

Spéculation et narration en mathématiques

par Laurent Lafforgue¹

Le sujet de cette conférence m'a été inspiré par deux pages du jeune philosophe français Fabrice Hadjadj publiées dans un livre d'entretien récent, « *L'héritage et la promesse* »².

Interrogé sur la question essentielle de l'articulation entre la théologie et les sciences, Fabrice Hadjadj répond que « *si la science nous apparaît si éloignée de la foi, ce n'est pas tant à cause de la distance prétendument infranchissable entre l'expérimentation et la croyance, que parce que la « vérité » telle que la conçoivent le plus souvent les sciences évacue le nom propre, rejette l'existence concrète, ignore la rencontre.* » « *La vérité tend à être conçue comme un voir, et non pas comme un vivre. Connaître la vérité serait se tenir dans la position de spectateur dominant son objet. En ce sens, la technologie contemporaine, la télévision, le virtuel, seraient issus de ce concept de vérité, où la vue prime sur la vie. On pourrait dire que c'est un concept de vérité qui n'est pas nuptial mais pornographique : on veut voir l'amour être fait, éventuellement le faire, mais pas le vivre. Pour que la vérité soit nuptiale, il faut qu'elle corresponde à une étreinte : je dois renoncer à ma position de spectateur invulnérable pour aller à la rencontre de quelqu'un.* »

La parole inouïe du Christ à Thomas – « *Moi, je suis le chemin, la vérité et la vie.* » (Jn 14,6) – révèle en effet que « *la vérité ne se trouve pas dans des termes généraux, dans ce que l'on pourrait appeler des propositions anonymes, non, la Vérité est une personne, avec sa singularité, avec ce Nom propre dont Pierre déclare : « Aucun autre nom sous le ciel n'est offert aux hommes par lequel il faut que nous soyons sauvés. » (Ac 4,12)* »

C'est pourquoi, dit Fabrice Hadjadj, « *l'approche de la vérité, en théologie, exige toujours une démarche à la fois spéculative et narrative, elle tient toujours de la science et de la biographie. Or, pour nous, biographie et science ont été séparés, spéculation et narration ont été perçues comme contraires.* »

L'intuition que nous avons de l'existence de la vérité et de son unité doit donc nous

¹ Mathématicien, professeur à l'Institut des Hautes Études Scientifiques

² Mgr Dominique Rey et Fabrice Hadjadj, propos recueillis par Serge Sarkissian, Onésime 2000 éditions, avril 2011.

amener à envisager les sciences du point de vue proposé par Fabrice Hadjadj : Sont-elles exclusivement spéculatives selon la représentation courante que nous nous en faisons, ou bien sont-elles également narratives et donc plus proches du schéma de la Révélation que ce que l'on en pense généralement ? Sont-elles exclusivement théoriques – c'est-à-dire, au sens étymologique, visuelles – ou bien sont-elles aussi des expériences de vie ? Sont-elles totalement impersonnelles ou bien consistent-elles au moins en partie en des rencontres de personnes ?

Parmi les sciences, il est particulièrement naturel de considérer les mathématiques puisqu'elles apparaissent a priori comme la plus spéculative, la plus théorique et la plus impersonnelle de toutes, et que, d'autre part, elles fournissent les modèles de la physique moderne et, dans une moindre mesure, des autres sciences. Le mathématicien que je suis croit donc qu'il n'est pas illégitime pour lui de parler de sa science devant des philosophes et des représentants des autres champs du savoir et – car c'est bien de cela qu'il s'agit – d'interroger le rapport de cette science singulière avec la vérité.

Demandons-nous d'abord quelles réflexions se ferait une personne complètement étrangère aux mathématiques à qui, pour la première fois de sa vie, l'on ferait visiter un département universitaire ou un institut de recherche consacrés à cette discipline.

La première réflexion qui s'imposerait à l'esprit de cette personne après sa visite serait certainement que, dans un centre de mathématiques, il n'y a « rien à voir » : autrement dit, aucun équipement expérimental spectaculaire, aucun objet sortant du commun qui pourrait éveiller la curiosité et l'intérêt, rien que des couloirs, des bureaux, des salles et des amphithéâtres uniquement meublés de chaises, de tables et de sièges, des tableaux noirs ou parfois blancs, des ordinateurs et des claviers comme on en voit aujourd'hui partout, des livres rangés sur des étagères, quelques imprimantes ou photocopieuses, des papiers imprimés, du papier blancs et des stylos.

En réfléchissant un peu plus, le visiteur se dirait peut-être aussi que non seulement tous les objets aperçus sont d'apparence commune et dépourvue d'intérêt mais aussi que leur volume est faible. En comparaison de la plupart des lieux d'activité sociale – comme le commerce, les transports, l'industrie, la construction, l'artisanat, les hôpitaux, la police, l'armée – les lieux mathématiques lui apparaîtraient présenter une proportion inhabituellement beaucoup plus grande de personnes que d'objets matériels. Seuls les lieux d'enseignement – écoles et lycées – et ces autres lieux d'activité abstraite et spéculative que sont les banques et les compagnies d'assurance lui paraîtraient présenter une apparence à peu près semblable : rien que des objets communs, d'ailleurs en faible volume, et en proportion beaucoup de visages.

Ce n'est d'ailleurs pas seulement que les lieux mathématiques ressemblent à des lieux d'enseignements : ils en sont pour une large part. Notre visiteur pourrait assister à des cours et, s'il le faisait, il serait frappé d'abord et avant tout par le fait qu'il ne comprendrait rien, que toutes les phrases prononcées seraient tissés de mots dont il

ignore le sens ou, plus intrigant encore, de mots qui lui sont familiers dans le langage courant mais qui, dans le contexte des phrases prononcées ou écrites au tableau, deviennent incompréhensibles par lui. Il pourrait également assister à des séminaires c'est-à-dire à des séances qui ressemblent à des cours mais où, comme il le verrait, des mathématiciens enseignent non pas à des étudiants mais à d'autres mathématiciens, autre motif de surprise et d'interrogation.

Si, faute de rien voir d'intéressant, le visiteur cherchait à surprendre dans toutes leurs activités les personnes qui meublent les lieux mathématiques de leur présence, il pourrait assister encore à des conversations informelles entre mathématiciens – et constater alors, non peut-être sans éprouver une certaine terreur, qu'il paraît naturel à ces personnes de prononcer sur un ton familier des phrases pas moins obscures que celles des cours et exposés de séminaires. Il pourrait aussi observer dans les bureaux de nombreuses personnes occupées à lire – lire des livres ainsi que des textes imprimés ou reliés dans des volumes que ces personnes appellent étrangement des fascicules de journaux – ou bien à écrire soit sur un clavier soit au stylo. En dernier lieu, il pourrait surprendre quelques personnes apparemment perdues dans des pensées encore plus mystérieuses que tout le reste.

Bref, le visiteur conclurait que les lieux mathématiques sont meublés principalement de personnes occupées à parler et écouter en groupes grands ou petits, ou bien à lire, écrire ou réfléchir seules.

Les mathématiciens s'apparentent-ils donc à des écrivains, à des journalistes, à des orateurs, à des militants qui adhèrent à des discours qu'ils entendent, ou encore à des amis qui refont le monde en devisant au comptoir d'un café ?

Pour tenter de répondre à ces questions, pas d'autre moyen que d'interroger le contenu des cours, des exposés, des conversations, des journaux et des livres des mathématiciens. Que racontent-ils donc dans leurs paroles profuses et leurs écrits fleuves, que s'expriment-ils les uns aux autres, et qu'expriment-ils à eux-mêmes quand ils réfléchissent ?

Ainsi notre visiteur devrait-il s'aventurer à ouvrir les articles et les livres que les mathématiciens écrivent et lisent.

Même s'il n'y comprenait un traître mot, il serait frappé par l'apparence très structurée et organisée que possèdent ces textes : ils sont décomposés en parties, chapitres, paragraphes et sous-paragraphes dont chacun a un titre ou tout au moins un numéro d'ordre et d'identification. De plus, ils comportent des énoncés clairement identifiés par des appellations telles que « définition », « lemme », « proposition », « théorème », et eux-mêmes numérotés, ainsi que des développements bien encadrés introduits par les mots « notation », « démonstration », « remarque », etc. Le visiteur remarquerait encore que ces textes sont criblés de références internes et externes et que ces références obéissent à une règle simple : elles renvoient pratiquement toujours à des

passages du texte qui sont situés plus haut, c'est-à-dire qui les précèdent dans la lecture, et à des articles ou livres qui avaient été publiés antérieurement.

Notre visiteur des mathématiques serait donc amené à observer que chaque texte mathématique ressemble à une marche, à un chemin, comme s'il racontait une histoire dans un ordre chronologique et, de plus, comme si l'histoire spécifique qu'il semble raconter s'inscrivait dans une marche générale de la science mathématique et dans l'histoire de cette marche.

Cependant, le visiteur ferait nécessairement une autre remarque qui semble s'opposer à la précédente : Alors même que tout texte a la structure d'un récit et qu'il se relie explicitement au récit plus vaste que paraissent constituer les mathématiques dans leur ensemble, il est exclusivement rédigé au présent. Comme si c'était un récit sans événements, ou plutôt le récit d'événements qui se situeraient en dehors ou en-deçà du temps.

Notre visiteur comprendrait alors que les textes mathématiques sont inscrits dans le temps de l'écriture et de la lecture ainsi que dans celui des publications, mais que la structure temporelle de leur récit discursif si bien ordonné reflète une structure intemporelle de ce dont ils font le récit – une structure intemporelle qui n'est autre que la structure logique des mathématiques. Les textes déploient dans le temps de la lecture linéaire et des publications datées avec soin les chaînes des implications logiques qui forment le tissu des raisonnements déductifs constitutifs des mathématiques.

Par la progression linéaire des récits singuliers qu'ils développent chacun et du vaste récit qu'ils composent tous ensemble, les textes mathématiques exposent les implications logiques comme s'ils s'agissait de causes et d'effets s'enchaînant dans le temps, comme si la logique était une forme du principe de causalité, comme si structure logique et structure temporelle s'identifiaient. Mais, par leur recours exclusif au présent des verbes, ils signifient que, dans son essence, la logique mathématique n'est pas tributaire du temps.

Et pourtant, pourrait songer notre visiteur, tout texte mathématique est bel et bien situé dans le temps : il ne fait pas qu'inscrire une structure logique dans le temps d'un récit, il est lui-même inscrit dans le temps des hommes en tant que moment et étape de la longue histoire de la science à laquelle il appartient. L'essentiel des concepts, résultats et méthodes qui le composent ou le rendent possible sont empruntés à d'autres articles ou livres, et à d'autres mathématiciens, ancêtres ou contemporains de son auteur. Tout texte mathématique est à la fois récit, c'est-à-dire forme temporelle, d'une réalité mathématique intemporelle, et point de suspension – entre passé et avenir – d'une histoire de la science mathématique dans le temps de laquelle il s'inscrit. Cette double identité des textes mathématiques se manifesterait d'ailleurs particulièrement aux yeux de notre visiteur dans l'utilisation de très nombreux noms de mathématiciens pour désigner des objets ou des résultats mathématiques, une autre manière de lier la substance intemporelle des mathématiques et leur histoire faite par les hommes.

Notre visiteur attentif pourrait découvrir encore que les textes mathématiques oscillent entre, d'un côté, l'emploi dans de nouveaux raisonnements de méthodes, de concepts et de résultats antérieurs afin de résoudre des problèmes posés depuis un temps certain et, de l'autre côté, le développement de nouvelles méthodes, l'introduction de nouveaux concepts, l'exploration de nouvelles terres, la formulation de nouveaux énoncés dont la démonstration vient dans la foulée ou proposés à titre de conjectures. Chacun de ces deux modèles pourrait alors lui apparaître comme à la fois narratif et spéculatif, mais d'une manière inversée : Le modèle de l'utilisation dans de nouveaux raisonnements de théories établies pour démontrer des résultats reconnus s'inscrit plus harmonieusement dans l'histoire des mathématiques dont il illustre, récapitule et, en quelque sorte, raconte à nouveau une page. Mais il est plus spéculatif du point de vue de la substance des mathématiques puisqu'il consiste à résoudre des problèmes donnés en remontant la chaîne de leurs causes, des implications qui les entraînent. Au contraire, le modèle de la découverte et du développement de théories nouvelles est plus spéculatif du point de vue de l'histoire des mathématiques, puisqu'il revient à remonter aux sources de théories anciennes pour suivre à partir de ces sources un autre chemin, mais il est plus narratif du point de vue de la substance des mathématiques, puisqu'il descend les chaînes de causes comme l'eau descend le lit d'une rivière.

Les textes mathématiques qui développent ou exposent une théorie ressemblent en effet à des narrations, plus précisément à des récits de voyage. Le caractère nécessairement entièrement discursif de la parole et de l'écriture empêche de présenter une théorie entière en un tableau : il faut suivre lentement ses voies, traverser ses carrefours, visiter un à un ses villes, ses quartiers, ses places et ses bâtiments.

Notre visiteur non encore habitué pourrait enfin se demander si les textes mathématiques comportent des événements en les récits qu'ils déroulent. Du point de vue de l'histoire des mathématiques, c'est certainement le cas, conclurait-il rapidement : la résolution d'un vieux problème ou l'apparition d'un nouveau concept constituent des événements historiques. Mais du point de vue de la substance des mathématiques, existe-t-il des événements ? S'il est vrai que les mathématiques sont en dehors du temps, peut-il s'y passer quelque chose ? Sans doute notre visiteur se garderait-il de répondre trop vite à une question aussi étrange. Il se contenterait de noter qu'il arrive souvent aux mathématiciens, lorsqu'ils racontent telle ou telle théorie ou démonstration, d'employer une expression telle que : « Ici, quelque chose se passe. » Comme si un énoncé frappant, une simplification inattendue, un résultat de calcul, donnaient à ces mathématiciens le sentiment de franchir un seuil, de passer d'un paysage à un autre, d'ouvrir un nouvel horizon.

Mais s'il est vrai que les textes et les discours des mathématiciens ont, chacun pour sa part et tous ensemble, la forme de narrations, pour qui - s'interrogerait sans doute notre visiteur - les mathématiciens racontent-ils leurs récits ?

Aussi paradoxal que cela pourrait lui paraître étant donné le caractère manifestement si peu distrayant de ces récits et la difficulté qu'il y a à les comprendre, une réalité objective s'imposerait immédiatement à son esprit : les cours sont dispensés pour être suivis par des étudiants, les exposés de séminaire sont donnés pour être écoutés par des collègues, les conversations sont tenues pour partager une compréhension d'un mathématicien à un autre, les articles sont rédigés pour être publiés, enfin les journaux et les livres spécialisés paraissent pour être achetés - en particulier par des bibliothèques universitaires - et pour être lus par des mathématiciens.

Notre visiteur se demanderait alors quels désirs poussent les mathématiciens à enseigner à des étudiants, à donner des exposés à l'intention de collègues ou à leur parler de manière informelle, à écrire des articles ou des livres destinés à être publiés. Bien sur, il apprendrait que les institutions qui emploient les mathématiciens attendent d'eux - en échange des moyens de vivre qu'elles leur octroient - qu'ils donnent cours et exposés de séminaire, et qu'ils publient articles ou livres. Mais cette information ne ferait sans doute que déplacer sa question dans son esprit, pour la faire porter sur les années de jeunesse où se dessinent et se concrétisent les vocations de mathématicien : pourquoi donc des jeunes gens s'engagent-ils dans des carrières dont la réalité objective consistera pour eux à parler pour être écouté et à écrire pour être lu ? C'est évidemment que cette réalité correspond à des aspirations humaines profondes qui les habitent. Alors de quelles aspirations peut-il s'agir ?

Notre visiteur pourrait d'abord reconnaître dans la plupart des chercheurs en mathématiques - comme en toutes les disciplines universitaires - un avatar d'un désir très visible chez les enfants et qui, sans doute, reste présent chez les adultes bien que de manière plus caché : le désir de se sentir confirmé par les autres, d'attirer leur attention et de recueillir leur approbation de ce que l'on fait, ressenti en partie comme une approbation de ce que l'on est. Autrement dit, le besoin d'être aimé, plus ou moins dénaturé et brouillé par l'illusion tenace qu'il serait possible de conquérir l'amour par des mérites. Les jeunes enfants quêtent en effet chaque jour l'approbation de leurs parents pour ce qu'ils font ; pour grandir ils ont besoin de sentir le regard de bienveillance et de soutien que ceux-ci portent sur eux. Plus tard et parallèlement, le désir de recueillir un jugement positif de leurs instituteurs et professeurs constitue pour les élèves l'un de leurs plus puissants motifs d'étudier avec application. Notre visiteur, découvrant le monde des mathématiques, ne manquerait pas de rapprocher cette réalité bien connue du cœur humain de l'importance des honneurs petits et grands qui accompagnent la vie universitaire et des notions de prestige qui s'attachent à certains lieux, à certains noms, à certaines institutions, à certaines revues, etc.

Ce constat pourrait amener notre visiteur à interpréter l'obligation, dans laquelle

les mathématiciens et autres chercheurs universitaires se sont placés, de chercher à être écoutés et lus, comme le signe d'un manque de maturité.

A moins qu'il ne réalise aussi qu'une autre aspiration humaine très profonde cohabite chez les chercheurs avec la précédente et, dans les coeurs les plus purs, la domine : l'aspiration à partager. Autrement dit, le besoin de témoigner aux autres une forme d'amour en partageant avec eux des biens objectivement précieux que l'on possède ou que l'on espère être en mesure de découvrir et de faire connaître. Les hommes savent au fond de leur coeur qu'il y a plus de bonheur à donner qu'à recevoir. Pour les mathématiciens, pas d'autre don possible que la parole et l'écrit mathématiques et donc, penserait le visiteur, pas de vrai bonheur envisageable si le contenu de leurs narrations mathématiques n'était pas susceptible de posséder une grande valeur. Les mathématiciens composent nécessairement leurs articles et leurs livres, c'est-à-dire leurs récits de voyages mathématiques, dans la pensée que les contrées que ces pays décrivent sont belles et dignes d'être connues et visitées par d'autres. Ils sont poussés par le désir de faire connaître et aimer des chemins et des paysages mathématiques dont ils découvrent la richesse et la splendeur, comme on est heureux d'inviter des amis dans un pays aimé et d'essayer de partager avec eux ce que la connaissance de ce pays nous donne.

Mais notre visiteur ne tarderait pas à observer que les efforts des mathématiciens pour partager avec d'autres ce qu'ils découvrent de vérité et de beauté se heurtent à des difficultés et des déceptions semblables à celles dont on fait souvent l'épreuve quand on invite des amis chers dans une contrée familière où tout parle à notre coeur mais pas au leur. A notre époque particulièrement, les mathématiciens semblent s'éloigner à grande vitesse les uns des autres et, si le nombre des articles et livres publiés ne cesse d'augmenter, celui des lecteurs effectifs de presque tous ces articles ou livres ne cesse certainement de diminuer.

Les mathématiciens développent leurs narrations dans l'espoir de partager, c'est-à-dire de vivre par les mathématiques une forme d'amour de leurs frères humains ; mais la plupart connaissent le malheur secret que le fruit des travaux de leur esprit n'éveille pas de véritable intérêt, comme s'ils parlaient et écrivaient dans un désert sans oreilles et sans yeux. Même les mathématiciens les plus en vue, ceux dont les exposés et les écrits sont attendus, écoutés et lus, et qui suscitent d'autres travaux, ne sont pas à l'abri du doute sur eux-mêmes et du désespoir si la conscience leur vient que, dans les marques de respect et d'admiration dont on les entoure, la fascination pour la gloire mondaine et pour la force, voire la jalousie, domine et supprime l'amour partagé de la vérité.

Notre visiteur pourrait d'ailleurs poser aux mathématiciens qu'il rencontre la question redoutable de savoir s'ils préfèrent lire ou écrire des mathématiques. A en juger par le flot toujours croissant d'articles proposés aux comités d'édition des revues et par la difficulté tout aussi croissante que ces comités rencontrent pour trouver des relecteurs des articles qui leur sont soumis, notre visiteur s'entendrait sans doute répondre par la

plupart des mathématiciens qu'ils préfèrent écrire des mathématiques. Et c'est humainement bien normal puisque, songerait le visiteur, il y a plus de joie à donner qu'à recevoir.

Cette réalité touchée du doigt amènerait alors le visiteur à se demander si écrire une narration mathématique destinée à être lue est bien une forme de don aux autres mathématiciens, s'il apparaît que ceux-ci, finalement, ne sont pas tellement intéressés par la lecture. Et si écrire des narrations mathématiques représente un don dont la valeur pour les autres apparaît discutable, alors pourquoi écrire ?

Peut-être écrire pour soi-même ?

Notre visiteur observerait en tout cas que, comme tout écrit, les textes mathématiques sont préparés et rédigés par leur auteur avant d'être lus par d'autres : au moins chronologiquement, l'écriture précède la lecture, si bien qu'un mathématicien qui écrit n'a, au moment où il écrit, pas d'autre témoin de sa narration que lui-même. Ce caractère général de l'écrit est particulièrement marqué en mathématiques puisque, en comparaison des autres sciences, le temps s'y écoule lentement : les temps d'élaboration des articles ou des livres s'y comptent en mois, voire en années, et les articles sont généralement publiés longtemps après avoir été soumis à une revue spécialisée. Aujourd'hui, la plupart des articles sont rendus disponibles plus tôt sur la toile, ils sont facilement téléchargés, mais il faut toujours du temps pour qu'ils soient lus et la plupart ne le sont sans doute jamais.

S'il interrogeait des mathématiciens, notre visiteur apprendrait d'ailleurs que, au moment où ils écrivent leurs travaux, les mathématiciens ne pensent pas à leurs futurs lecteurs ni à quiconque. Ils oublient même leur propre personne. Ils ne pensent à rien qu'à l'objet de leur narration dont ils cherchent, par le moyen de l'écriture, à faire émerger une image la plus claire possible dans leur esprit.

La narration mathématique ressemble à un récit de voyage mais, en fait, elle constitue en elle-même le voyage qu'elle raconte, son voyageur attentif est son auteur, et le stylo, le crayon ou le clavier sont à la fois l'instrument du récit et celui du voyage objet de ce récit. Le papier ou l'écran, figure du papier, sont une mer, et le stylo ou le clavier, forme stéréotypée du stylo, sont un bateau sur cette mer.

Mais s'il est vrai que les mathématiciens se racontent d'abord à eux-mêmes et pour eux-mêmes leurs narrations, notre visiteur se demanderait : quel intérêt cela présente-t-il ? La question mérite d'autant plus d'être posée que l'écriture mathématique demande des efforts considérables de concentration et d'attention, à la limite des possibilités de l'esprit humain.

Peut-être notre visiteur songerait-il que se raconter une histoire à soi-même ne présente un intérêt véritable que si l'on sent que cette histoire ne vient pas de soi, en d'autres termes que si cette histoire est inspirée. Le terme d'inspiration est en effet

souvent employé par les mathématiciens les plus différents. Mais la plupart ne vont pas plus loin.

Ils parlent d'inspiration sans que l'idée vienne à leur esprit qu'elle pourrait être le fait d'une personne, d'un auteur inconnu, de Dieu dont chaque mathématicien louerait et célébrerait les merveilles en écrivant et en parlant.

Certains mathématiciens disent même à l'occasion que, pour écrire des mathématiques, il faut prêter la plus fine oreille à la voix subtile, si discrète, presque inaudible, des vérités mathématiques qui attendent d'être dites, de recevoir une forme dans le langage ; mais la plupart ne pensent pas que quelqu'un parle et que, en couchant sur le papier leurs narrations mathématiques, ils montrent qu'ils sont attentifs à un certain type de paroles de ce quelqu'un et qu'ils trouvent leur unique joie à se faire les serviteurs de ces paroles, en les respectant aussi fidèlement qu'ils peuvent.