

# UNE REMARQUE SUR LES REPRÉSENTATIONS LOCALES $p$ -ADIQUES ET LES CONGRUENCES ENTRE FORMES MODULAIRES DE HILBERT

Christophe Breuil  
Mathématiques, Bât. 425  
U.R.A. 752 du C.N.R.S.  
Université Paris-Sud  
F-91405 ORSAY cedex  
(France)  
E-mail: breuil@math.u-psud.fr

## SOMMAIRE

1. Introduction	1
2. Deux propositions sur les représentations cristallines et semi-stables	2
3. Application aux congruences entre formes modulaires de Hilbert	4
Bibliographie	8

## 1. INTRODUCTION

Soit  $F$  un corps de nombres totalement réel et  $f$  une forme modulaire de Hilbert de poids tous  $\geq 2$  qui correspond à une représentation automorphe  $\pi$  de  $GL_2(\mathbf{A}_F)$ . Lorsque  $[F : \mathbf{Q}]$  est impair, ou lorsque  $[F : \mathbf{Q}]$  est pair mais qu'il existe une place finie  $\nu$  de  $F$  telle que  $\pi_\nu$  est spéciale ou cuspidale, la construction de représentations galoisiennes associées à  $f$  à partir de la cohomologie étale  $p$ -adique des courbes de Shimura sur  $F$  est classique et bien connu ([Ca1]). Dans les cas restants, il y a deux façons de s'y prendre pour obtenir les représentations manquantes. Soit on trouve des "congruences" modulo  $p^n$  pour tout  $n$  avec des formes du type précédent, et on construit les représentations par passage à la limite projective à partir des représentations déjà connues, c'est la méthode suivie par Taylor dans [Ta1]. Soit on arrive à construire un motif associé à la forme  $f$ , et les représentations se déduisent des réalisations  $p$ -adiques du motif, c'est la méthode suivie par Blasius-Rogawski dans [BR] lorsque l'un des poids de  $f$  est  $> 2$ . La construction de [BR] montre en outre, par les théorèmes de comparaison en théorie de Hodge  $p$ -adique, que dans ce cas les représentations locales obtenues (en " $\ell = p$ ") sont potentiellement semi-stables, donc Hodge-Tate, et même cristallines pour  $p \gg 0$ . Dans [Ta2], Taylor montre que lorsque tous les poids sont 2, ces représentations locales sont encore cristallines pour  $p \gg 0$ .

Le but de cette note est de retrouver ces résultats de cristallinité uniquement à partir des congruences de [Ta1] et de quelques manipulations simples sur les algèbres de Hecke et les pseudo-représentations de degré 2. Plus précisément, nous obtenons:

**Théorème 1.** *Soit  $f$  une forme modulaire de Hilbert propre, de niveau  $\mathfrak{N}$  (un idéal entier de  $F$ ), de poids tous  $\geq 2$  et de même parité et soit  $w$  le plus grand des poids. Soient  $\mathcal{O}$  l'anneau des entiers d'un corps de nombres suffisamment grand,  $\mathfrak{p}$  une place de  $\mathcal{O}$  au-dessus d'un nombre premier  $p$ ,  $\mathfrak{q}$  une place de  $F$  au-dessus de  $p$ ,  $G_{\mathfrak{q}}$  un groupe de décomposition de  $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/F)$  en  $\mathfrak{q}$  et  $\rho_f : \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/F) \rightarrow \text{GL}_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$  la représentation construite dans [Ta1] à partir de  $f$ .*

(1) *Si  $p > 2$  et  $\mathfrak{q}$  ne divise pas  $\mathfrak{N}$ , alors pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $\rho_f|_{G_{\mathfrak{q}}}$  modulo  $\mathfrak{p}^n$  est un sous-quotient d'une représentation cristalline (c.f. [Fo1]) à poids de Hodge-Tate entre 0 et  $w - 1$ .*

(2) *Si  $p > w$ ,  $\mathfrak{q}$  non ramifié dans  $F$  et ne divise pas  $\mathfrak{N}$ , alors  $\rho_f|_{G_{\mathfrak{q}}} \otimes \mathbf{Q}_p$  est cristalline à poids de Hodge-Tate entre 0 et  $w - 1$ .*

Bien sûr, ce théorème n'a d'intérêt que lorsque  $\rho_f$  n'est pas accessible par la cohomologie des courbes de Shimura sur  $F$  (sinon, tout est connu). La condition “ $p > 2$ ” en (1) provient de la théorie des pseudo-représentations de degré 2 sur un anneau de valuation discrète ([Wi2]). Les conditions “ $\mathfrak{q}$  non ramifié” et “ $p > w$ ” en (2) proviennent de restrictions inhérentes aux outils  $p$ -adiques (standards) utilisés développés dans la section 2. Ces 3 conditions sont bien sûr normalement superflues. La preuve occupe la section 3. Son principe est le suivant: pour démontrer (1), on se débrouille pour construire pour tout  $n$ , à partir des pseudo-représentations de [Ta1] sur les algèbres de Hecke (qui sont des pseudo-représentations “classiques” à la Wiles), un  $\mathbf{Z}_p$ -réseau stable par Galois dans une représentation cristalline ainsi qu'une surjection de ce réseau vers  $\rho_f|_{G_{\mathfrak{q}}}$  modulo  $\mathfrak{p}^n$ ; pour en déduire (2), on passe à la limite projective sur (1), ce qui oblige, faute de mieux, aux restrictions énoncées. La méthode est explicite et particulière aux pseudo-représentations telles qu'introduites initialement par Wiles, i.e. avec  $\text{GL}_2$  et un corps totalement réel. Elle ne s'étend probablement pas aux pseudo-représentations de degré supérieur définies par Taylor ([Ta3]).

Cette (modeste) note est concomitante à l'apprentissage modulaire de l'auteur. Dans la version initiale, la référence [Ta2] (qui traite du poids 2) n'était pas connue de l'auteur. Elle lui a été signalée après coup par J. Tilouine. Qu'il en soit remercié, ainsi que L. Clozel, A. Genestier et P. Gille pour d'utiles discussions.

## 2. DEUX PROPOSITIONS SUR LES REPRÉSENTATIONS CRISTALLINES ET SEMI-STABLES

Dans ce paragraphe,  $k$  désigne un corps parfait de caractéristique  $p > 0$ ,  $W$  l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans  $k$  et  $K_0$  le corps des fractions de  $W$ . On fixe une clôture algébrique  $\overline{K}_0$  de  $K_0$  et on note  $G_{K_0} = \text{Gal}(\overline{K}_0/K_0)$ .

2.1. On renvoie à [Fo1] pour les définitions et propriétés des représentations cristallines et semi-stables de  $G_{K_0}$ . On rappelle que les représentations cristallines sont semi-stables et que les représentations semi-stables sont Hodge-Tate. De plus, à chaque représentation semi-stable  $V$  de  $G_{K_0}$ , à poids de Hodge-Tate entre 0 et  $r$  avec  $r \in \mathbf{N}$  par exemple, Fontaine associe un  $(\phi, N)$ -module filtré  $D(V) = \text{Hom}_{G_{K_0}}(V, B_{st}^+)$  qui est un  $K_0$ -espace vectoriel de dimension  $\dim_{\mathbf{Q}_p} V$  muni d'une collection de sous- $K_0$ -espaces vectoriels  $(\text{Fil}^i D(V))_{i \in \mathbf{Z}}$  telle que  $\text{Fil}^i D(V) = D(V)$  si  $i \leq 0$ ,  $\text{Fil}^{i+1} D(V) \subset \text{Fil}^i D(V)$  et  $\text{Fil}^i D(V) = 0$  si  $i \geq r + 1$ , d'une application semi-linéaire injective  $\phi : D(V) \rightarrow D(V)$  et d'une application linéaire  $N : D(V) \rightarrow D(V)$  telle que  $N\phi = p\phi N$ . On a  $N = 0$  si et seulement si la représentation est cristalline et  $D(V)$  s'identifie alors à  $\text{Hom}_{G_{K_0}}(V, B_{cris}^+)$ .

**Définition 2.** Soit  $V$  une représentation cristalline de  $G_{K_0}$  à poids de Hodge-Tate entre 0 et  $r$  ( $r \in \mathbf{N}$ ). On appelle réseau fortement divisible de  $D(V)$  tout  $W$ -réseau  $M$  de  $D(V)$  stable par  $\phi$  tel que  $\phi(\text{Fil}^i D(V) \cap M) \subset p^i M$  pour tout  $i \in \mathbf{Z}$  et  $\sum(\phi/p^i)(\text{Fil}^i D(V) \cap M) = M$ .

Lorsque  $V$  est cristalline, on peut montrer que  $D(V)$  contient toujours un tel réseau ([La],3.2). Ces réseaux sont utiles essentiellement lorsque  $r \leq p - 2$ . La proposition suivante est bien connue des spécialistes.

**Proposition 3.** Soit  $V$  une représentation cristalline de  $G_{K_0}$  à poids de Hodge-Tate entre 0 et  $p - 2$  et  $D(V)$  son  $\phi$ -module filtré. Alors il y a une (anti-) équivalence de catégories entre les  $\mathbf{Z}_p$ -réseaux stables par  $G_{K_0}$  de  $V$  et les  $W$ -réseaux fortement divisibles de  $D(V)$ .

*Preuve.* — Si  $M$  est un objet de la catégorie de Fontaine-Laffaille  $\underline{MF}_{\text{tor}}^{f,p-2}$  ([FL],3.2), on pose:

$$V_{\text{cris}}^*(M) = \text{Hom}_{\text{comp}}(M, A_{\text{cris}} \otimes \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)$$

où  $A_{\text{cris}}$  est l'anneau introduit par Fontaine et l'indice "comp" signifie qu'on prend les applications  $\mathbf{Z}_p$ -linéaires et compatibles aux diverses structures (voir ([FL],3) ou ([Br1],3.2.1)). A chaque  $W$ -réseau fortement divisible  $M$  de  $D(V)$ , on peut alors associer un  $\mathbf{Z}_p$ -réseau  $V_{\text{cris}}^*(M)$  de  $V$  stable par  $G_{K_0}$  en posant:

$$\begin{aligned} V_{\text{cris}}^*(M) &= \varprojlim V_{\text{cris}}^*(M/p^n M) = \text{Hom}_{\text{comp}}(M \otimes \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p, A_{\text{cris}} \otimes \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p) \\ &= \text{Hom}_{\text{comp}}(M, A_{\text{cris}}) \end{aligned}$$

et la suite exacte  $0 \rightarrow M/p^n M \rightarrow M \otimes \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p \xrightarrow{p^n} M \otimes \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p \rightarrow 0$  permet d'identifier  $V_{\text{cris}}^*(M)/p^n V_{\text{cris}}^*(M)$  à  $V_{\text{cris}}^*(M/p^n M)$ . Par un passage à la limite projective, on déduit donc de ([FL],6.1) la pleine fidélité du foncteur  $M \mapsto V_{\text{cris}}^*(M)$  pour les  $W$ -réseaux fortement divisibles. Il faut montrer l'essentielle surjectivité. Soit  $T$  un  $\mathbf{Z}_p$ -réseau de  $V$  stable par  $G_{K_0}$  et  $M$  un  $W$ -réseau fortement divisible quelconque de  $D(V)$  ([La],3.2). Soit  $n_0 \in \mathbf{N}$  tel que  $p^{n_0} T \subset V_{\text{cris}}^*(M) \subset (1/p^{n_0})T$ . Pour  $n \geq n_0$ , on a  $p^{n_0} T/p^n T \subset V_{\text{cris}}^*(M)/p^n T$  et  $V_{\text{cris}}^*(M)/p^n T$  est un quotient de  $V_{\text{cris}}^*(M)/p^{n+n_0} V_{\text{cris}}^*(M) \simeq V_{\text{cris}}^*(M/p^{n+n_0} M)$  où  $M/p^{n+n_0} M$  est dans  $\underline{MF}_{\text{tor}}^{f,p-2}$ . Comme  $V_{\text{cris}}^*(\underline{MF}_{\text{tor}}^{f,p-2})$  est une catégorie de représentations de  $p$ -torsion stable par sous-objet et quotient (on le déduit de ([FL],6.13.(a))),  $p^{n_0} T/p^n T$  est de la forme  $V_{\text{cris}}^*(M_n)$  pour un  $M_n$  dans  $\underline{MF}_{\text{tor}}^{f,p-2}$ . Par ([FL],3.4),  $M_n$  est un  $W_n$ -module libre de rang  $rg_{\mathbf{Z}_p} T$  pour tout  $n$  et, par la pleine fidélité de  $V_{\text{cris}}^*$  ([FL],6.1),  $M_n \simeq M_{n+1}/p^n M_{n+1}$ . Donc  $\varprojlim M_n \simeq M_\infty \otimes \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ , où les flèches de transition sont la multiplication par  $p$  et où  $M_\infty$  s'identifie à un  $W$ -réseau fortement divisible de  $D(V)$ . A la limite, on a  $p^{n_0} T \simeq V_{\text{cris}}^*(M_\infty)$ .  $\square$

2.2. Bien que nous n'en ayons pas besoin pour l'application aux formes modulaires, indiquons comment la proposition ci-dessus se généralise lorsque  $V$  est semi-stable à poids de Hodge-Tate entre 0 et  $p - 2$ . Rappelons qu'alors  $N$  est non nul en général sur  $D(V)$ . La notion de réseau fortement divisible est un peu plus délicate à définir. Soient  $S$  le complété  $p$ -adique de  $W[\frac{u^i}{i!}]_{i \in \mathbf{N}}$  (anneau des polynômes à puissances divisées en  $u$ ),  $\phi : S \rightarrow S$  l'unique application semi-linéaire (par rapport au Frobenius sur  $W$ ) et continue telle que  $\phi(\frac{u^i}{i!}) = \frac{u^{ip}}{i!}$  et  $N : S \rightarrow S$  l'unique application  $W$ -linéaire continue telle que  $N(\frac{u^i}{i!}) = -\frac{i u^i}{i!}$ . Posons  $S_{K_0} = K_0 \otimes_W S$  auquel on étend  $N$  et  $\phi$ . A partir du  $(\phi, N)$ -module filtré  $D(V)$  associé à  $V$ , on définit  $\mathcal{D}(V) = S_{K_0} \otimes_{K_0} D(V)$  qu'on munit d'un Frobenius injectif  $\phi = "\phi \otimes \phi"$  et d'une application  $K_0$ -linéaire  $N = "N \otimes Id + Id \otimes N"$ . Soit  $f_p : \mathcal{D}(V) \rightarrow \mathcal{D}(V)$  l'application  $K_0$ -linéaire qui envoie  $s(u) \otimes x$  sur  $s(p)x$ , on munit enfin  $\mathcal{D}(V)$  d'une collection de sous- $S_{K_0}$ -modules  $\text{Fil}^i \mathcal{D}(V)$  définis par récurrence de la façon suivante:

$Fil^0\mathcal{D}(V) = \mathcal{D}(V)$ ,  $Fil^{i+1}\mathcal{D}(V) = \{x \in \mathcal{D}(V) \text{ tel que } N(x) \in Fil^i\mathcal{D}(V) \text{ et } f_p(x) \in Fil^{i+1}\mathcal{D}(V)\}$ .

**Définition 4.** Soit  $V$  une représentation semi-stable de  $G_{K_0}$  à poids de Hodge-Tate entre 0 et  $p-2$ . On appelle module fortement divisible de  $\mathcal{D}(V)$  tout sous- $S$ -module libre de type fini  $\mathcal{M}$  de  $\mathcal{D}(V)$  stable par  $\phi$  et  $N$  tel que  $K_0 \otimes_W \mathcal{M} \simeq \mathcal{D}(V)$ ,  $\phi(Fil^i\mathcal{D}(V) \cap \mathcal{M}) \subset p^i\mathcal{M}$  pour tout  $i \in \{0, \dots, p-2\}$  et  $\sum_{0 \leq i \leq p-2} (\phi/p^i)(Fil^i\mathcal{D}(V) \cap \mathcal{M})$  engendre  $\mathcal{M}$  sur  $S$ .

Là encore, on peut montrer que  $\mathcal{D}(V)$  contient toujours un tel sous-module ([Br2],1.3).

**Proposition 5.** Soit  $V$  une représentation semi-stable de  $G_{K_0}$  à poids de Hodge-Tate entre 0 et  $p-2$ ,  $D(V)$  son  $(\phi, N)$ -module filtré et  $\mathcal{D}(V)$  le  $S_{K_0}$ -module associé à  $D(V)$ . Alors il y a une (anti-) équivalence de catégories entre les  $\mathbf{Z}_p$ -réseaux stables par  $G_{K_0}$  de  $V$  et les  $S$ -modules fortement divisibles de  $\mathcal{D}(V)$ .

*Preuve.* — A partir de ([Br1],2.4.2.1) et ([Br1],3.1.3.1), la preuve est formellement la même que la précédente en remplaçant  $A_{cris}$  par  $\widehat{A}_{st}$  ([Br1],3.1.1).  $\square$

2.3. On a alors la:

**Proposition 6.** Soient  $r \in \{0, \dots, p-2\}$ ,  $V$  une représentation  $p$ -adique de  $G_{K_0}$  et  $T$  un  $\mathbf{Z}_p$ -réseau de  $V$  stable par  $G_{K_0}$  tel que, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $T/p^n T$  est un sous-quotient d'une représentation cristalline (resp. semi-stable) de  $G_{K_0}$  à poids de Hodge-Tate entre 0 et  $r$ . Alors  $V$  est cristalline (resp. semi-stable) à poids de Hodge-Tate entre 0 et  $r$ .

*Preuve.* — On fait la preuve dans le cas cristallin, celle dans le cas semi-stable étant la même. Pour  $n \in \mathbf{N}$ , on a donc  $T/p^n T \simeq T_1(n)/T_2(n)$  où  $T_2(n) \subset T_1(n)$  sont des  $\mathbf{Z}_p$ -réseaux d'une représentation cristalline  $V(n)$  à poids de Hodge-Tate entre 0 et  $r$ . Par (3),  $T_1(n)/p^n T_1(n) \in V_{cris}^*(\underline{MF}_{tor}^{f,r})$ , donc  $T/p^n T \simeq T_1(n)/(p^n T_1(n) + T_2(n))$  est aussi de la forme  $V_{cris}^*(M_n)$  avec  $M_n \in \underline{MF}_{tor}^{f,r}$ . Comme dans la preuve de (3),  $M_n$  est un  $W_n$ -module libre de rang  $rg_{\mathbf{Z}_p} T$  pour tout  $n$  et  $M_n \simeq M_{n+1}/p^n M_{n+1}$ . On en déduit de même  $T \simeq V_{cris}^*(M)$  pour un  $W$ -module fortement divisible  $M$  tel que  $Fil^0 M = M$  et  $Fil^{r+1} M = 0$ . Par ([FL],8.4),  $V = T \otimes \mathbf{Q}_p$  est cristalline à poids de Hodge-Tate entre 0 et  $r$ .  $\square$

Il est raisonnable de proposer la conjecture suivante:

**Conjecture 7.** (Fontaine [Fo2]) Soient  $r \in \mathbf{N}$ ,  $K$  une extension finie totalement ramifiée de  $K_0$  dans  $\overline{K}_0$  et  $V$  une représentation  $p$ -adique de  $G_K = Gal(\overline{K}_0/K)$ . Supposons que  $V$  contienne un  $\mathbf{Z}_p$ -réseau  $T$  stable par  $G_K$  tel que, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $T/p^n T$  est un sous-quotient d'une représentation cristalline (resp. semi-stable) de  $G_K$  à poids de Hodge-Tate entre 0 et  $r$ . Alors  $V$  est cristalline (resp. semi-stable) à poids de Hodge-Tate entre 0 et  $r$ .

**Remarque 8.** La borne sur les poids de Hodge-Tate est nécessaire. En effet, soient  $a \in \mathbf{Z}_p \setminus \mathbf{Z}$  et  $\chi : G_K \rightarrow \mathbf{Z}_p^*$  le caractère cyclotomique. Alors  $(\chi^{(p-1)})^a$  est un caractère de  $G_K$  qui n'est pas de Hodge-Tate mais qui, modulo  $p^n$  et pour tout  $n$ , est un quotient d'une représentation cristalline.

**Remarque 9.** Les énoncés  $l$ -adiques analogues à (7) (i.e. cristalline  $\leftrightarrow$  non ramifié et semi-stable  $\leftrightarrow$  l'inertie agit de façon unipotente) sont triviaux.

**Remarque 10.** On vérifie facilement que si les conditions en (7) sont vraies pour un réseau  $T$ , elles le sont pour tous.

La suite n'utilise que les cas cristallins.

### 3. APPLICATION AUX CONGRUENCES ENTRE FORMES MODULAIRES DE HILBERT

Dans ce paragraphe, on suppose donc que [BR] n'a pas été écrit et on adopte essentiellement les conventions et notations de [Ta1], à quelques allègements près.

3.1. Soit  $F$  un corps de nombres totalement réel de degré  $d$  et d'anneau d'entiers  $\mathcal{O}_F$ ,  $I$  l'ensemble des plongements  $\tau : F \hookrightarrow \mathbf{R}$  et  $k = (k_\tau)_{\tau \in I}$  des entiers  $\geq 2$  et de même parité. Soit  $\mathfrak{N}$  un idéal de  $\mathcal{O}_F$ . On fixe  $f$  une forme modulaire parabolique de Hilbert de poids  $k$ , niveau  $\mathfrak{N}$  (lorsque  $F = \mathbf{Q}$  et  $\mathfrak{N} = N\mathbf{Z}$ , l'espace de ces formes est isomorphe à l'espace des formes paraboliques classiques sur  $\Gamma_1(N)$ ). On suppose  $f$  vecteur propre des opérateur de Hecke  $T_{\mathfrak{q}}$ ,  $S_{\mathfrak{a}}$  où  $\mathfrak{q}$  et  $\mathfrak{a}$  sont des places finies de  $F$  et  $\mathfrak{a}$  premier à  $\mathfrak{N}$  (voir ([Ta1],1) pour des définitions précises). On note  $\Theta(T_{\mathfrak{q}})$ ,  $\Theta(S_{\mathfrak{a}})$  les valeurs propres correspondantes, par ([Sh],prop.2.8), elles engendrent une extension finie  $K_f$  de  $\mathbf{Q}$  dont on note  $\mathcal{O}_f$  l'anneau d'entiers. Par ([Hi],4), on a  $\Theta(T_{\mathfrak{q}}), \Theta(S_{\mathfrak{a}}) \in \mathcal{O}_f$ . Dans la suite, on peut supposer  $f$  nouvelle ([Wi1],1.3).

Le théorème suivant, démontré dans ([Ta1],th.2), fournit les représentations mentionnées dans l'énoncé du th. 1:

**Théorème 11.** (*Shimura, Deligne, Wiles, Taylor,...*) *Pour toute place finie  $\mathfrak{p}$  de  $\mathcal{O}_f$  au-dessus d'un nombre premier  $p$ , il existe une représentation continue absolument irréductible:*

$$\rho : \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/F) \longrightarrow \text{GL}_2(\mathcal{O}_{f,\mathfrak{p}})$$

non ramifiée en dehors de  $\mathfrak{Np}$  et telle que, si  $\mathfrak{q}$  est une place de  $F$  qui ne divise pas  $\mathfrak{Np}$ :

$$(*) \quad \begin{cases} \text{tr}\rho(\text{Frob}_{\mathfrak{q}}) = \Theta(T_{\mathfrak{q}}) \\ \det\rho(\text{Frob}_{\mathfrak{q}}) = \Theta(S_{\mathfrak{q}})\#(\mathcal{O}_F/\mathfrak{q}) \end{cases}$$

où  $\text{Frob}_{\mathfrak{q}}$  est un Frobenius arithmétique de  $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/F_{\mathfrak{q}})$ .

L'irréductibilité absolue découle de ([Wi1],2.1(a)) (dans loc. cit. tous les  $k_\tau$  sont 2 mais le cas général est identique). Pour faire le lien avec le cas  $F = \mathbf{Q}$ , remarquons que le déterminant peut s'écrire  $\det(\rho) = \epsilon \cdot \chi^{w-1}$  où  $\epsilon$  est un caractère d'ordre fini de  $G_F = \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/F)$ ,  $\chi$  le caractère cyclotomique  $p$ -adique usuel et  $w = \text{Max}\{k_\tau\}_{\tau \in I}$  ( $w = \mu + 2$  avec les notations de [Ta1]).

3.2. Si  $\mathfrak{l}$  est une place finie de  $F$  ne divisant pas  $\mathfrak{N}$ , on note  $S_k(\mathfrak{N}, \mathfrak{l})$  l'espace des formes paraboliques de poids  $k$ , niveau  $\mathfrak{N}$  et caractère central  $\epsilon$  (c.f. ci-dessus) de conducteur premier à  $\mathfrak{l}$ , et  $\mathbf{T}_k(\mathfrak{N}, \mathfrak{l})$  la  $\mathbf{Z}$ -algèbre de  $\text{End}_{\mathbf{C}}(S_k(\mathfrak{N}, \mathfrak{l}))$  engendrée par les  $\mathbf{T}_{\mathfrak{q}}$  pour  $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{l}$  et les  $S_{\mathfrak{a}}$  pour  $\mathfrak{a}$  premier à  $\mathfrak{N}$ . On a une décomposition  $S_k(\mathfrak{N}, \mathfrak{l}) = S_k(\mathfrak{N}, \mathfrak{l})^{\text{new}} \oplus S_k(\mathfrak{N}, \mathfrak{l})^{\text{old}}$  (formes nouvelles et anciennes, c.f. [Mi]) et on note  $\mathbf{T}_k(\mathfrak{N}, \mathfrak{l})^{\text{new}}$  (resp.  $\mathbf{T}_k(\mathfrak{N}, \mathfrak{l})^{\text{old}}$ ) l'image de  $\mathbf{T}_k(\mathfrak{N}, \mathfrak{l})$  dans  $\text{End}_{\mathbf{C}}(S_k(\mathfrak{N}, \mathfrak{l})^{\text{new}})$  (resp.  $\text{End}_{\mathbf{C}}(S_k(\mathfrak{N}, \mathfrak{l})^{\text{old}})$ ).

**Théorème 12.** (*Taylor [Ta1]*) *Supposons  $d = [F : \mathbf{Q}]$  pair. Soit  $\mathfrak{p}$  une place finie de  $\mathcal{O}_f$  au-dessus d'un nombre premier  $p$ . Pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ , il existe une infinité de places finies  $\mathfrak{l}_n$  de  $F$  (premières à  $\mathfrak{Np}$ ) telles qu'on ait un diagramme commutatif d'algèbres de Hecke:*

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{T}_k(\mathfrak{N}, \mathfrak{l}_n)^{\text{new}} & \\ & \nearrow & \searrow \\ \mathbf{T}_k(\mathfrak{N}, \mathfrak{l}_n) & & \mathcal{O}_f/\mathfrak{p}^n \\ & \searrow & \nearrow \\ & \mathbf{T}_k(\mathfrak{N}, \mathfrak{l}_n)^{\text{old}} & \end{array}$$

où  $\mathbf{T}_k(\mathfrak{N}, \mathfrak{l}_n)^{\text{old}} \rightarrow \mathcal{O}_f/\mathfrak{p}^n$  est induit par la forme propre  $f$  fixée de niveau  $\mathfrak{N}$ .

3.3. On fixe maintenant un nombre premier  $p$  quelconque. Pour toute place finie  $\mathfrak{l}$  de  $F$  ne divisant pas  $\mathfrak{N}$ , on note  $\mathbf{T}'_k(\mathfrak{N}, \mathfrak{l})^{new}$  la sous-algèbre de  $\mathbf{T}_k(\mathfrak{N}, \mathfrak{l})^{new}$  engendrée par les  $T_{\mathfrak{q}}$  et  $S_{\mathfrak{a}}$  pour  $\mathfrak{q}$  et  $\mathfrak{a}$  premiers à  $\mathfrak{N}$ ,  $\mathbf{T}_{\mathfrak{l}} = \mathbf{T}_k(\mathfrak{N}, \mathfrak{l})^{new} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_p$  et  $\mathbf{T}'_{\mathfrak{l}} = \mathbf{T}'_k(\mathfrak{N}, \mathfrak{l})^{new} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_p$ . Pour  $\mathfrak{q}$  premier à  $\mathfrak{N}$ ,  $T_{\mathfrak{q}}$  est un opérateur normal sur les espaces de formes de niveau  $\mathfrak{N}$  ([Mi],(1.6)), donc diagonalisable sur  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{T}'_k(\mathfrak{N}, \mathfrak{l})^{new}$  s'injecte dans un produit fini de corps de nombres. Donc  $\mathbf{T}'_{\mathfrak{l}}$  se plonge dans un produit d'extensions finies de  $\mathbf{Q}_p$  dont on note  $\tilde{\mathbf{T}}'_{\mathfrak{l}}$  le produit des anneaux d'entiers correspondants. On a  $\mathbf{T}'_{\mathfrak{l}} \subset \tilde{\mathbf{T}}'_{\mathfrak{l}}$ .

**Lemme 13.** *Soit  $\mathfrak{l}$  une place finie de  $F$  première à  $\mathfrak{N}$ , alors il existe une représentation continue:*

$$\rho_{\mathfrak{l}} : Gal(\overline{\mathbf{Q}}/F) \rightarrow GL_2(\tilde{\mathbf{T}}'_{\mathfrak{l}})$$

*non ramifiée en dehors de  $\mathfrak{N}p$ , telle que, si  $\mathfrak{q}$  ne divise pas  $\mathfrak{N}p$ :*

$$\begin{cases} tr \rho_{\mathfrak{l}}(Frob_{\mathfrak{q}}) = T_{\mathfrak{q}} \\ det \rho_{\mathfrak{l}}(Frob_{\mathfrak{q}}) = S_{\mathfrak{q}} \# (\mathcal{O}_F/\mathfrak{q}) \end{cases}$$

*et telle que, si  $\mathfrak{q}$  ne divise pas  $\mathfrak{N}$  mais divise  $p$ ,  $\rho_{\mathfrak{l}}|_{G_{\mathfrak{q}}}$  est un  $\mathbf{Z}_p$ -réseau dans une représentation cristalline à poids de Hodge-Tate entre 0 et  $w - 1$ , où  $G_{\mathfrak{q}} \simeq Gal(\overline{\mathbf{Q}}_p/F_{\mathfrak{q}})$  est un sous-groupe de décomposition en  $\mathfrak{q}$ .*

*Preuve.* — On a  $\mathbf{T}'_k(\mathfrak{N}, \mathfrak{l})^{new} \subset \Pi_g K'_g$  où le produit est pris sur une base de formes propres  $g$  (pour  $\mathbf{T}'_k(\mathfrak{N}, \mathfrak{l})^{new}$ ) de  $S_k(\mathfrak{N}, \mathfrak{l})^{new}$  dont les valeurs propres engendrent un corps de nombres  $K'_g$ . Ces formes sont “classiques”, i.e. on sait leur associer des représentations galoisiennes continues à valeurs dans  $GL_2(K'_{g,p})$  (c.f. ([Ti],II.4) et ([Ca1],th.A)) satisfaisant les conditions du type (\*) en dehors de  $\mathfrak{N}p$  pour tous les complétés  $K'_{g,p}$  (le fait qu'elles soient réalisables sur  $K'_{g,p}$  provient de leur irréductibilité, des conditions (\*) et du théorème de Čebotarev). En prenant des réseaux stables par  $G_F = Gal(\overline{\mathbf{Q}}/F)$ , on en déduit une représentation  $\rho_{\mathfrak{l}} : G_F \rightarrow GL_2(\tilde{\mathbf{T}}'_{\mathfrak{l}})$  non ramifiée en dehors de  $\mathfrak{N}p$  avec  $tr \rho_{\mathfrak{l}}(Frob_{\mathfrak{q}}) = T_{\mathfrak{q}}$  et  $det \rho_{\mathfrak{l}}(Frob_{\mathfrak{q}}) = S_{\mathfrak{q}} \# (\mathcal{O}_F/\mathfrak{q})$  si  $\mathfrak{q}$  est premier à  $\mathfrak{N}p$ . Les constituants de  $\rho_{\mathfrak{l}}$  se réalisent dans le dual de la cohomologie étale  $p$ -adique (avec coefficients) de courbes de Shimura sur  $\mathcal{O}_F$  lisses en dehors de  $\mathfrak{N}$  ([Ca1],1 et 2.2). Soit en utilisant les théorèmes de comparaison  $p$ -adiques avec coefficients de Faltings ([Fa],5.6), soit en utilisant les résultats récents de T. Saito sur les représentations de Weil-Deligne associées à  $\rho_{\mathfrak{l}}|_{G_{\mathfrak{q}}} \otimes \mathbf{Q}_p$ , on a alors que pour  $\mathfrak{q}/p$  et premier à  $\mathfrak{N}$   $\rho_{\mathfrak{l}}|_{G_{\mathfrak{q}}} \otimes \mathbf{Q}_p$  est cristalline à poids de Hodge-Tate positifs ou nuls, donc entre 0 et  $w - 1$  vu le poids du déterminant en (11).  $\square$

3.4. Pour  $d$  pair et  $p > 2$ , on construit la représentation  $\rho$  du théorème (11) comme suit. Notons  $\lambda_{f, \mathfrak{l}_n} : \mathbf{T}_k(\mathfrak{N}, \mathfrak{l}_n)^{new} \rightarrow \mathcal{O}_f/\mathfrak{p}^n$  le morphisme d'anneaux en (12) où  $\mathfrak{l}_n$  est une des places de (12) première à  $\mathfrak{N}p$ . Comme  $p > 2$  par hypothèse, on utilise la notion de pseudo-représentation telle que définie par Wiles dans ([Wi2],2.2.3). Quitte à faire un changement de base sur chaque composante de  $\tilde{\mathbf{T}}'_{\mathfrak{l}_n}$ , on peut donc supposer  $\rho_{\mathfrak{l}_n}(c) = diag(1, -1)$  où  $c$  est une conjugaison complexe et  $\rho_{\mathfrak{l}_n}$  la représentation construite en (13). Soit  $r_{\mathfrak{l}_n} = (a_{\mathfrak{l}_n}, d_{\mathfrak{l}_n}, x_{\mathfrak{l}_n})$  la pseudo-représentation alors associée à  $\rho_{\mathfrak{l}_n}$ . Comme  $\mathbf{T}'_{\mathfrak{l}_n}$  est fermé dans  $\tilde{\mathbf{T}}'_{\mathfrak{l}_n}$  (pour la topologie  $p$ -adique des  $\mathbf{Z}_p$ -modules libres de type fini sous-jacents), le théorème de Čebotarev implique que  $r_{\mathfrak{l}_n}$  est à valeurs dans  $\mathbf{T}'_{\mathfrak{l}_n}$ . Soit  $r_n = \lambda_{f, \mathfrak{l}_n} \circ r_{\mathfrak{l}_n} = (a_n, d_n, x_n)$ : une nouvelle utilisation de Čebotarev montre que  $r_n$  est indépendante du choix de  $\mathfrak{l}_n$ , donc les  $(r_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  forment un système compatible de pseudo-représentations à valeurs dans  $(\mathcal{O}_f/\mathfrak{p}^n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ . Pour tout  $\sigma, \tau \in G_F$ , posons  $a(\sigma) = (a_n(\sigma))_{n \in \mathbf{N}^*} \in \mathcal{O}_{f, \mathfrak{p}}$ ,  $d(\sigma) = (d_n(\sigma))_{n \in \mathbf{N}^*}$ ,  $x(\sigma, \tau) = (x_n(\sigma, \tau))_{n \in \mathbf{N}^*}$  et soit  $m_0 = Min\{v_{\pi}(x(\sigma, \tau)), (\sigma, \tau) \in G_F \times G_F\}$  où  $\pi$  est une uniformisante de  $\mathcal{O}_{f, \mathfrak{p}}$  et  $v_{\pi}$  la valuation  $\pi$ -adique normalisée sur  $\mathcal{O}_{f, \mathfrak{p}}$ . Si  $m_0 = +\infty$ , on voit que  $\rho(\sigma) = diag(a(\sigma), d(\sigma))$

est une représentation réductible de  $G_F$  qui vérifie les conditions (\*), ce qui est impossible. Donc  $m_0 \neq +\infty$  et on choisit  $(\sigma_0, \tau_0)$  tel que  $v_\pi(x(\sigma_0, \tau_0)) = m_0$ . La représentation  $\rho$  (pour  $p > 2$  et  $d$  pair) est alors donnée par (c.f. [Wi2] p.565):

$$\rho(\sigma) = \begin{pmatrix} a(\sigma) & x(\sigma, \tau_0) \\ \frac{x(\sigma_0, \sigma)}{x(\sigma_0, \tau_0)} & d(\sigma) \end{pmatrix} \in GL_2(\mathcal{O}_{f, \mathfrak{p}}).$$

3.5.

**Théorème 14.** *Avec les notations de (3.1), soit  $\rho_n$  la restriction modulo  $\mathfrak{p}^n$  de  $\rho$  et  $\mathfrak{q}$  une place finie de  $F$  première à  $\mathfrak{N}$  et qui divise  $p$ . Supposons  $p > 2$ , alors  $\rho_n|_{G_{\mathfrak{q}}}$  est un sous-quotient d'une représentation cristalline à poids de Hodge-Tate entre 0 et  $w - 1$ .*

*Preuve.* — Si  $d$  est impair,  $\rho$  se réalise dans le dual de la cohomologie étale d'une courbe de Shimura sur  $\mathcal{O}_F$  lisse en dehors de  $\mathfrak{N}$  et le résultat est clair. On suppose donc  $d$  pair. Soit  $\mathbf{T}'_{\mathfrak{l}_n} = \mathbf{T}'_{\mathfrak{l}_n} \left[ \frac{1}{x_{\mathfrak{l}_n}(\sigma_0, \tau_0)} \right]$ : il est non nul pour  $n > m_0$  et s'injecte encore dans un produit d'extensions finies de  $\mathbf{Q}_p$ . On a de plus une vraie représentation:

$$\begin{aligned} \rho_{\mathfrak{l}_n}^{\#} : G_F &\rightarrow GL_2(\mathbf{T}'_{\mathfrak{l}_n}) \\ \sigma &\mapsto \begin{pmatrix} a_{\mathfrak{l}_n}(\sigma) & x_{\mathfrak{l}_n}(\sigma, \tau_0) \\ \frac{x_{\mathfrak{l}_n}(\sigma_0, \sigma)}{x_{\mathfrak{l}_n}(\sigma_0, \tau_0)} & d_{\mathfrak{l}_n}(\sigma) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dont les projections sur les composantes de  $\tilde{\mathbf{T}}'_{\mathfrak{l}_n} \left[ \frac{1}{x_{\mathfrak{l}_n}(\sigma_0, \tau_0)} \right] \otimes \mathbf{Q}_p$  sont des constituants de  $\rho_{\mathfrak{l}_n} \otimes \mathbf{Q}_p$  en (13) (utiliser l'irréductibilité). D'après (13),  $\rho_{\mathfrak{l}_n}^{\#}|_{G_{\mathfrak{q}}}$  pour  $\mathfrak{q}$  premier à  $\mathfrak{N}_{\mathfrak{l}_n}$  et  $\mathfrak{q}/p$  s'injecte dans une représentation cristalline. Soient  $x_{\mathfrak{l}_n}(\sigma_0, \tau_1), \dots, x_{\mathfrak{l}_n}(\sigma_0, \tau_h)$  des générateurs de l'idéal de  $\mathbf{T}'_{\mathfrak{l}_n}$  engendré par les  $(x_{\mathfrak{l}_n}(\sigma_0, \tau))_{\tau \in G_F}$ ,  $(e_1, e_2)$  la base canonique de  $\rho_{\mathfrak{l}_n}^{\#}$  et  $\mathbf{T}_{\mathfrak{l}_n}$  le sous- $\mathbf{T}'_{\mathfrak{l}_n}$ -module de  $\mathbf{T}'_{\mathfrak{l}_n} e_1 \oplus \mathbf{T}'_{\mathfrak{l}_n} e_2$  engendré par  $e_1$  et les  $\frac{x_{\mathfrak{l}_n}(\sigma_0, \tau_i)}{x_{\mathfrak{l}_n}(\sigma_0, \tau_0)} e_2$ ,  $i \in \{0, \dots, h\}$ . La formule:

$$\frac{x_{\mathfrak{l}_n}(\sigma_0, \tau_i)}{x_{\mathfrak{l}_n}(\sigma_0, \tau_0)} x_{\mathfrak{l}_n}(\sigma, \tau_0) = x_{\mathfrak{l}_n}(\sigma, \tau_i)$$

entraîne que  $\mathbf{T}_{\mathfrak{l}_n}$  est un  $\mathbf{Z}_{\mathfrak{p}}$ -module (libre de type fini) stable par  $G_F$ , donc un réseau dans une représentation cristalline à poids de Hodge-Tate entre 0 et  $w - 1$  quand on restreint l'action à  $G_{\mathfrak{q}}$ . En utilisant  $x_{\mathfrak{l}_n}(\sigma_0, \tau_0)^m t = 0$  dans  $\mathbf{T}'_{\mathfrak{l}_n}$  si et seulement si  $x_{\mathfrak{l}_n}(\sigma_0, \tau_0)t = 0$  (car  $\mathbf{T}'_{\mathfrak{l}_n}$  se plonge dans un produit de corps), on voit que pour  $n > 2m_0$ , l'application:

$$\mu_{f, \mathfrak{l}_n} : \mathbf{T}'_{\mathfrak{l}_n} \xrightarrow{\lambda_{f, \mathfrak{l}_n}} \mathcal{O}_f / \mathfrak{p}^n \longrightarrow \mathcal{O}_f / \mathfrak{p}^{n-2m_0}$$

induit un morphisme compatible à  $G_F$  dans l'espace de  $\rho_{n-2m_0}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\mathfrak{l}_n} &\longrightarrow \mathcal{O}_f / \mathfrak{p}^{n-2m_0} e_1 \oplus \mathcal{O}_f / \mathfrak{p}^{n-2m_0} e_2 \\ t e_1 + \sum_{i=0}^h t_i \frac{x_{\mathfrak{l}_n}(\sigma_0, \tau_i)}{x_{\mathfrak{l}_n}(\sigma_0, \tau_0)} e_2 &\mapsto \mu_{f, \mathfrak{l}_n}(t) e_1 + \sum_{i=0}^h \mu_{f, \mathfrak{l}_n}(t_i) \left( \frac{x(\sigma_0, \tau_i)}{x(\sigma_0, \tau_0)} \bmod \mathfrak{p}^{n-2m_0} \right) e_2 \end{aligned}$$

où  $t, t_i \in \mathbf{T}'_{\mathfrak{l}_n}$ . Soit  $\mathcal{O}'_f$  le sous-anneau de  $\mathcal{O}_f$  engendré par les  $\Theta(T_{\mathfrak{q}})$  et  $\Theta(S_{\alpha})$  pour  $\mathfrak{q}, \alpha$  premiers à  $\mathfrak{N}$ , comme  $f$  est nouvelle, on a encore  $K_f = \text{Frac}(\mathcal{O}'_f)$  ([Mi], th.2+[Sh], prop.2.6). Soient  $\theta \in \mathcal{O}_f$  tel que  $\theta \mathcal{O}_f \subset \mathcal{O}'_f$ ,  $m_1$  la valuation  $\mathfrak{p}$ -adique de  $\theta$ ,  $\mathfrak{l}'_n$  une autre place comme en (12) mais différente de  $\mathfrak{l}_n$  et  $\mathbf{T}'_{\mathfrak{l}'_n}$  un  $\mathbf{Z}_{\mathfrak{p}}$ -réseau d'une représentation cristalline construit comme précédemment avec  $\mathfrak{l}'_n$  au lieu de  $\mathfrak{l}_n$  muni d'un morphisme compatible à  $G_F$  dans l'espace de  $\rho_{n-2m_0}$ . L'image du morphisme somme  $\mathbf{T}_{\mathfrak{l}_n} \oplus \mathbf{T}'_{\mathfrak{l}'_n} \rightarrow \mathcal{O}_f / \mathfrak{p}^{n-2m_0} e_1 \oplus \mathcal{O}_f / \mathfrak{p}^{n-2m_0} e_2$

contient  $\mathfrak{p}^{m_1}(\mathcal{O}_f/\mathfrak{p}^{n-2m_0}e_1 \oplus \mathcal{O}_f/\mathfrak{p}^{n-2m_0}e_2)$ , donc  $\rho_{n-2m_0-m_1}|_{G_{\mathfrak{q}}}$  pour  $\mathfrak{q}$  premier à  $\mathfrak{N}_n \mathfrak{l}'_n$  et divisant  $p$  est un sous-quotient d'une représentation cristalline à poids de Hodge-Tate entre 0 et  $w-1$ . En faisant varier  $\mathfrak{l}_n$  et  $\mathfrak{l}'_n$ , on en déduit le même résultat pour tout  $\mathfrak{q}$  premier à  $\mathfrak{N}$  et divisant  $p$  et tout  $n \gg 0$ .  $\square$

**Corollaire 15.** *Avec les notations de (3.1), soit  $\mathfrak{q}$  une place de  $F$  telle que  $\mathfrak{q}$  ne divise pas  $\mathfrak{N}$  mais  $\mathfrak{q}$  divise  $p$ . Supposons de plus:*

- $p > w$
- $\mathfrak{q}$  non ramifié dans  $F$

alors  $\rho|_{G_{\mathfrak{q}}} \otimes \mathbf{Q}_p$  est cristalline à poids de Hodge-Tate entre 0 et  $w-1$ .

*Preuve.* — On applique (6) à (14).  $\square$

Bien sûr, (7) donnerait le résultat pour  $\mathfrak{q}$  premier à  $2\mathfrak{N}$  seulement.

**Remarque 16.** Pour les  $\mathfrak{p}$  tels que la représentation résiduelle  $\rho_1$  est (absolument) irréductible, la démonstration se simplifie puisque, par ([Ca2], th.2), on a une “vraie” représentation  $\rho_{\mathfrak{l}_n, \mathfrak{m}} : G_F \rightarrow GL_2((\mathbf{T}'_{\mathfrak{l}_n})_{\mathfrak{m}})$  où  $\mathfrak{m} = \text{Ker}(\mathbf{T}'_{\mathfrak{l}_n} \rightarrow \mathcal{O}_f/\mathfrak{p})$ , qu'il suffit de pousser dans  $GL_2(\mathcal{O}_f/\mathfrak{p}^n)$  par  $\lambda_{f, \mathfrak{l}_n}$  pour avoir  $\rho_n$  (voir dans ce cas [Ta2] pour le poids 2).

#### BIBLIOGRAPHIE

- [BR] Blasius D., Rogawski J., *Motives for Hilbert modular forms*, Inv. Math. 114, 1993, 55-87.
- [Br1] Breuil C., *Construction de représentations  $p$ -adiques semi-stables*, Ann. Scient. de l'E.N.S. 31, 1998, 281-327.
- [Br2] Breuil C., *Représentations semi-stables et modules fortement divisibles*, à paraître à Inv. Math.
- [Ca1] Carayol H., *Sur les représentations  $l$ -adiques associées aux formes modulaires de Hilbert*, Ann. Scient. de l'E.N.S. 19, 1986, 409-468.
- [Ca2] Carayol H., *Formes modulaires et représentations galoisiennes à valeurs dans un anneau local complet*, Contemporary Mathematics 165, 1994, 213-237.
- [Fa] Faltings G., *Crystalline cohomology and  $p$ -adic Galois representations*, Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory, John Hopkins Univ. Press, 1989, 25-79.
- [Fo1] Fontaine J.-M., *Représentations  $p$ -adiques semi-stables*, Astérisque 223, Soc. Math. de France, 1994, 113-184.
- [Fo2] Fontaine J.-M., *Deforming semi-stable Galois representations*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 94, 1997, 11138-11141.
- [FL] Fontaine J.-M., Laffaille G., *Construction de représentations  $p$ -adiques*, Ann. Scient. de l'E.N.S. 15, 1982, 547-608.
- [Hi] Hida H., *On the critical values of  $L$ -functions of  $GL(2)$  and  $GL(2) \times GL(2)$* , Duke Math. J. 74, 1994, 431-529.
- [La] Laffaille G., *Groupes  $p$ -divisibles et modules filtrés: le cas peu ramifié*, Bull. Soc. math. France 108, 1980, 187-206.
- [Mi] Miyake T., *On automorphic forms on  $GL_2$  and Hecke operators*, Ann. of Maths 94, 1971, 174-189.
- [Sh] Shimura G., *The special values of the zeta functions associated with Hilbert modular forms*, Duke Math. J. 45, 1978, 637-679.
- [Ta1] Taylor R., *On Galois representations associated to Hilbert modular forms*, Inv. Math. 98, 1989, 265-280.
- [Ta2] Taylor R., *On Galois representations associated to Hilbert modular forms II*, Conference on Elliptic curves and modular forms (Hong-Kong 1993), 1995, 185-191.
- [Ta3] Taylor R., *Galois representations associated to Siegel modular forms of low weight*, Duke Math. J. 63, 1991, 281-332.
- [Ti] Tilouine J., *Galois representations congruent to those coming from Shimura varieties*, Proc. of Symp. in Pure Math. 55, 1994, 625-638.
- [Wi1] Wiles A., *On  $p$ -adic representations for totally real fields*, Ann. of Maths 123, 1986, 407-456.
- [Wi2] Wiles A., *On ordinary  $\lambda$ -adic representations associated to modular forms*, Inv. Math. 94, 1988, 529-573.