Les mathématiques sont-elles une langue ?

par Laurent Lafforgue (mathématicien)

Pour essayer de répondre à cette question, je crois que je dois d'abord expliquer un peu en quoi consiste l'activité des mathématiciens et quels sont ses traits les plus saillants. En effet, elle présente aux profanes une énigme, et d'ailleurs même pour les mathématiciens l'essence des mathématiques et le pourquoi de leur beauté et de leur richesse inépuisable restent des mystères.

Je ne vous étonnerai pas en disant que les mathématiques consistent à tenter de résoudre des problèmes abstraits – au sens qu'une formalisation les a dégagés des expériences humaines ou des phénomènes naturels qui ont pu leur donner naissance – et plus encore à tenter de comprendre. Mais que signife “résoudre” et que signifie “comprendre”?

Souvent, résoudre veut dire “répondre à une question” par l'affirmative ou la négative. On se demande s'il existe des objets mathématiques vérifiant telle et telle propriétés, ou bien si telle propriété est toujours vérifiée par telle famille d'objets mathématiques. Pour ce qui est de la réponse, elle peut n'être rien de plus que “oui” ou “non”, mais il arrive aussi qu'elle soit “constructive” c'est-à-dire donne un moyen explicite de construire les objets qu'on cherchait. Les algorithmes sont des cas particuliers de mathématiques constructives: ce sont des procédures automatiques qui permettent d'associer à certains types d'objets mathématiques d'autres types d'objets. Ici il faut noter bien entendu que l'activité mathématique proprement dite est dans l'invention et la justification de l'algorithme et non dans son utilisation. Mais ceci n'empêche pas qu'il est très utile aux mathématiciens comme aux utilisateurs des mathématiques de connaître parfaitement certains algorithmes.

Plus profondément, le mathématicien veut “comprendre” mais il ne sait pas lui-même ce que cela signifie exactement: il lui arrive de faire l'expérience que quelque chose soudain lui paraît mieux compris qu'avant mais il lui est difficile d'expliquer pleinement en quoi et de plus il ne pensera jamais qu'une chose est entièrement comprise. Au contraire, instruit par l'expérience des siècles, il sait que tout progrès dans la compréhension qui paraît extraordinaire au moment où il est réalisé se révélera aux générations futures de plus en plus réducteur et partiel au fur et à mesure que de nouveaux éléments de compréhension seront dégagés.

En effet, s'il est vrai qu'une question clairement posée sous forme d'alternative peut un jour se trouver entièrement résolue, en revanche le processus de compréhension ne s'arrête jamais. L'un des maîtres mots des mathématiques est “approfondissement”, et il ne faut pas envisager l'activité mathématique au cours des siècles comme consistant à se saisir de certains problèmes pour les résoudre et alors les abandonner en passant à d'autres, mais comme un approfondissement indéfini de problèmes qui, dès lors qu'ils entrent dans l'orbite des mathématiques, ne les quittent plus et font l'objet d'une interrogation toujours renouvelée. Même si une question précise se trouve résolue un jour, elle ne meurt pas, car il se produit invariablement que les mathématiciens découvrent derrière cette question d'autres questions plus profondes puis derrière celles-ci des questions plus profondes encore, sans que le processus d'enrichissement s'arrête jamais, chaque étape ne remettant pas en cause la précédente mais lui ajoutant une nouvelle dimension.

Si donc aucune question mathématique ne meurt jamais et compte tenu de ce que sans cesse les mathématiques se saisissent de questions nouvelles, on pourrait imaginer que le champ des mathématiques croît à une vitesse vertigineuse, mais ceci n'est vrai que très partiellement car le processus de compréhension consiste en bonne partie à mettre en relation les questions les unes avec les autres, à tisser des liens entre les objets mathématiques, à découvrir des structures communes sous-jacentes à tels et tels de ces objets. Un résultat mathématique sera d'autant plus profond et remarquable qu'il mettra en relation des objets qui appartenaient a priori à des horizons des mathématiques très éloignés les uns des autres.

Ainsi, comprendre, c'est d'abord mettre en relation.

C'est spécialement mettre en relation des questions complexes avec des vérités simples considérées comme acquises, ce qu'on appelle démontrer: Une démonstration est un chemin continu dont tous les pas sont évidents et qui conduit au coeur d'un problème complexe. Une démonstration n'est que la première étape d'une compréhension, appelée à être suivie d'une infinité d'autres étapes, mais sans démonstration il n'y a pas l'ombre d'un début de compréhension.

Comprendre, c'est aussi dégager une nouvelle famille d'objets, dégager une structure, dégager une propriété remarquable, c'est lever un brouillard, mettre dans la lumière ce qui était caché et attendait d'être vu. Ceci se fait principalement par la lente maturation de nouveaux concepts, c'est-à-dire de nouveaux mots qui donnent prise sur les choses. Quand une chose n'est pas nommée, elle reste insaisissable, invisible, impossible à penser. Pour commencer à l'appréhender, les mathématiciens dans leurs longues quêtes n'ont d'abord d'autre ressource que d'employer des périphrases, et il peut arriver que de telles périphrases représentent des centaines de pages de texte. Au contraire, quand après de lentes décantations qui, dans l'histoire, prennent parfois des siècles, des mots apparaissent qui permettent de saisir les choses dans leur être, il arrive que certains résultats qui avaient d'abord demandé des livres entiers pour être énoncés et expliqués s'expriment enfin en quelques lignes d'une clarté aveuglante. Les mots ont fait sortir du brouillard qui les enveloppait les vérités qui attendaient d'être dévoilées, ils disent les choses telles qu'elles sont, ils les saisissent et les expriment avec précision et délicatesse.

Je viens d'expliciter en quoi les mathématiques se rapprochent le plus des langues. Mais il convient de préciser tout de suite que les mathématiques sont avant tout une langue écrite. Cela tient à leur densité de sens, à leur exigence de précision, à leur caractère très discursif et à la nature abstraite de leurs objets qui justement ne peuvent se matérialiser que dans l'écriture. En mathématiques, l'écriture est beaucoup plus qu'un support commode; elle est la condition première de la pensée et la voie d'exploration irremplaçable de toute recherche. Tout mathématicien connaît la difficulté de commencer à écrire quand toutes les idées dans l'esprit paraissent encore très confuses et que se présente la tentation de continuer à réfléchir dans l'espoir de voir les idées se décanter avant de saisir la plume; mais tout mathématicien a fait l'expérience de l'inimaginable pouvoir créateur de l'écriture qui, dès lors que nous lui faisons confiance, suscite une page, dix pages, cent pages,...et nous emmène vite beaucoup plus loin que tout ce que nous aurions osé espérer avant de laisser courir la main sur le papier.

Dans ce travail d'exploration par l'écriture, un rôle privilégié est dévolu au calcul – non pas le calcul confié à un ordinateur mais le calcul formel à la main – rendu possible par l'élaboration au cours des siècles des notations mathématiques. Celles-ci sont à rapprocher des concepts, leur importance est aussi grande, leur maturation aussi lente et, pour les plus heureuses d'entre elles comme par exemple la simple numération décimale, les notations algébriques ou les notations de Leibniz pour le calcul différentiel et intégral, leur pouvoir de suggestion et leur puissance créatrice sont inépuisables.

En ce sens donc, les mathématiques sont une sorte de langue, de langue écrite. Elles se rapprochent aussi de ce qu'on entend habituellement par le mot langue par leur caractère collectif, et par le fait qu'elles se transmettent d'une génération à la suivante: il s'avère qu'il est impossible de faire des mathématiques seul ou en dehors de toute tradition. Nous autres mathématiciens recevons régulièrement des lettres de personnes évidemment pas plus bêtes que nous et fascinées par les mathématiques mais essayant de s'y investir par leurs propres moyens: or, ces lettres ne présentent jamais le moindre intérêt mathématique et, le plus souvent, elles n'ont même aucun sens. Il n'est pas davantage possible de faire des mathématiques sans les avoir étudiées et être entré d'une façon ou d'une autre dans la communauté mathématique que, pour un enfant, de parler, lire et écrire sans qu'on le lui ait appris.

A mon avis, il est également impossible de se faire une idée même très approximative du travail de tel ou tel mathématicien sans apprendre les mathématiques et entrer dans ce travail à la manière des mathématiciens. Ou plutôt, si on veut malgré tout parler d'un travail mathématique avec les mots du langage courant, il faut se résigner d'avance à ce que le résultat n'ait pas davantage de rapport avec ce travail que n'en a avec une symphonie n'importe quelle description qu'on en ferait avec des mots.

Il convient de dire en sens inverse que la métaphore des langues ne rend compte que partiellement de la nature des mathématiques.

Tout d'abord, les mathématiques ne sont qu'à un faible degré une langue de communication: il est vrai que tout texte mathématique est susceptible d'être lu, c'est même sa destination finale, mais cette lecture est toujours laborieuse – autrement dit la communication mathématique est réelle mais lente et difficile – et surtout l'écriture mathématique est faite pour l'exploration. Le mathématicien écrit d'abord pour lui-même et pour la vérité.

D'autre part, les mathématiques sont moins une langue que la recherche d'une langue, et la remise sur le métier jamais lassée d'une version approchée, toujours raffinée et enrichie de cette langue idéale. Les mathématiques sont certainement une construction culturelle mais elles ne valent aux yeux des mathématiciens que dans la mesure exacte où elles sont “naturelles”, c'est-à-dire où tous leurs concepts, leurs notations et leur organisation donnent le sentiment brûlant de correspondre à la nature des choses dont les mathématiciens ressentent la réalité et la présence invisible. Le mathématicien prétend ne jamais rien inventer mais seulement découvrir et tirer du brouillard ce qui était voilé.

Nous arrivons par ce biais à la plus grande différence entre les mathématiques et les langues, c'est que les mathématiques se définissent avant tout par leurs objets. Etre mathématicien c'est étudier des objets bien précis qui se nomment la droite, le cercle, les nombres, les fonctions, les périodes, les symétries, les courbes, les surfaces, les groupes,....et c'est revenir inlassablement à certains objets essentiels. Les mathématiques traitent d'objets qui sont bel et bien réels et concrets aux yeux du mathématicien, des objets non pas qu'il aurait choisis par fantaisie mais qui se sont imposés à lui, des objets non pas formels mais formalisables au sens qu'une définition peut les saisir dans leur être.

Maintenant, quelles conclusions suis-je tenté de tirer de mon expérience de mathématicien en ce qui concerne l'enseignement?

Je voudrais en donner deux, en rebondissant sur le titre, qui m'enchante, du colloque d'aujourd'hui: “les grammaires de la liberté”. Tant il est vrai que l'enseignement rend possible la liberté, à la condition qu'il ne la décrète pas dans le vide mais qu'il en donne les moyens, ce qui n'est pas du tout la même chose.

Premièrement, l'enseignement doit à mon sens transmettre le plus possible, le mieux possible, le plus rigoureusement possible, les moyens d'expression qui sont aussi les moyens de formation de la pensée. Ceci, qui concerne les mathématiques mais aussi les langues et par dessus tout le français, ne s'obtient que par des apprentissages systématiques – en mathématiques: les nombres et leurs opérations, la géométrie, les énoncés rigoureux, les démonstrations, et en français: la grammaire, l'orthographe, les conjugaisons, les listes de vocabulaire, les rédactions, les dissertations – toutes choses qui ont été de plus en plus délaissées depuis au moins trente ans, réforme après réforme, à un point hallucinant. Cela n'a pas de sens d'inviter les enfants et les jeunes à s'exprimer eux-mêmes sans leur avoir appris à maîtriser la langue. Cela n'a pas de sens de les appeler à la créativité sans leur avoir transmis ni technique ni culture. Cela n'a pas de sens de proclamer à l'école une prétendue liberté alors qu'on en a banni les vraies nourritures intellectuelles, condamnant les futurs adultes à de nouvelles formes d'aliénation.

Deuxièmement, s'agissant de tout l'enseignement et particulièrement des mathématiques et du français, je voudrais qu'on sorte de l'approche formaliste et vide de sens dans laquelle les politiques de l'éducation nationale nous ont progressivement enfermés. En mathématiques, on doit revenir à de vrais problèmes, qui demandent de vraies réflexions sur de vrais objets. En français, on doit cesser de considérer la langue comme un simple outil de communication et comme un jeu formel. La langue existe pour parler de quelque chose, et particulièrement de choses essentielles. Pour y revenir, je crois d'ailleurs qu'il n'y a pas de meilleure façon que de retrouver les langues classiques – le grec, le latin, l'hébreu aussi à mon avis – et les textes anciens qui nous été transmis, ceux écrits dans ces langues et les grandes oeuvres de notre littérature et de la littérature universelle. Au moins, si ces textes ont survécu jusqu'à nous, c'est qu'ils ne parlent pas pour ne rien dire. Nous avons besoin de nous y ressourcer pour recréer les conditions de la liberté et de la créativité, pour rendre possible que notre pays redevienne la grande civilisation de l'esprit qu'il a été pendant des siècles, que sa création littéraire par exemple passionne à nouveau le monde et que sa langue soit désirée.