① Notes d'accompagnement pour le troisième exposé donné à l'IHES le 31 octobre 2013 dans le cadre du * "Cours d'arithmétique et de géométrie algébrique" par Vincent Lafforgue

$X/\mathbb{F}_q$ courbe projective lisse, G déployé

Ξ réseau de $Z(F)\backslash Z(\mathbb{A})$, $N \subset X$ sous schéma fini

E extension finie de $\mathbb{Q}_\ell$ contenant $\sqrt{q}$

$$\mathcal{H}^{0,\leq\mu}_{c,N,I,W} = R^0(\mathfrak{p}^{\leq\mu})_!\left(\mathcal{F}^{(I_1,\dots,I_k)}_{N,I,W}\Big|_{\mathrm{Cht}^{(I_1,\dots,I_k),\leq\mu}_{N,I,W}/\Xi}\right)$$

[I ensemble fini, W représentation de $(\widehat{G})^I$]

On rappelle que $\mathcal{F}^{(I_1,\dots,I_k)}_{N,I,W}$ est l'image inverse du faisceau de Mirkovic-Vilonen $\mathcal{S}^{(I_1,\dots,I_k)}_{I,W}$ par le morphisme lisse

$$\mathrm{Cht}^{(I_1,\dots,I_k)}_{N,I,W}/\Xi \longrightarrow \mathrm{Gr}^{(I_1,\dots,I_k)}_{I,W}/G_{\sum n_i x_i}$$

$$(\mathcal{G}_0 \to \dots \to \mathcal{G}_k = {}^\tau\mathcal{G}_0) \longmapsto \left(\mathcal{G}_0\big|_{\Gamma_{\sum\infty x_i}} \to \dots \to \mathcal{G}_k\big|_{\Gamma_{\sum\infty x_i}}\right)$$

et $\mathfrak{p}^{\leq\mu} : \mathrm{Cht}^{(I_1,\dots,I_k),\leq\mu}_{N,I,W}/\Xi \longrightarrow (X\smallsetminus N)^I$

est le morphisme indiquant les pattes $(x_i)_{i\in I}$

$\mathcal{H}^{0,\leq\mu}_{c,N,I,W}$ est un faisceau constructible sur $(X\smallsetminus N)^I$, indépendant de $(I_1,\dots,I_k)$.

On rappelle l'isomorphisme de coalescence :

pour toute application $\zeta : I\to J$, on a un isomorphisme canonique

$$\Delta_\zeta^*\left(\mathcal{H}^{0,\leq\mu}_{c,N,I,W}\right) = \mathcal{H}^{0,\leq\mu}_{c,N,I,W^\zeta}$$

où W^ζ est la représentation de $(\widehat{G})^J$ obtenue à partir de W en composant par $(\widehat{G})^J \to (\widehat{G})^I$.

On rappelle l'action des morphismes de Frobenius partiels

$$F_J : (\mathrm{Frob}_J)^*\left(\mathcal{H}^{0,\leq\mu}_{c,N,I,W}\right) \to \mathcal{H}^{0,\leq\mu+\kappa}_{c,N,I,W}$$

(2) où κ dépend de W et

$$\mathrm{Frob}_J : (X \setminus N)^I \to (X \setminus N)^I$$
$$(x_i)_{i\in I} \longmapsto (x'_i)_{i\in I} \quad \text{avec} \begin{cases} x'_i = \mathrm{Frob}(x_i) \text{ si } i \in J \\ x'_i = x_i \text{ sinon} \end{cases}$$

Morphismes de création et annihilation.

Soit J un autre ensemble fini, U une représentation de $(\widehat{G})^J$

$x \in U$ et $\xi \in U^*$ invariants par l'action diagonale de $\widehat{G}$

alors on possède ~~des morphismes~~

$$\mathcal{H}^{0,\leq \mu}_{c,N,I,W} \boxtimes E_{X\setminus N} \underset{\mathcal{C}^\flat_\xi}{\overset{\mathcal{C}^\#_x}{\rightleftarrows}} \mathcal{H}^{0,\leq \mu}_{c,N,I\cup J,W\boxtimes U}\Big|_{(X\setminus N)^I \times \Delta(X\setminus N)}$$

morphismes de faisceaux constructibles sur $(X\setminus N)^I \times (X\setminus N)$

où $\Delta : X\setminus N \to (X\setminus N)^J$ est le morphisme diagonal.

On a une forme bilinéaire $\mathcal{H}^{0,\leq\mu}_{c,N,I,W^{*,\theta}} \otimes \mathcal{H}^{0,\leq \mu}_{c,N,I,W} \to E\big|_{(X\setminus N)^I}$

(où θ est l'involution de Chevalley de $\widehat{G}$)

par rapport à laquelle $\mathcal{C}^\#_x$ et $\mathcal{C}^\flat_x$ sont transposés l'un de l'autre.

(où x est considéré comme une forme linéaire sur $U^{*,\theta}$)

Soit maintenant $v \in |X\setminus N|$,

V représentation irréductible de $\widehat{G}$, $\delta_V : 1 \to V \otimes V^*$, $ev_V : V\otimes V^* \to 1$

La composée

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^{0,\leq\mu}_{c,N,I,W} \boxtimes E_v & \xrightarrow{\mathcal{C}^\#_{\delta_V}} & \mathcal{H}^{0,\leq \mu}_{c,N,I\cup\{1,2\},W\boxtimes V\boxtimes V^*}\Big|_{(X\setminus N)^I\times\Delta(v)} \\ & & \Big\downarrow (F_{\{1\}})^{\deg(v)} \\ \mathcal{H}^{0,\leq\mu+\kappa}_{c,N,I,W} \boxtimes E_v & \xleftarrow{\mathcal{C}^\flat_{ev_V}} & \mathcal{H}^{0,\leq\mu+\kappa}_{c,N,I\cup\{1,2\},W\boxtimes V\boxtimes V^*}\Big|_{(X\setminus N)^I\times\Delta(v)} \end{array}$$

commute avec le Frobenius partiel en v et se descend donc

en un morphisme $S_{V,v} : \mathcal{H}^{0,\leq\mu}_{c,N,I,W} \to \mathcal{H}^{0,\leq\mu+\kappa}_{c,N,I,W}$

de faisceaux constructibles sur $(X\setminus N)^I$

③ <u>Prop</u> La restriction de $S_{V,v}$ à $(X \smallsetminus (N \cup v))^I$ est égale à l'opérateur de Hecke $T(h_{V,v})$.

<u>Compléments sur la preuve de la proposition donnée au cours précédent.</u>

~~etc~~ On rappelle que la preuve procédait en 2 étapes

① $S_{V,v}$ est de nature locale en v $\Rightarrow$ il suffit de montrer la proposition lorsque $I = \emptyset$, $W = 1$ et $\deg(v) = 1$.

② ~~donc~~ Lorsque $I = \emptyset$, $W = 1$ et $\deg(v) = 1$, la proposition est vraie

Voici quelques compléments sur la preuve de ②

$Z^{12} = Cht_{N,\{1,2\},V \boxtimes V^*}^{(\{1\},\{2\}),\leq \mathcal{N}}$. On prend $\mathcal{N}$ assez grand pour que $Bun_{G,N}^{\leq \mathcal{N}}$ soit un schéma (lisse).

Alors Z^{12} est le sous-schéma de $Hecke_{N,V}^{\leq \mathcal{N}} \times Hecke_{N,V}^{\leq \mathcal{N}}$ formé des $((\mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}'_1), (\mathcal{G}_2 \to \mathcal{G}'_2))$ tels que $\mathcal{G}'_1 = \mathcal{G}'_2$ et $\mathcal{G}_2 = {}^\tau\mathcal{G}_1$.

En effet Z^{12} est ~~est~~ constitué par les diagrammes

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathcal{G}'_1 = \mathcal{G}'_2 \arrow[dr, phantom, "\boxed{\approx \mathcal{Y}_2}"] & & {}^\tau\mathcal{G}'_1 \\
\mathcal{G}_1 \arrow[ur] \arrow[rr, phantom, "\boxed{\approx \mathcal{Y}_1}"] & & \mathcal{G}_2 = {}^\tau\mathcal{G}_1 \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

et on rappelle que $\mathcal{Y}_1$ et $\mathcal{Y}_2$ sont les sous-schémas fermés de Z^{12} donnés par les conditions indiquées ci-dessus.

On avait des correspondances cohomologiques

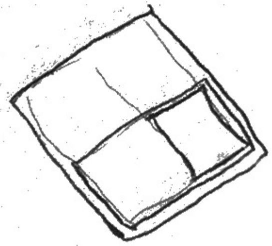
$$Bun_{G,N}(\mathbb{F}_q) \underset{\text{supportée par } \mathcal{Y}_2}{\rightsquigarrow} Z^{12} \underset{\text{supportée par } \mathcal{Y}_1}{\rightsquigarrow} Bun_{G,N}(\mathbb{F}_q)$$

et il s'agit de montrer que leur produit, qui est supporté ~~sur~~ $\mathcal{Y}_1 \times_{Z^{12}} \mathcal{Y}_2 = Hecke_{N,V}(\mathbb{F}_q)$, est ~~la multiple~~ donné par la multiplication par la fonction sur $Hecke_{N,V}(\mathbb{F}_q)$ associée à $h_{V,v}$.

(4) Diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \mathrm{Hecke}_{N,V} \arrow[dl] \arrow[ddll, bend right, "\text{diagonale}"'] & & \\
 & \{\mathcal{G}'_1 = \mathcal{G}'_2\} \arrow[dl] & & \mathcal{Y}_1 \arrow[ul] \arrow[dl] & \\
 \substack{\mathrm{Hecke}_{N,V} \times \mathrm{Hecke}_{N,V} \\ ((\mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}'_1), (\mathcal{G}_2 \to \mathcal{G}'_2))} & & Z^{12} \arrow[ul] \arrow[dl] & & \mathrm{Hecke}_{N,V}(\mathbb{F}_q) \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & \{\mathcal{G}_2 = {}^{\tau}\mathcal{G}_1\} \arrow[ul] & & \mathcal{Y}_2 \arrow[ul] \arrow[dl] & \\
 & & \mathrm{Hecke}_{N,V} \arrow[ul] \arrow[uull, bend left, "\text{graphe de } \mathrm{Frob}_{\mathrm{Hecke}_{N,V}}"] & &
\end{tikzcd}$$

Grâce à la lissité de $\mathrm{Bun}_{G,N}$ où ont lieu les égalités $\mathcal{G}'_1 = \mathcal{G}'_2$ et $\mathcal{G}_2 = {}^{\tau}\mathcal{G}_1$ les composées peuvent être calculées de façon équivalente dans ~~les carrés~~ ~~les rectangles~~



le petit carré
le rectangle
le grand carré

La composée dans le grand ~~rectan~~ carré est la suivante :
on pose $Y = \mathrm{Hecke}^{\leq N}_{N,V}$, $\mathcal{F} = IC_Y$ et on a les correspondances cohomologiques naturelles

$$(pt, E_{pt}) \underset{\substack{\text{supportée par le} \\ \text{graphe de Frobenius}}}{\rightsquigarrow} (Y \times Y, \mathcal{F} \boxtimes \mathbb{D}\mathcal{F}) \underset{\substack{\text{supportée par} \\ \text{la diagonale}}}{\rightsquigarrow} (pt, E_{pt})$$

dont la composée, supportée sur $Y(\mathbb{F}_q)$ est la multiplication par la fonction sur $Y(\mathbb{F}_q)$ égale à la trace de Frobenius sur $\mathcal{F}$.
Ceci termine les compléments sur la preuve de la proposition.

⑤ Eichler-Shimura

Soit I un ensemble fini, W rep. de $(\hat{G})^I$, V rep. irred. de $\hat{G}$, v place de $X \setminus N$.

Alors $(\mathrm{Frob}_{\{0\}})^{\deg(v)} : \mathcal{H}^{0,\leq \mu}_{c,N,I\cup\{0\},W\boxtimes V}\Big|_{(X\setminus N)^I \times v} \to \mathcal{H}^{0,\leq \mu+k}_{c,N,I\cup\{0\},W\boxtimes V}\Big|_{(X\setminus N)^I\times v}$

est tué par un polynôme dont les coefficients sont les restrictions des $S_{\Lambda^i V, v}$ à $(X\setminus N)^I \times v \subset (X\setminus N)^{I\times\{0\}}$:

pour k assez grand, on a

$$\sum_{i=0}^{\dim V} (-1)^i \left(F_{\{0\}}^{\deg(v)}\right)^i S_{\Lambda^{\dim V - i} V, v} = 0$$

dans $\mathrm{Hom}\left(\mathcal{H}^{0,\leq\mu}_{c,N,I\cup\{0\},W\boxtimes V}\Big|_{(X\setminus N)^I\times v}, \mathcal{H}^{0,\leq \mu+k}_{c,N,I\cup\{0\},W\boxtimes V}\Big|_{(X\setminus N)^I\times v}\right)$

__Remarque__ $T(h_{\Lambda^{\dim V - i} V, v})$ est défini sur $(X\setminus(N\cup v))^I \times (X \setminus (N\cup v))$

(avant l'extension par $S_{\Lambda^{\dim V - i} V, v}$)

$S_{\Lambda^{\dim V - i} V, v}$ est défini sur $(X\setminus N)^I \times (X\setminus N)$

on le restreint à $(X\setminus N)^I \times v$

__dém__ On va calculer la composition suivante (de deux manières différentes)

- on part de $I\cup\{0\}$, $W\boxtimes V$ avec la patte 0 en v
- on crée (en v) n paires de pattes $(1, n+1), \dots (n, 2n)$ à l'aide de $\delta_V : 1 \to V \otimes V^*$ et on arrive donc dans $\mathcal{H}^{0,\leq\mu}_{c,N,I\cup\{0,1,\dots,2n\}, W\otimes V \boxtimes \dots \boxtimes V \boxtimes V^* \boxtimes \dots \boxtimes V^*}\Big|_{(X\setminus N)^I \times \Delta(v)}$
- on antisymétrise les pattes dans $\{0,\dots,n\}$ qui portent toutes la même représentation V
- on applique $F^{\deg(v)}_{\{1,\dots,n\}}$, c'est-à-dire le Frobenius partiel en les pattes $1, \dots, n$

(6) - On supprime les paires de pattes $(1, n+1) \dots (n, 2n)$ à l'aide ev_V, et on revient donc dans $\mathcal{H}^{0, \leq N+K}_{c, N, I \sqcup \{0\}, W \boxtimes V}\Big|_{(\mathcal{X} \setminus N)^I \times v}$

Alors (a) si $n = \dim V$, cette composée est nulle car $\Lambda^{n+1} V = 0$

(b) pour tout n, ~~cette~~ cette composée est égale à

$$\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left(F^{\deg(v)}_{\{0\}}\right)^i S_{\Lambda^{n-i} V, v}$$

Pour montrer (b) on développe le projecteur d'antisymétrisation suivant les permutations σ ~~...~~ de $\{0 \dots n\}$.

Pour chaque $i \in \{1, \dots, n+1\}$, le nombre de permutations σ de $\{0 \dots n\}$ telles que la longueur $\ell(\sigma)$ du cycle contenant 0 soit égale à i, est égal à $n!$. Il suffit donc de montrer que si dans la composée ci-dessus on remplace le projecteur d'antisymétrisation par la moyenne (pondérée par la signature) sur les permutations σ de $\{0 \dots n\}$ telles que $\ell(\sigma) = i$, on obtient $(-1)^i \left(F^{\deg(v)}_{\{0\}}\right)^i S_{\Lambda^{n-i} V, v}$

Il revient au même de moyenner sur les permutations $\sigma = (01 \dots i)\tau$ où $(01 \dots i)$ est la permutation circulaire (de signature $(-1)^i$) et $\tau \in \mathfrak{S}(\{i+1, \dots, n\})$ est arbitraire.

On a $s(\sigma) = (-1)^i \cdot s(\tau)$ et les pattes dans $\{0, \dots i\} \cup \{n+1, \dots, n+i\}$ d'une part et $\{i+1, \dots n\} \cup \{n+i+1, \dots, 2n\}$ d'autre part n'interagissent plus.

(1) ce qui advient aux pattes dans $\{i+1, \dots, n\} \cup \{n+i+1, \dots, 2n\}$ est

- qu'on crée les paires de pattes $(i+1, n+i+1), \dots (n, 2n)$ par δ_V
- qu'on antisymétrise les pattes dans $\{i+1, \dots n\}$ à l'aide de la moyenne sur τ pondérée par $s(\tau)$
- qu'on applique $F^{\deg(v)}_{\{i+1, \dots, n\}}$
- qu'on supprime les paires de pattes $(i+1, n+i+1), \dots (n, 2n)$ par ev_V

(7) et cela fournit exactement $S_{\wedge^{n-i} V, v}$

2) ce qui advient aux pattes dans $\{0, \dots, i\} \cup \{n+1, \dots, n+i\}$ est que

- on part de la patte 0
- on crée les paires de pattes $(1, n+1) \dots (i, n+i)$ par δ_V
- on permute circulairement les pattes $\{0 \dots i\}$
- on ~~supprime les pai~~ applique $F_{\{1, \dots i\}}^{\deg(v)}$
- on supprime les paires de pattes $(1, n+1) \dots (i, n+i)$ par ev_V.

Il est classique que cette composée est égale à $\left(F_{\{0\}}^{\deg(v)}\right)^n$.

<u>Construction des opérateurs d'excursion</u>

Un point géométrique $\bar{x}$ dans un schéma Y est un corps séparablement clos $k(\bar{x})$ et un morphisme $\operatorname{Spec}(k(\bar{x})) \to Y$.

~~On po~~ le localisé strict est $Y_{(\bar{x})} = \varprojlim U$

U voisinage étale pointé de $\bar{x}$

Si $\bar{x}, \bar{y}$ sont des points géométriques, une flèche de spécialisation $sp : \bar{x} \to \bar{y}$ est un morphisme $\bar{x} \to Y_{(\bar{y})}$ ou de façon équivalente

$$Y_{(\bar{x})} \to Y_{(\bar{y})}$$

Elle induit $sp^* : \mathcal{F}_{\bar{y}} \to \mathcal{F}_{\bar{x}}$ pour tout faisceau $\mathcal{F}$

On fixe $\bar{\eta}$ point géométrique sur le point générique η de X

$\bar{\eta} = \operatorname{Spec}(\bar{F})$ de sorte que $\operatorname{Gal}(\bar{F}/F) = \pi_1(\eta, \bar{\eta})$.

Pour tout ensemble fini I, $\Delta : X \to X^I$ est le morphisme diagonal et $\overline{\eta^I}$, point géométrique au-dessus du point générique η^I de X^I sera muni d'une flèche de spécialisation $sp : \overline{\eta^I} \to \Delta(\bar{\eta})$

(~~ce qui revient à travailler en l'hensé~~ (pour limiter les automorphismes de $\overline{\eta^I}$ et que les fibres en $\overline{\eta^I}$ soient ~~conv~~ plus compatibles à la coalescence)

(8) <u>Lemme</u> (Drinfeld). Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_E$-faisceau lisse constructible sur Ω ouvert dense de X^I,

muni d'actions des morphismes de Frobenius partiels

$$F_{\{i\}} : \mathrm{Frob}_{\{i\}}^{*}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{E}$$ (commutant entre elles et dont le produit est l'action naturelle du Frobenius total).

Alors il existe U ouvert dense dans X tel que $\mathcal{E}$ s'étende en un $\mathcal{O}_E$ faisceau lisse sur U^I.

De plus on a une équivalence de catégories

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathcal{E} \text{ lisse défini sur } U^I \\ + \text{ action des Frob partiels} \end{array} \right\} \simeq \left\{ \begin{array}{c} \text{représentations de } (\pi_1(\eta,\bar\eta))^I \\ \text{sur } \mathcal{O}_E\text{-module de type fini} \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{E} \longmapsto \mathcal{E}|_{\Delta(\bar\eta)} \left(\xrightarrow[sp^*]{\sim} \mathcal{E}|_{\overline{\eta^I}} \right)$$

On peut appliquer le lemme de Drinfeld à tout sous-$\mathcal{O}_E$-faisceau constructible de $\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}^{0,\leq\mu}_{c,N,I,W}\big|_{\eta^I}$ stable par les morphismes de Frobenius partiels.

On va construire $\left(\varinjlim \mathcal{H}^{0,\leq\mu}_{c,N,I,W}\big|_{\overline{\eta^I}}\right)^{Hf}$ (partie Hecke finie) qui sera une réunion de sous $\mathcal{O}_E$-faisceaux comme ci-dessus, et dont la fibre en $\overline{\eta^I}$ sera donc munie d'une action de $(\pi_1(\eta,\bar\eta))^I$.

<u>Def</u> $\bar x$ point géométrique de $(X \setminus N)^I$

(en pratique $\bar x$ sera $\Delta(\bar\eta)$ ou $\overline{\eta^I}$).

Un élément de $\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}^{0,\leq\mu}_{c,N,I,W}\big|_{\bar x}$ est dit Hecke-fini s'il appartient à un sous-$\mathcal{O}_E$-module de type fini stable par tous les opérateurs $T(f)$ pour $f \in C_c(K_N \backslash G(\mathbb{A}) / K_N, \mathcal{O}_E)$.

Alors $\left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}^{0,\leq\mu}_{c,N,I,W}\big|_{\bar x}\right)^{Hf}$ est un sous E-espace vectoriel de $\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}^{0,\leq\mu}_{c,N,I,W}\big|_{\bar x}$, stable par $\mathrm{Gal}(\bar x/x)$, les opérateurs de Hecke, les Frobenius partiels et les homomorphismes de spécialisation.

(9) Si $I = \emptyset$ et $W = \mathbf{1}$

$\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}^{0, \leq \mu}_{c, N, \emptyset, \mathbf{1}} \Big|_{\overline{\mathbb{F}_q}}$ (qui est aussi égal à $\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}^{0, \leq \mu}_{c, N, \{0\}, \mathbf{1}} \Big|_{\overline{\eta}}$)

est égal à $C_c(\mathrm{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\widehat{\Xi}, E)$

<u>Prop</u> ~~La~~ partie Hecke-finie est égale à $C_c^{\mathrm{cusp}}(\mathrm{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\widehat{\Xi}, E)$

<u>dém</u> On a $\supset$ car $C_c^{\mathrm{cusp}}(\ldots, \mathcal{O}_E) = C_c^{\mathrm{cusp}}(\ldots, E) \cap C_c(-, \mathcal{O}_E)$ est un sous-$\mathcal{O}_E$-module de type fini stable par les $T(f)$ pour $f \in C_c(K_N \backslash G(\mathbb{A}) / K_N, \mathcal{O}_E)$.

On montre $\subset$ par l'absurde. Soit $f \in C_c(\mathrm{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\widehat{\Xi}, E)$ non cuspidale et M un levi tel que le terme constant $\mathcal{C}_M(f)$ soit non nul. Soit $v \in |X \setminus N|$ (où G est deployé).

Comme $C_c(M(\mathcal{O}_v) \backslash M(F_v) / M(\mathcal{O}_v), E)$ est finie sur $C_c(G(\mathcal{O}_v) \backslash G(F_v) / G(\mathcal{O}_v), E)$

$\mathcal{C}_M(f)$ serait Hecke finie relativement à $C_c(M(\mathcal{O}_v) \backslash M(F_v) / M(\mathcal{O}_v), E)$

$\in C_c(\mathrm{Bun}_{M,N}(\mathbb{F}_q)/\widehat{\Xi}, E)$

~~mais~~ mais les opérateurs de Hecke associés aux ~~..~~ cocaractères à valeurs dans $Z(M)$ agissent sur $\mathrm{Bun}_{M,N}(\mathbb{F}_q)/\widehat{\Xi}$ par translations, avec des orbites infinies

<u>Prop</u> Tout sous $\mathcal{O}_E$-faisceau (constructible) $\mathcal{E}$ de $\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}^{0, \leq \mu}_{c, N, I, W} \Big|_{\overline{\eta}^I}$ stable par les $T(f)$ pour $f \in C_c(K_N \backslash G(\mathbb{A}) / K_N, \mathcal{O}_E)$

est inclus dans un sous-$\mathcal{O}_E$ faisceau constructible $\widetilde{\mathcal{E}}$ de $\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}^{0, \leq \mu}_{c, N, I, W} \Big|_{\overline{\eta}^I}$ stable par les morphismes de Frobenius partiels.

10

Par le lemme de Drinfeld, dans les notations de la proposition, $\tilde{\mathcal{E}}\big|_{\overline{\eta^I}}$ est muni d'une action de $(\pi_1(U,\overline{\eta}))^I$.

D'où le corollaire

<u>Cor</u> $\left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}^{0,\leq\mu}_{c,N,I,W}\big|_{\overline{\eta^I}}\right)^{Hf}$ est muni d'une action de $\left(\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)\right)^I$.

<u>dém de la Prop</u> L'idée est très simple : on utilise Eichler-Shimura pour déduire de la Hecke-finitude une finitude relativement aux morphismes de Frobenius partiels.

On peut supposer $W = \bigotimes_{i\in I} W_i$ irréductible

$\mathcal{E}$ sous-$\mathcal{O}_E$-faisceau de $\mathcal{H}^{0,\leq\mu_0}_{c,N,I,W}\big|_{\eta^I}$ pour μ_0 assez grand.

Ω_0 ouvert de X^I sur lequel $\mathcal{H}^{0,\leq\mu_0}_{c,N,I,W}$ est lisse

Donc $\mathcal{E}$ est lisse sur Ω_0.

On peut trouver des points fermés $(v_i)_{i\in I}$ tels que $\underbrace{\prod_{i\in I} v_i}_{\text{réunion finie de points fermés de } X^I} \subset \Omega_0$.

Pour tout i,
Eichler-Shimura en i implique que

$$\sum_{\alpha=0}^{\dim W_i} (-1)^\alpha \left(F_{\{i\}}^{\deg(v_i)}\right)^\alpha S_{\Lambda^{\dim W_i-\alpha} W_i, v_i} = 0$$

D'où une inclusion

$$\left(F_{\{i\}}^{\deg(v_i)}\right)^{\dim W_i} \Big(\underbrace{\left(\mathrm{Frob}_{\{i\}}^{\deg(v_i)\dim W_i}\right)^*(\mathcal{E})\big|_{\prod_{i\in I} v_i}}_{\text{lisse en } \prod_{i\in I} v_i}\Big) \subset \sum_{\alpha=0}^{\dim W_i - 1} \left(F_{\{i\}}^{\deg(v_i)}\right)^\alpha \left(\left(\mathrm{Frob}_{\{i\}}^{\deg(v_i)\alpha}\right)^* S_{\Lambda^{\dim W_i-\alpha} W_i, v_i}\left(\mathcal{E}\big|_{\prod v_i}\right)\right)$$

donc l'inclusion s'étend à η^I (dans $\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}^{0,\leq\mu}_{c,N,I,W}\big|_{\eta^I}$). De plus

$$S_{\Lambda^{\dim W_i-\alpha} W_i, v_i}\left(\mathcal{E}\big|_{\eta^I}\right) = T\left(h_{\Lambda^{\dim W_i-\alpha} W_i, v_i}\right)(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}$$

par l'hypothèse, et parce que $h_{\Lambda^{\dim W_i - \alpha} W_{i}, v_i}$ appartient à $C_c\left(G(O_{v_i})\backslash G(F_{v_i})/G(O_{v_i}), O_E\right)$.

On en déduit que

$$\tilde{\mathcal{E}} = \sum_{(n_i)_{i\in I} \in \mathbb{N}^I,\ n_i \leq \deg(v_i)(\dim W_i) - 1} \left(\prod F_{\{i\}}^{n_i}\right)\left(\prod \mathrm{Frob}_{\{i\}}^{n_i}\right)^*\left(\mathcal{E}\big|_{\eta^I}\right)$$

qui est un sous-O_E-faisceau constructible (puisque la somme est finie) est stable par les morphismes de Frobenius partiels.

Ceci termine la preuve de la proposition.

<u>Un point technique</u>

L'image de $sp^* : \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}^{0,\leq\mu}_{c,N,I,W}\Big|_{\Delta(\bar\eta)} \longrightarrow \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}^{0,\leq\mu}_{c,N,I,W}\Big|_{\bar\eta^I}$

$$\cup$$

contient $\left(\underline{\qquad\qquad\qquad}\right)^{Hf}$

et on note $(sp^*)^{-1}$ n'importe quelle section ensembliste.

<u>dém</u> D'après la proposition précédente, il suffit de démontrer que si $\tilde{\mathcal{E}} \subset \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}^{0,\leq\mu}_{c,N,I,W}\Big|_{\eta^I}$ est un sous-faisceau constructible stable par les morphismes de Frobenius partiels, alors $\tilde{\mathcal{E}}\big|_{\bar\eta^I}$ est dans l'image de sp^*.

Soit un tel $\tilde{\mathcal{E}}$. Alors $\tilde{\mathcal{E}}$ est un sous-faisceau de $\mathcal{H}^{0,\leq\mu}_{c,N,I,W}$ pour μ, assez grand, et donc $\tilde{\mathcal{E}}$ est lisse sur un ouvert Ω, assez petit.

D'après Eike Lau les $\left(\prod_i \mathrm{Frob}_{\{i\}}^{n_i}\right)(\Delta(\eta))$ pour $(n_i)_{i\in I} \in \mathbb{N}^I$ sont Zariski denses dans X^I. Donc il existe $(n_i)_{i\in I}$ tel que $\left(\prod \mathrm{Frob}_{\{i\}}^{n_i}\right)(\Delta(\eta)) \subset \Omega$.

Donc $\left(\prod \mathrm{Frob}_{\{i\}}^{n_i}\right)^*(\tilde{\mathcal{E}})\Big|_{\bar\eta^I} = \tilde{\mathcal{E}}\Big|_{\left(\prod \mathrm{Frob}_{\{i\}}^{n_i}\right)(\bar\eta^I)}$ est dans l'image de sp^*. Comme $\tilde{\mathcal{E}}$ est stable par les morphismes de Frobenius partiels, $\tilde{\mathcal{E}}\big|_{\bar\eta^I}$ est ~~dans~~ inclus dans l'image de sp^*.

12 Construction des opérateurs d'excursion

W représentation de $(\hat{G})^I$

$x \in W$ et $\xi \in W^*$ invariants par l'action diagonale de $\hat{G}$

$(\gamma_i)_{i \in I} \in (\mathrm{Gal}(\overline{F}/F))^I$.

On va définir $S_{I,W,x,\xi,(\gamma_i)_{i\in I}} \in \mathrm{End}_{C_c(K_N \backslash G(\mathbb{A})/K_N, E)}\left(C_c^{cusp}(\mathrm{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E)\right)$

comme la composée

$$\begin{array}{ccc}
C_c^{cusp}(\mathrm{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E) = \left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}^{0,\leq\mu}_{c,N,\{0\},1}\Big|_{\overline{\eta}}\right)^{Hf} \xrightarrow{\mathcal{C}^{\#}_x} \left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}^{0,\leq\mu}_{c,N,I,W}\Big|_{\Delta(\overline{\eta})}\right)^{Hf} \xrightarrow{sp^*} & \left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}^{0,\leq\mu}_{c,N,I,W}\Big|_{\overline{\eta}^I}\right)^{Hf} \\
& \Big\downarrow (\gamma_i)_{i\in I} \\
C_c(\mathrm{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E) = \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}^{0,\leq\mu}_{c,N,\{0\},1}\Big|_{\overline{\eta}} \xleftarrow{\mathcal{C}^{b}_{\xi}} \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}^{0,\leq\mu}_{c,N,I,W}\Big|_{\Delta(\overline{\eta})} \xleftarrow{(sp^*)^{-1}} & \left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}^{0,\leq\mu}_{c,N,I,W}\Big|_{\overline{\eta}^I}\right)^{Hf}
\end{array}$$

Pour $\check{h} \in C_c(\mathrm{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E)$,

$$\int_{\mathrm{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi} \check{h}\; S_{I,W,x,\xi,(\gamma_i)_{i\in I}}(h) = \langle \underbrace{sp^*(\mathcal{C}^{\#}_{\xi}(\check{h}))}_{\in \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}^{0,\leq\mu}_{c,N,I,W^*,\theta}|_{\overline{\eta}^I}}, sp^*(\mathcal{C}^{\#}_x(h)) \rangle$$

donc $S_{I,W,x,\xi,(\gamma_i)_{i\in I}}$ ne dépend pas du choix de $(sp^*)^{-1}$, commute aux opérateurs de Hecke et envoie donc

$$C_c^{cusp}(\mathrm{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E) = \left(C_c(\mathrm{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E)\right)^{Hf}$$

dans lui-même.

~~Autrement dit~~, On visualise $S_{I,W,x,\xi,(\gamma_i)_{i\in I}}$ comme la composée

$$* \xrightarrow{\mathcal{C}^{\#}_x} * \xrightarrow{sp^*} * \xrightarrow{\gamma = (\gamma_i)_{i\in I}} * \xrightarrow{(sp^*)^{-1}} \underbrace{\phi}_{\substack{\text{élément non nécessairement Hecke-fini} \\ \text{dépendant du choix de } (sp^*)^{-1}}} \xrightarrow{\mathcal{C}^{b}_{\xi}} *$$

(13) Les propriétés de continuité de $S_{I,W,x,\xi,(\gamma_i)_{i\in I}}$ sont les suivantes :

si I, W, x, ξ sont fixés, $(\gamma_i)_{i\in I} \longmapsto S_{I,W,x,\xi,(\gamma_i)_{i\in I}}$

se factorise par $(\pi_1(U,\bar\eta))^I$ (pour $U \subset X$ ouvert assez petit dépendant de I et W)

et est continue de $(\pi_1(U,\bar\eta))^I$ vers la E-algèbre de dimension finie $\mathrm{End}_{C_c(K_N\backslash G(\mathbb{A})/K_N, E)}\left(C_c^{cusp}(\mathrm{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\widetilde{\Xi}, E)\right)$

munie de la topologie E-adique.

les opérateurs d'excursion commutent entre eux d'après la propriété suivante

$$(*)\quad S_{I_1,W_1,x_1,\xi_1,\gamma^1} \circ S_{I_2,W_2,x_2,\xi_2,\gamma^2} = S_{I_1\cup I_2, W_1\boxtimes W_2, x_1\boxtimes x_2, \xi_1\boxtimes\xi_2, \gamma^1\times\gamma^2}$$

(où $\gamma^1 = (\gamma^1_i)_{i\in I_1}$ et de même pour γ^2)

__esquisse de démonstration__ On remplace I_1 et I_2 par $I_1 \cup \{0\}$ et $\{0\}\cup I_2$ pour avoir des applications naturelles de $I_1\cup I_2$ vers $I_1\cup\{0\}$ et $\{0\}\cup I_2$

On a $S_{I_1,W_1,x_1,\xi_1,\gamma^1} = S_{I_1\cup\{0\}, W_1\boxtimes 1, x_1\boxtimes 1, \xi_1\boxtimes 1, \gamma^1\times 1}$

et de même pour $(I_2, W_2, x_2, \xi_2, \gamma^2)$.

L'égalité $(*)$ résulte de la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
{*} \arrow[d, "\varepsilon^\#_{x_1}"'] \arrow[dr, "\varepsilon^\#_{x_1\boxtimes x_2}"] & & & & & \\
{*} \arrow[r] \arrow[d, "sp_1^*"'] & {*} \arrow[d] \arrow[dr, "sp^*"] & & & & \\
{*} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma^1"'] & {*} \arrow[r] \arrow[d] & {*} \arrow[d] \arrow[dr, "\gamma"] & & & \\
{*} \arrow[r] \arrow[d, "(sp_1^*)^{-1}"'] & {*} \arrow[r] & {*} \arrow[r, "\gamma^2"] & {*} \arrow[dr, "(sp^*)^{-1}"] & & \\
\varphi \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon^b_{\xi_1}"'] & \varphi \arrow[r] \arrow[u, "sp_1^*"] \arrow[d] & \varphi \arrow[u] \arrow[d] & & \circledast \arrow[dr, "\varepsilon^b_{\xi_1\boxtimes\xi_2}"] & \\
{*} \arrow[r, "\varepsilon^\#_{x_2}"] & {*} \arrow[r, "sp_2^*"] & {*} \arrow[r, "\gamma^2"] & {*} \arrow[r, "(sp_2^*)^{-1}"] & \varphi \arrow[r, "\varepsilon^b_{\xi_2}"] & {*}
\end{tikzcd}$$

Il reste à montrer que le petit trapèze en bas à droite commute

(14) Par dualité, cela résulte de la commutativité de

$$\begin{tikzcd}
{*} & {*} \arrow[l, "(\gamma^2)^{-1}"'] & & \\
{*} \arrow[u, "sp_1^*"] & {*} \arrow[l, "(\gamma^2)^{-1}"'] \arrow[u] & {*} \arrow[l] \arrow[ul, bend right, "sp^*"'] & \\
{*} \arrow[u, "\mathcal{C}^{\#}_{\xi_1}"] & {*} \arrow[l, "(\gamma^2)^{-1}"'] \arrow[u] & {*} \arrow[l, "sp_2^*"'] \arrow[u] & {\bigstar} \arrow[l, "\mathcal{C}^{\#}_{\xi_2}"'] \arrow[ul, "\mathcal{C}^{\#}_{\xi_1 \boxtimes \xi_2}"']
\end{tikzcd}$$

On omet les autres propriétés des opérateurs d'excursion, dont la preuve est plus simple.

Le lemme suivant montre que les opérateurs de Hecke aux places non ramifiées sont des cas particuliers d'opérateurs d'excursion.

<u>lemme</u> Soit $v \in |X \setminus N|$, $d \in \mathbb{N}$, $\gamma \in Gal(\overline{F}_v/F_v) \hookrightarrow Gal(\overline{F}/F)$.
Soit V une représentation irréductible de $\hat{G}$ de degré d.
Alors $S_{\{1,2\}, V \boxtimes V^*, \delta_V, ev_V, (\gamma, 1)}$ ne dépend que de d,
et est égal à $S_{V,v} = T(h_{V,v})$ si $d = 1$.

<u>dem</u> Soit $\bar{v}$ un point géométrique au-dessus de v. On pose $I = \{1,2\}$, $W = V \boxtimes V^*$.
On fixe $sp_v : \bar{\eta} \to \bar{v}$

$$\begin{tikzcd}
C_c^{cusp}(\mathrm{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\underset{W}{\Xi}, E) \arrow[d, "\mathcal{C}^{\#}_{\delta_V}\big|_{\bar{v}}"] \arrow[dr, "\mathcal{C}^{\#}_{\delta_V}"] & & \\
\Big(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}^{0, \leq \mu}_{c,N,I,W}\Big|_{\Delta(\bar{v})}\Big)^{Hf} \arrow[r, "sp_{\bar{v}}^*"] \arrow[d, "F^{\deg(v) d}_{\{1\}}"] & \Big(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}^{0, \leq \mu}_{c,N,I,W}\Big|_{\Delta(\bar{\eta})}\Big)^{Hf} \arrow[r, "sp^*"] & \Big(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}^{0, \leq \mu}_{c,N,I,W}\Big|_{\bar{\eta}^I}\Big)^{Hf} \arrow[d, "(\gamma, 1)"] \\
\Big(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}^{0, \leq \mu}_{c,N,I,W}\Big|_{\Delta(\bar{v})}\Big)^{Hf} \arrow[r, "sp_{\bar{v}}^*"] \arrow[d, "\mathcal{C}^{\flat}_{ev_V}\big|_{\bar{v}}"] & \Big(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}^{0, \leq \mu}_{c,N,I,W}\Big|_{\Delta(\bar{\eta})}\Big)^{Hf} \arrow[r, "sp^*"] \arrow[dl, "\mathcal{C}^{\flat}_{ev_V}"] & \Big(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}^{0, \leq \mu}_{c,N,I,W}\Big|_{\bar{\eta}^I}\Big)^{Hf} \\
C_c^{cusp}(\mathrm{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\underset{W}{\Xi}, E) & &
\end{tikzcd}$$

le diagramme commute (la commutativité du grand rectangle vient de la preuve du lemme de Drinfeld)

(15) Donc l'opérateur d'excursion $S_{\{1\},2\xi,V\boxtimes V^*,\delta_V,ev_V,(\gamma,1)}$ est égal à la composée de la colonne de gauche, qui ne dépend que de d (et non de γ), et est égale à $S_{V,v}$ si $d=1$.

On introduit $f \in \mathcal{O}(\hat{G}\backslash(\hat{G})^I/\hat{G})$ en posant

$$f((g_i)_{i\in I}) = \langle \xi, (g_i)_{i\in I} \cdot x \rangle$$

On obtient ainsi toutes les fonctions dans $\mathcal{O}(\hat{G}\backslash(\hat{G})^I/\hat{G})$

et l'opérateur $S_{I,W,x,\xi,(\gamma_i)_{i\in I}}$ ne dépend que de f.

On le note donc $S_{I,f,(\gamma_i)_{i\in I}}$

Les opérateurs d'excursion engendrent une sous-algèbre commutative

$$\mathcal{B} \subset \mathrm{End}_{C_c(K_N\backslash G(\mathbb{A})/K_N,E)}\left(C_c^{cusp}(Bun_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E)\right)$$

Quitte à augmenter E, on a une décomposition spectrale

$$C_c^{cusp}(Bun_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E) = \bigoplus_{\substack{\nu \text{ caractère} \\ \text{de } \mathcal{B}}} \mathfrak{h}_\nu$$

les arguments du premier cours établissent une bijection

$\left\{ \begin{array}{l} \nu \text{ caractère de l'algèbre abstraite} \\ \text{engendrée par les } S_{I,f,(\gamma_i)_{i\in I}} \\ \text{modulo les relations énoncées dans} \\ \text{le premier cours} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma \text{ paramètre} \\ \text{de Langlands} \end{array} \right\}$

Cette bijection est caractérisée par $\nu(S_{I,f,(\gamma_i)_{i\in I}}) = f((\sigma(\gamma_i))_{i\in I})$

D'où une décomposition $C_c^{cusp}(Bun_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E) = \bigoplus_{\sigma \text{ paramètre de Langlands}} \mathfrak{h}_\sigma$

On montre que pour tout σ tel que $\mathfrak{h}_\sigma \neq 0$, σ est non ramifié hors de N, et $h_{V,v}$ agit sur $\mathfrak{h}_\sigma$ par $\chi_V(\sigma(\mathrm{Frob}_v))$

(16) Pour montrer que σ est non ramifié sur $X \setminus N$

on ~~[illegible]~~ prend $v \in (X \setminus N)$ arbitraire, on choisit une

représentation fidèle V de $\hat{G}$.

Soit τ un constituant irréductible de la représentation semi-simple V_σ de $Gal(\bar{F}/F)$

Soit $h \in \mathfrak{h}_\sigma$ non nul et

$$\theta = sp^*(\mathscr{C}^{\#}_{\delta_v}(h)) \in \underbrace{\left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}^{0,\leq\mu}_{c,N,\{1,2\},V\boxtimes V^*} \Big|_{\overline{\eta^{\{1,2\}}}} \right)}_{\text{représentation de } (Gal(\bar{F}/F))^2}{}^{Hf}.$$

On montre que $\tau \boxtimes \tau^*$ apparaît comme un sous-quotient irréductible

de cette représentation, de sorte que Id_τ corresponde à θ.

Or, en notant $I_v \subset Gal(\bar{F}_v/F_v) \subset Gal(\bar{F}/F)$ le groupe d'inertie,

θ est invariant par $I_v \times I_v$

(on ne sait pas si $\mathcal{H}^{0,\leq\mu}_{c,N,\{1,2\},V\boxtimes V^*}$ est un système local mais

le point est que θ est défini ~~sur $X \setminus N$~~ sur $\Delta(X \setminus N)$, donc

en particulier en $\Delta(v)$).

Donc Id_τ est invariant par $I_v \times I_v$ et τ est non-ramifié

en v. Il en va donc de même de V_σ, et donc de σ.

<u>Cas des groupes non-déployés</u>: On utilise une version de

Mirkovic-Vilonen tordue en famille sur X, dont l'existence est due

au fait que l'épinglage de $\hat{G}$ apparaît naturellement dans

Mirkovic-Vilonen et que ${}^LG$ est un produit semi-direct préservant

l'épinglage de $\hat{G}$ (${}^LG = \hat{G} \rtimes Gal(\tilde{F}/F)$ où $\tilde{F}/F$ extension finie déployant G)

Soit $U \subset X$ ouvert où G admet un modèle réductif.

On choisit toujours N tel que $X \setminus N \subset U$.

(17) La version tordue du foncteur de Mirković-Vilonen est

$$W \longmapsto \mathcal{S}^{(I_1 \ldots I_k)}_{I,W}$$

rep. E-linéaire de $({}^LG)^I$

E-faisceau pervers $G_{\sum \infty x_i}$ équivariant sur $Gr^{(I_1 \ldots I_k)}_I$

(grassmannienne affine sur U^I)

On choisit (pour G) un modèle parahorique lisse de Bruhat-Tits aux points ~~de X où G est ram~~ de $X \setminus U$, de sorte que Bun_G est lisse.

Les opérateurs d'excursion $S_{I,f,(\gamma_i)_{i \in I}}$ sont définis pour

$$f \in \mathcal{O}\left(\hat{G} \backslash ({}^LG)^I / \hat{G}\right) \quad \text{et} \quad (\gamma_i)_{i \in I} \in (Gal(\bar{F}/F))^I.$$

(on rappelle que ${}^LG = \hat{G} \rtimes Gal(\tilde{F}/F)$ avec $\tilde{F}/F$ extension finie déployant G)

<u>Remarque</u> Lorsque G est anisotrope, on n'a pas besoin de troncature par μ puisque les champs de chtoucas sont de type fini, leur cohomologie est lisse sur U^I avec U assez ~~grand~~ petit et on se trouve dans la situation idéale du premier cours avec $H_{I,W} = \mathcal{H}^0_{c,N,I,W}\Big|_{\Delta(\bar{\eta})}$.

<u>Coefficients dans les corps finis</u>. Mirković-Vilonen ont rédigé l'équivalence de Satake géométrique à coefficients dans $\mathcal{O}_E$ (et Gaitsgory l'a utilisé dans un cadre très proche du nôtre). On en déduit que si $f \in \mathcal{O}\left(\hat{G} \backslash ({}^LG)^I / \hat{G}\right)$ est définie sur $\mathcal{O}_E$, $S_{I,f,(\gamma_i)_{i \in I}}$ préserve $C_c^{cusp}(Bun_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, \mathcal{O}_E)$, ce qui permet de les réduire modulo l'idéal maximal de $\mathcal{O}_E$. On obtient alors une décomposition de $C_c^{cusp}(Bun_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, \bar{\mathbb{F}}_\ell)$ ~~à coeff~~ indexée par les paramètres de Langlands σ à coefficients dans $\bar{\mathbb{F}}_\ell$, complètement réductibles au sens de Serre (si leur image est incluse dans un parabolique, elle est incluse dans un Levi associé).