**Incohérence Physique et Mathématique du "modèle Janus-2019" de J. P. Petit et coll.**

Thibault Damour, IHES
28 décembre 2022

Dans le document "Sur le "modèle Janus" de J. P. Petit" (mis en ligne sur http://www.ihes.fr/˜damour le 4 Janvier 2019), j'avais expliqué en grand détail l'incohérence physique et mathématique de la version du modèle Janus publiée en 2014 par J. P. Petit and G. d'Agostini; c.a.d.

J. P. Petit. et G. d'Agostini, "Negative mass hypothesis in cosmology and the nature of dark energy", Astrophys. Space Sci DOI 10.1007/s10509-014-2106-5);

J. P. Petit, et G. d'Agostini, "Cosmological bimetric model with interacting positive and negative masses and two different speeds of light, in agreement with the observed acceleration of the Universe". Mod. Phys. Lett. A Vol. 29 (no 34) (2014) 145082.

Quelques mois plus tard (le 12 Mars 2019), j'ai reçu une lettre de J. P. Petit affirmant qu'il avait maintenant résolu l'incohérence (que j'avais signalée) de la version 2014 du modèle Janus dans un nouvel article:

Jean-Pierre Petit, Gilles D'Agostini and Nathalie Debergh [disons PDD19], " Physical and Mathematical Consistency of the Janus Cosmological Model (JCM)", Progress in Physics, **15**, issue 1, (2019) (http://www.ptep-online.com )[1].

Dans sa lettre du 12 mars 2019 (et dans un courriel ultérieur du 3 avril 2019) J. P. Petit affirmait qu'il avait corrigé l'une des incohérences que j'avais pointée du doigt par "une légère modification des seconds membres des équations Janus", et me demandait de modifier mon document du 4 janvier 2019 pour prendre en compte son travail de 2019. J'ai répondu à J. P. Petit dans un courriel d'avril 2019 en y disant que: "Dans votre dernier article, "Physical and Mathematical Consistency of the JCM" (January 2019), vous dites avoir corrigé l'incohérence (soulignée dans mon texte) du modèle Janus par "une légère modification des seconds membres des équations Janus". Mais, les sections 3 et 4 de votre article, loin de fournir une déduction bien définie d'une théorie modifiée cohérente, sont mathématiquement incohérentes, et conduisent, selon votre article lui-même, à une incohérence mathématico-physique."

Malgré cette réponse, il semble que ni J.P. Petit, ni ses collaborateurs n'ont apprécié l'incohérence mathématico-physique des équations de champ publiées dans leur article de 2019. Pour clarifier cette situation, je discute ci-dessous en détail les *incohérences* de la version 2019 du modèle Janus, en montrant aussi que d'autres incohérences encore plus graves (déjà signalées dans mon document de janvier 2019) s'appliquent aussi bien à la version 2019 du modèle Janus, qu'à sa version 2014.

Les équations de base qui sont censées définir "le modèle Janus-2019" concernent deux métriques (de signatures Lorentziennes $-+++$), $g^+_{\mu\nu}$ et $g^-_{\mu\nu}$, sur une même variété quadri-dimensionnelle, et sont [équations (40), (41) de PDD19]:

$$\begin{aligned} w_+ E^+_{\mu\nu} &= \chi(w_+ T^+_{\mu\nu} + w_- \varphi T^-_{\mu\nu})\,, \\ w_- E^-_{\mu\nu} &= -\chi(w_- T^-_{\mu\nu} + w_+ \varphi T^+_{\mu\nu}). \end{aligned} \tag{1}$$

[1] Notons en passant que la date exacte de publication de cet article n'est pas claire. Le volume 1 est étiqueté comme "January 2019". Cependant, le dernier article de ce volume, c.a.d."Non-commutativity: Unusual View", by Valeriy V. Dvoeglazov, est marqué comme " Submitted on February 18, 2019", ce qui est étrange pour un volume formellement publié en Janvier 2019. Quoiqu'il en soit, la première copie que j'ai reçue de ce travail m'a été envoyée par J. P. Petit le 12 mars 2019.

Ici: $E^{\pm}_{\mu\nu} = E_{\mu\nu}(g_{\pm}) = R^{\pm}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R^{\pm}g^{\pm}_{\mu\nu}$ dénote le tenseur d'Einstein (de $g_+$ ou $g_-$); $w_{\pm} \equiv \sqrt{-\det g_{\pm}}$; $\chi = +8\pi G/c^4$ (avec mes conventions); et les deux tenseurs sources $T^+_{\mu\nu}$ et $T^-_{\mu\nu}$ sont censés représenter, respectivement, l'énergie-impulsion de la matière ordinaire (dite à "masse positive"), et d'une nouvelle matière, dite à "masse négative". Les définitions (standard) de $T^+_{\mu\nu}$ (assurant sa conservation tensorielle par rapport à $g^+_{\mu\nu}$) et de $T^-_{\mu\nu}$ (assurant sa conservation tensorielle par rapport à $g^-_{\mu\nu}$) sont $w_+T^+_{\mu\nu} \equiv -2\delta S_{\text{matiere}+}/\delta g^{\mu\nu}_+$, et $w_-T^-_{\mu\nu} \equiv -2\delta S_{\text{matiere}-}/\delta g^{\mu\nu}_-$, où $S_{\text{matiere}+}$ dénote l'action de la matière ordinaire, et $S_{\text{matiere}-}$ l'action de la matière dite à "masse négative".

Finalement, la notation $\varphi$ dans les éqs. (1) n'est pas définie clairement dans PDD19. L' éq. (30) dit que $\varphi$ dénote la "matrice diagonale constante"

$$\varphi = \text{diag}[1, -1, -1, -1] \,. \tag{2}$$

Une telle définition briserait de façon violente la covariance des éqs (1) sous les difféomorphismes de la variété quadri-dimensionnelle sur laquelle vivent $g^+_{\mu\nu}$ et $g^-_{\mu\nu}$. Pour donner un sens covariant aux éqs (1) on supposera dans la suite (en accord avec la section 4 de PDD19) que l'action de $\varphi$ sur un tenseur $T^{\pm}_{\mu\nu}$ (supposé *diagonalisable par rapport à la métrique correspondante* $g^{\pm}_{\mu\nu}$) consiste à changer le signe des trois valeurs propres de $T^{\pm}_{\mu\nu}$ du type spatial. Autrement dit, par rapport à un co-repère diagonalisant $T^{\pm}_{\mu\nu}$, et orthonormé (par rapport à $g^{\pm}_{\mu\nu}$), $e^{\pm(0)}_{\mu} \equiv u^{\pm}_{\mu}$, $e^{\pm(1)}_{\mu}$, $e^{\pm(2)}_{\mu}$, $e^{\pm(3)}_{\mu}$ (où $u^{\pm}_{\mu}$ est du genre temps; $g^{\mu\nu}_{\pm}u^{\pm}_{\mu}u^{\pm}_{\nu} = -1$), tel que

$$T^{\pm}_{\mu\nu} = \rho^{\pm}c^2u^{\pm}_{\mu}u^{\pm}_{\nu} + \sum_{a=1}^{3} p^{\pm}_a e^{\pm(a)}_{\mu} e^{\pm(a)}_{\nu}, \tag{3}$$

l'action de $\varphi$ est définie par

$$\varphi T^{\pm}_{\mu\nu} = \rho^{\pm}c^2u^{\pm}_{\mu}u^{\pm}_{\nu} - \sum_{a=1}^{3} p^{\pm}_a e^{\pm(a)}_{\mu} e^{\pm(a)}_{\nu}. \tag{4}$$

Notons en passant que l'utilisation de l'opération $\varphi$ dans la "dérivation" des éqs de champ à partir de l'action (31) de PDD19 utilise des manipulations formelles qui sont mathématiquement injustifiées. Une autre incohérence mathématique de la dérivation des éqs de champ est contenue dans l'éq. (39) de PDD19, cad, $\delta g^{\mu\nu}_- = -\delta g^{\mu\nu}_+$. En effet, cette éq. affirme que les deux métriques ne peuvent pas être variées indépendamment. Mais, si c'est le cas, la variation de l'action ne pourra donner qu'une seule éq. de champ, qui serait la différence des deux équations (1). Une telle unique éq. de champ ne définirait alors pas un système permettant de déterminer les deux métriques, $g^+_{\mu\nu}$ et $g^-_{\mu\nu}$, à partir des deux sources $T^+_{\mu\nu}$ et $T^-_{\mu\nu}$. Dans la suite nous ne considérerons que les éqs de champ, Eqs. (1), avec la définition covariante ci-dessus de $\varphi$, éq. (4), en soulignant les incohérences physico-mathématiques auxquelles elles conduisent.

Une première incohérence concerne l'idée de base du modèle Janus (tel qu'il a été défini dans un cadre newtonien), c.a.d. le fait que, dans ce modèle, *les* *masses de même signe sont censées s'attirer, et les masses de signes opposés se repousser.*[2]

Considérons (essentiellement comme dans mon texte du 4 Janvier 2019) le cas où la matière comprend à la fois une source de fonds (générale) $T^{0+}_{\mu\nu}$ et $T^{0-}_{\mu\nu}$, et une source d'épreuve constituée (pour fixer les idées) d'une répartition continue de *"poussière" à masse positive*, c.a.d. $T^{1+}_{\mu\nu} = \rho^+_1 u^+_\mu u^+_\nu$.

Comme la "poussière" est un fluide à pression nulle, l'action de $\varphi$ sur $T^{1+}_{\mu\nu} = \rho^+_1 u^+_\mu u^+_\nu$ est équivalent à l'identité: $\varphi T^{1+}_{\mu\nu} = \rho^+_1 u^+_\mu u^+_\nu$. Nous pouvons donc appliquer les résultats correspondants de mon texte "Sur le "modèle Janus" de J. P. Petit". J'avais démontré dans ce texte [voir éqs (14) à (17)] que l'existence des *deux identités séparées de Bianchi* pour $E^+_{\mu\nu}$ et $E^-_{\mu\nu}$ impliquait (notamment) que le même champ (pris ici *covectoriel*) de quadrivitesse $u^+_\mu$ *devait satisfaire à la fois deux équations du mouvement différentes*. Explicitement, $\nabla^+$ dénotant la connexion définie par $g^+_{\mu\nu}$, et $\nabla^-$ celle définie par $g^-_{\mu\nu}$, l'unique champ de quadrivitesse $u^+_\mu$ doit satisfaire à la fois

$$u^+_\nu \nabla^{+\nu} u^+_\mu = 0\,, \tag{5}$$

et (avec le facteur $N \equiv \sqrt{-g^{-\mu\nu} u^+_\mu u^+_\nu}$ tel que $\frac{u^+_\mu}{N}$ est unitaire par rapport à $g^{-\mu\nu}$)

$$\frac{u^+_\nu}{N} \nabla^{-\nu} \left( \frac{u^+_\mu}{N} \right) = 0\,. \tag{6}$$

Prenons pour simplifier la limite newtonienne, dans laquelle (voir par ex. mon texte de Janvier 2019)

$$\begin{aligned} g^+_{00} &= -\left(1 - 2\frac{U}{c^2}\right)\ ;\ g^+_{ij} = +\left(1 + 2\frac{U}{c^2}\right)\delta_{ij}\,, \\ g^-_{00} &= -\left(1 + 2\frac{U}{c^2}\right)\ ;\ g^-_{ij} = +\left(1 - 2\frac{U}{c^2}\right)\delta_{ij}\,, \end{aligned} \tag{7}$$

où le potentiel quasi-newtonien $U^+ \equiv U$ dans la métrique $g^+_{\mu\nu}$ satisfait l'équation de Poisson de source $\rho^+ + \rho^-$ (avec $\rho^+ > 0$ et $\rho^- < 0$)

$$\Delta U = -4\pi G \frac{T^+_{00} + T^-_{00}}{c^2} = -4\pi G(\rho^+ + \rho^-). \tag{8}$$

A cause du signe moins dans la deuxième éq. (1), le potentiel quasi-Newtonien $U^-$ entrant dans la métrique $g^-_{\mu\nu}$ est $U^- = -U^+ = -U$ (voir la deuxième éq. (7)).

Les limites newtoniennes des deux éqs du mouvement (5) et (6), en prenant

[2] Le raisonnement ci-dessous complète et remplace le raisonnement correspondant dans la version du présent document datée du 12 décembre 2022.

l'indice (covectoriel) $\mu = i$, donnent alors[3], respectivement

$$
\begin{aligned}
\frac{dv^i_+}{dt} &= -c^2\Gamma^{+0}_{i0} = +\frac{1}{2}c^2\partial_i g^+_{00} = +\partial_i U\,, \\
\frac{dv^i_+}{dt} &= -c^2\Gamma^{-0}_{i0} = +\frac{1}{2}c^2\partial_i g^-_{00} = -\partial_i U\,.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

La première de ces équations implique qu'une masse d'épreuve positive est attirée par une masse-source positive et repoussée par une masse-source négative, alors que la deuxième de ces équations implique l'inverse: une masse d'épreuve positive doit aussi [comme conséquence nécessaire des éqs (1)] être repoussée par une masse-source positive et attirée par une masse-source négative. En refaisant ce raisonnement à partir d'une source d'épreuve constituée d'une répartition continue de *"poussière" à masse négative*, c.a.d. $T^{1-}_{\mu\nu} = \rho^-_1 u^-_\mu u^-_\nu$, on obtiendrait, mutatis mutandis, deux autres équations similairement contradictoires pour la variation de vitesse $\frac{dv^i_-}{dt}$ d'une masse d'épreuve négative. Ceci montre de façon frappante l'incohérence du modèle Janus (ici au niveau newtonien).

Une autre incohérence des éqs. (1) apparait quand on considère les analogues de l'équation de Tolman-Oppenheimer-Volkoff donnant la variation radiale de la pression d'une étoile de matière ordinaire (positive). Dans mon document précédent ("Sur le "modèle Janus" de J. P. Petit"), j'avais pointé du doigt que les équations de champ de Janus-2014 (qui différaient des éqs. (1) en ne contenant pas $\varphi$ dans les membres droits) donnaient deux équations pour la variation radiale de la pression dont les membres de droite différaient par leur signe. Plus précisément, Janus-2014 impliquait que la pression devait satisfaire (à la limite newtonienne) les deux équations incompatibles

$$
\begin{aligned}
p'_+ &= -G\rho_+\frac{M_+(r)}{r^2}\,, \\
p'_+ &= +G\rho_+\frac{M_+(r)}{r^2}\,.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Les auteurs de PDD19 ont cru corriger ce défaut fondamental de la théorie Janus en rajoutant le facteur $\varphi$, Eq. (2), apparaissant dans les membres droits de (1), dont l' effet est de changer le signe de $p_+(r)$ dans la deuxième équation (10). Il est vrai que cette modification élimine la violente contradiction entre les deux équations newtoniennes (10), en les replaçant par l'unique (et correcte) équation de structure newtonienne

$$
p'_+ = -G\rho_+\frac{M_+(r)}{r^2}\,. \tag{11}
$$

Quand on part des éqs de champ de Janus-2019, les analogues des équations de Tolman-Oppenheimer-Volkoff sont obtenues à partir des éqs. (1) en mettant

[3]Dans cette limite $u^+_i \approx \frac{v^i_+}{c}$ où $v^i_+$ dénote la vitesse newtonienne, le facteur $N = 1 + O(1/c^2)$ est négligeable, et seuls comptent les coefficients de connexion $\Gamma^{\pm 0}_{i0} \approx -\frac{1}{2}\partial_i g^{\pm}_{00}$.

$T^-_{\mu\nu}$ à zéro, et en résolvant les équations pour les deux métriques dans un cas où la source $T^+_{\mu\nu}$ est stationnaire et à symétrie sphérique. Ces solutions ont été écrites[4] dans les éqs. (45), (46) de PDD19, c-a-d (avec $' = d/dr$)

$$
\begin{aligned}
p'_+ &= -G\left(\rho_+ + \frac{p_+}{c^2}\right)\frac{M_+(r) + 4\pi p_+ r^3/c^2}{r(r - 2GM_+(r)/c^2)}\,, \\
p'_+ &= -G\left(\rho_+ - \frac{p_+}{c^2}\right)\frac{M_+(r) - 4\pi p_+ r^3/c^2}{r(r + 2GM_+(r)/c^2)}\,,
\end{aligned}
\tag{12}
$$

où $p_+(r)$ est la pression (de la matière ordinaire), $\rho_+(r)$ sa densité, et $M_+(r) = 4\pi\int_0^r drr^2\rho_+(r)$ est la masse (positive) contenue dans le rayon $r$.

Il est vrai que si l'on prend formellement la limite newtonienne $\frac{1}{c^2} \to 0$ dans les équations (12), ces deux équations deviennent compatibles, car elles deviennent toutes deux identiques à l'unique équation de structure newtonienne (11). Mais, il est *physiquement inacceptable* de négliger ainsi le fait que le modèle Janus-2019 prédit que *la variation radiale de la pression dans une étoile de matière ordinaire doit satisfaire deux équations incompatibles entre elles.* En effet, si l'on considère par exemple une étoile à neutrons, les termes relativistes supplémentaires dans (12), cad $\pm p_+/c^2$, $\pm 4\pi p_+ r^3/c^2$, et $\pm 2GM_+(r)/c^2$, sont numériquement très significatifs (de l'ordre de 10%), et conceptuellement très importants car ils modifient grandement la valeur de la masse maximum d'une étoile à neutrons. Comme il est rappelé dans l'éq. (10), les analogues des équations (12) dans Janus-2014 avaient des membres droits qui différaient d'environ 200%. La modification ($\varphi$) introduite dans Janus-2019 a simplement formellement réduit la différence des membres de droite qui était de 200% à, disons, environ 20% (pour une étoile à neutrons). Cela ne change rien à *l'incohérence mathématique fondamentale* que le modèle Janus-2019 prédit que la variation radiale de la pression dans une étoile de matière ordinaire *doit satisfaire deux équations mathématiquement (et physiquement) incompatibles entre elles.*

CONCLUSION: Les équations de champ de la version 2019 du "modèle Janus", Eqs. (1), n'ont aucune dérivation logique d'un principe variationnel covariant, et sont mathématiquement et physiquement contradictoires. Ces incohérences apparaissent à la fois à l'approximation newtonienne [voir éqs. (9)], et au niveau post-newtonien [voir éqs. (12)]. Comme je l'avais déjà indiqué dans ma lettre du 12 mars 2014 à J. P. Petit l'origine de ces incohérences est "qu'il y a a priori une incompatibilité entre les deux identités de Bianchi" satisfaites par $E^+_{\mu\nu}$ et $E^-_{\mu\nu}$.

[4] En fait, la solution donnée par (46) n'est pas exacte car les auteurs on négligé le facteur $w_+/w_-$ devant le terme $\varphi T^+_{\mu\nu}$ dans l'équation pour la métrique $g^-_{\mu\nu}$. Mais la version correcte de l'équation (46) implique toujours une forme légèrement modifiée de la contradiction discutée ci-dessous.