Conjectures autour du résultat de Drinfeld (1981)

1. Soient X_0 une courbe projective lisse absolument irréductible sur $\mathbb{F}_q$, g son genre, $\mathbb{F}$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$, X la courbe sur $\mathbb{F}$ déduite de X_0 par extension des scalaires et $F : X \to X$ le morphisme de Frobenius "$x \mapsto x^q$". Notons $\mathcal{E}_r$ l'ensemble des classes d'isomorphie de $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux lisses irréductibles de rang r sur X, et $\mathcal{E}_r(\mathbb{F}_{q^d})$ l'ensemble de celles qui sont fixée par $(F^d)^*$.

Notons J la jacobienne de X_0 : c'est une variété abélienne sur $\mathbb{F}_q$. Pour $r = 1$, le corps de classe (géométrique) identifie $\mathcal{E}_1(\mathbb{F}_{q^d})$ au groupe de caractères

$$\mathrm{Hom}(J(\mathbb{F}_{q^d}), \bar{\mathbb{Q}}_\ell^*),$$

l'inclusion de $\mathcal{E}_1(\mathbb{F}_{q^d})$ dans $\mathcal{E}_1(\mathbb{F}_{q^{de}})$ ~~était~~ devenant le transposé de la norme $N : J(\mathbb{F}_{q^{de}}) \to J(\mathbb{F}_{q^d})$.

Le produit tensoriel fait de $\mathcal{E}_1$ un groupe qui agit sur $\mathcal{E}_r$. L'application déterminant (puissance extérieure ~~maximale~~ $r^{\text{ième}}$) de $\mathcal{E}_r$ dans $\mathcal{E}_1$ vérifie

$$\det(\ell e) = \ell^r \det(e).$$

Par passage aux points fixes par $(F^d)^*$, on obtient de même que

$$\begin{array}{ccl} \mathcal{E}_1(\mathbb{F}_{q^d}) \text{ agit sur } & \mathcal{E}_r(\mathbb{F}_{q^d}) & \\ & \downarrow{\scriptstyle \det} & \quad \text{avec } \det(\ell e) = \ell^r \det(e). \\ & \mathcal{E}_1(\mathbb{F}_{q^d}) & \end{array}$$

Drinfeld (1981) calcule le nombre d'éléments de $\mathcal{E}_2(\mathbb{F}_{q^d})$, en terme des valeurs propres de F^* agissant sur $H^1(X)$.

L'action de $\mathcal{E}_1(\mathbb{F}_{q^d})$ sur $\mathcal{E}_2(\mathbb{F}_{q^d})$ n'est en général pas libre, et les fibres de $\det : \mathcal{E}_2(\mathbb{F}_{q^d}) \to \mathcal{E}_1(\mathbb{F}_{q^d})$ n'ont en général pas toutes le même nombre d'éléments. Pour $r = 2$, la formule obtenue par Drinfeld montre que $|\mathcal{E}_1(\mathbb{F}_{q^d})|$ divise $|\mathcal{E}_2(\mathbb{F}_{q^d})|$. Plus précisément, la formule qu'il obtient a la forme

$$|\mathcal{E}_2(\mathbb{F}_{q^d})| = |\mathcal{E}_1(\mathbb{F}_{q^d})| . \sum n_\alpha \alpha^d$$

où les n_α sont des entiers et où α parcourt des monômes en les valeurs propres de F^* agissant sur $H^1(X)$.

Nous nous proposons ~~de~~ d'examiner un "analogue complexe" donnant lieu à des phénomènes similaires. Il suggère des conjectures quant à comment varie la cardinalité des fibres de $\det : \mathcal{E}_2(\mathbb{F}_{q^d}) \longrightarrow \mathcal{E}_1(\mathbb{F}_{q^d})$, et nous vérifierons une coïncidence numérique qui suggère l'analogie n'est pas gratuite.

2. Dans l'analogie, le rôle de X est joué par une surface de Riemann compacte Y de genre g. Soit $M_r(\mathbb{C})$ l'espace de modules des systèmes locaux complexes irréductible de rang r sur Y. C'est de façon naturelle l'espace des points complexes d'un schéma M_r sur $\mathbb{Z}$.

Si on choisit un point base $o \in Y$, un système local sur Y correspond (équivalence de catégories) à une représentation de $\pi_1(Y, o)$, et pour tout schéma S, $M_r(S)$ est l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations, en tout point de S géométriquement irréductibles, de $\pi_1(Y, o)$ à valeurs dans le groupe multiplicatif une algèbre d'Azumaya de rang r^2 sur S. Si $S = \mathrm{Spec}(A)$ ~~et~~, que l'algèbre d'Azumaya est isomorphe à l'algèbre des matrices $r \times r$ sur A et qu'un isomorphisme avec cette algèbre a été choisi, une telle représentation fournit une représentation linéaire de dimension r sur A. Ces conditions sont vérifiées localement sur S pour la topologie étale. L'hypothèse d'irréductibilité géométrique équivaut à ce que l'image de $\pi_1(Y, o)$ engendre l'algèbre d'Azumaya comme $\mathcal{O}_S$-module.

Cas particulier : pour tout corps fini $\mathbb{F}_q$, $M_r(\mathbb{F}_q)$ est l'ensemble

des classes d'isomorphie de systèmes locaux absolument 4
irréductibles de $\mathbb{F}_{q'}$-vectoriels de rang 2, sur Y. Ici aussi

$$
(2.1)\qquad
\begin{array}{c}
M_1 \text{ agit sur } M_2 \\
\big\downarrow{\scriptstyle \det} \\
M_1
\end{array}
\qquad \text{et } \det(\ell e) = \ell^2 \det(e).
$$

Le schéma en groupe M_1 est simplement le tore de groupe de caractères $H_1(Y, \mathbb{Z})$:

$$M_1 = \underline{\mathrm{Hom}}\,(H_1(Y,\mathbb{Z}), \mathbb{G}_m).$$

Notons M_2^0 la fibre de $\det : M_2 \to M_1$ en l'origine de M_1. ~~Plus~~ La fibre en ℓ^2 s'identifie à M_2^0 par l'action de ℓ : si à $\det : M_2 \to M_1$ on applique le changement de base $\ell \mapsto \ell^2$, on obtient $M_2^0 \times M_1$:

$$
(2.2)\qquad
\begin{array}{ccc}
M_1 \times M_2^0 & \longrightarrow & M_2 \\
\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \det} \\
M_1 & \xrightarrow{\ \ell^2\ } & M_1
\end{array}
$$

Pour notre propos, ce qui se passe en petite caractéristique n'importe pas. Sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/r])$, M_r, M_1 et $\det : M_r \to M_1$ sont lisses, $\ell^r : M_1 \to M_1$ est un torseur sous le schéma en groupe fini étale $\mathrm{Hom}(H_1(Y,\mathbb{Z}), \mu_r)$ $\left(= H^1(Y,\mu_r) = H^1(Y,\mathbb{Z})\otimes\mu_r\right)$ qui classifie les systèmes locaux de rang un de puissance tensorielle $r^{\text{ième}}$ ~~triviale~~ triviales, ce schéma en groupes agit sur M_r°, et $M_r \to M_1$ se déduit de M_r° par torsion.

~~Etendo~~

Plaçons-nous sur un corps algébriquement clos k. Pour simplifier, supposons r inversible dans k. Le groupe $H^1(Y,\mu_r)$ ~~$\mathrm{Hom}(H_1(Y,\mathbb{Z}),\mu_r)$~~ agit sur M_r°, donc sur sa cohomologie, et les $R^q\det_!\,\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ sur M_1 ~~sur~~ sont déduits des faisceaux constants $H^q_c(M_r^\circ, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ en tordant par le torseur $M_1 \xrightarrow{\ell^r} M_1$.

Si on prend pour k la clôture algébrique d'un corps fini $\mathbb{F}_{q'}$, et que pour simplifier on suppose que r est inversible dans $\mathbb{F}_{q'}$ et que $r \mid q'-1$, on en déduit que la cardinalité des fibres de $M_r(\mathbb{F}_{q'^d}) \to M_1(\mathbb{F}_{q'^d})$ est donnée par une formule du type suivant.

A chaque caractère ε de $H^1(Y, \mu_2)$ $(= H^1(Y, \mathbb{Z}) \otimes \mu_2(\mathbb{F}_{q^d}))$, on peut associer des multiplicités $n_\varepsilon(\alpha)$ de valeurs propres α, $n_\varepsilon(\alpha) \in \mathbb{Z}$, de sorte que pour tout x dans $M_1(\mathbb{F}_{q^d}) = H^1(Y, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{F}_{q^d}^*$, on ait

$$(2.3) \quad |\text{fibre en } x \text{ de } M_2(\mathbb{F}_{q^d}) \to M_1(\mathbb{F}_{q^d})|$$
$$= \sum_\varepsilon \varepsilon\left(x^{\frac{q^d-1}{2}}\right) \sum_\alpha n_\varepsilon(\alpha)\, \alpha^d .$$

Dans cette expression, $\sum a_\varepsilon(\alpha)\, \alpha^d$ est donné par l'action de $(F^*)^d$ sur la partie de la cohomologie $H^*_c(M_2^0)$ où $H^1(Y, \mu_2)$ agit par ε (à moins que ce ne soit ε^{-1}). En particulier, $\sum_\alpha n_\varepsilon(\alpha)$ est l'Euler-Poincaré de cette partie de la cohomologie.

Si on fixe un point base o dans Y, au lieu de systèmes locaux sur Y, on peut parler de représentations de $\pi_1(Y, o)$, et le groupe des automorphismes de $\pi_1(Y, o)$ agit sur tous les objets considérés. Par passage à l'abélianisé, ce groupe s'envoie sur le groupe des similitudes symplectiques de $H^1(Y, \mathbb{Z})$, et deux caractères du même ordre de $H^1(Y, \mu_2)$ sont dans la même orbite. On en déduit que les caractéristiques d'Euler-Poincaré partielles $\sum_\alpha a_\varepsilon(\alpha)$ ne dépendent que de l'ordre de ε.

Si dans (2.3) on somme sur x, ~~les~~ la contribution des ε non triviaux s'annule, et il reste celle du caractère trivial 1 :

$$(2.4) \quad |M_2(\mathbb{F}_{q'^d})| = (q'^d - 1)^{2g} \sum n_1(\alpha)\alpha^d ,$$

une divisibilité formellement analogue à celle qui apparaît chez Drinfeld. De plus, en presque toute caractéristique p', la cohomologie est la même sur $\mathbb{C}$ ou sur un corps algébriquement clos de caractéristique p'. Pour presque tout p', on a donc

$$(2.5) \quad \sum n_1(\alpha) = \text{Euler Poincaré de la partie de la cohomologie à support compact de } M^0(\mathbb{C}), \text{ fixe par } H^1(Y, \mu_2).$$

Les formules (2.4) et (2.5) ne demandent pas que 2 divise $q'-1$.

3. Le mécanisme qui, dans l'analogue complexe, a fourni la divisibilité (2.4) de $|M_2(\mathbb{F}_{q'^d})|$ par $(q'^d-1)^{2g} = |M_1(\mathbb{F}_{q'^d})|$, suggère la conjecture suivante. Pour simplifier, je l'énoncerai sous l'hypothèse additionnelle que tous les points de division par 2 de la jacobienne J sont définis sur $\mathbb{F}_q$.

<u>Conjecture</u> 3.1 A chaque point u d'ordre r de J on peut associer des multiplicités $n_u(\alpha)$ de "valeurs propres" α, $n_u(\alpha) \in \mathbb{Z}$, de sorte que pour tout x dans $\mathcal{E}_1(\mathbb{F}_{q^d}) = \mathrm{Hom}(J(\mathbb{F}_{q^d}), \overline{\mathbb{Q}}_\ell^*)$, on ait

$$(3.1) \quad |\text{fibre en } x \text{ de } \det : \mathcal{E}_r(\mathbb{F}_{q^d}) \to \mathcal{E}_1(\mathbb{F}_{q^d})| = \sum_u x(u) \sum_\alpha n_u(\alpha)\, \alpha^d$$

Comme en (2.4), sommant sur x, on déduirait de (3.1) que

$$(3.2) \quad |\mathcal{E}_r(\mathbb{F}_{q^d})| = |\mathcal{E}_1(\mathbb{F}_{q^d})| \cdot \sum_\alpha n_1(\alpha)\, \alpha^d .$$

~~Bien sûr~~, Dans les conjectures, les α devraient être des nombres de Weil, ~~desp~~ et des entiers algébriques, de sorte que la divisibilité (3.2) de $|\mathcal{E}_r(\mathbb{F}_{q^d})|$ par $|\mathcal{E}_1(\mathbb{F}_{q^d})|$ est du type de celle prouvée par Drinfeld pour $r=2$.

~~Reliant~~

Supposons r premier à la caractéristique, ~~Reliant~~ et, ~~(3.1) et (2.3), je propose la conjecture suivante~~

~~Conjecture~~ dans (2.3), ~~les cas~~ excluons si besoin un nombre fini de caractéristiques. Reliant (3.1) et (2.3), je propose la conjecture suivante

<u>Conjecture</u> 3.3 si u (dans 3.1) et ε (dans 2.3) ont le même ordre, alors

$$\sum_\alpha n_u(\alpha) = \sum_\alpha n_\varepsilon(\alpha)$$

En d'autres termes, la conjecture dit que $\sum n_u(\alpha)$ est la caractéristique d'Euler Poincaré de la partie de la cohomologie de $M_2^0(\mathbb{C})$ où $H^1(Y, \mu_2)$ agit par ε. ~~Je m~~ J'ai à l'appui de cette conjecture la vérification numérique suivante

4. **Théorème** La conjecture 3.3 est vraie pour $r = 2$ et u et ε triviaux.

En genre 0 et 1, tant $\mathcal{E}_2$ que M_2 sont vides. Nous supposerons donc $g \geq 2$.

Drinfeld prouve une identité du type

(4.1) $$|\mathcal{E}_2(\mathbb{F}_{q^d})| = |\mathcal{E}_1(\mathbb{F}_{q^d})| \cdot \sum n(\alpha)\,\alpha^d .$$

D'après 2.4, on a une identité du type

(4.2) $$|M_2(\mathbb{F}_{q'^d})| = (q'^d - 1)^{2g} \sum m(\alpha)\,\alpha^d$$

(en chaque caractéristique). Le théorème affirme que

$$\sum n(\alpha) = \sum m(\alpha) .$$

Un calcul un peu pénible, partant de la formule donnée par Drinfeld, montre que

(4.3) $$\sum n(\alpha) = -(2^{2g-3} + 1) .$$

Nous déduirons d'un théorème de Frobenius que pour tout q' on a

(4.4) $$|M_2(\mathbb{F}_{q'})| = (q'-1)^{2g}\, P(q')$$

où P est un polynôme à coefficients entiers.

Le théorème est dès lors ramené à la vérification de ce que

(4.5) $\quad P(1) = -\left(2^{2g-3}+1\right).$