

Une conjecture, encore vague, inspirée par Kontsevitch

1. Résumé des épisodes antérieurs

Drinfeld (1981) nous pose une énigme. Il considère une courbe projective et lisse $X_0/\mathbb{F}_q$. Par extension des scalaires à une clôture algébrique $\bar{\mathbb{F}}$ de $\mathbb{F}_q$, on obtient X , et un endomorphisme de Frobenius $\bar{\mathbb{F}}_0$ $\text{Frob} : X \rightarrow X$ du $\bar{\mathbb{F}}$ -schéma X . Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -faisceaux lisses ^(irréductibles) de rang 2 sur X . L'image inverse par Frob est une permutation de $\mathcal{E}$. Je l'avais appelée Φ . Mieux aurait valu V . Par la suite, $V := \text{Frob}^*$.

Drinfeld montre que comme fonction de $d \geq 0$, le nombre de points fixes de V^d a la forme

$$\sum n_\alpha \alpha^d$$

pour des $n_\alpha \in \mathbb{Z}$ convenables. C'est ce que

donnerait une formule des points fixes de Lefschetz.

Enigme : quelle cohomologie, de quel espace ?

Plus généralement, on a des théorèmes analogues, dans une série de cas, pour les $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -faisceaux lisses irréductibles de rang 2 sur $X_0 - S_0$, avec ramification fixée en chaque $s_0 \in S_0$.

Dans le cas ~~relativement simple~~ d'un endomorphisme $T: M \rightarrow M$ d'une variété différentiable compacte, la formule de Lefschetz compte, non pas les points fixes, ~~mais~~ (supposés en nombre fini), mais ceux-ci pris avec une multiplicité: le nombre d'intersection, en (x, x) , du graphe de T et de la diagonale de $M \times M$. Ceci pose la question: est-il raisonnable de vouloir compter les points fixes de V , tous pris avec la multiplicité un. Réponse: oui. Même si on ne sait pas faire de E un "espace", on sait définir ce que devrait être le complexe formel $E_x^\wedge$ de E en un point x , comme spectre d'une algèbre locale complète de corps résiduel $\bar{\mathbb{Q}}_p$. Ceci s'étend au cas où E est ~~complète~~ ^{aggrégée} en $\bar{E}$, définie comme ensemble de clans d'isomorphismes de $\bar{\mathbb{Q}}_p$ -faiscceaux liés au $X_0 - S_0$, pris à semi-simplification près. Dans tous les cas, si x est un point fixe de V , l'endomorphisme d' V de l'espace tangent de Zariski en x n'a pas la valeur propre un. Heureusement, ceci justifie de compter x avec la multiplicité un. Mac Pherson (communication personnelle) a en effet montré que, sur $\mathbb{C}$, si $T: M \rightarrow M$ est un endomorphisme d'un espace analytique complexe, et qu'en un point fixe x

de T , dT n'a pas la valeur propre un, alors le terme local, en x , de la formule de Lefschetz-Verdier vaut un.

Conjecture : le même énoncé vaut en géométrie algébrique sur un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque.

À l'appui de l'idée que la cohomologie cherchée, pour expliquer Drinfeld, a quelque chose à voir avec celle d'espaces de modules analogues sur $\mathbb{C}$, j'ai vérifié une coïncidence numérique : $-(2^{2g-3} + 1)$ obtenue d'une part à partir de Drinfeld, d'autre part topologiquement, sur $\mathbb{C}$: voir notes précédentes.

2. Énoncé de la conjecture.

Soit $X_0 / \mathbb{F}_q$ ~~propre~~ une courbe projective et lisse, absolument irréductible. Relevons n'importe comment X_0 en une courbe projective et lisse X_W sur l'anneau $W := W(\mathbb{F}_q)$ des vecteurs de Witt sur $\mathbb{F}_q$.

Soient K le corps des fractions de W et $X_K := X_W \otimes_W K$.

Soit $\mathcal{M}_K$ l'espace de modèles des de rang r fibrés vectoriels à connexion sur X_K . Je préfère ne pas leur imposer d'être irréductibles, $\mathcal{M}_K$ est un

espace grossier de modules, et ses points sur une
cloture algébrique $\overline{K}$ de K "sont" les classes
d'isomorphie, prises à semi-simplification près,

de tels fibrés sur $X_{\overline{K}} := X_K \otimes_K \overline{K}$. On choisira un
isomorphisme entre $\mathbb{F}$ et le corps résiduel de $\overline{K}$ au

Considérons l'espace analytique $\mathcal{M}_{\overline{K}}$ associé à

$\mathcal{M}_{\overline{K}} := \mathcal{M}_K \otimes_K \overline{K}$. Comme on voudra prendre la

cohomologie ℓ -adique (pour un quelconque ℓ premier à p)

des espaces analytiques considérés, il y a (peut-être)

lieu de prendre "analytique" au sens de Berbovich.

Je conjecture l'existence dans $\mathcal{M}_{\overline{K}}^{\text{an}}$ d'un

sous-espace analytique $\mathcal{M}_{\overline{K}}^{\circ}$ (modèle : le disque
unité dans la droite affine), avec les propriétés
suivantes

Conjecture : (i) $\mathcal{M}_{\overline{K}}^{\text{an}}$ et $\mathcal{M}_{\overline{K}}^{\circ}$ ont même cohomologie

(ℓ -adique) : le ~~isom~~ morphisme de restriction

$$H^*(\mathcal{M}_{\overline{K}}) \xrightarrow{\sim} H^*(\mathcal{M}_{\overline{K}}^{\text{an}}) \rightarrow H^*(\mathcal{M}_{\overline{K}}^{\circ})$$

est un isomorphisme.

(ii) Par un argument cristallin, l'image inverse ~~par~~ V
par Frobenius est définie, comme morphisme de
 $\mathcal{M}_{\overline{K}}^{\circ}$ dans lui-même.

(iii) Le nombre de points fixes de V agissant sur
 $\mathcal{M}_{\overline{K}}^{\circ}$ est donné par

$$\sum (-1)^i \text{Tr}(V^*, H^i(\mathcal{M}_{\overline{K}}^{\circ}))$$

(iv) Le nombre de point fixe est égal

au nombre de points fixes de la permutation V de l'ensemble $\bar{E}$ des classes d'isomorphie, prise à semi-simplification près, de $\bar{Q}_\ell$ -faisceaux lisses de rang r sur X . Plus précisément, un isomorphisme entre les données algébriques de Q dans $\bar{Q}_\ell$ et $\bar{K}$ définit une bijection entre ces ensembles

Remarques (a) (i) et (ii) permettent de définir un endomorphisme " V^* " de $H^*(M_{\bar{K}})$, et (iii) et (iv) assurent que le nombre de points fixe (iv) est

$$\sum (-1)^i \text{Tr}(V^*, H^i(M_{\bar{K}}))$$

(b) (iv) pose le problème des "petits camarades cristallins" pour les $\bar{Q}_\ell$ -faisceaux sur X_0 . On voudrait dégorger de la théorie de Lafforgue non seulement en ℓ -adique, mais aussi en p -adique.

~~Un exemple d'application de conjecture~~

(c) Pour $X_0 - S_0$, tout ceci s'étend au cas où la ramification imposée aux points de S_0 est modérée. Il faut cette fois relever (X_0, S_0) en (X_W, S_W) sur W . Dans le cas de monodromie locale imposée modérée et semi-simple (donc d'ordre fini), une façon de procéder est de traiter (X_0, S_0) comme une "orbifold" avec ramification ^{en S_0} d'ordre N premier à p et assez

divisible ~~admissible~~ ; si z est une coordonnée locale en $s_0 \in S_0$, $z^{1/N}$ est une coordonnée locale de l'orbifold en ce point. De même pour X_W et X_K . Ceci fait, on regarde les $\overline{Q}_e$ -faisceaux lignes sur $X_0 \rightarrow S_0$ avec monodromie ~~imposée~~ locale imposée en les points de S_0 , comme des $\overline{Q}_e$ -faisceaux lignes sur l'orbifold, tel quel groupe d'automorphismes d'un $\mathbb{F}$ -point s de l'orbifold, au-dessus de S_0 , agit sur la fibre en s du faisceau de façon imposée. De même pour les fibrés vectoriels à connexion.

~~Un exemple explicatif la conjecture.~~

3. Rang un

Soit $X_0 / \mathbb{F}_q$ et supposons pour simplifier que X_0 admet un point $\mathbb{F}_q$ -rationnel α_0 . Un 0-cycle de degré un, qui existe toujours, nous suffirait. Le point α_0 définit un plongement ($n \geq 1$) : $X_0 \hookrightarrow J_0$, où J_0 est la jacobienne $\text{Pic}^0(X_0)$. Le plongement ^{est} défini par $y \mapsto \mathcal{O}(y - \alpha_0)$. Ce plongement induit une équivalence entre $\overline{Q}_e$ -faisceaux lignes de rang un sur X_0 et J_0 . Considérons plutôt

les $\bar{\mathcal{Q}}_e$ -faisceaux lisses de rang un trivialisés en x_0 (resp en l'origine). Leurs classes d'isomorphisme correspondent bijectivement aux classes mod $\mathbb{F}_q$ -torsion. L'isogénie de Lang

$$\text{Frob}^{-1} : J_0 \rightarrow J_0$$

fait de J_0 un $J_0(\mathbb{F}_q)$ -torseur sur J_0 et définit

$$\text{Hom}(J_0(\mathbb{F}_q), \bar{\mathcal{Q}}_e^*) \xrightarrow{\sim} \text{classes d'isomorphisme de } \bar{\mathcal{Q}}_e\text{-faisceaux lisses de rang un trivialisés en } e \text{ sur } J_0.$$

Ceci identifie les points fixes qui nous intéressent à $\text{Hom}(J_0(\mathbb{F}_q), \bar{\mathcal{Q}}_e^*)$. L'inclusion des points fixes de V dans ceux de V^d :

$$\text{Hom}(J_0(\mathbb{F}_q), \bar{\mathcal{Q}}_e^*) \rightarrow \text{Hom}(J_0(\mathbb{F}_{q^d}), \bar{\mathcal{Q}}_e^*)$$

et la composition avec la norme

$$N : J_0(\mathbb{F}_{q^d}) \rightarrow J_0(\mathbb{F}_q).$$

L'image inverse de faisceaux inversibles par $\text{Frob} : x_0 \rightarrow x_0$ définit un morphisme de J_0 dans lui-même. Ce morphisme est la Verschiebung V . On a $V \text{Frob} = \text{Frob} V = q$. Par auto-dualité de la jacobienne le ~~noyau~~ noyau de V^{-1} est dual de l'artier de celui de Frob^{-1} , car V et Frob sont transposés l'un de l'autre. C'est donc un groupe de type multiplicatif.

Je préfère ~~exclure~~ $p=2$. Soit X_W un relèvement de ~~de~~ X_0 sur $W(\mathbb{F}_q)$, et X_∞ (c'est la limite de relèvements X_n sur les $W_n(\mathbb{F}_q)$). Soit J_n^H classifiant les fibrés inversibles de degré 0 sur X_n , munis d'une connexion. C'est l'extension additive universelle de $\text{Pic}^0(X_n)$. Elle est de nature cristalline, ne dépend pas du choix du relèvement X_n , et l'image inverse par $\text{Frob} : X_0 \rightarrow X_0$ induit $V : J_n^H \rightarrow J_n^H$.

La limite projective des algèbres affines des $\text{Ker}(V-1, J_n^H \rightarrow J_n^H)$ est de dimension finie au-dessus de K , le corps des fractions de ~~de~~ $W(\mathbb{F}_q)$. Elle définit un schéma $\text{Ker}(V-1, J_\infty^H \rightarrow J_\infty^H)$ sur $W(\mathbb{F}_q)$, et l'adhérence Ker de la fibre générale de ce schéma relève $\text{Ker}(V-1 : J_0 \rightarrow J_0)$. Si $\mu(\bar{K})$ est le groupe des racines de l'unité de $\bar{K}$, on a donc

$$\text{Hom}(\text{Ker}^0(\bar{K}), \mu(\bar{K})) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(\text{Ker}(V-1 : J_0^H \rightarrow J_0^H), \mathbb{G}_m)$$

et

$$\text{Ker}^0(\bar{K}) = \text{Hom}(J_0(\mathbb{F}_q), \mu(\bar{K})).$$

Si on choisit un isomorphisme de $\mu(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ avec $\mu(\bar{K})$, ceci fournit une bijection entre classes de $\bar{\mathbb{Q}}_p$ -faisceaux localement de rang un sur X fixes par V , et classes de fibrés en droites

à connexion comme en (10) de la conjecture.

4. Un exemple pour expliquer la conjecture

Preons pour X_0 une courbe elliptique ordinaire sur $\mathbb{F}_q$ et pour X_w son relèvement canonique. Sa vertu est que le Frobenius se relève en $F: X_w \rightarrow X_w$. Soit $\mathcal{M}$ l'espace de module des fibres en droite à connexion sur X_K . C'est l'extension additive universelle de $\mathcal{T}_K := \text{Pic}^0(X_K)$:

$$(4.1) \quad 0 \rightarrow H^0(X_K, \Omega^1) \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{T}_K \rightarrow 0.$$

L'image inverse par F définit $V: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, et un endomorphisme de la suite exacte (4.1).

Sur $H^0(X_K, \Omega^1)$, V agit par multiplication par la valeur propre q de Frobenius qui a même valuation p -adique que q . Le nombre n étant pas un, la projection sur $\mathcal{T}$ induit une bijection

$$\text{Points fixes de } V \text{ sur } \mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \text{Points fixes sur } \mathcal{T}_K.$$

Proposition Le nombre de points fixes de V agissant sur le K -schéma $\mathcal{M}$ est (i.e. sur $\mathcal{M}(K)$) est

$$\sum (-1)^i \text{Tr}(V^*, H^i(\mathcal{M})) = \sum (-1)^i \text{Tr}(V^*, H_c^i(\mathcal{M}))$$

L'espace $\mathcal{M}$ est un fibré en droites affines sur $\mathcal{T}_K$. Complétons-le en un fibré en droites projectives, par adjonction d'une section ∞ "à l'infini".

Le morphisme V se prolonge à $\bar{\mathcal{M}}$. La section à l'infini est stable par V , le fibré normal à cette section est le fibré constant $H^0(X_K, \Omega')^\vee$ et, en terme de cette trivialisation

fibré normal = (section $\infty \xrightarrow{\sim} J_K$) $\times H^0(X_K, \Omega')^\vee$,
l'action de V sur le fibré normal est le produit de son action sur J_K et de la multiplication par β^{-1} .

Reliant cohomologie de $\mathcal{M}$ et de $\bar{\mathcal{M}}$, on a les suites exactes longues

$$\begin{aligned} \rightarrow H_c^*(\mathcal{M}) &\rightarrow H_c^*(\bar{\mathcal{M}}) \rightarrow H^*(\infty) \rightarrow \text{et} \\ \rightarrow H_\infty^*(\bar{\mathcal{M}}) &\rightarrow H^*(\bar{\mathcal{M}}) \rightarrow H^*(\mathcal{M}) \rightarrow \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} H_\infty^*(\bar{\mathcal{M}}) &= H_{\text{section } \infty}^* (\text{fibré normal à } \infty) \\ &= H^*(\infty) \otimes H_{\text{log}}^* (\text{droite } H^0(\Omega')^\vee) \end{aligned}$$

Sur le dernier facteur, la multiplication par $\beta^{-1}: H^0(\Omega')^\vee \rightarrow H^0(\Omega')^\vee$ induit l'action triviale.

On en conclut que V^* a les mêmes valeurs propres, qu'on le fasse agir sur $H^*(\infty)$ ou sur $H_\infty^*(\bar{\mathcal{M}})$. Les formules de Lefschetz proposées résultent dès lors des formules de Lefschetz pour $\bar{\mathcal{M}}$ et pour la section à l'infini.

Du point de vue p -adique, la multiplication par p est contractante, et cela rend plus naturel de considérer $\sum (-i)^i \text{Tr}(V^*, H^i(\mathcal{X}))$.

Plus précisément, $\mathcal{M}$ a une forme ~~sur~~ $\mathcal{M}_W$ sur $W(\mathbb{F}_q)$ naturelle : l'espace de modules des fibrés en droite à connexion sur X_W .

Pourant par $H^1(X_W, \Omega^1) \hookrightarrow_{q^n} H^1(X_W, \Omega^1)$,

on en déduit d'autres, notées $\mathcal{M}_W^{(n)}$. Elles définissent une suite croissante ^{exhaustive} de sous-espaces analytiques de $\mathcal{M}^{\text{an}}$, ^{ayant un voisinage} chacun relativement compact dans le suivant, et le caractère contractant de V est exprimé par le fait que V envoie $\mathcal{M}_W^{(n)}$ dans $\mathcal{M}_W^{(n-1)}$.