

Erratum : dans (4.1), (4.2), (4.4), remplacer 2 par 2.

5. Vérification de 4.3

Posons $a_k = (-1)^k \text{Tr}(F^*, \wedge^k H^1(X))$ et soit $f(t)$ le numérateur de la fonction ζ de X_0 :

$$(5.1) \quad f(t) = \det(1 - F^* t, H^1(X)) = \sum a_k t^k.$$

Dans la formule des traces, Drinfeld déduit que

$$(5.2) \quad |\mathcal{E}_e(\mathbb{F}_q)| = |\mathcal{E}_1(\mathbb{F}_q)| \cdot \mathcal{B} \quad \text{avec}$$

$$(5.3) \quad \mathcal{B} := \frac{f(q)}{(q-1)(q^2-1)} - \frac{f(-1)}{4(q+1)} + \frac{f'(1)}{2(q-1)} - f(1) \left(q-1 + \frac{q-1/4}{q-1} + \frac{1}{2(q-1)^2} \right) - 1.$$

Si $q=0$, on a $f(q)=1$, et on vérifie que $\mathcal{B}$, donné par (5.3), est nul, comme il se doit. Dans la suite, on suppose que $q \geq 1$. Drinfeld réécrit (5.3) sous la forme

$$(5.4) \quad \mathcal{B} = \frac{f(q) - f(1) - f'(1)(q-1)}{2(q-1)^2} - \frac{1}{4} \frac{f(q) - f(1)}{q-1} + \frac{1}{4} \frac{f(q) - f(-1)}{q+1} + \frac{f'(1) - q f(1)}{q-1} - (1-q) f(1) - 1.$$

On a

$$(5.5)' \quad \frac{f(q) - f(1) - f'(1)(q-1)}{(q-1)^2} = \sum_{k \geq 2} a_k (q^{k-2} + 2q^{k-3} + 3q^{k-4} + \dots + (k-1))$$

$$(5.5)'' \quad \frac{1}{2} \left[\frac{f(q) - f(1)}{q-1} - \frac{f(q) - f(-1)}{q+1} \right] = \sum_{k \geq 2} a_k (q^{k-2} + q^{k-4} + q^{k-6} + \dots)$$

où ... se termine par q ou 1 selon la parité de k .

La somme $\frac{1}{2}((5.5)' - (5.5)'')$ des trois premiers termes de (5.4) est donc

$$(5.6) \sum_{k \geq 3} a_k (q^{k-3} + q^{k-4} + 2q^{k-5} + 2q^{k-6} + \dots)$$

$$= \sum_{k \geq 3, 0 \leq i < k} a_k q^i \left[\frac{k-i-1}{2} \right]$$

Il reviendrait au même de faire porter la dernière somme sur $k \geq 1$, $0 \leq i < k$. Pour le terme suivant, utilisant que pour $0 \leq k \leq q$ on a $a_{2q-k} = q^{q-k} a_k$, on obtient

$$(5.7) \sum \frac{k-q}{q-1} a_k = \sum_{k=0}^q \left(\frac{k-q}{q-1} a_k + \frac{q-k}{q-1} a_{2q-k} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^q \frac{1}{q} (q-k) \frac{q^{q-k}-1}{q-1} a_k$$

Il est clair sur ces formules que, si $q=1$, (5.6) est nul, (5.7) vaut 1 et que donc, comme il se doit, (5.2) et (5.3) sont nuls. Dans la suite, on suppose que $q \geq 2$.

Si on remplace X_0 par $X_0 \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^d}$, et ce faisant q par q^d , et les valeurs propres de l'endomorphisme F^* de $H^1(X)$ par leur puissance d -ième, tant (5.6), (5.7) que les ~~deux~~ derniers termes de (5.4) ont chacun la forme $\sum n(\beta) \beta^d$ pour des "multiplicités" $n(\beta)$ convenables. Les $\sum n(\beta)$ correspondant sont

$$(5.8)' \sum_{0 \leq i < k} (-1)^k \binom{2q}{k} \left[\frac{k-i-1}{2} \right]$$

$$(5.8)'' \sum_{k=0}^q (-1)^k \binom{2q}{k} (q-k)^2$$

$$(5.8)''' 0$$

$$(5.8)'''' -1$$

La somme (5.8)'' est nulle : c'est la moitié de

$$\sum_{k=0}^{2q} (-1)^k \binom{2q}{k} (q-k)^2$$

qui est la valeur en $x=1$ de

$$(x)_x)^2 \sum (-1)^k \binom{2g}{k} x^{k-g} \quad , \quad \text{et}$$

$$\sum (-1)^k \binom{2g}{k} x^{k-g} = x^{-g} (1-x)^{2g}$$

a un zéro d'ordre $2g \geq 2$ en $x=1$.

Il reste à évaluer (5.8)', c'est à dire

$$(5.9) \sum_{3 \leq k \leq 2g} (-1)^k \binom{2g}{k} (1 + 1 + 2 + 2 + 3 + \dots)$$

avec $k-2$ termes dans $(\dots)$. Pour $a \geq 0$, la somme de a termes de la suite $1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, \dots$ vaut

$$\text{pour } a \text{ pair} : \frac{a}{2} \left(\frac{a}{2} + 1 \right)$$

$$\text{pour } a \text{ impair} : 1 + (1+2) + (2+3) + \dots = 1 + 3 + 5 + \dots + a = \left(\frac{a+1}{2} \right)^2$$

Le facteur dans (5.9) de $(-1)^k \binom{2g}{k}$ est donc

$$\text{pour } k \text{ pair} : \frac{k-2}{2} \cdot \frac{k}{2} = \frac{1}{4} (k^2 - 2k)$$

$$\text{pour } k \text{ impair} : \left(\frac{k-1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (k^2 - 2k + 1)$$

Il reste à observer que $\sum (-1)^k \binom{2g}{k} k$ et $\sum (-1)^k \binom{2g}{k} k^2$ sont nuls, comme valeurs en $x=1$ de $x(x)_x (1-x)^{2g}$ et de $(x)_x)^2 (1-x)^{2g}$, tandis que la somme sur k impair des $\binom{2g}{k}$ vaut 2^{2g-1} : (5.9) vaut $-\frac{1}{4} 2^{2g-1} = -2^{2g-3}$, et b vaut $-(2^{2g-3} + 1)$.

6. Calcul de (4.4).

~~Calcul~~ Souvent, il est plus facile de calculer la masse d'une catégorie $\mathcal{C}$, c'est à dire, la somme, étendue à ses classes d'isomorphie d'objets

$$\sum \frac{1}{|\text{Aut}(C)|},$$

que le nombre de ses classes d'isomorphie d'objets.

Soient $\mathcal{C}$ la catégorie de tous les systèmes locaux de $\mathbb{F}_{q'}$ -espaces vectoriels de rang 2 sur X , et $\mathcal{C}'$ (resp $\mathcal{C}''$) la sous-catégorie pleine de ceux qui sont géométriquement ~~absolument~~ irréductibles, ~~et~~ ~~et~~ ~~et~~ (resp géométriquement réductibles). Si V est dans $\mathcal{C}'$, le lemme de Schur assure que $\text{End}(V) = \mathbb{F}_{q'}$, donc que $|\text{Aut}(V)| = q'-1$. On a donc

$$\begin{aligned} (6.1) \quad |M_2(\mathbb{F}_{q'})| &= (q'-1) (\text{masse de } \mathcal{C}') = \\ &= (q'-1) ((\text{masse de } \mathcal{C}) - (\text{masse de } \mathcal{C}'')) . \end{aligned}$$

Les calculs montreront que non seulement $|M_2(\mathbb{F}_{q'})|$ mais aussi séparément $(q'-1)(\text{masse de } \mathcal{C})$ et $(q'-1)(\text{masse de } \mathcal{C}'')$ sont le produit de $(q'-1)^{2g}$ par un polynôme en q' . Je ne m'y attendais pas.

La catégorie des systèmes locaux de $\mathbb{F}_{q'}$ -vectoriels de rang 2 sur X est équivalente à celle des $GL(2, \mathbb{F}_{q'})$ -torsions sur X . Pour tout groupe fini G , un théorème de Frobenius donne la masse de la catégorie des G -torsions sur X .

Théorème (Frobenius) La masse de la catégorie des G -torseurs sur X est la somme, étendue aux caractères des représentations irréductibles de G

$$(6.2) \quad \sum_X \left(\frac{|G|}{\chi(e)} \right)^{2g-2} \chi(e).$$

Choisissons un point base $o \in X$. Soient $\mathcal{C}$ la catégorie des G -torseurs sur X , et $\mathcal{C}^\sim$ la catégorie des G -torseurs trivialisés en o . Un G -torseur admet $|G|$ trivialisations en o . On a donc

$$\text{masse}(\mathcal{C}) = \frac{1}{|G|} \text{masse}(\mathcal{C}^\sim).$$

Les ~~objets~~ objets de la catégorie $\mathcal{C}^\sim$ n'ont pas d'automorphisme non trivial. Chacun définit un morphisme de monodromie : $\pi_1(X, o) \rightarrow G$ et on obtient ainsi une bijection entre classes d'isomorphismes dans $\mathcal{C}^\sim$ et $\text{Hom}(\pi_1(X, o), G)$:

$$\text{masse}(\mathcal{C}) = \frac{1}{|G|} |\text{Hom}(\pi_1(X, o), G)|.$$

Le groupe fondamental $\pi_1(X, o)$ admet des générateurs a_i, b_i ($1 \leq i \leq g$), liés par la seule relation que le produit des commutateurs $\prod (a_i, b_i)$ est trivial. L'énoncé donné par Frobenius de son théorème est que le nombre de solutions dans G de $\prod_i^g (a_i, b_i) = 1$ est

$$\sum_X \left(\frac{|G|}{\chi(e)} \right)^{2g-2} \chi(e).$$

Pour $g=0$, on retrouve la formule $\sum \chi(e)^2 = |G|$. Pour $g=1$, que le nombre de paires d'éléments de G qui commutent est $|G|$ fois le nombre de caractères (= le nombre de classes

Faisons $G = GL(2, \mathbb{F}_{q'})$ et, pour alléger les notations, écrivons q pour q' . Les nombres de représentations irréductibles de chaque dimension de $GL(2, \mathbb{F}_q)$ est donné par la table suivante :

dimension	nombre	description
1	$q-1$	$\chi(\det q)$
q	$q-1$	$\chi(\det q)$. spéciale
$q+1$	$\frac{1}{2}(q-1)(q-2)$	série principale
$q-1$	$\frac{1}{2}(q^2-q)$	série discrète

Les représentations de dimension $q+1$ sont paramétrées par les paires de caractères distincts de $\mathbb{F}_q^*$, près à permutation près. Les représentations de dimension $q-1$ sont paramétrées par les caractères θ de $\mathbb{F}_{q^2}^*$ qui ne se factorisent pas par la norme $N: \mathbb{F}_{q^2}^* \rightarrow \mathbb{F}_q^*$, près modulo $\text{Gal}(\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q)$. La masse de C est donc

$$(q-1) \cdot [q(q-1)(q^2-1)]^{2q-2} + (q-1) [(q-1)(q^2-1)]^{2q-2} \\ + \frac{1}{2} \left[\begin{array}{l} (q-1)(q-1-1) [q(q-1)^2]^{2q-2} \\ + (q-1)(q-1+1) [q(q^2-1)]^{2q-2} \end{array} \right]$$

et

$$(q-1) \text{ masse}(C) = (q-1)^{2q} \text{ fois} \\ [q(q^2-1)]^{2q-2} + [q^2-1]^{2q-2} + \frac{1}{2} \left[\begin{array}{l} ((q-1)-1) [q(q+1)]^{2q-2} \\ + ((q-1)+1) [q(q+1)]^{2q-2} \end{array} \right].$$

This last factor is

Le dernier facteur vaut

$$(q^{2g-2} + 1)(q^2 - 1)^{2g-2} + (q-1)q^{2g-2} \left[\frac{(q-1)^{2g-2} + (q+1)^{2g-2}}{2} \right] \\ + q^{2g-2} \left[\frac{-(q-1)^{2g-2} + (q+1)^{2g-2}}{2} \right]$$

Si $g \geq 2$, c' est un polynôme en q à coefficients entiers de valeur 2^{2g-3} en 1 :

$$(6.3) \quad (q-1) \cdot \text{masse}(C) = (q-1)^{2g} \cdot P_1(q) \quad \text{avec}$$

$$(6.4) \quad P_1(1) = 2^{2g-3} \quad (\text{pour } g \geq 2).$$

Pour calculer la masse de C'' , nous considérerons séparément divers types de ~~objets géo~~ ~~re~~ de systèmes locaux géométriquement réductibles V :

- ① V admet un unique ~~un~~ sous-système local L' de rang un, d'où une suite exacte

$$0 \rightarrow L' \rightarrow V \rightarrow L'' \rightarrow 0,$$

et L' n'est pas isomorphe à L'' .

- ② Comme ①, avec L' isomorphe à L'' .

- ③ V est somme de deux système locaux non isomorphes de rang 1.

- ④ V est restriction de ~~des~~ scalaires d'un système local de rang un sur $\mathbb{F}_{q^2}$, et ce dernier ne provient pas de $\mathbb{F}_q$ par extension des scalaires.

- ⑤ V est de la forme L^2 , avec L de rang un.

Notons C_i'' les sous-catégories correspondantes de C'' , et calculons la masse des C_i'' , de somme la masse de C'' .

① Considérons le foncteur $V \mapsto (L', L'')$ ^{de C_1} vers les (L', L'') avec L' et L'' non isomorphes. La catégorie but a $(q-1)^{2g} ((q-1)^{2g} - 1)$ ^{classes d'isomorphie d'} objets, et

chacun a $(q-1)^2$ automorphismes : la catégorie but a pour masse $(q-1)^{2g} ((q-1)^{2g} - 1) / (q-1)^2$. La catégorie fibre ~~est celle des~~ en (L', L'') est celle des extensions non triviales de L'' par L' . Parce que $\text{Hom}(L'', L') = 0$, ces extensions n'ont (en tant qu'extension) pas d'automorphisme non trivial.

On a $H^0(X, \mathcal{H}om(L'', L')) = \text{Hom}(L'', L') = 0$. Par dualité de Poincaré, $H^2(X, \mathcal{H}om(L'', L'))$ est dual de $H^0(X, \mathcal{H}om(L', L'')) = \text{Hom}(L', L'')$, également nul.

Puisque $\sum (-1)^i \dim_{\mathbb{F}_q} H^i(X, \mathcal{H}om(L'', L')) = \chi(X) = 2 - 2g$, ~~$\text{Ext}^1(L'', L') = H^1(X, \mathcal{H}om(L'', L'))$~~ $\text{Ext}^1(L'', L') = H^1(X, \mathcal{H}om(L'', L'))$ est de dimension $2g - 2$, et les catégories fibre ont $(q^{2g-2} - 1)$ classes d'isomorphie. Les catégories fibres ayant toutes la même masse, la masse de C_1 est le produit de la masse de la catégorie but par la masse des catégories fibres :

$$\text{masse}(C_1) = \frac{1}{(q-1)^2} (q-1)^{2g} ((q-1)^{2g} - 1) (q^{2g-2} - 1).$$

② Considérons de même le foncteur $V \mapsto (L', L'')$ de C_2 vers les (L', L'') ^{(où L' et L''} sont cette fois isomorphes. La catégorie but a $(q-1)^{2g}$ classe d'isomorphie d'objets et chacun a encore $(q-1)^2$ automorphismes : la catégorie but a pour masse $(q-1)^{2g} / (q-1)^2$.

La catégorie fibre en (L', L'') est encore celle des extensions non triviales de L'' par L' . Parce que L' est isomorphe à L'' , $\dim \text{Hom}(L'', L') = 1$ et chacune a q automorphismes. Dans le calcul d'Euler - Poincaré, H^0 et H^2 sont cette fois de dimension 1 : la catégorie fibre a $(q^{2g} - 1)$ classes d'isomorphie d'objets. Au total

$$\text{masse}(C_2) = \frac{1}{q(q-1)^2} (q-1)^{2g} (q^{2g} - 1)$$

③ La catégorie C_3 a ~~$\frac{1}{2}(q^{2g}-1)$~~
 $\frac{1}{2} (q-1)^{2g} ((q-1)^{2g} - 1)$ classes d'isomorphie d'objets.
 Chacun a $(q-1)^2$ automorphismes :

$$\text{masse}(C_3) = \frac{1}{(q-1)^2} \cdot \frac{1}{2} (q-1)^{2g} ((q-1)^{2g} - 1)$$

④ Chaque objet de C_4 a deux structures de $\mathbb{F}_{q^2}$ -système local de rang un, ~~déduites l'une~~ conjuguées sous $\text{Gal}(\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q)$. Il y a $(q^2-1)^{2g}$ classes ~~de $\mathbb{F}_{q^2}$~~ d'isomorphie de $\mathbb{F}_{q^2}$ -système local de rang un, et $(q-1)^{2g}$ d'entre elles proviennent par extension des scalaires de $\mathbb{F}_q$ à $\mathbb{F}_{q^2}$ de $\mathbb{F}_q$ -systèmes locaux de rang un.

Il y a donc $\frac{1}{2} ((q^2-1)^{2g} - (q-1)^{2g})$ classes d'isomorphie dans C_4 , et chaque objet a (q^2-1) automorphismes :

$$\text{masse}(C_4) = \frac{1}{q^2-1} \cdot \frac{1}{2} ((q^2-1)^{2g} - (q-1)^{2g})$$

⑤ C_4 a $(q-1)^{2g}$ classe d'isomorphie d'objets, et chacun a $|GL(2, \mathbb{F}_q)| = q(q-1)(q^2-1)$ automorphismes :

$$\text{masse}(C_5) = \frac{1}{q(q-1)(q^2-1)} (q-1)^{2g}$$

Pour $1 \leq i \leq 5$, définissons T_i par $(q-1) \cdot \text{masse}(C_i) = (q-1)^{2g} T_i$.

On a

$$T_1 = \frac{1}{(q-1)} ((q-1)^{2g} - 1) (q^{2g-2} - 1)$$

C'est un polynôme en q à coefficients entiers, dont la valeur en 1 ~~est~~ est $-(2g-2)$.

On a

$$T_2 = \frac{1}{q(q-1)} (q^{2g}-1) = \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{2g-1} q^i$$

C'est la somme de $\frac{1}{q}$ et d'un polynôme en q à coefficients entiers $\sum_{i=0}^{2g-2} q^i$ de valeur $2g-1$ en 1.

On a

$$T_3 = \frac{1}{q-1} \cdot \frac{1}{2} ((q-1)^{2g} - 1)$$

$$T_4 = \frac{1}{q+1} \cdot \frac{1}{2} ((q+1)^{2g} - 1)$$

et $T_3 + T_4$ est la somme de $-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{q-1} + \frac{1}{q+1} \right)$

et du polynôme à coefficients entiers

$$\frac{1}{2} \left((q-1)^{2g-1} + (q+1)^{2g-1} \right)$$

dont la valeur en 1 est 2^{2g-2} . Enfin

$$T_5 = \frac{1}{q(q^2-1)}.$$

On a

$$\frac{1}{q} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{q-1} + \frac{1}{q+1} \right) + \frac{1}{q(q^2-1)} = 0$$

(vérification laissée au lecteur). La somme

$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5$ est donc un polynôme en q à coefficients entiers, et sa valeur en 1 est

$$\sum T_i(1) = -(2g-2) + (2g-1) + 2^{2g-2} = 2^{2g-2} + 1.$$

Combinant les résultats obtenus, on obtient comme promis ~~est~~ en 4.5 que

$$(q-1) \text{ masse}(C') = (q-1) (\text{masse } C - \text{masse } C'')$$

est le produit de $(q-1)^{2g}$ par un polynôme en q de valeur en 1 égale à

$$2^{2g-3} - (2^{2g-2} + 1) = -(2^{2g-3} + 1)$$