schéma régulier, projectif sur un ouvert du spectre de l'anneau des entiers d'un corps de nombres, muni d'une action du schéma en groupes G des racines n-ièmes de l'unité, $n \geq 1$, Köhler et Roessler ont démontré un analogue équivariant du théorème de Riemann-Roch en géométrie d'Arakelov. Ce «théorème de Lefschetz arithmétique» [23] comporte aussi une correction au genre de Todd équivariant habituel. Ses coefficients sont donnés par les valeurs aux entiers négatifs de la *dérivée* en s de la fonction zêta de Lerch définie, si $\mathrm{Re}(s) > 1$, par la formule

$$\zeta(z,s) = \sum_{m\geq 1} \frac{z^m}{m^s}\,,\ z\in\mathbb{C}\,,\ |z| = 1\,.$$

Si χ est un caractère de Dirichlet modulo n, cette fonction est liée à la fonction L de Dirichlet

$$L(\chi,s) = \sum_{m\geq 1} \frac{\chi(m)}{m^s}$$

par une transformée de Fourier sur le groupe $(\mathbb{Z}/n)^*$. Par ailleurs, une formule célèbre de Chowla et Selberg (étendue par Gross [19], Anderson [1] et Colmez [11] aux variétés abéliennes de type CM) calcule les périodes d'une courbe elliptique à multiplication complexe à l'aide des dérivées à l'origine des fonctions L de Dirichlet [12].

Köhler et Roessler ont montré que leur théorème de Lefschetz arithmétique fournit une nouvelle preuve des formules de Chowla-Selberg, Gross, Anderson et Colmez (sans retrouver cependant le calcul complet aux "mauvaises places"). Maillot et Roessler [30] ont abordé le cas d'une variété quelconque sur un corps de nombres, munie d'une action de G. Outre les résultats précédents, ils obtiennent un calcul des périodes du groupe $H^2(X)$ quand X est une surface, et $H^d(X)$ quand X est une hypersurface de dimension d. Leur résultat est la première confirmation, en dehors des variétés abéliennes, d'une conjecture de Gross et Deligne sur les motifs à multiplication complexe [19].

Après avoir introduit la géométrie d'Arakelov (§1) et énoncé les théorèmes de Riemann-Roch (§2, Th. 2.1) et de Lefschetz arithmétiques (§3, Th. 3.1), nous montrerons, en suivant [29], que cette formule se simplifie énormément quand on l'applique au complexe de De Rham d'une variété projective et lisse sur un corps de nombres X, munie d'une action de G. Le résultat principal (§4, Th. 4.4) est une réécriture de la transformée de Fourier de l'identité initiale. Il affirme qu'une certaine combinaison de logarithmes de périodes de X est un multiple entier explicite de $\frac{L'(\chi,0)}{L(\chi,0)}$, où χ est un caractère de Dirichlet impair et primitif modulo n. La section 5 détaille ce calcul, et on discute dans la section 6 le cas d'une variété abélienne. On fait alors le lien avec la conjecture de Gross et Deligne et avec la formule de Chowla-Selberg. Il faut toutefois signaler que les égalités ainsi obtenues ne sont pas aussi précises qu'on le souhaiterait. Elles souffrent en effet d'une ambiguïté, due au fait que le complexe de De Rham ne s'étend pas en général, de façon équivariante, à un modèle entier de X. L'appendice donne par contre un exemple d'une courbe elliptique de type CM pour laquelle la méthode fournit un résultat sans cette ambiguïté.

Pour terminer, nous évoquerons brièvement d'autres travaux reliant la géométrie d'Arakelov aux valeurs des dérivées de fonctions L, y compris celles associées aux formes modulaires [30] [25] [26]. C'est un domaine en plein essor.

Je tiens à remercier Maillot et Roessler pour m'avoir beaucoup aidé à préparer cet exposé. L'exemple traité en appendice leur est dû. Je remercie aussi Burgos et Kudla pour leurs commentaires sur ce manuscrit.

Notation : si M est un groupe abélien et si K est un corps, on notera M_K le K-espace vectoriel $M \otimes_{\mathbb{Z}} K$.

1. GÉOMÉTRIE D'ARAKELOV

Dans cette section et la suivante nous décrivons les principales notions de la géométrie d'Arakelov. Pour des exposés de synthèse plus détaillés, voir [36] [35] [4] et l'exposé [7] de ce séminaire.

1.1. Appelons *variété arithmétique* la donnée d'un schéma X régulier et projectif sur $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. La conjugaison des coordonnées munit l'ensemble $X(\mathbb{C})$ des points complexes de X d'une involution $F_\infty : X(\mathbb{C}) \to X(\mathbb{C})$. Pour un entier $p \geq 0$ on note $Z^p(X)$ le groupe des cycles algébriques de codimension p sur X, i.e. les combinaisons formelles finies $\sum\limits_\alpha n_\alpha Z_\alpha$, $n_\alpha \in \mathbb{Z}$, où les $Z_\alpha \subset X$ sont des fermés de codimension p dans X. On note aussi $D^{pp}(X_{\mathbb{R}})$ (resp. $A^{pp}(X_{\mathbb{R}})$) l'espace vectoriel réel des courants réels (resp. des formes différentielles réelles) de type (p, p) sur $X(\mathbb{C})$ sur lesquel(le)s F_∞^* agit par multiplication par $(-1)^p$. Un *courant de Green* pour le cycle $Z \in Z^p(X)$ est un élément g de $D^{p-1,p-1}(X_{\mathbb{R}})$ tel que

$$dd^c g + \delta_Z = \omega\,, \tag{2}$$

où $\omega \in A^{pp}(X_{\mathbb{R}})$, $\delta_Z \in D^{pp}(X_{\mathbb{R}})$ est le courant d'intégration sur les points complexes de Z , et $dd^c = \frac{i}{2\pi}\,\partial\bar\partial$. Le *groupe de Chow arithmétique* $\widehat{\mathrm{CH}}^p(X)$ est engendré par les couples (Z, g), où $Z \in Z^p(X)$ et g est un courant de Green de Z. On a $(Z, g)+(Z', g') = (Z + Z', g + g')$ et on impose les relations

$$(\mathrm{div}(f), -\log|f|^2 + \partial u + \bar\partial v) = 0$$

dans $\widehat{\mathrm{CH}}^p(X)$, où u (resp. v) est un courant de type $(p-2, p-1)$ (resp. $(p-1, p-2)$) et $f \in k(Y)^*$ est n'importe quelle fonction rationnelle non nulle sur un sous-schéma fermé intègre $Y \subset X$ de codimension $p - 1$. Le cycle $\mathrm{div}(f)$ est le diviseur de f et $-\log|f|^2$ est le courant obtenu en associant à toute forme différentielle sur $X(\mathbb{C})$ l'intégrale sur $Y(\mathbb{C})$ de son produit avec la fonction intégrable $-\log|f|^2$.

À tout morphisme algébrique $f : X \to Y$ entre variétés arithmétiques sont associés des morphismes d'image inverse

$$f^* : \widehat{\mathrm{CH}}^p(Y) \to \widehat{\mathrm{CH}}^p(X)\,.$$

De plus, il existe un produit d'*intersection arithmétique*

$$\widehat{\mathrm{CH}}^p(X) \otimes \widehat{\mathrm{CH}}^q(X) \to \widehat{\mathrm{CH}}^{p+q}(X)_{\mathbb{Q}}\,.$$

Ce produit est compatible aux images inverses. On notera qu'au lieu de $\widehat{\mathrm{CH}}^{p+q}(X)_{\mathbb{Q}}$ on peut aussi considérer, et c'est plus naturel, le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel défini de la même façon que $\widehat{\mathrm{CH}}^{p+q}(X)$ mais en prenant pour générateurs les couples (Z, g), où $Z \in Z^{p+q}(X)_{\mathbb{Q}}$

et $g \in D^{p+q-1,p+q-1}(X_{\mathbb{R}})$ est un courant de Green de Z. De même pour les espaces vectoriels $\widehat{\mathrm{CH}}^p(X)_K$ utilisés plus loin.

1.2. Un *fibré hermitien* sur X est la donnée d'un couple $\bar{E} = (E, h)$, où E est un fibré algébrique sur X et h une métrique hermitienne C^∞ sur le fibré holomorphe $E_{\mathbb{C}}$ sur $X(\mathbb{C})$ associé à E, cette métrique étant invariante par F_∞. On peut associer à tout fibré hermitien $\bar{E}$ des classes caractéristiques telles que les classes de Chern $\hat{c}_p(\bar{E}) \in \widehat{\mathrm{CH}}^p(X)$, le caractère de Chern

$$\widehat{\mathrm{ch}}(\bar{E}) \in \widehat{\mathrm{CH}}^{\cdot}(X)_{\mathbb{Q}} = \bigoplus_{p \geq 0} \widehat{\mathrm{CH}}^p(X)_{\mathbb{Q}}$$

et la classe de Todd

$$\widehat{\mathrm{Td}}(\bar{E}) \in \widehat{\mathrm{CH}}^{\cdot}(X)_{\mathbb{Q}}\,.$$

Si par exemple $\bar{L} = \det(\bar{E})$ est la puissance extérieure maximale de E, la première classe de Chern

$$\hat{c}_1(\bar{E}) = \hat{c}_1(\bar{L}) \in \widehat{\mathrm{CH}}^1(X)$$

est la classe du couple $(\mathrm{div}(s), -\log \|s\|^2)$, où s est n'importe quelle section rationnelle non nulle de s sur X et $\|s\|$ la norme de cette section.

Ces classes caractéristiques vérifient les propriétés usuelles de fonctorialité, normalisation et comportement par produit tensoriel. Si $E = E' \oplus E''$ est la somme directe de deux fibrés algébriques et si la métrique sur $E_{\mathbb{C}}$ est la somme directe orthogonale des métriques sur $E'_{\mathbb{C}}$ et $E''_{\mathbb{C}}$ on a

$$\hat{c}_p(\bar{E}) = \sum_{i+j=p} \hat{c}_i(\bar{E}')\, \hat{c}_j(\bar{E}'')\,,$$

$$\widehat{\mathrm{ch}}(\bar{E}) = \widehat{\mathrm{ch}}(\bar{E}')\, \widehat{\mathrm{ch}}(\bar{E}'')\,,$$

et

$$\widehat{\mathrm{Td}}(\bar{E}) = \widehat{\mathrm{Td}}(\bar{E}')\, \widehat{\mathrm{Td}}(\bar{E}'')\,.$$

Mais ces formules ne sont plus valables en général pour une suite exacte

$$0 \to E' \to E \to E'' \to 0\,,$$

et ce quel que soit le choix des métriques sur les trois fibrés.

2. THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH ARITHMÉTIQUE

2.1. Soit X une variété arithmétique. On définit comme suit une application $\mathbb{Q}$-linéaire d'*intégration sur X*

$$\int_X : \widehat{\mathrm{CH}}^{\cdot}(X)_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{R}\,.$$

L'image de la classe α d'un couple (Z,g) est nulle sauf si $Z = \sum_x n_x\, x$ est un cycle de dimension zéro et g est un courant de degré maximum sur $X(\mathbb{C})$, auquel cas

$$\int_X \alpha = \sum_x n_x \log(\# k(x)) + \frac{1}{2} \int_{X(\mathbb{C})} g\,.$$

On a noté $\# k(x)$ le cardinal du corps résiduel au point fermé $x \in X$ (un corps fini), et défini de g comme étant celle d'une forme cohomologue à ce courant. Le morphisme

$$\int_S : \widehat{\mathrm{CH}}^1(S) \to \mathbb{R}$$

est un isomorphisme.

2.2. Soit M un $\mathbb{Z}$-module de type fini et h un produit scalaire hermitien sur $M_{\mathbb{C}}$, invariant par la conjugaison complexe. On pose

$$\widehat{\deg}(\bar{M}) = \int_S \hat{c}_1(\det(\bar{M}))\,.$$

Si M_{tors} est le sous-groupe de torsion de M et si $M_{\mathbb{R}}$ est muni de la mesure euclidienne définie par h, on a

$$\widehat{\deg}(\bar{M}) = \log(\# M_{\mathrm{tors}}) - \log \operatorname{vol}\left(\frac{M_{\mathbb{R}}}{M}\right)\,.$$

2.3. Soit X une variété arithmétique et h_X une métrique hermitienne sur le fibré tangent $TX(\mathbb{C})$, invariante par F_∞. Notons $\omega_0 \in A^{11}(X_{\mathbb{R}})$ la forme telle que

$$\omega_0 = \frac{i}{2\pi} \sum_{\alpha,\beta} h_X\left(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial z_\beta}\right) dz_\alpha\, d\bar{z}_\beta$$

pour tout choix d'une carte locale (z_α) sur $X(\mathbb{C})$. On suppose que h_X est Kähler, c'est-à-dire $d\omega_0 = 0$.

Si $\bar{E}$ est un fibré hermitien sur X, les groupes de cohomologie $H^q(X,E)$ sont de type fini. Pour tout entier $q \geq 0$, l'espace vectoriel complexe

$$H^q(X,E)_{\mathbb{C}} = H^q(X(\mathbb{C}), E_{\mathbb{C}})$$

est canoniquement isomorphe à celui des formes différentielles harmoniques de type $(0,q)$ sur $E_{\mathbb{C}}$. On note $A^{0q}(X(\mathbb{C}), E_{\mathbb{C}})$ l'espace vectoriel de toutes les différentielles C^∞ de type $(0,q)$ à coefficients dans $E_{\mathbb{C}}$. Il est muni du produit scalaire hermitien h_{L^2} défini par

$$h_{L^2}(\alpha,\beta) = \int_{X(\mathbb{C})} (\alpha,\beta)\, \frac{\omega_0^d}{d!}\,,$$

où $d = \dim_{\mathbb{C}} X(\mathbb{C})$ et (α,β) désigne le produit scalaire ponctuel associé au choix des métriques sur $X(\mathbb{C})$ et $E_{\mathbb{C}}$. La restriction de h_{L^2} aux formes harmoniques définit un produit scalaire hermitien sur $H^q(X,E)_{\mathbb{C}}$.

2.4. Soient
$$\bar\partial : A^{0q}(X(\mathbb{C}), E_{\mathbb{C}}) \to A^{0,q+1}(X(\mathbb{C}), E_{\mathbb{C}})$$
l'opérateur de Cauchy-Riemann et $\bar\partial^*$ son adjoint pour la métrique L^2. L'opérateur de Laplace $\Delta_q = \bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial$ a un spectre discret formé de nombres réels positifs ou nuls. On note $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots$ ses valeurs propres strictement positives (répétées selon leur multiplicité) et
$$\zeta_q(s) = \sum_{n \geq 1} \lambda_n^{-s}$$
sa fonction zêta. Cette série converge si $\mathrm{Re}(s) > d$, elle admet un prolongement méromorphe au plan complexe, et n'a pas de pôle à l'origine ; on peut donc prendre sa dérivée en zéro. On pose
$$T(\bar E_{\mathbb{C}}) = \sum_{q \geq 0} (-1)^{q+1} q\, \zeta_q'(0)$$
(cf. [31]).

2.5. Si $E_{\mathbb{C}}$ est un fibré holomorphe sur $X(\mathbb{C})$ invariant par F_∞, on note $\mathrm{ch}(E_{\mathbb{C}})$ et $\mathrm{Td}(E_{\mathbb{C}})$ ses classes caractéristiques usuelles dans $\underset{p\geq 0}{\oplus} H^{pp}(X_{\mathbb{R}})$, où $H^{pp}(X_{\mathbb{R}})$ est le sous-espace de la cohomologie réelle de $X(\mathbb{C})$ de type (p,p) où F_∞ agit par $(-1)^p$. On définit aussi une classe
$$R(E_{\mathbb{C}}) \in \underset{p\geq 0}{\oplus} H^{pp}(X_{\mathbb{R}})\,,$$
compatible aux images inverses et additive :
$$R(E'_{\mathbb{C}} \oplus E''_{\mathbb{C}}) = R(E'_{\mathbb{C}}) + R(E''_{\mathbb{C}})\,.$$
Si $L_{\mathbb{C}}$ est un fibré inversible et $x = c_1(L_{\mathbb{C}}) \in H^{11}(X_{\mathbb{R}})$ sa première classe de Chern on a $R(L_{\mathbb{C}}) = R(x)$, où $R(x)$ est la série formelle
$$R(x) = \sum_{\substack{m \text{ impair} \\ m \geq 1}} \left(2\zeta'(-m) + \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}\right)\zeta(-m)\right) \frac{x^m}{m!}\,.$$

2.6. Dans la situation de 2.2 on pose
$$\hat\chi(\bar E) = \sum_{q \geq 0} (-1)^q\, \widehat{\deg}(H^q(X,E), h_{L^2})\,.$$
Le théorème de Riemann-Roch arithmétique [18] [7] (dans sa version « à la Hirzebruch ») est le suivant :

Théorème 2.1 ([18], Th. 7). — *On a l'égalité entre nombres réels*
$$\hat\chi(\bar E) - \frac{1}{2}\, T(\bar E_{\mathbb{C}}) = \int_X \widehat{\mathrm{ch}}(\bar E)\, \widehat{\mathrm{Td}}(X) - \frac{1}{2} \int_{X(\mathbb{C})} \mathrm{ch}(E_{\mathbb{C}})\, \mathrm{Td}(TX(\mathbb{C}))\, R(TX(\mathbb{C}))\,.$$

Remarques. —

i) Si X est lisse sur $\mathbb{Z}$, $\widehat{\mathrm{Td}}(X)$ est la classe de Todd $\widehat{\mathrm{Td}}(TX, h_X)$. En général on la définit à l'aide du complexe tangent à X (cf. op. cit.). Elle dépend de la métrique h_X.
ii) La preuve du théorème 2.1 repose pour une large part sur les travaux d'analyse globale de Bismut et de ses collaborateurs, dont l'article [5].

3. THÉORÈME DE LEFSCHETZ ARITHMÉTIQUE

3.1. Soit $n > 1$ un entier et $G = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[T]/(T^n - 1))$ le schéma en groupes des racines n-ièmes de l'unité. Supposons donnée une action

$$\mu : G \times X \to X$$

de G sur une variété arithmétique X. On note $Y = X^G$ le schéma des points fixes de G. C'est aussi une variété arithmétique. Soit $\bar{E} = (E, h)$ un fibré hermitien sur X tel que l'action de G se prolonge à E et préserve la métrique h. L'action de G sur la restriction de E à Y équivaut à la donnée d'une graduation

$$E_{|Y} = \bigoplus_{u \in \mathbb{Z}/n} E_u$$

([16], Prop. 4.7.3). Si V est un ouvert de Y, l'action de G fournit en effet un morphisme de $\mathcal{O}_Y(V)$-modules :

$$\mu^* : E(V) \to E(V) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Z}[T]/(T^n - 1)\,.$$

Si $s \in E(V)$ on pose

$$\mu^*(s) = \sum_{u \in \mathbb{Z}/n} s_u \otimes T^u\,.$$

Le module $E_u(V) \subset E(V)$, $u \in \mathbb{Z}/n$, est celui des composantes s_u quand s décrit $E(V)$.

Les composantes $E_{u,\mathbb{C}}$ de la restriction de $E_{\mathbb{C}}$ à $Y(\mathbb{C})$ sont orthogonales pour la métrique h. On les munit de la métrique induite par h.

3.2. On fixe désormais une racine n-ième primitive de l'unité $\gamma \in \mathbb{C}^*$ et l'on note $g \in G(\mathbb{C})$ l'élément correspondant. Fixons une métrique de Kähler h_X sur $TX(\mathbb{C})$, invariante par G et F_∞. Pour tout entier $q \geq 0$, le G-module $H^q(X, E)$ définit une graduation

$$H^q(X, E) = \bigoplus_{u \in \mathbb{Z}/n} H^q(X, E)_u\,,$$

orthogonale pour la métrique L^2. On pose

$$\widehat{\deg}_g(H^q(X, E)) = \sum_{u \in \mathbb{Z}/n} \widehat{\deg}(H^q(X, E)_u, h_{L^2})\, \gamma^u$$

et

$$\hat{\chi}_g(\bar{E}) = \sum_{q\geq 0} (-1)^q \, \widehat{\deg}_g(H^q(X,E))\,.$$

On a aussi une décomposition orthogonale

$$A^{0q}(X(\mathbb{C}),E_{\mathbb{C}}) = \underset{u\in\mathbb{Z}/n}{\oplus} A^{0q}(X(\mathbb{C}),E_{\mathbb{C}})_u$$

et, si $\zeta_{q,u}(s)$ est la fonction zêta de la restriction de Δ_q à $A^{0q}(X(\mathbb{C}),E_{\mathbb{C}})_u$, on pose

$$T_g(\bar{E}_{\mathbb{C}}) = \sum_{q\geq 0} (-1)^{q+1} \, q \sum_{u\in\mathbb{Z}/n} \zeta'_{q,u}(0)\,\gamma^u\,.$$

Les nombres $\hat{\chi}_g(\bar{E})$ et cette *torsion analytique équivariante* $T_g(\bar{E}_{\mathbb{C}})$ sont des nombres complexes.

3.3. Soit $K = \mathbb{Q}(\gamma) \subset \mathbb{C}$ le corps cyclotomique des racines n-ièmes de l'unité. Le caractère de Chern équivariant de la restriction de $\bar{E}$ à Y est

$$\widehat{\mathrm{ch}}_g(\bar{E}) = \sum_{u\in\mathbb{Z}/n} \widehat{\mathrm{ch}}(\bar{E}_u)\,\gamma^u \in \widehat{\mathrm{CH}}^{\cdot}(Y)_K\,.$$

Désignons par $\Lambda^k(\bar{E})$, $k\geq 0$, les puissances extérieures de $\bar{E}$ et posons

$$\lambda_{-1}(\bar{E}) = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \, \Lambda^k(\bar{E})\,.$$

C'est un fibré hermitien virtuel, c'est-à-dire un élément du groupe abélien associé au monoïde des fibrés hermitiens, muni de la somme directe orthogonale. On note

$$\mathrm{ch}_g(\lambda_{-1}(\bar{E})) = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \, \widehat{\mathrm{ch}}_g(\Lambda^k(\bar{E}))\,.$$

Soit $\bar{N}^\vee$ le fibré conormal à Y dans X, muni de la métrique induite par h_X. On munit $TY(\mathbb{C})$ de la métrique h_Y induite par h_X et l'on note $\widehat{\mathrm{Td}}(Y) \in \widehat{\mathrm{CH}}^{\cdot}(Y)_{\mathbb{Q}}$ la classe de Todd arithmétique de (Y,h_Y) (cf. 2.6, Remarque i)). On pose

$$\widehat{\mathrm{Td}}_g(X) = \widehat{\mathrm{ch}}_g(\lambda_{-1}(\bar{N}^\vee))^{-1}\,\widehat{\mathrm{Td}}(Y)$$

dans $\widehat{\mathrm{CH}}^{\cdot}(Y)_K$.

On définit de même des classes

$$\mathrm{ch}_g(E_{\mathbb{C}}) = \sum_{u\in\mathbb{Z}/n} \mathrm{ch}(E_{u,\mathbb{C}})\,\gamma^u$$

et

$$\mathrm{Td}_g(TX(\mathbb{C})) = \mathrm{ch}_g(\lambda_{-1}(\bar{N}^\vee_{\mathbb{C}}))^{-1}\,\mathrm{Td}(TY(\mathbb{C}))$$

dans $\underset{p\geq 0}{\oplus} H^{pp}(Y_{\mathbb{R}})_K$.

3.4. La genre R possède également un analogue équivariant. Pour tout nombre complexe z de module un, considérons la fonction zêta de Lerch

$$\zeta(z,s)=\sum_{m\geq 1}\frac{z^m}{m^s}\,.$$

Cette série converge si $\mathrm{Re}(s)>1$, et admet un prolongement méromorphe au plan complexe. Si $\zeta'(z,s)$ est sa dérivée par rapport à s, on introduit les séries formelles

$$\tilde{R}(z,x)=\sum_{m\geq 0}\left(2\zeta'(z,-m)+\Big(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\Big)\zeta(z,-m)\right)\frac{x^m}{m!}$$

et

$$R(z,x)=\frac{1}{2}\,(\tilde{R}(z,x)-\tilde{R}(\bar{z},-x))\,.$$

On note $R(z,\cdot)$ la classe caractéristique additive en cohomologie complexe telle que, si $L_{\mathbb{C}}$ est un fibré holomorphe inversible on ait

$$R(z,L_{\mathbb{C}})=R(z,c_1(L_{\mathbb{C}}))\,.$$

La restriction de $TX(\mathbb{C})$ à $Y(\mathbb{C})$ admet une graduation

$$TX(\mathbb{C})_{|Y(\mathbb{C})}=\bigoplus_{u\in\mathbb{Z}/n}TX(\mathbb{C})_u\,,$$

et l'on pose

$$R_g(TX(\mathbb{C}))=\sum_{u\in\mathbb{Z}/n}R(\gamma^u,TX(\mathbb{C})_u)\,.$$

3.5.

Théorème 3.1 ([23], Th. 7.14). — *Sous les hypothèses précédentes, on a l'égalité entre nombres complexes*

$$\hat{\chi}_g(\bar{E})-\frac{1}{2}\,T_g(\bar{E}_{\mathbb{C}})=\int_Y\widehat{\mathrm{ch}}_g(\bar{E})\,\widehat{\mathrm{Td}}_g(X)-\frac{1}{2}\int_{Y(\mathbb{C})}\mathrm{ch}_g(E_{\mathbb{C}})\,\mathrm{Td}_g(TX(\mathbb{C}))\,R_g(TX(\mathbb{C}))\,.$$

Remarques. —

i) La preuve du théorème 3.1 utilise à nouveau des résultats analytiques difficiles de Bismut et de ses collaborateurs [2][6].

ii) Les constructions et les résultats précédents restent valables si, au lieu de $S=\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, on prend pour base S des variétés arithmétiques un ouvert dans le spectre des entiers d'un corps de nombres. La seule différence est que les théorèmes 2.1 et 3.1 sont alors des égalités dans les groupes $\widehat{\mathrm{CH}}^1(S)_{\mathbb{Q}}$ et $\widehat{\mathrm{CH}}^1(S)_K$ respectivement.

Si par exemple F est un corps de nombres et que l'on fixe un plongement complexe $F\subset\mathbb{C}$, on pourra prendre $S=\mathrm{Spec}(F)$ et noter $X(\mathbb{C})$ les points complexes pour le plongement choisi d'une variété X projective et lisse sur F. L'involution F_∞ agit trivialement sur $X(\mathbb{C})$ et l'intégration $\int_X$ associe à un couple $(0,g)$ de dimension zéro l'intégrale de $\frac{1}{2}g$ sur $X(\mathbb{C})$. Si $\mathcal{S}\subset\mathbb{R}$ est le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par les éléments $\log|\alpha|$, $\alpha \in F^*$, le théorème 2.1 est alors une égalité dans

$$\widehat{\mathrm{CH}}^1(S)_{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}/\mathcal{S}$$

et le théorème 3.1 est une égalité dans

$$\widehat{\mathrm{CH}}^1(S)_K = \mathbb{C}/\mathcal{C}\,,$$

où $\mathcal{C}$ est le K-espace vectoriel engendré dans $\mathbb{C}$ par les éléments $\log|\alpha|$, $\alpha \in F^*$.

4. PÉRIODES DES VARIÉTÉS À MULTIPLICATION COMPLEXE

4.1. Soient $n \geq 1$ un entier, et $F \subset \mathbb{C}$ un corps de nombres plongé dans les complexes. On suppose que F contient le corps cyclotomique $K = \mathbb{Q}(\mu_n)$ des racines n-ièmes de l'unité. Posons $G = \mathrm{Spec}(F[T]/(T^n - 1))$, choisissons une racine de l'unité n-ième primitive $\gamma \in \mathbb{C}^*$ et notons $g \in G(K)$ l'élément correspondant. Choisissons une métrique de Kähler G-invariante sur X ; soit $\bar{\Omega}$ le fibré hermitien des différentielles sur X. Maillot et Roessler ont eu l'idée d'appliquer le théorème de Lefschetz arithmétique (Théorème 3.1, Remarque ii)) au fibré hermitien virtuel $\lambda_{-1}(\bar{\Omega})$. À cause de la proposition suivante, son énoncé se simplifie considérablement :

Proposition 4.1. — *On a*

i) $T_g(\lambda_{-1}(\bar{\Omega}_{\mathbb{C}})) = 0$

ii) $\mathrm{ch}_g(\lambda_{-1}(\Omega_{\mathbb{C}}))\,\mathrm{Td}_g(TX(\mathbb{C})) = c^{\mathrm{top}}(TY(\mathbb{C}))$

iii) $\int_Y \widehat{\mathrm{ch}}_g(\lambda_{-1}(\bar{\Omega}))\,\widehat{\mathrm{Td}}_g(X) = 0$.

La classe $c^{\mathrm{top}}(TY(\mathbb{C}))$ est celle dont la restriction à toute composante de $Y(\mathbb{C})$ de dimension d est égale à $c_d(TY(\mathbb{C}))$. On déduit de la proposition 4.1 et du théorème 3.1 l'égalité

$$\hat{\chi}_g(\lambda_{-1}(\bar{\Omega})) = -\frac{1}{2}\int_{Y(\mathbb{C})} R_g(TX(\mathbb{C}))\,c^{\mathrm{top}}(TY(\mathbb{C})) \tag{3}$$

dans $\mathbb{C}/\mathcal{C}$. Seule la composante $R_g^{(0)}$ de degré zéro de R_g intervient dans l'intégrale. Cette formule montre que $\hat{\chi}_g(\lambda_{-1}(\bar{\Omega}))$ ne dépend pas du choix de la métrique h_X.

4.2. Le groupe de Galois $G_K = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ est canoniquement isomorphe à $(\mathbb{Z}/n)^*$ par l'application qui à $\sigma \in G_K$ associe l'élément $u \in (\mathbb{Z}/n)^*$ tel que

$$\sigma(\gamma) = \gamma^u\,.$$

Si à $u \in (\mathbb{Z}/n)^*$ on associe un des côtés de l'identité (3) où l'on a remplacé g par g^u, on obtient une fonction de $(\mathbb{Z}/n)^*$ à valeurs dans $\mathbb{C}/\mathcal{C}$. Nous allons calculer les transformées de Fourier sur $(\mathbb{Z}/n)^*$ de ces deux fonctions.

Soit

$$\chi : (\mathbb{Z}/n)^* \to S^1$$

un caractère de G_K, que nous supposerons primitif et impair. On prolonge χ par zéro à l'ensemble $\mathbb{Z}/n$ et l'on note aussi $\chi(m)$ l'image par χ de la classe modulo n de l'entier m. Soit

$$\tau(\chi) = \sum_{\sigma \in G_K} \sigma(\gamma)\, \chi(\sigma)$$

la somme de Gauss associée à χ et γ.

Pour tout $u \in \mathbb{Z}/n$, on définit comme suit des périodes

$$P_u(H^k(X)) \in \mathbb{C}^*/F^*\,.$$

Si $k \geq 0$ est un entier considérons la cohomologie de De Rham $H^k_{dR}(X)$. C'est un F-espace vectoriel, muni d'une action de G et donc d'une graduation

$$H^k_{dR}(X) = \bigoplus_{u \in \mathbb{Z}/n} H^k_{dR}(X)_u\,.$$

Le complexifié

$$H^k_{dR}(X)_u \underset{F}{\otimes} \mathbb{C} = H^k_B(X(\mathbb{C}), \mathbb{C})_u$$

admet une autre F-structure, à savoir la cohomologie de Betti (= cohomologie singulière) à coefficients dans F, notée $H^k_B(X(\mathbb{C}), F)_u$. Si v_{dR} est un générateur de la droite $\det_F H^k_{dR}(X)_u$ sur F et si v_B est un générateur de la droite $\det_F H^k_B(X(\mathbb{C}), F)_u$, l'élément $P_u(H^k(X)) \in \mathbb{C}^*/F^*$ est la classe du nombre complexe λ tel que

$$v_{dR} = \lambda\, v_B \tag{4}$$

dans $\det_{\mathbb{C}} H^k(X(\mathbb{C}), \mathbb{C})_u$. C'est une période au sens de [14], auquel on se réfèrera pour la comparaison des cohomologies.

Proposition 4.2. — *Dans $\mathbb{C}/\mathcal{C}$ on a l'égalité*

$$\sum_{\sigma \in G_K} \chi(\sigma) \sum_{p \geq 0, q \geq 0} (-1)^{p+q}\, \widehat{\deg}_{\sigma(g)} H^q(X, \Lambda^p\, \Omega) = -\tau(\chi) \sum_{k \geq 0} (-1)^k \sum_{u \in (\mathbb{Z}/n)^*} \overline{\chi(u)}\, \log |P_u(H^k(X))|\,.$$

4.3. Soit $L(\chi, s)$, $s \in \mathbb{C}$, la fonction L de Dirichlet de χ. Si $\mathrm{Re}(s) > 1$, elle est donnée par la série absolument convergente

$$L(\chi, s) = \sum_{m \geq 0} \frac{\chi(m)}{m^s}\,.$$

Posons $H^{pq}(X(\mathbb{C})) = H^q(X(\mathbb{C}), \Lambda^p\, \Omega_{\mathbb{C}})$.

Proposition 4.3. — *Dans $\mathbb{C}/\mathcal{C}$ on a l'égalité*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in G_K} \chi(\sigma) \int_{Y(\mathbb{C})} R_{\sigma(g)}(TX(\mathbb{C}))\, c^{\mathrm{top}}(TY(\mathbb{C})) \\ = \quad & \tau(\chi) \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{L'(\bar{\chi}, 0)}{L(\bar{\chi}, 0)} \sum_{u \in (\mathbb{Z}/n)^*} \sum_{p+q=k} p \dim_{\mathbb{C}} H^{pq}(X(\mathbb{C}))_u\, \bar{\chi}(u)\,. \end{aligned}$$

On déduit de l'égalité (3) pour $\sigma(g)$, $\sigma \in G_K$, et des propositions 4.1, 4.2 et 4.3 (où l'on remplace χ par son conjugué), le théorème suivant :

Théorème 4.4 ([29] Th. 1). — *Dans $\mathbb{C}/\mathcal{C}$ on a l'égalité*

$$\begin{aligned}&\sum_{k\geq 0}(-1)^k \sum_{u\in(\mathbb{Z}/n)^*} \chi(u)\log|P_u(H^k(X))|\\ = \;&\sum_{k\geq 0}(-1)^k \frac{L'(\chi,0)}{L(\chi,0)} \sum_{u\in(\mathbb{Z}/n)^*}\sum_{p+q=k} p\dim_{\mathbb{C}}(H^{pq}(X(\mathbb{C}))_u)\,\chi(u)\,.\end{aligned}$$

5. PREUVE DES PROPOSITIONS 4.1, 4.2 ET 4.3

5.1. Pour montrer la proposition 4.1, ii) et iii), on note d'abord que, si $\bar{E}'\oplus\bar{E}''$ est la somme directe orthogonale de deux fibrés hermitiens G-invariants sur X, on a

$$\widehat{\mathrm{ch}}_g(\lambda_{-1}(\bar{E}'\oplus\bar{E}'')) = \widehat{\mathrm{ch}}_g(\lambda_{-1}(\bar{E}'))\,\widehat{\mathrm{ch}}_g(\lambda_{-1}(\bar{E}''))\,. \tag{5}$$

Or le fibré $\bar{\Omega}$ est la somme directe orthogonale de $\overline{TY}$ et du fibré conormal $\bar{N}^\vee$. Par conséquent

$$\widehat{\mathrm{ch}}_g(\lambda_{-1}(\bar{\Omega})) = \widehat{\mathrm{ch}}_g(\lambda_{-1}(\bar{N}^\vee))\,\widehat{\mathrm{ch}}(\lambda_{-1}(\overline{TY}))\,. \tag{6}$$

Pour tout fibré hermitien $\bar{E}$ sur Y on a la formule

$$\widehat{\mathrm{ch}}(\lambda_{-1}(\bar{E})) = \frac{\hat{c}^{\mathrm{top}}(\bar{E}^\vee)}{\widehat{\mathrm{Td}}(\bar{E}^\vee)}\,. \tag{7}$$

En effet la formule (5) et le principe de scindage (dans sa version arithmétique) ramènent la preuve de cette identité au cas où $\bar{E}$ est de rang un, qui suit de la formule évidente

$$1-e^x = \frac{-x}{\mathrm{Td}(-x)}\,.$$

Il suit du paragraphe 3.3, de (6) et de (7) que

$$\widehat{\mathrm{ch}}_g(\lambda_{-1}(\bar{\Omega}))\,\widehat{\mathrm{Td}}_g(X) = \hat{c}^{\mathrm{top}}(\overline{TY})\,. \tag{8}$$

Sur une composante Y_0 de Y de dimension d, la classe $\hat{c}^{\mathrm{top}}(\overline{TY})$ est dans $\widehat{\mathrm{CH}}^d(Y_0)_{\mathbb{Q}}$. L'énoncé iii) de la proposition 4.1 suit donc du fait que l'intégration $\int_{Y_0}$ est nulle en degré autres que $d+1$ (cf. 2.1 et 3.5, Remarque ii)). La proposition 4.1, ii) suit de (8).

5.2. La proposition 4.1 i) est due à Ray et Singer si $n=1$ [31]. Posons

$$A^{pq} = A^{0q}(X(\mathbb{C}),\Lambda^p\,\Omega_{\mathbb{C}})\,.$$

La décomposition de Hodge

$$A^{pq} = \mathcal{H}^{pq}\oplus\partial(A^{p-1,q})\oplus\partial^*(A^{p+1,q})\,,$$

où $\mathcal{H}^{pq}$ désigne les formes harmoniques, implique que le cobord $\partial : A^{pq}\to A^{p+1,q}$ induit des isomorphismes

$$\partial^*(A^{p+1,q})\to\partial(A^{p,q})\,,$$

qui commutent à l'action de G et à celle du laplacien. Les valeurs propres de celui-ci sur ces deux espaces interviennent avec des signes opposés dans la définition de $T_g(\lambda_{-1}(\bar{\Omega}_{\mathbb{C}}))$, d'où l'énoncé.

5.3. Pour démontrer la proposition 4.2, on utilise d'abord l'identité

$$\sum_{\sigma \in G_K} \sigma(\gamma^u)\,\chi(\sigma) = \tau(\chi)\,\overline{\chi(u)} \tag{9}$$

(valable pour tout $u \in \mathbb{Z}/n$), pour en déduire

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma \in G_K} \chi(\sigma) \sum_{p,q} (-1)^{p+q}\, \widehat{\deg}_{\sigma(g)}\, H^q(X, \Lambda^p\,\Omega) \\
&= \sum_{k \geq 0} (-1)^k \sum_{u \in (\mathbb{Z}/n)^*} \widehat{\deg}(H^k_{dR}(X)_u) \left(\sum_{\sigma \in G_K} \sigma(\gamma)^u\,\chi(\sigma) \right) \\
&= \tau(\chi) \sum_{k \geq 0} (-1)^k \sum_{u \in (\mathbb{Z}/n)^*} \widehat{\deg}(H^k_{dR}(X)_u)\,\overline{\chi(u)}\,.
\end{aligned} \tag{10}$$

On compare ensuite $\widehat{\deg}(H^k_{dR}(X)_u)$ et $\log|P_u(H^k(X))|$, pour un choix convenable de h_X (rappelons que, d'après (3), la somme (10) ne dépend pas de h_X). Soit $[H] \in H^2_B(X(\mathbb{C}), K(1))$ la classe d'une section hyperplane de $X(\mathbb{C})$ (où $K(1)$ est le twist à la Tate). On supposera que $[H]$ est invariante par G et que $(2\pi i)^{-1}[H]$ est la classe $[\omega_0]$ de la forme ω_0 (cf. 2.3) dans $H^2_B(X(\mathbb{C}), \mathbb{C})$. Le cup-produit par $[H]$ vérifiant le théorème de Lefschetz vache, on peut définir un opérateur $* : H^k_B(X(\mathbb{C}), K) \to H^{2d-k}_B(X(\mathbb{C}), K(d))$ par les formules habituelles, avec $d = \dim_F(X)$ (cf. par exemple [21]). Le cup-produit par $(2\pi i)\,\omega_0$ sur les formes différentielles C^∞ complexes sur $X(\mathbb{C})$ vérifie aussi le théorème de Lefschetz vache, et l'opérateur $*$ associé à ce cup-produit vérifie (aux signes près) les mêmes formules que son analogue algébrique [37]. Si $\mathrm{tr}_B : H^{2d}_B(X(\mathbb{C}), K(d)) \to K$ est le morphisme trace en cohomologie de Betti [14], et si a, b sont les classes dans $H^k_B(X(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ de deux formes différentielles α et β, on a donc

$$\mathrm{tr}_B(a \cup *b) = \int_{X(\mathbb{C})} \alpha \wedge *\beta = \pm\, h_{L^2}(\alpha, \beta)(2\pi)^d\,.$$

Si v_{dR} et v_B sont des générateurs de $\det H^k_{dR}(X)_u$ et $\det H^k_B(X)_u$ respectivement on a donc, d'après (4),

$$\widehat{\deg}\,(H^k_{dR}(X), h_{L^2}) = -\log\|v_{dR}\|_{L^2} = -\log\|v_B\|_B - \log|\lambda| - \frac{db_u}{2}\log(2\pi)$$

où $\|\cdot\|_B$ est la norme sur $\det H^k_B(X(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ définie par $\mathrm{tr}_B(a \cup *b)$ (métrique de Hodge) et $b_u = \dim_F H^k_{dR}(X)_u$. Comme $\|v_B\|_B$ est dans F^* et $|\lambda| = |P_u(H^k(X))|$, on trouve que

$$\widehat{\deg}(H^k_{dR}, h_{L^2}) = -\log|P_u(H^k(X))| - \frac{db_u}{2}\log(2\pi) \tag{11}$$

dans $\mathbb{R}/\log|F^*|$. Le nombre b_u ne dépend pas de u, comme on le voit en faisant agir $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ sur les coefficients de $H_B^k(X(\mathbb{C}),\mathbb{C})$. La transformée de Fourier de la fonction constante $\frac{db_u}{2}\log(2\pi)$ est donc nulle en χ et la proposition 4.2 résulte de (10) et de (11).

5.4. Pour montrer la proposition 4.3 on remarque d'abord que, par définition (cf. 3.4),

$$R_g^{(0)}(TX(\mathbb{C})) = \sum_{u\in\mathbb{Z}/n} r_u(\zeta'(\gamma^u,0)-\zeta'(\gamma^{-u},0))\,, \tag{12}$$

où r_u est le rang du fibré $TX(\mathbb{C})_u$.

Comme χ est impair, on déduit de (6) que, si $\mathrm{Re}(s)>1$,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{\sigma\in G_K}(\zeta(\sigma(\gamma),s)-\zeta(\sigma(\gamma),s))\,\chi(\sigma) \\
=&\sum_{\sigma\in G_K}\zeta(\sigma(\gamma),s)\,\chi(\sigma) \\
=&\sum_{m\geq 1}\sum_{\sigma\in G_K}\frac{\sigma(\gamma)^m}{m^s}\,\chi(\sigma) \\
=&\ \tau(\chi)\sum_{m\geq 1}\frac{\bar{\chi}^{(m)}}{m^s} \\
=&\ \tau(\chi)\,L(\bar{\chi},s)\,.
\end{aligned} \tag{13}$$

Les égalités (12) et (13) impliquent

$$\sum_{\sigma\in G_F}\chi(\sigma)\,R_{\sigma(g)}^{(0)}(TX(\mathbb{C})) = 2\,\tau(\chi)\,L'(\bar{\chi},0)\left(\sum_{u\in\mathbb{Z}/n}\bar{\chi}(u)\,r_u\right). \tag{14}$$

Lemme — Dans $\mathbb{C}/\mathcal{C}$ on a l'égalité

$$\begin{aligned}
&\int_{Y(\mathbb{C})}\left(\frac{r_0}{2}+\sum_{\substack{u\in\mathbb{Z}/n\\ u\neq 0}}\frac{\gamma^u}{1-\gamma^u}\,r_u\right)c^{\mathrm{top}}(TY(\mathbb{C})) \\
=&\int_{Y(\mathbb{C})}\left(\sum_{p\geq 0}(-1)^p\,p\,\mathrm{ch}_g(\Lambda^p\,\Omega_{\mathbb{C}})\right)\mathrm{Td}_g(TX(\mathbb{C}))\,.
\end{aligned}$$

Preuve du Lemme — Pour tout fibré G-invariant $E_{\mathbb{C}}$ sur $Y(\mathbb{C})$, considérons le polynôme

$$\phi(E_{\mathbb{C}},t)=\sum_{p\geq 0}(-1)^p\,\mathrm{ch}_g(\Lambda^p\,E_{\mathbb{C}})\,t^p\,.$$

On a

$$\phi(E'_{\mathbb{C}}\oplus E''_{\mathbb{C}},t)=\phi(E'_{\mathbb{C}},t)\,\phi(E''_{\mathbb{C}},t)\,. \tag{15}$$

Si $E_{\mathbb{C}} = \bigoplus_j L_j$ est une somme directe de fibrés inversibles telle que g agit sur L_j par multiplication par $\gamma_j \in \mathbb{C}^*$, on a donc, en notant $\phi'(E_{\mathbb{C}}, t)$ la dérivée de $\phi(E_{\mathbb{C}}, t)$ par rapport à t,

$$\sum_{p\geq 0} (-1)^p \, p \operatorname{ch}_g(\Lambda^p E_{\mathbb{C}}) = \phi'(E_{\mathbb{C}}, 1) = \phi(E_{\mathbb{C}}, 1) \left(\sum_j \frac{\phi'(L_j, 1)}{\phi(L_j, 1)} \right) . \tag{16}$$

Si g agit sur un fibré inversible L par multiplication par γ on calcule, en posant $x = c_1(L)$,

$$\phi(L, t) = 1 - \gamma \, e^x \, t .$$

Par conséquent le terme de degré 0 de $\frac{\phi'(L,1)}{\phi(L,1)}$ est $-\frac{\gamma}{1-\gamma}$ si $\gamma \neq 1$, et $-\frac{1}{2}$ si $\gamma = 1$. On déduit donc de (16) que

$$\sum_p (-1)^p \, p \operatorname{ch}_g(\Lambda^p \, \Omega_{\mathbb{C}}) = -\phi(\Omega_{\mathbb{C}}, 1) \left(\frac{r_0}{2} + \sum_{u\neq 0} \frac{\gamma^u}{1-\gamma^u} \, r_u \right) .$$

D'après la proposition 4.1, ii), on sait que

$$\phi(\Omega_{\mathbb{C}}, 1) = \operatorname{Td}_g(TX(\mathbb{C}))^{-1} \, c^{\mathrm{top}}(TY(\mathbb{C})) ,$$

d'où le résultat.

Fin de la Preuve de la Proposition 4.3 — Si $z \neq 1$ on a $\zeta(z, 0) = \frac{z}{1-z}$. On déduit donc de (13) que

$$\sum_{\sigma \in G_K} \chi(\sigma) \, \frac{\sigma(\gamma)}{1 - \sigma(\gamma)} = \sum_{\sigma\in G_K} \chi(\sigma) \, \zeta(\sigma(\gamma), 0) = \tau(\chi) \, L(\bar{\chi}, 0) . \tag{17}$$

D'après un théorème de Dirichlet et l'équation fonctionnelle, ce nombre est non nul puisque χ est primitif et non trivial. Par ailleurs, la formule de Lefschetz pour les fibrés holomorphes implique

$$\begin{aligned} &\int_{Y(\mathbb{C})} \left(\sum_{p\geq 0} (-1)^p \, p \operatorname{ch}_g(\Lambda^p \, \Omega_{\mathbb{C}}) \right) \operatorname{Td}_g(TX(\mathbb{C})) \\ = \; &\sum_{u\in \mathbb{Z}/n} \sum_{p,q} (-1)^{p+q} \, p \, \dim_{\mathbb{C}} H^{pq}(X(\mathbb{C}))_u \, \gamma^u . \end{aligned}$$

La transformée de Fourier de cette identité et de celle du lemme montre donc, compte tenu de (17), de (13) et du fait que χ est nul en dehors de $(\mathbb{Z}/n)^*$,

$$\begin{aligned} &\int_{Y(\mathbb{C})} \sum_{u\in(\mathbb{Z}/n)^*} \bar{\chi}(u) \, r_u \, c^{\mathrm{top}}(TY(\mathbb{C})) \\ = \; &\frac{1}{L(\bar{\chi}, 0)} \sum_{u,p,q} (-1)^{p+q} \, p \dim_{\mathbb{C}}(H^{pq}(X(\mathbb{C})_u) \, \bar{\chi}(u) . \end{aligned} \tag{18}$$

La proposition 4.3 suit de (14) et de (18).

6. GÉNÉRALISATIONS DE LA FORMULE DE CHOWLA-SELBERG

6.1. Le théorème 4.4 montre que deux sommes alternées sur $k \geq 0$ sont égales. Maillot et Roessler conjecturent que cette identité est vraie terme à terme ([29], Conjecture A). Ils le démontrent dans certains cas :

THÉORÈME 6.1 ([29], Th. 1, Th. 2, Cor. 4.2 et Cor. 4.3). — *Si $k = 1$, si $k = 2$ et $\dim(X) = 2$, ou si X est une hypersurface de dimension $k \geq 1$, l'égalité suivante est vraie dans $\mathbb{C}/\mathcal{C}$:*

$$\begin{aligned}&\sum_{u\in(\mathbb{Z}/n)^*} \chi(u) \log |P_u(H^k(X))| \\ = \;& \frac{L'(\chi,0)}{L(\chi,0)} \sum_{u\in(\mathbb{Z}/n)^*} \sum_{p+q=k} (-1)^k \, p \dim_{\mathbb{C}}(H^{pq}(X(\mathbb{C}))_u) \, \chi(u) \,.\end{aligned}$$

6.2. L'égalité du théorème 6.1 étant compatible à la dualité de Poincaré, et triviale pour $k = 0$, il suffit de la montrer pour $k = 1$. On pourra alors supposer que X est une variété abélienne A sur F sur laquelle G agit par multiplication complexe (remplacer X par sa jacobienne). On sait alors que le cup-produit

$$\Lambda^k \, H^1_{dR}(A) \to H^k_{dR}(A)$$

est un isomorphisme. Si l'on choisit sur $A(\mathbb{C})$ la métrique de Kähler invariante par translation et de volume un, ces isomorphismes sont compatibles à la métrique L^2. Sachant que, si $\bar{M}$ et $\bar{N}$ sont des F-espaces vectoriels hermitiens, et si r est le rang de M,

$$\widehat{\deg}_g(\Lambda^k \, \bar{M}) = \frac{(r-1)!}{(r-k)!\,(k-1)!} \, \widehat{\deg}_g(\bar{M}) \,,$$

$$\widehat{\deg}_g(\bar{M} \oplus \bar{N}) = \widehat{\deg}_g(\bar{M}) + \widehat{\deg}_g(\bar{N})$$

et

$$\widehat{\deg}_g(\bar{M}^\vee) = -\,\widehat{\deg}_{-g}(\bar{M}) \,,$$

on peut calculer le terme gauche de l'égalité (3) quand $X = A$. On trouve ([29] Lemma 2.10 et p. 749)

$$\hat{\chi}_g(\lambda_{-1}(\bar{\Omega})) = -N \sum_{u\in\mathbb{Z}/n} \left(\frac{\gamma^u}{1-\gamma^u}\right) \widehat{\deg}(H^1_{dR}(A)_u) \,, \tag{19}$$

où

$$N = \prod_{u\in\mathbb{Z}/n} (1-\gamma^u)^{b_u} .$$

Les points fixes de l'action de G sur $A(\mathbb{C})$ sont en nombre fini, égal à N par le théorème de Lefschetz pour les fibrés holomorphes. Compte tenu de (12) on a donc

$$\int_{Y(\mathbb{C})} R_g(TX(\mathbb{C})) \, c^{\mathrm{top}}(TY(\mathbb{C})) = N \sum_{u\in\mathbb{Z}/n} r_u(\zeta'(\gamma^u,0) - \zeta'(\gamma^{-u},0)) \,. \tag{20}$$

Après transformation de Fourier sur $(\mathbb{Z}/n)^*$, il résulte de (3), (14), (19) et (20) que, si χ est un caractère primitif impair de $(\mathbb{Z}/n)^*$,

$$-L(\bar{\chi},0) \sum_{u\in(\mathbb{Z}/n)^*} \bar{\chi}(u)\,\widehat{\deg}(H^1_{dR}(A)_u) = 2\,L'(\bar{\chi},0)(\sum_{u\in(\mathbb{Z}/n)^*} \bar{\chi}(u)\,r_u\,).$$

Comme $r_u = \dim_{\mathbb{C}} H^{10}(X(\mathbb{C}))_u$, le théorème 6.1 résulte alors de (11).

6.3. Supposons que $n = p$ est un nombre premier ; soit $\Gamma(s)$ la fonction Gamma. Si $u \in (\mathbb{Z}/n)^*$ et si $k \geq 0$, on note $(p(u), q(u))$ le type de Hodge de la droite $\det(H^k(X(\mathbb{C}),\mathbb{C})_u)$. On peut trouver des nombres rationnels $\varepsilon(a)$, $a \in (\mathbb{Z}/n)^*$, tels que

$$p(u) = \sum_{a\in\mathbb{Z}/p} \varepsilon(a) \left[\frac{au}{p}\right],$$

où $[\cdot]$ désigne la partie entière ([13, 35], Lemme 6.12).

Corollaire ([29]) — Si $k = 1$, si $k = 2 = \dim(X)$, ou si X est une hypersurface de dimension k, pour tout $u \in (\mathbb{Z}/n)^*$ on a l'égalité dans $\mathbb{R}/(\mathbb{R} \cap \mathcal{C})$:

$$\log|P_u(H^k(X))| = \log\left|\prod_{a\in\mathbb{Z}/p} \Gamma\left(1 - \frac{a}{p}\right)^{\varepsilon(a/u)}\right|.$$

Remarques. —

i) Pour démontrer ce corollaire, Maillot et Roessler utilisent le théorème 6.1, une formule classique ([11], III.1.2.2) exprimant la dérivée logarithmique de $L(\chi, s)$ en $s = 0$ en termes de valeurs de $\Gamma(s)$ et la relation

$$P_u(H^k(X)) \cdot P_{-u}(H^k(X)) = (2\pi i)^k$$

dans $\mathbb{C}^*/F^*$, qui provient de la dualité de Poincaré et du théorème de Lefschetz vache.

ii) Une conjecture de Gross et Deligne ([19], p. 205) affirme que, pour tout entier $k \geq 0$, et tout $u \in (\mathbb{Z}/n)^*$, la période $P_u(H^k(X))$ est le produit de $\prod_{a\in\mathbb{Z}/p} \Gamma\left(1 - \frac{a}{p}\right)^{\varepsilon(a/u)}$ par un élément de $\bar{\mathbb{Q}}^*$. En dehors du cas des variétés abéliennes de type CM (i.e. $k = 1$), rien n'était connu avant ce corollaire.

iii) Quand $k = 1$, cette conjecture de Gross et Deligne est une généralisation démontrée par Gross [19] et Anderson [1] de la formule de Chowla-Selberg [12] concernant les périodes des courbes elliptiques de type CM. Colmez a rendu plus précis ce résultat en calculant la hauteur de Faltings des variétés abéliennes de type CM [11]. Dans [24], Th. 1.3, Köhler et Roessler utilisent leur théorème de Lefschetz arithmétique sur la base $S = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F[1/n])$ pour retrouver la formule de Colmez, à l'addition près d'un élément du K-espace vectoriel engendré dans $\mathbb{C}$ par les éléments $\log(p)$, où p est un diviseur premier de n.

iv) La preuve de [24] utilise un fibré ample hermitien inversible équivariant sur la variété A. Comme me l'ont fait remarquer Maillot et Roessler, les arguments de [29] présentés ci-dessus permettent aussi de retrouver la proposition 5.1 de [24] et d'éviter ainsi tout calcul de torsion analytique (comparer loc. cit. avec (3), (19) et (17)). On donnera en appendice un exemple où cette méthode conduit exactement à la formule de Chowla-Selberg.

7. COMPLÉMENTS

7.1. Comme $K \subset \mathbb{C}$, on peut identifier les éléments $u \in (\mathbb{Z}/n)^* = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ aux plongements complexes $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ et réécrire l'égalité du théorème 6.1 sous la forme

$$\sum_{\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}} \chi(\sigma) \log |P_\sigma(H^k(X))| = \frac{L'(\chi,0)}{L(\chi,0)} \sum_{\sigma} \sum_{p+q=k} (-1)^k \, p \dim_{\mathbb{C}}(H^{pq}(X(\mathbb{C}))_\sigma) \, \chi(\sigma)$$

dans $\mathbb{C}/\mathcal{C}$. Maillot et Roessler conjecturent que cette identité reste vraie quand on remplace $H^k(X)$ par n'importe quel motif défini sur F, à coefficients dans un corps K pas nécessairement abélien sur $\mathbb{Q}$, dont tous les plongements complexes se factorisent par F ([29], Conjecture A).

7.2. On peut étendre les théorèmes 2.1 et 3.1 à l'image directe par un morphisme $f : X \to Y$ entre deux variétés arithmétiques tel que l'application $X(\mathbb{C}) \to Y(\mathbb{C})$ induite par f soit une submersion ([18], [17], [38] ; pour la partie analytique, voir [2] et [6]). Maillot et Roessler en déduisent dans [30] des formules pour le caractère de Chern arithmétique sur Y de la cohomologie de De Rham relative. Celles-ci font intervenir la dérivée logarithmique de $L(\chi, s)$ en un entier s tel que $-\dim(Y/S) \leq s \leq 0$. Dans [22] Köhler étudie aussi cette situation et démontre un analogue arithmétique du principe de proportionalité d'Hirzebruch.

7.3. D'autres travaux portent sur la famille universelle de variétés abéliennes sur une variété de Shimura Y. Si Y n'est pas complète, il faut étendre la théorie d'intersection arithmétique en imposant à la forme ω de la formule [19] d'avoir des singularités logarithmiques à l'infini [8] [28] [10]. Dans ce contexte, Bost [9] et Kühn [28] ont montré que l'auto-intersection du dualisant relatif de la courbe elliptique universelle sur $X_0(N)$ est le produit de $2\,\zeta'(-1)+\zeta(-1)$ par $[SL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(N)]/2$. On ne sait pas pour l'instant interpréter leur formule par un théorème de Riemann-Roch arithmétique.

7.4. Des formules telles que celles évoquées en 7.2 et 7.3 résultent aussi des travaux de Kudla et de ses collaborateurs sur la généralisation en rang supérieur de la formule de Gross-Zagier [20] et la valeur au centre de symétrie des dérivées de fonctions L automorphes (voir [26], [27] et l'exposé [25] de ce séminaire). Gross m'avait signalé il y a longtemps qu'un multiple de $\zeta'(2)$ (i.e. $\zeta'(-1)$ par l'équation fonctionnelle) est présent dans ses calculs avec Zagier [20] ; on peut espérer qu'une variante du théorème 2.1 permettra d'aborder ces calculs différemment.

APPENDICE : UN EXEMPLE

Considérons la courbe elliptique E sur $\mathbb{Q}$ complétée de la courbe affine plane d'équation

$$y^2 = x^3 + 6\,.$$

Nous allons calculer la hauteur de Faltings géométrique de E. Soit $X \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}}$ le schéma projectif d'équation homogène

$$y^2\, z = x^3 + 6\, z^3\,.$$

C'est un modèle de E sur $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Le critère jacobien montre qu'il est lisse sur S en dehors des points fermés A et B de coordonnées $(0,0,1)$ dans la fibre de X sur $\mathbb{F}_2$ et $\mathbb{F}_3$ respectivement. On vérifie que X est un schéma régulier, et que x et y fournissent des paramètres locaux aux points A et B. L'ouvert $U = X - \{A, B\}$ est le modèle de Néron de E sur $\mathbb{Z}$ ([33], Cor. 9.1). Notons $i : S \to U$ sa section nulle et $i^*\,\Omega_U$ la restriction à l'origine du fibré des différentielles de U sur S. Le complexifié de $i^*\,\Omega_U$ est canoniquement isomorphe à l'espace $H^0(E(\mathbb{C}), \Omega_{\mathbb{C}})$ des différentielles holomorphes sur $E(\mathbb{C})$. On le munit du produit scalaire hermitien tel que la norme $\|\alpha\|$ d'une forme α soit donnée par la formule

$$\|\alpha\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{E(\mathbb{C})} |\alpha \wedge \bar{\alpha}|\,. \tag{A1}$$

Par définition ([17], [14] 1.2), la hauteur de Faltings de E sur $\mathbb{Q}$ est le degré du $\mathbb{Z}$-module inversible hermitien $\overline{i^*(\Omega_U)}$:

$$h(E/\mathbb{Q}) = \widehat{\deg}\,(\overline{i^*\,\Omega_U})\,. \tag{A2}$$

Si Δ est le discriminant minimal de E sur $\mathbb{Q}$, la hauteur géométrique de E ([14], loc. cit.) est donnée par la formule

$$h_{\mathrm{geom}}(E) = h(E/\mathbb{Q}) - \frac{1}{12} \log(|\Delta|) \tag{A3}$$

(on utilise ici [34] et le fait que E a potentiellement bonne réduction).

Soit ω le fibré dualisant relatif de X sur S, c'est-à-dire l'unique fibré inversible prolongeant Ω_U. Si $f : X \to S$ est le morphisme de définition de X on a

$$\omega = f^*\, i^*\, \Omega_U\,,$$

puisque c'est vrai sur U, et il suit de (A1), de (A2) et de la formule de projection que

$$h(E/\mathbb{Q}) = \widehat{\deg}(H^0(X, \omega), h_{L^2}) \tag{A4}$$

pour tout choix d'une métrique h_X sur $TX(\mathbb{C})$.

Le schéma en groupes $G = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[T]/(T^6 - 1))$ agit sur X. On suppose que h_X est F_∞ et G-invariante, on choisit la racine 6-ième primitive $\gamma = \exp(2\pi \mathrm{i}/6)$ dans $\mathbb{C}^*$ et on note $g \in G(\mathbb{C})$ l'élément correspondant. Il agit sur le point de coordonnées homogènes (x, y, z) par la formule

$$g(x, y, z) = (\gamma^2 x, -y, z)\,.$$

Le schéma Y des points fixes de G sur X a trois composantes : A, B et l'adhérence Y_0 dans X du point $(0,1,0)$ de E. On va appliquer le théorème 3.1 au fibré hermitien virtuel $\lambda_{-1}(\bar{\omega})$. Puisque la torsion analytique équivariante est nulle (Proposition 4.1, i)), le terme gauche de l'égalité du théorème 3.1 est

$$\text{(A5)} \qquad \hat{\chi}_g(\lambda_{-1}(\bar{\omega})) - \frac{1}{2} T_g(\lambda_{-1}(\bar{\omega}_{\mathbb{C}})) = \hat{\chi}_g(\lambda_{-1}(\bar{\omega})) = \hat{\chi}_g(\bar{\mathcal{O}}_X) - \hat{\chi}_g(\bar{\omega}_X)\,.$$

La dualité de Grothendieck montre que $H^1(X, \omega_X) = H^0(X, \mathcal{O}_X) = \mathbb{Z}$ et que $H^1(X, \mathcal{O}_X) = H^0(X, \omega_X)^\vee$. Si l'on choisit h_X pour que $E(\mathbb{C})$ ait volume 1, ces isomorphismes respectent les métriques. De plus, comme $\frac{dx}{y}$ est une différentielle invariante sur $E(\mathbb{C})$, l'action de g sur $H^0(X, \omega)_{\mathbb{C}}$ est la multiplication par γ^{-1}. Par conséquent

$$\text{(A6)} \qquad \hat{\chi}_g(\bar{\mathcal{O}}_X) - \hat{\chi}_g(\bar{\omega}_X) = (\gamma - \gamma^{-1})\, \widehat{\deg}(H^0(X, \omega), h_{L^2})\,.$$

Calculons maintenant le côté droit de l'identité du théorème 3.1. Puisque $Y_0 \to S$ est l'identité on a

$$\text{(A7)} \qquad \int_{Y_0} \widehat{\mathrm{ch}}_g(\lambda_{-1}(\bar{\omega}))\, \widehat{\mathrm{Td}}_g(X) = 0\,.$$

Par ailleurs, le fibré tangent à $A = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_2)$ est trivial, et, puisque x et y sont des paramètres de son anneau local dans X, la restriction à A du fibré conormal $N^\vee$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{F}_2$, où g agit avec les valeurs propres γ^2 et γ^3. On en déduit

$$\text{(A8)} \qquad \int_A \widehat{\mathrm{ch}}_g(\lambda_{-1}(\bar{\omega}))\, \widehat{\mathrm{Td}}_g(X) = \frac{1 - \gamma^{-1}}{(1-\gamma^2)(1-\gamma^3)} \log(2)$$

et, de même,

$$\text{(A9)} \qquad \int_B \widehat{\mathrm{ch}}_g(\lambda_{-1}(\bar{\omega}))\, \widehat{\mathrm{Td}}_g(X) = \frac{1 - \gamma^{-1}}{(1-\gamma^2)(1-\gamma^3)} \log(3)\,.$$

Soit χ le caractère quadratique de $\mathbb{Q}(\mu_6)$. D'après les propositions 4.1 ii) et 4.3, et la formule de [11], III.1.2.2, on a

$$\text{(A10)} \qquad -\frac{1}{2} \int_{Y(\mathbb{C})} \mathrm{ch}_g(\lambda_{-1}(\omega_{\mathbb{C}}))\, \mathrm{Td}_g(TX(\mathbb{C}))\, R_g(TX(\mathbb{C}))$$
$$= -\, i \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \log(\Gamma(1/3)/\Gamma(2/3)) - \frac{\sqrt{3}}{2} \log(3) - \frac{\sqrt{3}}{3} \log(2) \right).$$

Sachant que $y^2 = x^3 + 6$ est une équation de Weierstrass minimale globale de E ([32] p. 172), on calcule

$$\text{(A11)} \qquad \Delta = -2^6\, 3^5\,.$$

Il résulte du théorème 3.1 et de (A4) ... (A11) que

$$h_{\mathrm{geom}}(E) = -\frac{3}{2} \log(\Gamma(1/3)/\Gamma(2/3)) + \frac{1}{4} \log(3)\,,$$

conformément à la formule de Chowla-Selberg ([15], 1.5).

RÉFÉRENCES

[1] G. ANDERSON – Logarithmic derivatives of Dirichlet L-functions and the periods of abelian varieties. *Compositio Math.* **45**, No. 3, 315-332 (1982).

[2] J.-M. BISMUT – Equivariant immersions and Quillen metrics. *J. Differ. Geom.* **41**, No. 1, 53-157 (1995).

[3] J.-M. BISMUT – Holomorphic families of immersions and higher analytic torsion forms. *Astérisque* **244**, Paris: Société Mathématique de France, vii, 275 p. (1997).

[4] J.-M. BISMUT – Local index theory and higher analytic torsion. *Doc. Math.*, J. DMV Extra Vol. ICM Berlin 1998, Vol. I, 143-162 (1998).

[5] J.-M. BISMUT, G. LEBEAU – Complex immersions and Quillen metrics. *Pub. Math. IHÉS* **74**, 1-297 (1991).

[6] J.-M. BISMUT, X. MA – Holomorphic immersions and equivariant torsion forms. *J. reine angew. Math.* **575**, 189-235 (2004).

[7] J.-B. BOST – Théorie de l'intersection et théorème de Riemann-Roch arithmétiques. *Sém. Bourbaki*, Vol. 1990/91, Exp. 731, *Astérisque* **201-203**, 43-88 (1991).

[8] J.-B. BOST – Potential theory and Lefschetz theorems for arithmetic surfaces. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, Sér. 4, **32** no. 2, 241-312 (1999).

[9] J.-B. BOST – Intersection theory on arithmetic surfaces and L_1^2 metrics, lettre du 6/03/1998, non publiée.

[10] J.I. BURGOS, J. KRAMER, U. KÜHN – Cohomological Arithmetic Chow Rings. arXiv. math.AG/0404122.

[11] P. COLMEZ – Périodes des variétés abéliennes à multiplication complexe. *Ann. Math.* (2) **138**, No. 3, 625-683 (1993).

[12] S. CHOWLA, A. SELBERG – On Epstein's zeta-function. *J. reine angew. Math.* **227**, 86-110 (1967).

[13] P. DELIGNE – Applications de la formule des traces aux sommes trigonométriques. Sémin. géom. algébr. Bois-Marie, SGA 4 1/2, *Lect. Notes Math.* **569**, 168-232 (1977).

[14] P. DELIGNE – Hodge cycles on abelian varieties. (Notes by J.S. Milne) (English). Hodge cycles, motives, and Shimura varieties, *Lect. Notes Math.* **900**, 9-100 (1982).

[15] P. DELIGNE – Preuve des conjectures de Tate et de Shafarevitch [D'après G. Faltings]. *Sém. Bourbaki*, Vol. 1983/84, Exp. 616, *Astérisque* **121/122**, 25-41 (1985).

[16] M. DEMAZURE – Structures algébriques. Cohomologie des groupes. Dans *Séminaire de géométrie algébrique 3, 1962/64*, dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck. Schémas en groupes. I : Propriétés générales des schémas en groupes. Exposé 1. M. Demazure et A. Grothendieck eds., *Lect. Notes Math.* **151**, Berlin-Heidelberg-New York : Springer- Verlag. XV, 1-42, (1970).

[17] G. FALTINGS – Lectures on the arithmetic Riemann-Roch theorem: Princeton University Press (1992).

[18] H. GILLET, C. SOULÉ – An arithmetic Riemann-Roch theorem. *Invent. Math.* **110**, No. 3, 473-543 (1992).

[19] B.H. GROSS – On the periods of Abelian integrals and a formula of Chowla and Selberg. With an appendix by David E. Rohrlich. *Invent. Math.* **45**, 193-211 (1978).

[20] B.H. GROSS, D.B. ZAGIER – Heegner points and derivatives of L-series. *Invent. Math.* **84**, 225-320 (1986).

[21] S.L. KLEIMAN – Algebraic cycles and the Weil conjectures. Dix Exposés Cohomologie Schémas, *Advanced Studies Pure Math.* **3**, 359-386 (1968).

[22] K. KÖHLER – A Hirzebruch Proportional Principle in Arakelov Geometry. Dans *Number Fields and Function Fields - Two Parallel Worlds*, G. Van der Geer, B. Moonen, R. Schoof eds., *Progress in Mathematics* **239**, Boston-Basel-Berlin: Birkhäuser, 237-268 (2005).

[23] K. KÖHLER, D. ROESSLER – A fixed point formula of Lefschetz type in Arakelov geometry. I: Statement and proof. *Invent. Math.* **145**, No. 2, 333-396 (2001).

[24] K. KÖHLER, D. ROESSLER – A fixed point formula of Lefschetz type in Arakelov geometry. IV: The modular height of C. M. Abelian varieties. *J. reine angew. Math.* **556**, 127-148.

[25] S. KUDLA – Derivatives of Eisenstein series and generating functions for arithmetic cycles. *Sém. Bourbaki.* Vol. 1999/2000, Exp. 876, *Astérisque* **276**, 341-368 (2002).

[26] S. KUDLA, M. RAPOPORT – Arithmetic Hirzebruch Zagier cycles. *J. reine angew. Math.* **515**, 155-244 (1999).

[27] S. KUDLA, M. RAPOPORT, T. YANG – Modular forms and special cycles on Shimura curves, *Annals of Maths. Studies*, Princeton University Press, (2005).

[28] U. KÜHN – Generalized arithmetic intersection numbers. *J. reine angew. Math.* **534**, 209-236 (2001).

[29] V. MAILLOT, D. ROESSLER – Conjectures sur les dérivées logarithmiques des fonctions L d'Artin aux entiers négatifs. *Math. Res. Lett.* **9**, No. 5-6, 715-724 (2002).

[30] V. MAILLOT, D. ROESSLER – On the periods of motives with complex multiplication and a conjecture of Gross-Deligne. *Ann. Math.* **160**, 727-754 (2004).

[31] D.B. RAY, I.M. SINGER – Analytic torsion for complex manifolds. *Ann. Math.* (2) **98**, 154-177 (1973).

[32] J. SILVERMAN– The arithmetic of elliptic curves. Corrected reprint of the 1986 original. *Graduate Texts in Math.*, **106**, New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag.

[33] J. SILVERMAN – Advanced topics in the arithmetic of elliptic curves. *Graduate Texts in Math.*, **151**, New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag, (1994).

[34] J. SILVERMAN – Heights and elliptic curves. Dans *Arithmetic geometry (Storr, Conn. 1984)*. New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag, 253-265 (1986).

[35] C. SOULÉ – Hermitian vector bundles on arithmetic varieties. Kollár, János (ed.) et al., Algebraic geometry. Proceedings of the Summer Research Institute, Santa Cruz, CA, USA, July 9-29, 1995. Providence, RI: American Mathematical Society. *Proc. Symp. Pure Math.* **62** (pt.1), 383-419 (1997).

[36] C. SOULÉ, D. ABRAMOVICH, J.-F. BURNOL, J. KRAMER – Lectures on Arakelov geometry. *Cambridge Studies in Advanced Mathematics* **33**, Cambridge: Cambridge University Press. 177 p. (1992).

[37] R.O. WELLS – Differential analysis on complex manifolds. 2nd ed. *Graduate Texts in Math.* **65**. New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag., 260 p. (1980).

[38] Y. ZHA – A General Arithmetic Riemann-Roch Theorem. Thèse, Chicago University (1997), non publiée.

Christophe SOULÉ

I.H.É.S.
35 route de Chartres
F–91440 BURES-sur-YVETTE
E-mail : soule@ihes.fr