

① Notes d'accompagnement pour le deuxième exposé  
donné à l'IHES le 24 octobre 2013 dans le cadre du "tours  
d'arithmétique et de géométrie algébrique" par Vincent Lafforgue

$X$  courbe projective lisse sur  $\mathbb{F}_q$

$F$  son corps de fonctions

$G$  groupe réductif déployé sur  $F$

$N \subset X$  sous-schéma fini

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{F}_q$ ,  $E/\mathbb{Q}$  extension finie,  $E \ni q^{1/2}$

$\mathbb{H} \subset \mathbb{Z}(A)$  réseau  
 $\mathbb{Z}(F)$

$\text{Bun}_G$  champ tel que pour tout schéma  $S$  sur  $\mathbb{F}_q$

$$\text{Bun}_G(S) = \{ \mathcal{G} \mid G\text{-torsion sur } X \times S \}$$

$$\text{Bun}_{G,N}(S) = \{ \mathcal{G} \mid \mathcal{G}|_{N \times S} \cong G|_{N \times S} \}$$

En famille, si  $Q \subset X \times T$  est un diviseur de Cartier relatif effectif,

$\text{Bun}_{G,Q}$  champ au-dessus de  $T$  tel que pour  
 $S$  schéma sur  $T$ ,  $\text{Bun}_{G,Q}(S) = \{ \mathcal{G} \mid G\text{-torsion sur } X \times S$   
trivialisé sur  $X \times S \times_Q X \times T \}$

Pour toute partition (ordonnée)  $(I_1 \dots I_k)$  de  $I$  on avait introduit

$$\text{Hecke}_{\frac{(I_1 \dots I_k)}{I}}(S) = \{ (x_i)_{i \in I} : S \rightarrow X^I$$

$$\mathcal{G}_0 \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{G}_1 \rightarrow \dots \xrightarrow{\varphi_k} \mathcal{G}_k$$

où  $\mathcal{G}_i = G\text{-torsion sur } X \times S$

$$\varphi_j = \mathcal{G}_{j-1} \Big|_{X \times S \setminus \bigcup_{i \in I_j} U_{T,x_i}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_j \Big|_{X \times S \setminus \bigcup_{i \in I_j} U_{T,x_i}}$$

② Si  $W$  représentation irréductible de  $(\hat{G})^I$ ,  $W = \boxtimes W_i$ ,

$\text{Hecke}_{I, W}^{(I_1, \dots, I_k)}$  sous-champ fermé réduit de  $\text{Hecke}_{I, W}^{(I_1, \dots, I_k)}$

localement de type fini, défini par la condition suivante.

- si les  $x_i$  sont deux à deux disjoints, la modification en  $x_i$  est  $\leq$  coproduct dominant de  $G$  associé au poids dominant de  $W_i$
- en général on prend l'adhérence de Zariski.

Grassmannienne affine de Beilinson-Drinfeld

$\text{Gr}_{I, W}^{(I_1, \dots, I_k)}$  schéma sur  $X^I$  tel que pour tout schéma  $S$  sur  $\mathbb{F}_q$ ,

$$\text{Gr}_{I, W}^{(I_1, \dots, I_k)}(S) = \{ ((x_i)_{i \in I}, (y_0 \rightarrow \dots \rightarrow y_k)) \in \text{Hecke}_{I, W}^{(I_1, \dots, I_k)}(S) \}$$

plus une trivialisations de  $\mathcal{Y}_k$  (comme  $G$ -torsion sur  $X \times S$ )

Si  $I$  singleton,  $\text{Gr}_I^{(I)}$  indschéma au-dessus de  $X$  dont la fibre en  $x \in X$  est  $G(\mathbb{F}_x)/G(\mathbb{O}_x)$  (quotient fpqc).

Champs de courbes: Pour tout schéma  $S$  sur  $\mathbb{F}_q$ ,

$$\text{cht}_{I, W}^{(I_1, \dots, I_k)}(S) = \{ ((x_i)_{i \in I}, (y_0 \rightarrow \dots \rightarrow y_k)) \in \text{Hecke}_{I, W}^{(I_1, \dots, I_k)}(S), \}$$

plus un isomorphisme  $\tau y_0 = y_k$  où

$$\tau y_0 := (\text{Id}_X \times \text{Frob}_S)^*(y_0)$$

On rappelle que  $T_{x_i}$  est le graphe de  $x_i$  dans  $X \times S$ .

Notation pour les épaississements de ces graphes:

$T_{\sum n_i x_i}$  donné par l'équation  $\prod t_i^{n_i}$  si  $t_i$  équation de  $T_{x_i}$

$T_{\sum \infty x_i}$  le schéma formel égal à  $\varinjlim T_{\sum n_i x_i}$

③ On note  $G_{\sum n_i x_i}$  le schéma en groupes lisse sur  $X^I$  égal à la restriction à la Weil de  $G$  de  $T_{\sum n_i x_i} \subset X \times X^I \xrightarrow{\text{vers } X^I}$  (pour tout schéma  $S$  sur  $X^I$ ,  $G_{\sum n_i x_i}(S)$  est formé des sections de  $G$  sur  $T_{\sum n_i x_i} \subset X \times S$ ).

En passant à la limite,  $G_{\sum \infty x_i}$  schéma en groupes formels sur  $X^I$ .

On a une action de  $G_{\sum \infty x_i}$  sur  $\text{Gr}_{\mathbb{I}}^{(\mathbb{I}_1, \dots, \mathbb{I}_k)}$ .

En effet, ~~par~~ d'après le lemme de descente de Beauville-Laszlo,

$$\text{Gr}_{\mathbb{I}}^{(\mathbb{I}_1, \dots, \mathbb{I}_k)}(S) = \left\{ (G_0 \rightarrow \dots \rightarrow G_k = G), \right.$$

$$G_i = G\text{-torsion sur } T_{\sum \infty x_i} \subset X \times S$$

$$\varphi_j = \varphi_{j-1} \Big|_{T_{\sum \infty x_i} \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{I}_j} T_{x_i}} \cong \varphi_j \Big|_{T_{\sum \infty x_i} \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{I}_j} T_{x_i}}$$

et  $G_{\sum \infty x_i}$  agit en changeant la trivialisation

Si  $\mathbb{I}$  singleton,  $(\text{Gr}_{\mathbb{I}}^{(\mathbb{I})})_x = G(F_x)/G(O_x)$

et  $(G_{\infty x})_x = G(O_x)$  agit par multiplication à gauche et pour  $W$  rep. irred. de  $\hat{G}$

$(\text{Gr}_{\mathbb{I}}^{(\mathbb{I})}, W)_x =$  adhérence de Zariski de la  $G(O_x)$ -orbite sur  $G(F_x)/G(O_x)$  associée au coproduct dominant de  $G$  qui correspond au péro dominant de  $W$ .

Coalescence (ou fusion):  $\gamma: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{J}$  une application

morphisme diagonal:  $\Delta_\gamma: X^{\mathbb{J}} \rightarrow X^{\mathbb{I}}$

$$\text{Gr}_{\mathbb{I}, W}^{(\mathbb{I})} \times_{X^{\mathbb{I}}} X^{\mathbb{J}} = \text{Gr}_{\mathbb{J}, W^\gamma}^{(\mathbb{J})}$$

où  $W^\gamma =$  représentation de  $(\hat{G})^{\mathbb{J}} \rightarrow (\hat{G})^{\mathbb{I}}$  sur  $W$

( $W^\gamma$  n'est pas forcément irréductible et on définit

$\text{Gr}_{\mathbb{J}, W^\gamma}^{(\mathbb{J})}$  comme la réunion des  $\text{Gr}_{\mathbb{J}, V}^{(\mathbb{J})}$  pour  $V$  constituant irréductible de  $W^\gamma$ ).

(+) L'équivalence de Satake géométrique fournit pour tout ensemble fini  $I$  un foncteur CANONIQUE

$$W \text{ représentation de } (\hat{G})^I \longmapsto \mathcal{Y}_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)} \text{ faisceau pervers}$$

$$G_{\sum \infty x_i} \text{ équivariant sur } Gr_I^{(I_1, \dots, I_k)}$$

$$\text{supporté exactement sur } Gr_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)}$$

vérifiant les propriétés suivantes

- si  $W$  irréductible, il est isomorphe au faisceau d'intersection de  $Gr_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)}$

- en notant  $\pi : Gr_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)} \rightarrow Gr_{I,W}^{(I)}$

$$(\mathcal{Y}_0 \xrightarrow{\varphi_1} \dots \xrightarrow{\varphi_k} \mathcal{Y}_k = G) \longmapsto (\mathcal{Y}_0 \xrightarrow{\varphi_k - \varphi_1} \mathcal{Y}_k = G)$$

le morphisme d'oubli, on a  $R\pi_* (\mathcal{Y}_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)}) = \mathcal{Y}_{I,W}^{(I)}$

- si  $W = \boxtimes W_j$  où  $W_j$  représentation de  $(\hat{G})_{I_j}$ ,

$$Gr_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)} / G_{\sum_{i \in I} \infty x_i} \longrightarrow \prod_{j=1}^k Gr_{I_j, W_j}^{(I_j)} / G_{\sum_{i \in I_j} \infty x_i}$$

$$\left( \begin{array}{c} (\mathcal{Y}_0 \xrightarrow{\varphi_1} \dots \xrightarrow{\varphi_k} \mathcal{Y}_k) \\ (\mathcal{Y}_i \text{ torsion sur } \prod_{i \in I} \mathbb{T}_{\sum \infty x_i}) \\ \varphi_j \text{ isomorphisme} \\ \text{sur } \prod_{i \in I} \mathbb{T}_{\sum \infty x_i} \setminus \cup_{i \in I_j} \mathbb{T}_{x_i} \end{array} \right) \longmapsto \left( \begin{array}{c} (\mathcal{Y}_{j-1} \xrightarrow{\varphi_j} \mathcal{Y}_j) \\ \prod_{i \in I_j} \mathbb{T}_{\sum \infty x_i} \\ \varphi_j \text{ isomorphisme sur} \\ \prod_{i \in I_j} \mathbb{T}_{\sum \infty x_i} \setminus \cup_{i \in I_j} \mathbb{T}_{x_i} \end{array} \right)$$

alors on a un isomorphisme canonique entre  $\mathcal{Y}_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)}$  et

l'image inverse de  $\prod_{j=1}^k \mathcal{Y}_{I_j, W_j}^{(I_j)}$

(5) - (Injection) pour toute application  $\gamma: I \rightarrow J$ ,  
 en notant  $\Delta_\gamma: X^J \rightarrow X^I$  le morphisme diagonal,  
 $(x_j)_{j \in J} \mapsto (x_{\gamma(i)})_{i \in I}$   
 $Gr_{\Sigma}^{(J)} = X^J \times_{X^I} Gr_I^{(I)} \subset Gr_I^{(I)}$ , alors  $\gamma_{J,W}^{(J)}$  est  
 canoniquement isomorphe à l'image inverse de  $\gamma_{I,W}^{(I)}$ .

On rappelle que  $G_{\Sigma \infty x_i}$  agit sur  $Gr_I^{(I_1, \dots, I_k)}$  (par changement de  
 la trivialisations de  $\mathcal{Y}_k$ ).

L'action de  $G_{\Sigma \infty x_i}$  sur  $Gr_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)}$  se factorise par  $G_{\Sigma n_i x_i}$   
 où les entiers  $n_i$  sont assez grands en fonction de  $W$ .

D'où  $\text{cht}_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)} \rightarrow Gr_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)} / G_{\Sigma \infty x_i}$

$(\mathcal{Y}_0 \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{Y}_k \cong \tau \mathcal{Y}_0) \mapsto (\mathcal{Y}_0|_{\tau_{\Sigma \infty x_i}} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{Y}_k|_{\tau_{\Sigma \infty x_i}})$

se factorise en un morphisme (de champs d'Artin)

$\text{cht}_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)} \rightarrow Gr_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)} / G_{\Sigma n_i x_i}$

qui est lisse.

Esquisse de preuve de la lissité: il suffit de montrer que pour

$z \in Gr_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)}(S)$ , le morphisme  $\text{cht}_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)} \times_S \rightarrow S$

est lisse. Or le champ de départ est l'égalisateur  $Gr_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)} / G_{\Sigma n_i x_i}$

- du morphisme d'oubli  $\text{Bun}_{G, \Sigma n_i x_i} \times_S \rightarrow \text{Bun}_G \times_S$ , qui est lisse

- du morphisme  $\text{Bun}_{G, \Sigma n_i x_i} \times_S \xrightarrow{(a_z, \text{Id}_S)} \text{Bun}_G \times_S \xrightarrow{\text{Frob}_{\text{Bun}_G} \times \text{Id}_S} \text{Bun}_G \times_S$

où  $a_z$  est la modification par  $z$ .

⑥ On définit  $\mathcal{F}_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)}$  comme le faisceau pervers sur  $\text{cht}_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)}$  (avec la normalisation relative à  $X^I$ )

égal à l'image inverse du faisceau de Rukovic-Vilonen  $\mathcal{Y}_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)}$

par le morphisme lisse  $\text{cht}_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)} \rightarrow \text{Gr}_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)} / G_{\sum n_i x_i}$

le foncteur  $W \mapsto \mathcal{F}_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)}$  est canonique et par exemple, si  $W$  est irréductible,  $\mathcal{F}_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)}$  est égal au faisceau d'intersection de  $\text{cht}_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)}$

si  $W$  est égal à la cohomologie totale (relativement à  $X^I$ )

du faisceau d'intersection de  $\text{Gr}_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)}$

(cela résulte de la construction du foncteur fibre dans Rukovic-Vilonen, et on précise que dans la contrainte de commutativité, ils changent le signe en fonction de la parité du degré cohomologique).

Isomorphismes de coalescence (ou fusion):

pour toute application  $\mathcal{Y}: I \rightarrow J$ ,  $\text{cht}_{J,W^{\mathcal{Y}}}^{(J)} = \text{cht}_{I,W}^{(I)} \times_{X^I} X^J = \text{cht}_{I,W}^{(I)}$

et  $\mathcal{F}_{J,W^{\mathcal{Y}}}^{(J)}$  est canoniquement isomorphe à l'image inverse de  $\mathcal{F}_{I,W}^{(I)}$ .

Grâce à la compatibilité de l'équivalence de Satake géométrique à la convolution,

si  $W = \boxtimes W_j$ ,  $\mathcal{F}_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)}$  est aussi égal à l'image inverse de  $\prod_{j=1}^k \mathcal{Y}_{I_j, W_j}^{(I_j)}$

par le morphisme  $\text{cht}_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)} \rightarrow \prod_{j=1}^k \text{Gr}_{I_j, W_j}^{(I_j)} / G_{\sum_{i \in I_j} n_i x_i}$

$$\left( \mathcal{Y}_{I_0} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{Y}_{I_k} = \mathbb{F} \mathcal{Y}_{I_0} \right) \mapsto \left( \mathcal{Y}_{I_j} \right)_{\prod_{i \in I_j} \sum_{i \in I_j} n_i x_i} \rightarrow \mathcal{Y}_{I_0} \Big|_{\prod_{i \in I_0} \sum_{i \in I_0} n_i x_i}$$

(7)

$\text{Ch}_t^{(I_1, \dots, I_k)}_{N, I, W} =$  revêtement étale de groupe de Galois  $G(O_N)$   
 de  $\text{Ch}_t^{(I_1, \dots, I_k)}_{I, W} \times (X \setminus N)^{\mathbb{I}}$   
 obtenu en trivialisant le clivage sur  $N \times S$ .

~~On note  $\rho = \text{Ch}_t^{(I_1, \dots, I_k)}_{N, I, W} \rightarrow (X \setminus N)^{\mathbb{I}}$~~

On définit  $\text{Ch}_t^{(I_1, \dots, I_k), \leq N}_{N, I, W}$  (où  $\rho$  copies dominant de  $G^{ad}$ )  
 par troncature sur le polygone de Harder-Narasimhan de  $G_0$ .

On note  $\rho^{\leq N} : \text{Ch}_t^{(I_1, \dots, I_k), \leq N}_{N, I, W} \xrightarrow[\underbrace{\quad}_{\text{champ de Deligne - Mumford de type fini}}]{\quad} (X \setminus N)^{\mathbb{I}}$

et on pose

$$\mathcal{H}_{c, N, I, W}^{0, \leq N} = R^0(\rho^{\leq N})_* \left( \mathcal{F}_{N, I, W}^{(I_1, \dots, I_k)} \right)_{\text{Ch}_t^{(I_1, \dots, I_k), \leq N}_{N, I, W}}$$

faisceau constructible sur  $(X \setminus N)^{\mathbb{I}}$  (ne dépend pas du choix de  $(I_1, \dots, I_k)$ )

Isomorphisme de recollement : pour toute application  $\rho : I \rightarrow J$ ,  
 en notant  $\Delta_\rho : (X \setminus N)^{\mathbb{I}} \rightarrow (X \setminus N)^{\mathbb{J}}$  le morphisme diagonal,

on a un isomorphisme canonique (et fonctoriel en  $W$ )

$$\Delta_\rho^* (\mathcal{H}_{c, N, I, W}^{0, \leq N}) \cong \mathcal{H}_{c, N, J, W^{\rho}}^{0, \leq N}$$

Morphismes de Frobenius partiels Soit  $J \subset I$  une partie.

On note  $\text{Frob}_J : X^{\mathbb{I}} \rightarrow X^{\mathbb{I}}$   
 $(x_i) \mapsto (x'_i)$  avec  $\begin{cases} x'_i = \text{Frob}(x_i) & \text{si } i \in J \\ x'_i = x_i & \text{sinon} \end{cases}$

On a alors un morphisme canonique

$$F_J : \text{Frob}_J^* (\mathcal{H}_{c, N, I, W}^{0, \leq N}) \rightarrow \mathcal{H}_{c, N, I, W}^{0, \leq N+K}$$

(8) où  $\kappa$  dépend de  $W$ . On le définit grâce au morphisme de Frobenius partiel (introduit par Drinfeld)

$$Fr_{\mathbb{I}}: \text{clit}_{\mathbb{I}, W}^{(\mathbb{I}_1, \dots, \mathbb{I}_k)} \longrightarrow \text{clit}_{\mathbb{I}, W}^{(\mathbb{I}_2, \dots, \mathbb{I}_k, \mathbb{I}_1)}$$

$$(y_0 \mapsto \dots \mapsto y_k \stackrel{\sim}{=} {}^\tau y_0) \mapsto (y_1 \mapsto \dots \mapsto y_0 \mapsto {}^\tau y_1)$$

(où  $(\mathbb{I}_1, \dots, \mathbb{I}_k)$  est n'importe quelle partition telle que  $\mathbb{I}_1 = \mathbb{I}$ ).

Grâce à l'isomorphisme entre  $F_{\mathbb{I}, W}^{(\mathbb{I}_1, \dots, \mathbb{I}_k)}$  et l'image inverse de  $\prod_{j=1}^k \mathcal{F}_{\mathbb{I}_j, W_j}^{(\mathbb{I}_j)}$  défini en bas de la page 6, on a  $Fr_{\mathbb{I}}^* (F_{\mathbb{I}, W}^{(\mathbb{I}_2, \dots, \mathbb{I}_k, \mathbb{I}_1)}) \simeq F_{\mathbb{I}, W}^{(\mathbb{I}_1, \dots, \mathbb{I}_k)}$

et on en déduit le morphisme  $F_{\mathbb{I}}$  du bas de la page 7. (il augmente  $\mu$  en  $\mu + \kappa$  parce que  $Fr_{\mathbb{I}_1}$  change  $y_0$ ).

Opérateurs de Hecke On rappelle que  $K_N = \text{Ker}(G(\mathbb{O}) \rightarrow G(\mathbb{O}_N))$

Pour toute fonction  $f \in C_c(K_N \backslash G(\mathbb{A}) / K_N, E)$ , on a un

morphisme  $T(f): \mathcal{H}_{\mathcal{C}, N, \mathbb{I}, W}^{0, \leq \mu} \longrightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{C}, N, \mathbb{I}, W}^{0, \leq \mu + \kappa}$

$$\left. \begin{array}{c} \mathcal{H}_{\mathcal{C}, N, \mathbb{I}, W}^{0, \leq \mu} \\ (X \setminus \mathcal{C})^{\mathbb{I}} \end{array} \right\} \longrightarrow \left. \begin{array}{c} \mathcal{H}_{\mathcal{C}, N, \mathbb{I}, W}^{0, \leq \mu + \kappa} \\ (X \setminus \mathcal{C})^{\mathbb{I}} \end{array} \right\}$$

où  $\mathcal{C} \supset S$  est un ensemble fini de places tel que  $f$  soit triviale en dehors de  $\mathcal{C}$  et  $\kappa$  dépend de  $f$ . Les morphismes sont définis à l'aide des correspondances de Hecke (comme pour les variétés de Shimura). On verra plus tard que  $T(f)$  s'étend naturellement en un morphisme sur  $(X \setminus N)^{\mathbb{I}}$  tout entier.

### Opérateurs de création et d'annihilation

$W$  représentation de  $(\hat{G})^{\mathbb{I}}$

$\bullet U$  représentation de  $(\hat{G})^{\mathbb{J}}$   $\mathcal{Y}_{\mathbb{J}}: \mathbb{J} \rightarrow \{0\}$

On se donne  $\alpha: 1 \rightarrow U^{\mathbb{J}}$  et  $\bar{\alpha}: U^{\mathbb{J}} \rightarrow 1$  des morphismes de représentations de  $\hat{G}$ . Autrement dit  $\alpha \in U$  et  $\bar{\alpha} \in U^*$  sont invariants par l'action diagonale de  $\hat{G}$ .



$$(9) \quad \mathcal{L}_x^\# : \mathcal{H}_{c, N, I, W}^{0, \leq P} \boxtimes E|_{X \setminus N} \rightarrow \mathcal{H}_{c, N, I \cup J, W \boxtimes U}^{0, \leq P} \Big|_{(X \setminus N)^I \times \Delta(X \setminus N)}$$

est défini par

$$\begin{array}{ccc} & \downarrow \mathcal{I} & \\ \mathcal{H}_{c, N, I \cup \{0\}, W \boxtimes 1}^{0, \leq P} & \xrightarrow{\mathcal{H}(x)} & \mathcal{H}_{c, N, I \cup \{0\}, W \boxtimes U^I}^{0, \leq P} \\ & & \uparrow \mathcal{I} \end{array}$$

(où  $E|_{X \setminus N}$  est le faisceau constant et les flèches verticales sont des isomorphismes de  $\mathbb{C}$ -algèbres).

On définit de même le morphisme d'annihilation  $\mathcal{L}_{\Xi}^b$  qui va dans l'autre sens (on renverse le sens des 2 flèches horizontales et on remplace  $\mathcal{H}(x)$  par  $\mathcal{H}(\Xi)$ ).

Les morphismes sont transposés l'un de l'autre au sens suivant.

Soit  $\theta : \hat{G} \rightarrow \hat{G}$  l'involution de Chevalley.

Si  $W$  est irréductible,  $W^{*, \theta}$  est isomorphe à  $W$ , mais pas canoniquement. Grâce à la dualité dans Pirkovic-Vilonen, on a un isomorphisme canonique, et fonctoriel en  $W$  :

$$\mathbb{D}(\overline{\mathcal{F}}_{N, I, W}^{(I_1, \dots, I_k)}) \cong \overline{\mathcal{F}}_{N, I, W^{*, \theta}}^{(I_1, \dots, I_k)}$$

D'où des accouplements

$$B : \mathcal{H}_{c, N, I, W^{*, \theta}}^{0, \leq P} \otimes \mathcal{H}_{c, N, I, W}^{0, \leq P} \rightarrow E_{(X \setminus N)^I}$$

et les ~~spéc~~ morphismes de réaction et d'annihilation sont transposés l'un de l'autre relativement à  $B$ .

⑩ Soit  $v \in (X \setminus N)$ ,  $V$  une rep. irréductible de  $\hat{G}$   
 $W$  une représentation de  $(\hat{G})^\Gamma$

$h_{V,v} \in C_c(G(O_v) \backslash G(F_v) / G(O_{v^*}), E)$  associée à  $V$  par  
 l'isomorphisme de Satake.

Par une correspondance de Hecke (avec modification en  $v$ )  
 on a défini le morphisme

$$T(h_{V,v}) : \mathcal{H}_{c, N, I, W}^{0, \leq \mu} \Big|_{(X \setminus (N \cup v))^\Gamma} \rightarrow \mathcal{H}_{c, N, I, W}^{0, \leq \mu + k} \Big|_{(X \setminus (N \cup v))^\Gamma}$$

Soyent  $\delta_v : 1 \rightarrow V \otimes V^*$  et  $ev_v : V \otimes V^* \rightarrow 1$  les morphismes naturels.

On considère la composition

$$\mathcal{H}_{c, N, I, W}^{0, \leq \mu} \boxtimes E_v \downarrow \mathcal{E}_{\delta_v}^\#$$

$$\mathcal{H}_{c, N, I \cup \{1, 2\}, W \boxtimes V \boxtimes V^*}^{0, \leq \mu} \Big|_{(X \setminus N)^\Gamma \times \Delta(v)} \downarrow (F_{\{1, 2\}})^{\deg(v)}$$

$$\mathcal{H}_{c, N, I \cup \{1, 2\}, W \boxtimes V \boxtimes V^*}^{0, \leq \mu + k} \Big|_{(X \setminus N)^\Gamma \times \Delta(v)} \downarrow \mathcal{E}_{ev_v}^b$$

$$\mathcal{H}_{c, N, I, W}^{0, \leq \mu + k} \boxtimes E_v$$

On a une équivalence entre

- les faisceaux  $F$  sur  $(X \setminus N)^\Gamma \times v$ , équivariants par le Frobenius partiel en  $v$ , c'est-à-dire munis d'un isomorphisme  $(\text{Id}_{(X \setminus N)^\Gamma} \times \text{Frob}_v)^* F \simeq F$
- les faisceaux sur  $(X \setminus N)^\Gamma \times v$  dont l'itérée  $\deg(v)$  fois est l'identité.

(11) La composition  $\bar{u}$  - dessus commute avec le Frobenius  
 partiel en  $v$  (car  $\mathcal{L}_{\bar{v}}^\#$  et  $\mathcal{L}_{ev}^b$  l'entraînent avec  $F_{2,2}$  et  
 $F_{2,1}$ , donc  $F_{2,1}^{\deg(v)}$ , commutent avec  $F_{2,2}$ ) -

Elle ~~se~~ descend donc en

$$S_{V,v} : \mathcal{H}_{c, N, I, W}^{0, \leq N} \rightarrow \mathcal{H}_{c, N, I, W}^{0, \leq N+K}$$

Prop  $T(h_{V,v})$  est égal à la restriction de  $S_{V,v}$  à  $(X \setminus (NUv))^I$ .

Le prolongement de  $T(h_{V,v})$  permettra d'énoncer Eichler-Simons,

(dont la preuve sera, grâce à la définition de  $S_{V,v}$ ,  
 un simple calcul d'algèbre tensorielle, inspiré d'une preuve  
 de Hamilton - Cayley).

Esquisse de la preuve dans un cas simple où tout est lisse

Si  $V$  et  $W$  sont minuscules (et si on choisit une partition de  $I$  par  
 des singletons, ce que j'avais oublié dans l'esquisse de la proposition 0.5  
 dans l'introduction de la version 4 de l'article sur arXiv) tous les  
 champs sont lisses. En fait  $S_{V,v}$  s'écrit comme la composée de

3 correspondances cohomologiques, ~~doit être la composée~~ <sup>et cette composée</sup> qui est supportée par  
 la correspondance de Hecke, qui est finie. Il suffit donc de la  
 calculer au point générique de  $\text{cht}_{N, I, W}^{(I)}$  et l'hypothèse que  $W$   
 est minuscule ne sert à rien. On suppose donc

$V$  minuscule et  $\deg(v) = 1$ .

On pose  $Z^{(I)} = \text{cht}_{N, I, W}^{(I)} \Big|_{(X \setminus (NUv))^I}$  ~~et on note  $Z^{(I)}$~~   
~~le lieu lisse~~

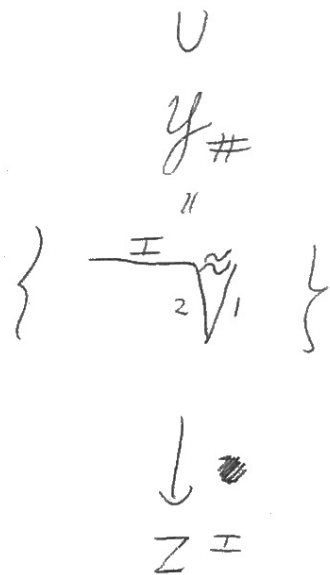
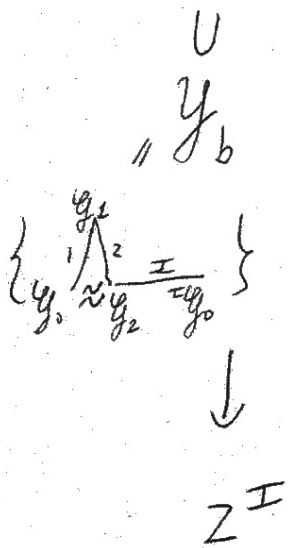
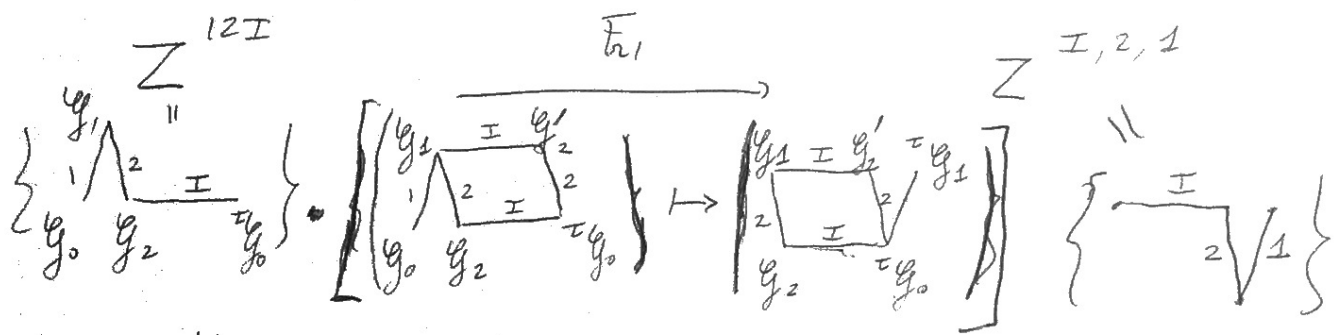
(12) On note ~~...~~

$$Z^{12I} = \text{clat} \left( \{1\}, \{2\}, I \right) \Bigg| \begin{array}{l} \cancel{N, I, U} \\ N, I, U, \{1, 2\}, W \otimes V \otimes V^* \end{array} (X \setminus (N \cup U))^I \times \Delta(v)$$

On a  $Z^{12I} = Z^{1I2} = Z^{I12}$  car seul importe l'ordre des pattes 1 et 2.

On introduit aussi  $Z^{I21} = \text{clat} \left( I, \{2\}, \{1\} \right) \Bigg| \begin{array}{l} N, I, U, \{1, 2\}, W \otimes V \otimes V^* \end{array} (X \setminus (N \cup U))^I \times \Delta(v)$

(on a  $Z^{I21} = Z^{2I1} = Z^{21I}$ )

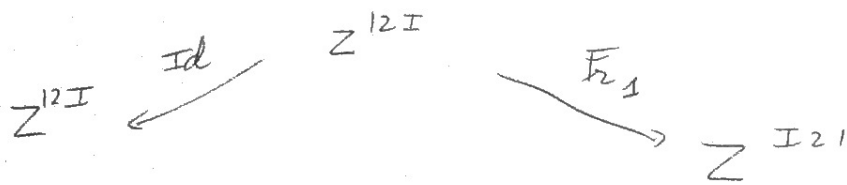


$$\{ g_0 \xrightarrow{I} g_0 \}$$

cette correspondance  
cohomologique entre  $Z^{12I}$  et  $Z^I$   
réalise  $\mathcal{L}_{ev}^b$

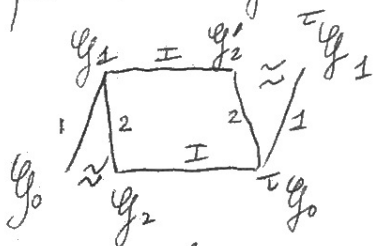
cette correspondance  
cohomologique entre  
 $Z^I$  et  $Z^{I21}$   
réalise  $\mathcal{L}_{ev}^\#$ .

(13) A  $\mathbb{F}_2$ , on associe la correspondance "image inversée"

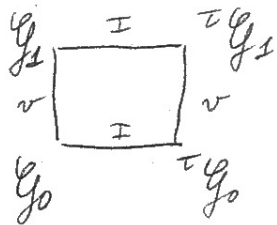


de  $Z^{I2I}$  vers  $Z^{12I}$

La composée de ces 3 correspondances cohomologiques est supportée par les diagrammes



En contractant les isomorphismes on obtient les diagrammes



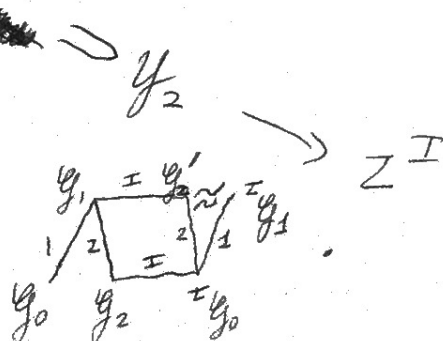
où  $(g_0 \rightarrow \tau g_0)$  et  $(g_1 \rightarrow \tau g_1)$  appartiennent à  $Z^I$  et les flèches verticales sont une modification en  $v$  (bornée par  $V$ ).

La composée des 3 correspondances cohomologiques (qui réalise  $S_{V,\sigma}$ ) est donc supportée par la correspondance de Hecke en  $v$  entre  $Z^I$  et lui-même (qui réalise  $T/(h_{V,\sigma})$ ).

La composée des correspondances cohomologiques associées à  $\mathbb{F}_2$  et  $Y_{\#}$  est supportée par  $Z^{12I}$

où  $Y_2 = Z^{12I} \times_{Z^{I2I}} Y_{\#}$

classifie les diagrammes



(14) On notera aussi  $Y_1 = Y_b$ .

Lorsque  $V$  est minuscule et  $\deg(v) = 1$ , le calcul de la composée des 3 correspondances cohomologiques se réduit donc à l'intersection de  $Y_1$  et  $Y_2$  dans ~~le~~  $Z^{12I}$  et il s'avère que cette intersection est ~~triviale~~ transverse (dans le lieu lisse du champ de Deligne-Dumford  $Z^{12I}$  où  $Y_1$  et  $Y_2$  sont deux sous-champs fermés lisses).

Ceci termine l'esquisse de la preuve de la proposition lorsque

$V$  est minuscule et  $\deg(v) = 1$  (on rappelle que comme  $V$  est minuscule  $h_{V,\sigma}$  est simplement la fonction égale à une certaine puissance de  $q^{1/2}$  sur la  $G(O_v)$  orbite sur  $G(F_v)/G(O_v)$  associée au poids dominant de  $V$ ).

On va maintenant esquisser la preuve du cas général (en omettant certains arguments nécessaires lorsque  $\deg(v) > 1$ )

Rappels sur les correspondances cohomologiques (SGA 5)

Une correspondance cohomologique de  $(A_1, \mathcal{F}_1)$  vers  $(A_2, \mathcal{F}_2)$  (avec  $A_i$  champ d'Artin et  $\mathcal{F}_i \in D_c^b(A_i, E)$ ),

Supportée par une correspondance

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ & \swarrow \downarrow \searrow & \\ & a_1, a_2 & \\ A_1 & & A_2 \end{array}$$

est la donnée d'un morphisme  $a_1^* \mathcal{F}_1 \rightarrow a_2^! \mathcal{F}_2$

ou de façon équivalente  $a_2,! a_1^* \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$ .

Si on a un carré commutatif  $\begin{array}{ccc} & C & \\ & \swarrow \downarrow \searrow & \\ A_1 & & A_2 \end{array}$ ,  $a_i$  est propre (+ les hypothèses pour rester dans  $D_c^b$ )

(15) la correspondance cohomologique induit un morphisme

$$\pi_{1,!} \mathbb{F}_1 \rightarrow \pi_{2,!} \mathbb{F}_2$$

Voici la définition de la correspondance cohomologique

de  $(Z^{12I}, \mathbb{F}^{12I})$  vers  $(Z_{xv}^I, \mathbb{F}_{\Delta E}^I)$  supportée par

$$Z^{12I} \supset Y_b \rightarrow Z_{xv}^I, \text{ et qui réalise } \mathcal{E}_{ev_V}^b$$

Comme les pattes 1, 2 de  $I$  sont disjointes, on a des morphismes lisses

$$Z^{12I} \rightarrow \left( \text{Gr}_{\substack{\{1\}, \{2\} \\ \{1,2\}, V \otimes V^*}}^{\Delta(\sigma)} \right) / G_{nv} \times \mathbb{R}^{(I)}$$

$$\text{où } \mathbb{R}^{(I)} = \text{Gr}_{I, W}^{(I)} / G_{\sum_{i \in I} n_i \times i}$$

$$\text{et } Z^I \rightarrow \text{vsk}^{(I)}$$

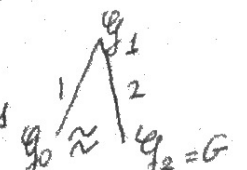
tel que  $\mathbb{F}^{12I}$  et  $\mathbb{F}^I$  soient les images inverses des

faisceaux de Pinkov - Vilonen. Il suffit donc de définir une correspondance cohomologique ( $G_{nv}$ -équivalente)

$$\text{de } \left( \text{Gr}_{\substack{\{1\}, \{2\} \\ \{1,2\}, V \otimes V^*}}^{\Delta(\sigma)} \right) / G_{nv} \text{ vers } (v, E_{\sigma})$$

supportée par

$$\text{Gr}_{\substack{\{1\}, \{2\} \\ \{1,2\}, V \otimes V^*}}^{\Delta(\sigma)} \Rightarrow \mathcal{Y}_b \rightarrow v$$

où  $\mathcal{Y}_b$  est le sous-schéma fermé classifiant les diagrammes 

⑩ On a un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} \text{Gr}_{\{1,2\}, V \boxtimes V^*}^{(\{1\}, \{2\})} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{Y}_0 \\ \downarrow \pi & & \downarrow p \\ \text{Gr}_{\{0\}, V \boxtimes V^*}^{(\{0\})} & \xrightarrow{\nu} & \text{Gr}_{\{1,2\}, V \boxtimes V^*}^{(\{1,2\})} \end{array}$$

(où  $\pi$  est le morphisme d'oubli qui associe  $(\mathcal{Y}_0 \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{Y}_1 \xrightarrow{\phi_2} \mathcal{Y}_2 = G)$  sur  $(\mathcal{Y}_0 \xrightarrow{\phi_2 \phi_1} \mathcal{Y}_2 = G)$ ).

On considère la composée

$$\otimes \pi! (\mathcal{Y}_{V \boxtimes V^*}) \simeq \mathcal{Y}_{V \otimes V^*} \rightarrow \mathcal{Y}_1 = \nu_! (E_\sigma)$$

(de morphismes ~~de~~ de faisceaux parus sur  $\text{Gr}_{\{0\}, V \otimes V^*}^{(\{0\})}$ )  
 où le premier isomorphisme vient du produit de fusion (ou de convolution) dans Nikolic-Vilonen.

et le deuxième est associé à  $\text{ev}_V: V \otimes V^* \rightarrow \mathbb{1}$

La correspondance cohomologique recherchée

de  $(\text{Gr}_{\{1,2\}, V \boxtimes V^*}^{(\{1\}, \{2\})} |_{\Delta(\sigma)}, \mathcal{Y}_{V \boxtimes V^*})$  vers  $(\nu, E_\sigma)$  est alors donnée

par la composée 
$$p_! \nu^* (\mathcal{Y}_{V \otimes V^*}) \simeq \nu^* \pi! (\mathcal{Y}_{V \boxtimes V^*}) \rightarrow E_\sigma$$

(de morphismes de faisceaux sur  $\sigma$ )

où le premier isomorphisme est le changement de base propre et le deuxième morphisme est obtenu par adjonction à partir de  $\otimes$  ci-dessus.



(17) La correspondance cohomologique "image inverse" associée au morphisme de Frobenius partiel

va de  $(Z^{I2}, \mathcal{F}^{I2})$  vers  $(Z^{12I}, \mathcal{F}^{12I})$ ,

est supportée par  $Z^{I2} \xleftarrow{\mathcal{F}} Z^{12I} \xrightarrow{\text{Id}} Z^{12I}$

et associée à l'isomorphisme  $\mathcal{F}_I^*(\mathcal{F}^{I2}) \simeq \mathcal{F}^{12I}$

La composition des 3 correspondances cohomologiques est une correspondance cohomologique de  $(Z^I, \mathcal{F}^I)$  vers lui-même (avec  $\mathcal{F}^I$  égal au faisceau d'intersection de  $Z^I$ )

et elle est ~~une~~ supportée par la correspondance de Hecke

(ou  $v$ , bornée par  $V$ )  ~~$Z^I$~~   $Z^I \xleftarrow{pr_1} T^I \xrightarrow{pr_2} Z^I$

qui est finie et étale (et on a  $pr_1^*(\mathcal{F}^I) \simeq pr_2^*(\mathcal{F}^I)$  canoniquement)

Donc elle est donnée par le produit par une fonction localement constante sur  $T^I$  qu'il s'agit de calculer (et d'identifier à la fonction constante sur  $T^I$  qui vient de  $h_{V,v}$ )

La preuve procède en 2 étapes

(a)  $S_{V,v}$  et  $T(h_{V,v})$  sont de nature locale, c'est-à-dire

qu'on a des morphismes lisses des châteaux globaux vers

les châteaux restreints (analogues aux Barsotti-Tate tronqués)

et les 3 correspondances cohomologiques ci-dessus sont des

images inverses par ces morphismes <sup>lisses</sup> de correspondances cohomologiques

analogues entre les champs de châteaux restreints. Le calcul de leur

composition s'effectue donc entre ces champs de châteaux restreints

et ne dépend donc que des données locales

(18) (i.e. restreintes à un disque formel en  $v$ )

Il suffit donc de montrer la proposition lorsque  $I = \emptyset, W = 1$   
 et  $\deg(v) = 1$  (par une fonction de  $C_c(G(\mathbb{F}_r)/G(\mathbb{O}_r), E)$  est caractérisée  
 par son action sur les formes automorphes de niveau  $N$  arbitraire)

(b) dans le cas où  $I = \emptyset, W = 1$  et  $\deg(v) = 1$ ,  
 On se place Le niveau  $N$  est arbitraire, mais on l'omet des notations.

On note  $H = \text{Hecke}_{J, V}^{(J)} \Big|_v$  (où  $J$  est un singleton  
 qui correspondra à la patte 1 ou à la patte 2)  
 de sorte que  $H$  classifie les diagrammes  $(\mathcal{G} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G}')$   
 où  $\phi$  est une modification en  $v$ , bornée par  $V$ .

Alors ~~le~~  $Z^{12} = \text{cht}_{\{1, 2\}, V \boxtimes V^*}^{\{1, 2\}, \{2, 1\}} \Big|_{\Delta(v)}$  est égal à

$\left\{ \left( (\mathcal{G}_1 \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{G}'_1), (\mathcal{G}_2 \xrightarrow{\phi_2} \mathcal{G}'_2) \right) \in H \times H, \mathcal{G}'_1 \cong \mathcal{G}'_2 \text{ et } \mathcal{G}_2 = {}^\tau \mathcal{G}_1 \right\}$

(puisque le chtouva est donné par le diagramme

$$\mathcal{G}_1 \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{G}'_1 \cong \mathcal{G}'_2 \xleftarrow{\phi_2} \mathcal{G}_2 = {}^\tau \mathcal{G}_1$$

Comme les égalités  $\mathcal{G}'_1 = \mathcal{G}'_2$  et  $\mathcal{G}_2 = {}^\tau \mathcal{G}_1$  ont lieu dans  $\text{Bun}_{\mathcal{G}}$   
 qui est lisse, le calcul de la composée des 3 correspondances  
 se ramène au calcul de la composée des 3 correspondances

suivantes (où  $\mathcal{F} = \mathbb{I}C_H$  ~~est~~ vient du faisceau de Pirkovic-Vilonen  $\mathcal{F}_V$ )

-  $\mathcal{E}_{\#}$  de  $(v, E_v)$  vers  $(H \times H, \mathcal{F} \boxtimes \mathbb{D}\mathcal{F})$

supporté par  $v \xleftarrow{p} H \xrightarrow{\Delta} H \times H$

et venant du morphisme  $p^*(E_v) = E_H \rightarrow \text{RHom}(\mathcal{F}, \mathcal{F}) = \Delta^!(\mathcal{F} \boxtimes \mathbb{D}\mathcal{F})$

-  $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}$  de  $(H \times H, \mathcal{F} \boxtimes \mathbb{D}\mathcal{F})$  vers lui-même, qui est la correspondance  
 image inverse associée au morphisme de Frobenius partiel  $\text{Frob}_H \times \text{Id}_H$

(19) -  $\mathcal{E}_b$  de  $(H \times H, \mathcal{F} \boxtimes \mathcal{D}\mathcal{F})$  vers  $(v, E_v)$

supportée par  $H \times H \xleftarrow{\Delta} H \xrightarrow{p} v$

et donnée par  $\Delta^*(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{D}\mathcal{F}) = \mathcal{F} \otimes \mathcal{D}\mathcal{F} \rightarrow K_H = p^! E_v$ .

Or l'endomorphisme local sous-jacent à la formule des traces de Grothendieck - Lefschetz affirme que cette composée,

qui est supportée par  $v \xleftarrow{H(\mathbb{F}_q)} v \rightarrow v$ ,

est donnée par la multiplication par la fonction sur  $H(\mathbb{F}_q)$  égale à la trace de Frobenius sur  $\mathcal{F}$ .

Comme  $\mathcal{F}$  vient de  $\mathcal{S}_v$  et que la trace de Frobenius sur  $\mathcal{S}_v$  est  $h_{v,v}$  (par la compatibilité entre l'équivalence de Satake géométrique et l'isomorphisme de Satake classique) ven termine la démonstration.

[ Une idée de preuve alternative est expliquée dans la remarque 6.15 de l'article (version 4) mais n'a pas été rédigée par manque de référence. Elle repose sur le fait que  $Y_1$  et  $Y_2$  s'intersectent de façon transversale en un certain sens et que la composée des 3 correspondances peut donc être calculée au niveau des fibres des faisceaux ] .

(20) Les chéoucas restreints (en  $v$ ) sont analogues aux Barotti-Tate tronqués (en fait le vrai analogue est défini dans le chapitre sur les structures de niveau naïves de l'article de Laurent Lafforgue "chéoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands" mais la construction est particulière au cas où  $G = GL_n$  et  $V = St_n$ ).

On considère les morphismes

$$\bullet / G_{m, v} \xleftarrow{f_1} \left( G_{\mathbb{Z}} \begin{array}{l} \{1\}, \{2\} \\ \{1, 2\}, V \boxtimes V^* \end{array} \middle| \Delta(r) \right) / G_{m, v} \xrightarrow{f_2} \bullet / G_{m, v}$$

$$\bullet / G_{m, v} \xleftarrow{f_1} (G_0 \rightarrow G_1 \rightarrow G_2) \xrightarrow{f_2} G_2 / G_{m, v}$$

(c'est-à-dire que  $f_2$  est tautologique et  $f_1$  est bien défini si  $m-n$  est assez grand en fonction de  $V$ ).

Alors le champ de chéoucas restreints  $\text{cht}_{V \boxtimes V^*}^{(\{1\}, \{2\}), \text{res}(m, n)}$

est défini comme l'égalisateur des morphismes

$$\text{Frob}_{\bullet / G_{m, v}} \circ f_1 \quad \text{et} \quad \text{oubli} \circ f_2 \quad (\text{en notant oubli} : \bullet / G_{m, v} \rightarrow \bullet / G_{m, v})$$

$$G_{\mathbb{Z}} \begin{array}{l} \{1\}, \{2\} \\ \{1, 2\}, V \boxtimes V^* \end{array} \middle| \Delta(r) / G_{m, v} \longrightarrow \bullet / G_{m, v}$$

En d'autres termes  $G_2$  est défini sur  $m, v$  mais à cause de la modification  $G_0$  est bien défini seulement sur  $m, v$  et on demande un isomorphisme entre  $\bullet / G_0$  et  $G_2 / G_{m, v}$ .

(21) le morphisme naturel

$$Z = \text{cht}_{\mathbb{Z}^I} \left( \begin{array}{l} (\{1\}, \{2\}, I) \\ N, I \cup \{1, 2\}, W \otimes V \otimes V^* \end{array} \right) \left. \vphantom{\text{cht}} \right\} (X \setminus (W \cup V))^\mathbb{F} \times \Delta(V)$$

↓

$$\text{cht}_{\mathbb{Z}^I} \left( \begin{array}{l} (\{1\}, \{2\}), \text{res}(m, n) \\ V \otimes V^* \end{array} \right) \times \mathbb{R}^I$$

est lisse. C'est le morphisme utilisé dans l'étape (a) décrite en bas de la page 17.