ANALYSE FONCTIONNELLE. – *Flots qui ne mélangent pas exponentiellement.* Note (*) de **David Ruelle,** présentée par René Thom.

On donne un exemple simple de flot satisfaisant à l'axiome A de Smale, et qui est mélangeant sans être exponentiellement mélangeant. On calcule la fonction zêta de ce flot.

*FUNCTIONAL ANALYSIS.* – Flows which do Not Exponentially Mix.

*A simple example is given of a flow satisfying Smale's Axiom A, which is mixing without being exponentially mixing. The zeta function of this flow is computed.*

Soit $\Lambda$ un ensemble basique pour un difféomorphisme $f$ de classe $C^{1+\varepsilon}$ satisfaisant à l'axiome A de Smale [1], et supposons que $f \mid \Lambda$ est topologiquement mélangeant. Si $\Lambda$ n'est pas réduit à un point, il existe un grand nombre de mesures invariantes sur $\Lambda$, en particulier les mesures de Gibbs $\rho_A$ associées aux fonctions höldériennes $A : \Lambda \to \mathbb{R}$ (*cf.* Sinaï [2], Bowen [3], Ruelle [4]). La mesure $\rho_A$ est l'unique mesure invariante sur $\Lambda$ qui rende maximum la quantité :

$$h(\rho)+\rho(A);$$

où $h(\rho)$ est l'entropie de $\rho$ (invariant de Kolmogorov-Sinaï), et $\rho(A)=\int A(x)\,\rho(dx)$. En particulier $\rho_0$ est la mesure de Bowen, qui rend l'entropie maximale. On montre que les mesures $\rho_A$ possèdent la propriété de mélange exponentiel :

$$\rho_A(B.(C\circ f^n)^*)-\rho_A(B)\,\rho_A(C^*),$$

tend vers zéro exponentiellement quand $n\to\infty$ si B et C sont höldériennes à valeurs complexes.

Il existe un axiome A pour les flots, et la théorie correspondante est très semblable à celle des difféomorphismes. On pourrait donc supposer que pour des flots mélangeants on aurait mélange exponentiel, c'est-à-dire décroissance exponentielle à l'infini de la fonction de corrélation :

$$F(t)=\rho_A(B.(C\circ f^t)^*)-\rho_A(B)\,\rho_A(C^*).$$

Dans le cas du flot géodésique sur une surface compacte à courbure constante négative, Epstein et Gallavotti [5] ont montré qu'il en était bien ainsi. Cependant nous allons montrer par un contre-exemple simple qu'en général un flot satisfaisant à l'axiome A peut être mélangeant sans être exponentiellement mélangeant (ceci répond négativement à la question C.4 (*a*), p. 173 de [4]).

Le flot $(f^t)$ du contrexemple est défini comme suspension avec fonction toit $g$ d'un difféomorphisme $f$ satisfaisant à l'axiome A. On suppose que $f$ a pour ensemble basique un « fer à cheval », c'est-à-dire un ensemble de Cantor $\Lambda$ identifié à l'espace des suites $\xi=(\xi_i)\in\prod_{i\in\mathbb{Z}}\{0,1\}$, et tel que $f$ agissant sur $\Lambda$ soit équivalent à $(\xi_i)\to(\xi_{i+1})$. On prend comme fonction toit :

$$g(\xi)=\begin{cases}\lambda_0 & \text{si } \xi_0=0,\\ \lambda_1 & \text{si } \xi_0=1,\end{cases}$$

avec $\lambda_0$, $\lambda_1>0$ et $\lambda_0/\lambda_1$ non rationnel. L'ensemble basique $\Lambda^*$ pour $(f^t)$ est obtenu à partir de :

$$\{(\xi, u) : 0 \leqq u \leqq g(\xi)\}, \tag{1}$$

en recollant $(\xi, g(\xi))$ à $(f(\xi), 0)$. On définit $f^t(\xi, u)=(\xi, u+t)$ quand $0 \leqq u+t \leqq g(\xi)$ et l'on prolonge en utilisant le recollement. Il est connu que le système dynamique $(\Lambda^*, (f^t))$ est mélangeant (*voir* Bowen [6]). Nous allons utiliser la mesure invariante $\rho_0^*$ obtenue en normalisant $\rho_0 \times$ Lebesgue sur (1). ($\rho_0^*$ est de type $\rho_A$ pour un flot; d'autres mesures pourraient être utilisées.)

Prenons :

$$B(\xi, u)=\varphi(u), \qquad C(\xi, u)=\psi(u),$$

où $\varphi$, $\psi$ sont de classe $C^\infty$ avec support dans $(0, \min(\lambda_0, \lambda_1))$. Alors :

$$F(t)=\rho_0^*(B.(C \circ f^t)^*)-\rho_0^*(B)\,\rho_0^*(C^*)=\frac{2}{\lambda_0+\lambda_1}\int du\,\varphi(u)\int dv\,\psi^*(v)\,[c(t+v-u)-1],$$

avec :

$$c(t)=\delta(t)+\sum_{n>0} 2^{-n}\sum_{p=0}^{n}\frac{n\,!}{p\,!\,(n-p)\,!}.[\delta(t-p\lambda_0-(n-p)\lambda_1)+\delta(t+p\lambda_0+(n-p)\lambda_1)].$$

La transformée de Fourier-Laplace de F est :

$$\hat{F}(\omega)=\int dt\,e^{i\omega t}\,F(t)=\frac{2}{\lambda_0+\lambda_1}[\hat{\varphi}(\omega)\,\hat{\psi}(\omega^*)^*(\hat{c}(\omega)-2\pi\delta(\omega))],$$

où $\omega \to \hat{\varphi}(\omega)$, $\hat{\psi}(\omega^*)^*$ sont entières, et :

$$\hat{c}(\omega)=1+\sum_{n>0}\left[\left(\frac{e^{i\omega\lambda_0}+e^{i\omega\lambda_1}}{2}\right)^n+\left(\frac{e^{-i\omega\lambda_0}+e^{-i\omega\lambda_1}}{2}\right)^n\right]$$

$$=\left[1-\frac{e^{i\omega\lambda_0}+e^{i\omega\lambda_1}}{2}\right]^{-1}+\left[1-\frac{e^{-i\omega\lambda_0}+e^{-i\omega\lambda_1}}{2}\right]^{-1}-1.$$

On voit sans peine que $\hat{c}$ a des poles arbitrairement proches de l'axe réel et l'on peut s'arranger pour que ce ne soient pas des zéros de $\hat{\varphi}$ et $\hat{\psi}$ (remplacer éventuellement $\varphi$, $\psi$ par $\varphi \circ \alpha$, $\psi \circ \alpha$ où $\alpha$ est la multiplication par un réel voisin de 1). Donc F ne peut décroître exponentiellement.

La fonction $\zeta$ du flot $(f^t)$ (*voir* Smale [1]) est définie par :

$$\zeta(s)=\prod_{\gamma}[1-\exp(-s l_\gamma)],$$

où le produit est sur les orbites fermées $\gamma$, et $l_\gamma$ est la période de $\gamma$. On a alors :

$$\zeta(s)=\exp\sum_{n>0}\frac{1}{n}\sum_{\xi\in \mathrm{Fix}\, f^n}\exp\left(-s\sum_{k=0}^{n-1} g(f^k\xi)\right)$$

$$=\exp\sum_{n>0}\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n}\frac{n\,!}{p\,!\,(n-p)\,!}\exp(-s(p\lambda_0+(n-p)\lambda_1))=(1-e^{-\lambda_0 s}-e^{-\lambda_1 s})^{-1}.$$

Cette fonction a un pôle simple positif maximum P, et d'autres pôles de partie réelle arbitrairement proche de P (ceci répond négativement à la question C.4 (*b*), p. 173 de [4]).

(*) Remise le 20 décembre 1982.

[1] S. Smale, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73, 1967, p. 747-817.
[2] Ia. G. Sinai, *Uspehi Mat. Nauk*, 27, n° 4, 1972, p. 21-64.
[3] R. Bowen, *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*, Springer, Berlin, 1975.
[4] D. Ruelle, *Thermodynamic Formalism*, Addison-Wesley, Reading, 1978.
[5] P. Collet, H. Epstein et G. Gallavotti, *à paraître*.
[6] R. Bowen, *Amer. J. Math.*, 94, 1972, p. 1-30.

*Institut des Hautes Études scientifiques*, 91440 *Bures-sur-Yvette*.