

UNIVERSITÉ

Mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches

SPÉCIALITÉ: MATHÉMATIQUES

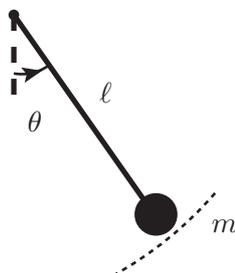
Périodes en Arithmétique
et Théorie Quantique des Champs

Francis Brown

1. Introduction générale	3
2. Quelques résultats sélectionnés	7
Première partie: Mathématiques	10
3. Espaces des modules et leurs périodes	10
4. Géométrie Hyperbolique et Fonctions zêta de Dedekind	16
5. Multizêtas et $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\})$	19
Deuxième partie: Théorie Quantique des Champs	23
6. Un aperçu rapide sur les intégrales de Feynman	23
7. Survol du programme du groupe de Galois cosmique	27
8. Résultats et articles	31
9. Résultats antérieurs à ma thèse	43
10. Liste des travaux et références	45

1. INTRODUCTION GÉNÉRALE

1.1. **Périodes.** On pourrait relier l'origine du mot 'période' au problème suivant en mécanique classique: déterminer le temps que met un pendule pour revenir à sa position initiale.¹



Son mouvement (supposé sans frottement) est décrit par la loi de Newton: $\ddot{\theta} + \frac{G}{\ell} \sin \theta = 0$, où G est l'intensité du champ de gravité, et ℓ est la longueur de la pendule. En intégrant cette équation, on voit que la période T s'exprime comme une intégrale elliptique de première espèce:

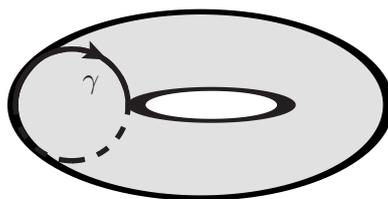
$$T = 4 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\rho^2 x^2)}}$$

Ici, $0 < \rho < 1$ est une constante qui dépend des conditions initiales. L'étude de telles intégrales au 18^{ième} siècle a donné lieu indirectement à la théorie des fonctions thêta, aux variétés abéliennes et aux motifs. Ce n'est peut-être pas une exagération de constater qu'une partie importante de la théorie des nombres a été motivée par ce genre de problème de physique.

L'interprétation moderne de cette intégrale consiste à considérer l'équation

$$y^2 = (1-x^2)(1-\rho^2 x^2),$$

ce qui définit une courbe elliptique E , dont les points complexes peuvent se voir comme un tore:



Le chemin d'intégration de 0 à 1 dans la définition de T correspond maintenant au lacet γ ci-dessus, et la période est tout simplement l'intégrale:

$$T = \int_{\gamma} \omega$$

où ω est une certaine forme différentielle de degré un sur E .

¹A vrai dire, le mot 'période' apparaît bien avant que la théorie du pendule ait été élaborée, dans les travaux de Kepler en 1619 concernant les périodes des orbites des planètes. Toujours est-il que ce genre de période est aussi une période dans le sens moderne de la géométrie algébrique.

Par la formule de Stokes, l'intégrale T ne dépend que de la classe de γ dans le groupe d'homologie singulière $[\gamma] \in H_1(E; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2$, et de la classe de ω dans la cohomologie de De Rham $[\omega] \in H_{dR}^1(E; \mathbb{C})$, qui est un espace vectoriel complexe de dimension 2. La période T s'obtient par l'accouplement d'intégration:

$$H_1(E; \mathbb{Z}) \otimes H_{dR}^1(E; \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C} .$$

On gagne beaucoup de choses en prenant un point de vue plus abstrait. Par exemple, $H^1(E; \mathbb{C})$ n'est pas simplement un espace vectoriel, mais est muni d'une structure de Hodge pure de poids un: $H^1(E; \mathbb{C}) \cong H^{0,1}(E; \mathbb{C}) \oplus H^{1,0}(E; \mathbb{C})$. Nous devons donc considérer ses périodes comme des 'nombres de poids 1', ce qui n'a rien d'évident *a priori*.

Un thème récurrent dans cette habilitation est l'idée suivante: il y a intérêt à promouvoir la donnée initiale *analytique* de l'intégrale T en des données *algébriques* ('motiviques') telles que la structure de Hodge $H^1(E; \mathbb{C})$, et le réseau $H_1(E; \mathbb{Z})$.

Une définition générale des périodes est la suivante [17]: soit X une variété quasi-projective lisse, $B \subset X$ une sous-variété fermée, et ω une n -forme régulière fermée sur X , dont la restriction à B est exacte. Supposons que X, B, ω soient définis sur \mathbb{Q} et que $\sigma \subset X$ soit une sous-variété lisse (au sens C^∞) compacte réelle dont le bord est contenu dans B . La période est définie par:

$$I = \int_{\sigma} \omega$$

Noter que, contrairement à l'exemple précédent, on admet que le domaine d'intégration ait un bord (ce qui correspond au passage des motifs purs aux motifs mixtes²). Ce n'est pas strictement nécessaire, mais on peut supposer le diviseur B à croisements normaux simples et X affine de dimension n . Alors l'intégrale I s'interprète de la manière suivante: ω définit une classe

$$[\omega] \in H_{dR}^n(X, B; \mathbb{Q})$$

en cohomologie de de Rham relative, qui est un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{Q} (muni de structures supplémentaires), et le domaine d'intégration définit une classe

$$[\sigma] \in H_n(X, B; \mathbb{Q}) \cong H^n(X, B; \mathbb{Q})^\vee$$

en (co)homologie de Betti relative. La période I est un coefficient de la matrice des périodes qui calcule l'accouplement Betti-de Rham entre les deux \mathbb{Q} -espaces vectoriels:

$$H_{dR}^n(X, B; \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} H^n(X, B; \mathbb{Q})^\vee \longrightarrow \mathbb{C}$$

La philosophie des motifs suggère que ces groupes de cohomologie se décomposent en atomes irréductibles (motifs mixtes), et forment une catégorie Tannakienne. Par la théorie des catégories Tannakiennes, ceci est équivalent à la catégorie des représentations d'un groupe pro-algébrique. On a envie de penser à ce groupe comme un groupe de Galois agissant sur l'ensemble des périodes, par analogie aux groupes de Galois classiques qui agissent sur les nombres algébriques [1, 17].

Plusieurs des thèmes abordés dans cette habilitation ont été motivés par ce cercle d'idées.

²Il est intéressant de constater que l'apparition des périodes des motifs mixtes en mathématiques et en physique s'est passé à peu près simultanément vers la fin du vingtième siècle, alors que les périodes des motifs purs ont une très longue histoire des deux côtés.

1.2. **Quelques périodes dans l'arithmétique et la physique.** Donnons quelques exemples de périodes, qui sont *a priori* de natures très différentes, et qui joueront un rôle dans la suite.

- (1) *Multizêtas*. Ces nombres généralisent les valeurs de la fonction zêta de Riemann aux entiers positifs, et ont été définis pour la première fois par Euler au 18^{ième} siècle. Soient donc $m_1, \dots, m_{r-1} \geq 1$ et $m_r \geq 2$ des entiers. Le multizêta $\zeta(m_1, \dots, m_r)$ est le nombre réel défini par la série convergente:

$$\zeta(m_1, \dots, m_r) = \sum_{0 < k_1 < \dots < k_r} \frac{1}{k_1^{m_1} \dots k_r^{m_r}} .$$

On appelle la quantité $m_1 + \dots + m_r$ le poids, et l'indice r la profondeur. Ces nombres apparaissent dans des domaines très divers des mathématiques: les invariants de noeuds, la théorie de Grothendieck-Teichmüller entre autres, et aussi en physique: dans la théorie des cordes et la théorie conforme des champs. Plus loin, on donnera beaucoup d'autres exemples de domaines où ils interviennent.

L'interprétation de ces nombres comme des périodes est due à Kontsevich, et consiste à les écrire comme des intégrales itérées des formes $\frac{dt}{t}$ et $\frac{dt}{1-t}$ sur la droite projective moins trois points $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$. Concrètement cela donne

$$(1.1) \quad \zeta(m_1, \dots, m_r) = (-1)^r \int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \leq 1} \frac{dt_1}{t_1 - \varepsilon_1} \dots \frac{dt_N}{t_N - \varepsilon_N} ,$$

où N est le poids, et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N) = (1, 0^{m_1-1}, \dots, 1, 0^{m_r-1})$ et 0^k désigne une suite de k zéros consécutifs. Plus loin on donnera leur interprétation géométrique comme des périodes d'un groupe de cohomologie d'une variété (notamment, l'espace des modules de courbes de genre zéro avec des points marqués $\mathfrak{M}_{0,n}$). Cela nécessite du travail puisque la représentation (1.1) est très singulière.

- (2) *Motifs de Tate mixtes*. Soit k un corps de nombres. On dispose aujourd'hui d'une catégorie Tannakienne des motifs de Tate mixtes $\mathcal{MT}(k)$, construite par les travaux de Beilinson, Bloch, Borel, Deligne, Levine, Goncharov, Suslin, Voevodsky et bien d'autres. Ses objets simples sont les motifs de Tate $\mathbb{Q}(n)$, indexés par $n \in \mathbb{Z}$. La structure de la catégorie $\mathcal{MT}(\mathbb{Z})$ est déterminée par la K -théorie algébrique:

$$(1.2) \quad \text{Ext}_{\mathcal{MT}(k)}^1(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(n)) \cong \begin{cases} K_{2n-1}(k) \otimes \mathbb{Q} & \text{si } n \geq 1, \\ 0 & \text{si } n \leq 0, \end{cases}$$

et par le fait que tous les Ext^2 s'annulent. Tout objet M de $\mathcal{MT}(k)$ possède une filtration croissante $W_i M$ qui s'appelle le poids, et admet des réalisations fonctorielles de De Rham M_{dR} , et de Betti M_σ relatif à un plongement $\sigma : k \rightarrow \mathbb{C}$. La réalisation M_{dR} est un k -espace vectoriel gradué, et M_σ est un \mathbb{Q} -espace vectoriel filtré par le poids. Les *périodes* d'un motif de Tate mixte M sont données par l'isomorphisme de comparaison

$$M_{dR} \otimes_k \mathbb{C} \cong M_\sigma \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} ,$$

qui provient moralement de l'intégration des formes algébriques le long des chaînes. En général, il n'y a aucune description géométrique de $\mathcal{MT}(k)$, et donc ses périodes ne sont pas connues. Nous pouvons construire des éléments dans $\mathcal{MT}(k)$ en prenant la

cohomologie d'un diagramme de certaines variétés de type 'Tate'. Les configurations d'hyperplans dans \mathbb{P}^n fournissent beaucoup d'exemples.

Tout l'intérêt de cette construction est que $\mathcal{MT}(k)$ est Tannakienne, et donc équivalente à la catégorie des représentations d'un schéma en groupes affine $\mathcal{G}_{\mathcal{MT}(k)}$ définie sur \mathbb{Q} . C'est un produit semi-direct

$$(1.3) \quad \mathcal{G}_{\mathcal{MT}(k)} \cong \mathcal{G}_{\mathcal{U}} \rtimes \mathbb{G}_m,$$

où $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}$ est un groupe algébrique prounipotent sur \mathbb{Q} dont on connaît l'algèbre de Lie (le duale de son abélianisée est donnée par le groupe des Ext^1 ci-dessus). Le groupe $\mathcal{G}_{\mathcal{MT}(k)}$ s'appelle le groupe de Galois motivique, et on peut le voir comme une sorte de groupe de Galois agissant sur les périodes de $\mathcal{MT}(k)$. Cela n'a pas de sens, parce que l'on ne sait toujours pas si les périodes sont des nombres transcendant, mais la notion de période motivique permet de sauver la situation.

- (3) *Amplitudes de Feynman en théorie quantique des champs*. Les constantes fondamentales de la nature sont souvent des périodes. Prenons-en un seul exemple, qui est sans doute le plus célèbre.

Soit e la charge de l'électron, et $\alpha = (\frac{e}{2\pi})^2$. Le moment magnétique de l'électron est une fonction du paramètre α et peut s'exprimer par la formule suivante, donnée par la théorie de l'électrodynamique quantique:

$$\frac{g-2}{2} = \frac{1}{2}\alpha + \left(\frac{197}{2^4 3^2} + \frac{1}{2}\zeta(2) - 3\zeta(2)\log 2 + \frac{3}{4}\zeta(3) \right) \alpha^2 + \dots$$

Les coefficients de α dans cette série sont tous des périodes, et seulement les deux termes suivants de cette formule sont connus (on donnera la formule plus loin).

La valeur théorique de g prédite par cette formule a été confirmée par l'expérience avec une *quinzaine de décimales!* La nature connaît $\zeta(3)$, et sans doute les autres multizêtas, qui apparaissent absolument partout en théorie quantique des champs.

Une bonne partie de mes travaux a consisté à expliciter les liens entre ces trois domaines, qui semblent *a priori* totalement différents, et qui faisaient l'objet de conjectures de nombreux mathématiciens et physiciens. Ceci sera détaillé dans la suite.

1.3. Encadrement dans la recherche. Dans le cadre de mon grant ERC j'ai eu l'occasion de prendre les trois étudiants suivants en thèse, et deux étudiants en stage de post ou de prédoc:

- Clément Dupont (thèse en cours)
- Claire Glanois (thèse en cours)
- David Jarossay (thèse en cours)
- Dzmitry Doryn (postdoc en mathématiques)
- Fabian Wissbrock (prédoc en physique)

A cette liste s'ajoute Christian Bogner, qui est un postdoc en physique attaché au groupe de Kreimer à l'université Humboldt à Berlin. Il travaille sur une partie de mon projet ERC pour implémenter quelques algorithmes qui seront décrits dans la suite, et d'en tirer des applications pour la physique.

2. QUELQUES RÉSULTATS SÉLECTIONNÉS

Selon une dichotomie plus ou moins standard, mais peut-être artificielle, en philosophie des mathématiques [14], je regroupe mes travaux en une partie ‘résolution des problèmes’, et une partie ‘construction de théories’.

2.1. **Quelques problèmes résolus.** En voici une liste partielle:

- La conjecture de Goncharov et Manin
- La conjecture de Deligne et Ihara
- La conjecture de Hoffman
- Le programme du groupe de Galois cosmique (conjectures de Kontsevich, Marcolli, ...)
- La conjecture zig-zag de Broadhurst et Kreimer

i). Mathématiques. Voici les énoncés:

Théorème 1. (*Conjecture de Goncharov et Manin 2004*) *Les périodes des espaces des modules des courbes de genre 0 à n points marqués $\mathfrak{M}_{0,n}$ sont des multizêtas.*

Ce résultat entraîne un certain nombre de résultats similaires sur les amplitudes en la théorie des super-cordes en genre zéro, et en particulier une conjecture de Kontsevich du même style sur les périodes dans la déformation par quantification.

Théorème 2. (*Conjecture de Deligne et Ihara 1987*) *La catégorie des motifs de Tate mixtes sur les entiers $\mathcal{MT}(\mathbb{Z})$ est engendrée par le groupe fondamental motivique de $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$.*

A vrai dire, la conjecture de Deligne-Ihara est la version ℓ -adique de ce théorème: l’action de Lie de Galois sur le complété pro- ℓ du groupe fondamental de \mathbb{P}^1 moins trois points est fidèle. La version motivique ci-dessus a été formulée par Goncharov et entraîne celle-ci.

Théorème 3. (*Conjecture de Hoffman 1997*) *Tout multizêta $\zeta(n_1, \dots, n_r)$ s’exprime comme combinaison linéaire isobare à coefficients dans \mathbb{Q} des $\zeta(n_1, \dots, n_r)$ pour $n_i = 2, 3$.*

Il y a aussi une version ‘base polynomiale’ où en prend comme arguments des multizêtas les mots de Lyndon en les lettres $\{2, 3\}$ (conjecture de Broadhurst-Bluemlein-Vermaseren).

ii). Physique. Les résultats suivants portent sur des questions en théorie quantique des champs. Une conjecture folklorique en physique dit que certaines périodes qui apparaissent en théorie quantique des champs sont des multizêtas (ou des sommes d’Euler). Du côté des mathématiciens, cela s’appelle parfois le programme du groupe de Galois cosmique (Cartier), car cela impliquerait que le groupe de Galois motivique de $\mathcal{MT}(\mathbb{Z})$ (ou $\mathcal{MT}(\mathbb{Z}[i][\frac{1}{2}])$) agit sur les constantes de la physique en théorie de la perturbation. Dans la direction positive, le théorème suivant donne un critère suffisant pour que cette conjecture soit vraie.

Théorème 4. *Les périodes d'une famille infinie de graphes (celles qui sont 'd'épaisseur' au plus 3), sont des multizêtas. Le motif associé à un tel graphe est de Tate mixte.*

Ce théorème est conséquence de toute une théorie qui permet d'analyser les singularités des graphes de Feynman de manière assez générale et permet de retrouver la quasi-totalité des exemples numériques qui étaient connus des physiciens. Le théorème donne également un algorithme pour calculer des graphes de Feynman, dont l'implémentation fait l'objet de mon grant ERC, un travail en cours avec C. Bogner. Cet algorithme a aussi été implémenté très récemment par E. Panzer d'une manière un peu différent.

Théorème 5. *(avec O. Schnetz) (Contre-exemples à une conjecture de Kontsevich 1997) Il existe un graphe de Feynman primitif et explicite qui est modulaire.*

A n'importe quel graphe de Feynman G on associe son hypersurface X_G qui est définie sur \mathbb{Z} . On peut donc considérer la fonction de comptage de points sur les corps finis à q éléments:

$$q \mapsto X_G(\mathbb{F}_q)$$

pour tout q puissance d'un nombre premier. Kontsevich avait conjecturé que cette fonction est polynomiale en q : nous l'avons démontré pour tout graphe G d'épaisseur au plus 3. Nos contre-exemples sont d'épaisseur 4 et nous prouvons que leurs fonctions de comptage de points sont données par les coefficients de Fourier d'une forme modulaire.

Lors du congrès européen des mathématiciens en 2008, Marcolli avait conjecturé que toute période de graphe de Feynman se factorise via une catégorie de motifs de Tate mixtes. Avec un étudiant post-doc D. Doryn, nous avons montré que le contre-exemple du théorème précédent a pour répères un motif avec nombres de Hodge (11, 13) et (13, 11), et qui n'est donc pas de type Tate. La conjecture de Marcolli est donc fautive, elle aussi, le théorème 4 est proche d'être optimal. Cela change complètement les idées recues sur la nature des périodes en théorie quantique des champs.³

De nouveau dans le sens positif, et par une méthode totalement différente, on a récemment démontré une conjecture fondamentale en théorie quantique des champs, avec O. Schnetz:

Théorème 6. *(Conjecture zig-zag de Broadhurst et Kreimer 1995) Soit Z_n le graphe zig-zag avec $n \geq 3$ boucles. Sa période est égale à*

$$I_{Z_n} = 4 \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} \left(1 - \frac{1 - (-1)^n}{2^{2n-3}} \right) \zeta(2n-3).$$

D'une manière complètement inattendue, la preuve utilise un résultat dû à Zagier pour les multizêtas $\zeta(2, \dots, 2, 3, 2, \dots, 2)$, qui joue un rôle essentiel pour la démonstration des théorèmes 2 et 3, et une théorie des polylogarithmes univalués que j'avais construite quand j'étais étudiant. Le théorème 6 fournit la première famille infinie d'amplitudes de graphes primitifs dans une théorie quantique des champs renormalisable à quatre dimensions qui soit connue à ce jour.

³En combinant mes travaux récents avec Kreimer, où on associe un motif à tout graphe renormalisé, avec la machine Tannakienne des périodes motiviques, on obtient bel et bien un groupe de Galois cosmique qui agit sur tous les développements perturbatifs. Cela réalise le programme de Cartier, mais le groupe que l'on obtient n'est pas du tout celui auquel on s'y attendait! Il est beaucoup plus riche, et d'autant plus intéressant, que l'on imaginait.

2.2. **Quelques programmes de recherche.** Outre les problèmes énoncés ci-dessus, on peut regrouper grossièrement mes travaux selon plusieurs programmes de recherche de longue durée:

- (1) Etude des périodes des variétés universelles (espaces de modules, courbes modulaires, etc) et applications arithmétiques.
- (2) Constructions explicites des catégories des motifs de Tate mixtes $\mathcal{MT}(k)$ sur k un corps de nombres.
- (3) Problèmes autour des groupes fondamentaux motiviques, multizêtas, etc.
- (4) Programme traitant des questions fondamentales en théorie quantique des champs perturbative et aspects arithmétiques.

Le point (1) est traité en détail au §3. Il s'agit d'étudier les périodes des espaces de modules des courbes de genre supérieur, les courbes modulaires, et d'autres variétés qui ont une grande 'connexité mathématique'. Il est naturel de penser que de telles variétés, qui ont des propriétés universelles ou d'autres structures supplémentaires (automorphismes, functorialités, ...), vont engendrer des familles de périodes très riches: c'est-à-dire celles qui interviendront le plus souvent en mathématiques et en physique, et qui auront de nombreuses applications arithmétiques. Pour le moment, cela se résume essentiellement à une théorie complète pour les espaces de modules des courbes de genre zéro, et des résultats explicites sur les périodes mixtes d'une courbe elliptique (travail en commun avec A. Levin). C'est aussi le sujet d'une thèse en cours.

Le projet (2), qui est le moins avancé, est décrit au §4. Le but est de construire tous les motifs de Tate mixtes sur un corps de nombres par la cohomologie de variétés explicites, comme des configurations d'hyperplans. Nous savons que les générateurs de l'algèbre de Lie motivique correspondent à la K -théorie algébrique, et de là, la cohomologie stable des groupes arithmétiques. Un espoir optimiste serait d'engendrer la catégorie $\mathcal{MT}(k)$ entière à partir de tels objets. Cette approche est orthogonale à l'approche par le groupe fondamental motivique (le sujet de (3)), qui n'est adapté qu'au cas des corps cyclotomiques. Ici il s'agit d'un article publié (17), et un sujet de thèse en cours §1.3 qui se base sur les travaux de [2].

Au §5, j'exposerai quelques travaux sur les multizêtas et le groupe fondamental motivique de $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ qui s'inscrivent dans le thème (3). A plus long terme il s'agit d'étudier des questions structurales des multizêtas, associateurs et relations avec les formes modulaires, pour les groupes fondamentaux motivique des schémas $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, \mu_n, \infty\}$ où μ_N est le groupe de racines N ièmes de l'unité. Un deuxième sujet de thèse en cours §1.3 va dans cette direction.

Le numéro (4) fait partie d'un vaste programme pour attaquer des questions mathématiques fondamentales en théorie quantique des champs, et sera expliqué en détail au §6. La prolongation du programme du groupe de Galois cosmique (mentionnée ci-dessus) à des théories de jauge ne fait qu'une petite partie de ce projet. Un autre aspect est de reformuler les méthodes de la renormalisation en physique en géométrie algébrique, y compris un traitement rigoureux des singularités infra-rouges. Il s'agit aussi de la mise en place d'algorithmes et de méthodes effectives de calcul pour des applications en physique, et deux étudiants post-doctorants travaillent actuellement là-dessus §1.3.

Je passe maintenant en revue chacun des thèmes ci-dessus, en donnant un survol des travaux déjà effectués. A la fin de chaque chapitre je mentionne quelques problèmes ouverts qui pourraient faire des sujets de recherche.

Mathématiques

3. ESPACES DES MODULES ET LEURS PÉRIODES

3.1. Espaces $\mathfrak{M}_{0,n}$ et la conjecture de Goncharov-Manin. Soit $n \geq 4$ et soit $\mathfrak{M}_{0,n}$ l'espace des modules des courbes de genre 0 avec n points marqués. L'espace $\mathfrak{M}_{0,4}$ est isomorphe à la droite projective moins trois points $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$, et en général, $\mathfrak{M}_{0,n}$ est isomorphe à un certain complémentaire d'hyperplans dans \mathbb{A}^{n-3} . Goncharov et Manin ont démontré que les multizêtas de poids n sont des périodes des (motifs de) $\mathfrak{M}_{0,n+3}$, et ils ont conjecturé la réciproque.

Théorème 7. (*Conjecture de Goncharov et Manin*) *Les périodes des $\mathfrak{M}_{0,n}$ sont des multizêtas.*

Dans ma thèse j'ai développé des méthodes effectives pour déterminer, plus généralement, les périodes du complémentaire de n'importe quelle configuration d'hyperplans (de type 'fibre'). Cela s'applique en particulier aux espaces des modules à niveau $\mathfrak{M}_{0,n}^N$ revêtements finis des $\mathfrak{M}_{0,n}$ dont les périodes sont des multizêtas associés à des racines de l'unité.

Il y a quelques applications de cette théorie dont je n'étais pas au courant à l'époque:

- (1) Les intégrales dans la déformation par quantification de Kontsevich sont des exemples de telles périodes. En particulier, il me semble que les méthodes de démonstration du théorème 7 fournissent une preuve d'une conjecture de Kontsevich disant que (une version de) ses intégrales en déformation par quantification sont des multizêtas [16].
- (2) Les espaces de modules des courbes jouent un rôle central dans la théorie des supercordes. Les périodes des $\mathfrak{M}_{0,n}$ sont précisément des amplitudes dans cette théorie, et il y a eu beaucoup d'intérêt récemment du côté des cordistes [22].
- (3) Les périodes des $\mathfrak{M}_{0,n+3}$ interviennent directement dans certains modèles fermioniques à la Gross-Neveu, étudiés récemment par Schnetz. Il tombe directement sur un cas particulier des périodes des $\mathfrak{M}_{0,n}$: précisément des intégrales du style

$$I_\sigma = \int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq 1} \frac{dt_1 \dots dt_n}{(t_{\sigma(1)} - t_{\sigma(2)}) \dots (t_{\sigma(n+2)} - t_{\sigma(n+1)})}$$

où σ est une permutation de $\{0, 1, \dots, n+1\}$, et $t_0 = 0, t_{n+1} = 1$. Ce ne sont pas des intégrales itérées à cause des termes mixtes $(t_i - t_j)$ au dénominateur, mais ce sont des multizêtas par le théorème 7. Les relations algébriques entre ces nombres provenant des fonctorialités entre les $\mathfrak{M}_{0,n}$ ont été étudiées dans l'article (9) et donnent un nouveau point de vue sur les relations algébriques satisfaites par les multizêtas.

Ces applications se résument en disant que divers modèles de physique (conforme ou en 2 dimensions) font naturellement intervenir les espaces de configurations (notamment, l'espace des configurations de n points sur la sphère de Riemann). Dans la deuxième partie de cette habilitation, on s'intéressera aux théories quantiques des champs renormalisables en 4 dimensions d'espace-temps, qui sont très nettement plus difficiles, et géométriquement très différentes.

Le but ici n'est pas de répéter les idées de la démonstration du théorème 7, mais je reprends quelques éléments qui ont été développés depuis:

3.1.1. Compactification $\mathfrak{M}_{0,n}^\delta$. Dans (8), j'ai défini une compactification partielle de $\mathfrak{M}_{0,n}$ relatif à un ordre diédral des points marqués (ou, de manière équivalente, une composante connexe

de $\mathfrak{M}_{0,n}(\mathbb{R})$). C'est un schéma affine lisse donnée par des equations explicites qui donnent un système de cartes équivariantes de la compactification de Deligne-Mumford:

$$\overline{\mathfrak{M}}_{0,n} = \bigcup_{\delta} \mathfrak{M}_{0,n}^{\delta} .$$

Ces espaces ont la propriété amusante suivante, décrite dans l'article (10). Pour un schéma lisse X sur \mathbb{Q} de dimension d , notons sa caractéristique d'Euler, appelée aussi polynôme de Poincaré:

$$e(X) = \sum_i (-1)^i \dim_{\mathbb{Q}} H^i(X; \mathbb{Q}) q^{d-i}$$

Ginzburg et Kapranov ont démontré que $\mathfrak{M}_{0,n}$ et $\overline{\mathfrak{M}}_{0,n}$ sont inverses l'un de l'autre dans le sens suivant. Si on considère les séries génératrices exponentielles:

$$g(x) := x - \sum_{n=2}^{\infty} e(\mathfrak{M}_{0,n+1}) \frac{x^n}{n!}, \quad \overline{g}(x) := x + \sum_{n=2}^{\infty} e(\overline{\mathfrak{M}}_{0,n+1}) \frac{x^n}{n!} .$$

alors $\overline{g}(g(x)) = g(\overline{g}(x)) = x$. Dans (10) on démontre que les séries génératrices ordinaires:

$$f(x) := x - \sum_{n=2}^{\infty} e(\mathfrak{M}_{0,n+1}) x^n, \quad f^{\delta}(x) := x + \sum_{n=2}^{\infty} e(\mathfrak{M}_{0,n+1}^{\delta}) x^n$$

sont inverses l'une de l'autre:

Théorème 8. (avec J. Bergstöm) $f(f^{\delta}(x)) = f^{\delta}(f(x)) = x$.

Ceci confirme la nature canonique de $\mathfrak{M}_{0,n}^{\delta}$ et permet de calculer sa cohomologie par la formule $e(\mathfrak{M}_{0,n+1}) = \prod_{i=2}^{n-1} (q - i)$.

3.1.2. *Algèbres de polylogarithmes.* L'idée pour calculer les périodes est par intégration successive sur des polyèdres: on élargit le complexe de Rham en rajoutant une version algébrique de formes différentielles multivaluées pour tuer complètement la cohomologie. Les primitives existent dans le nouveau complexe, donc on peut calculer les intégrales de périodes avec ces formes en appliquant une version du théorème de Stokes au domaine d'intégration. Cela réduit l'intégrale initiale à une intégrale de dimension plus petite, et donne une récurrence.

Précisément, soit Ω_n^{\bullet} le complexe de De Rham algébrique formé de formes différentielles régulières globales sur $\mathfrak{M}_{0,n+3}$ définies sur \mathbb{Q} , et soit

$$B_n = H^0(\mathbb{B}(\Omega_n^{\bullet}))$$

le groupe de cohomologie en degré zero de la construction bar réduite. C'est une algèbre de Hopf sur \mathbb{Q} , graduée par le poids. Par un théorème de K. T. Chen, c'est isomorphe à l'algèbre des intégrales itérées sur $\mathfrak{M}_{0,n+3}(\mathbb{C})$ qui sont invariantes par homotopie, et également, c'est l'anneau affine des fonctions sur le groupe fondamental pro-unipotent $\pi_1^{un}(\mathfrak{M}_{0,n+3}(\mathbb{C}))$. Dans (8), je fabrique à partir de là un complexe (appelé bar-de Rham)

$$0 \longrightarrow B_n \otimes_{\mathbb{Q}} \Omega_n^0 \longrightarrow B_n \otimes_{\mathbb{Q}} \Omega_n^1 \longrightarrow \dots \longrightarrow B_n \otimes_{\mathbb{Q}} \Omega_n^{n-1} \longrightarrow B_n \otimes_{\mathbb{Q}} \Omega_n^n \longrightarrow 0 ,$$

et le résultat crucial est la suivant:

Théorème 9. *La cohomologie du complexe bar-de Rham est triviale:*

$$H^0(B_n \otimes_{\mathbb{Q}} \Omega_n^{\bullet}) = \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad H^i(B_n \otimes_{\mathbb{Q}} \Omega_n^{\bullet}) = 0 \quad \text{si } i \geq 1$$

Cela découle du fait que $\mathfrak{M}_{0,n+3}$ est un $K(\pi, 1)$, et garantit l'existence des primitives. Ce théorème se généralise dans bien d'autres cas, et en particulier dans le cas des espaces de configurations de points sur une courbe de genre quelconque (§3.3).

Tout diviseur irréductible D à l'infini de $\mathfrak{M}_{0,n}$ (composante irréductible de $\overline{\mathfrak{M}}_{0,n} \setminus \mathfrak{M}_{0,n}$) est isomorphe à un produit $\mathfrak{M}_{0,r} \times \mathfrak{M}_{0,s}$. Puisque les éléments de B_n peuvent s'interpréter comme des fonctions (intégrales itérées), on dispose d'une application 'limite régularisée' vers une telle composante à l'infini. Notons \mathcal{Z} l'anneau sur \mathbb{Q} engendré par les multizêtas et $2i\pi$.

Théorème 10. *Soit $D \cong \mathfrak{M}_{0,r} \times \mathfrak{M}_{0,s}$ une composante irréductible de $\overline{\mathfrak{M}}_{0,n} \setminus \mathfrak{M}_{0,n}$. Alors il existe des applications 'limite régularisée' (qui dépendent des choix de points bases tangentiels)*

$$R_D : B_n \longrightarrow B_r \otimes_{\mathbb{Q}} B_s \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}$$

Si $f \in B_n$ est régulier au voisinage de D , alors $R_D f$ est simplement la restriction de f à D .

Autrement dit, ces morphismes de restriction sont définis sur \mathcal{Z} . Pour démontrer cela, il faut déterminer la structure de B_n , et montrer que ses éléments correspondent à des (généralisations des) polylogarithmes multiples

$$(3.1) \quad \text{Li}_{m_1, \dots, m_\ell}(x_1, \dots, x_\ell) = \sum_{0 < k_1 < \dots < k_\ell} \frac{x_1^{k_1} \dots x_\ell^{k_\ell}}{k_1^{m_1} \dots k_\ell^{m_\ell}},$$

A partir de là on peut montrer que leurs périodes de monodromie (vues comme fonctions à plusieurs variables complexes) sont dans \mathcal{Z} .

Une autre situation dans laquelle nous savons à quoi ressemble l'analogie de telles périodes de monodromie \mathcal{Z} est le cas elliptique §3.2.

3.1.3. *Structure de la preuve.* Je dirai quelques mots rapides sur la preuve pour montrer comment cela découle formellement des théorèmes 9 et 10.

D'abord, on fabrique un complexe double à partir du complexe bar-de Rham:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & B_n^{\mathcal{Z}} \otimes_{\mathbb{Q}} \Omega^{n-2} & \longrightarrow & B_n^{\mathcal{Z}} \otimes_{\mathbb{Q}} \Omega^{n-1} & \longrightarrow & B_n^{\mathcal{Z}} \otimes_{\mathbb{Q}} \Omega^n \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & B_{n-1}^{\mathcal{Z}} \otimes_{\mathbb{Q}} \Omega^{n-2} & \longrightarrow & B_{n-1}^{\mathcal{Z}} \otimes_{\mathbb{Q}} \Omega^{n-1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & B_{n-2}^{\mathcal{Z}} \otimes_{\mathbb{Q}} \Omega^{n-2} & \longrightarrow & 0 & & \\ & & \vdots & & & & \end{array}$$

où les morphismes verticaux sont les morphismes de restriction et un \mathcal{Z} en indice veut dire qu'on a étendu les scalaires à \mathcal{Z} .⁴ On se promène sur le côté droit de ce diagramme: une forme $\omega \in \Omega_n^n$ a une primitive Ω dans $B_n^{\mathcal{Z}} \otimes_{\mathbb{Q}} \Omega^{n-1}$. Sa restriction au bord du domaine d'intégration donne ensuite un élément $\Omega|_{\partial X}$ dans $B_{n-1}^{\mathcal{Z}} \otimes_{\mathbb{Q}} \Omega_{n-1}^{n-1}$. Cela traduit la formule de Stokes:

$$\int_X \omega = \int_{\partial X} \Omega|_{\partial X}.$$

On continue de la même manière jusqu'à ce qu'on tombe dans $B_0^{\mathcal{Z}} \otimes_{\mathbb{Q}} \Omega_0^0 \cong \mathcal{Z}$.

⁴Je simplifie un peu ici. Supposons que l'on veuille calculer les périodes de $H^n(\overline{\mathfrak{M}}_{0,n+3} \setminus A, D \setminus (D \cap A))$, avec $D \cup A \subset \overline{\mathfrak{M}}_{0,n} \setminus \mathfrak{M}_{0,n}$. Notons D_i les composantes irréductibles de D et $D_I = \cap_{i \in I} D_i$. Alors on devrait prendre un complexe bar-de Rham relatif du style $\bigoplus_{|I|=p} \Omega_{\log}^q(D_I; B^{\mathcal{Z}})$, où $\Omega_{\log}^q(\mathfrak{M}_{0,n}; B^{\mathcal{Z}}) = \Omega_{\log}^q(\mathfrak{M}_{0,n}) \otimes_{\mathbb{Q}} B_n \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}$

3.2. Polylogarithmes elliptiques et espaces des modules de genre 1. Un but du preprint:

Multiple Elliptic Polylogarithms, arXiv:1110.6917v1 (2011), 1-40 (avec A. Levin),

est d'étendre la théorie ci-dessus au cas des courbes de genre 1. Jusque ici, presque rien n'était connu sur les polylogarithmes elliptiques multiples, et les périodes du groupe fondamental d'une courbe elliptique n'avaient pas encore été construites. Du coup, il a fallu commencer tout au début, et la théorie s'étalera sur plusieurs articles qui suivront celui-ci. Un premier problème, résolu dans l'article ci-dessus, est de trouver la bonne généralisation de la formule de Kontsevich:

$$(3.2) \quad \int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq 1} \frac{dt_1}{1-t_1} \cdots \frac{dt_n}{t_n} = \zeta(n_1, \dots, n_r)$$

reliant intégrales itérées sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ et multizêtas. Pour cela faire, il faut décrire les intégrales itérées (construction bar) sur une courbe elliptique épointée en termes des formes différentielles (analogues de $\frac{dx}{x}$ et $\frac{dx}{1-x}$) et ensuite trouver le bon analogue de la somme itérée qui définit les multizêtas dans le membre de droite de (3.2), et prouver qu'ils coïncident.

i). Formes différentielles. Soit $\mathcal{E} = \mathbb{C}/(\tau\mathbb{Z} + \mathbb{Z})$ une courbe elliptique analytique, et soit

$$(3.3) \quad \mathcal{E} = \mathbb{C}^\times / q^{\mathbb{Z}}$$

son uniformisation de Jacobi, où $q = \exp(2i\pi\tau)$, $\tau \in \mathbb{C}$ et $\Im(\tau) > 0$. Eventuellement on fera varier le module q , mais fixons-le pour le moment. On considère la série double de Kronecker:

$$F(\xi; \eta) = -2i\pi \left(\frac{z}{1-z} + \frac{1}{1-w} + \sum_{m,n>0} (z^m w^n - z^{-m} w^{-n}) q^{mn} \right)$$

où $\xi, \eta \in \mathcal{E} \setminus \{0\}$ et on note $z = \exp(2i\pi\xi)$, $w = \exp(2i\pi\eta)$. Malgré la symétrie évidente entre z et w , nous allons prendre η comme variable formelle, et voir F comme une série génératrice par rapport à η d'une famille de fonctions en ξ . La fonction F n'est pas elliptique, mais presque, et on montre facilement que la forme différentielle

$$\Omega(\xi; \alpha) = \exp(2i\pi r) F(\xi; \alpha) d\xi$$

est invariante par $\xi \mapsto \xi + 1$ et $\xi \mapsto \xi + \tau$, où on note $\xi = r + s\tau$, avec $r, s \in \mathbb{R}$. Cela nous fabrique une famille de formes différentielles $\omega^{(i)}$ sur $\mathcal{E} \setminus \{0\}$, définies par la formule suivante:

$$\Omega(\xi; \alpha) =: \sum_{i \geq 0} \omega^{(i)} \alpha^{i-1}.$$

Si on note $\nu = 2i\pi dr$, alors on montre que $\nu, \omega^{(0)}$ forment une base de $H_{dR}^1(\mathcal{E} \setminus \{0\}, \mathbb{C})$ et définissent une bonne \mathbb{Q} -structure là-dessus *bien que la courbe elliptique ne soit pas définie sur \mathbb{Q} !* Les $\omega^{(i)}$, $i \geq 1$, se voient comme des produits de Massey supérieurs, et à partir de ces formes on peut fabriquer un \mathbb{Q} -modèle de l'algèbre différentielle graduée des formes analytiques sur $\mathcal{E} \setminus \{0\}$, et même, de l'espace des configurations de $n + 1$ points sur \mathcal{E} :

$$\mathcal{E}^{(n)} = \{(\xi_1, \dots, \xi_n) \in (\mathcal{E} \setminus \{0\})^n : \xi_i \neq \xi_j \text{ pour } i \neq j\},$$

isomorphe à la fibre de $\mathfrak{M}_{1,n+1} \rightarrow \mathfrak{M}_{1,1}$ au dessus de \mathcal{E}^\times . De là, on peut décrire explicitement

$$H^0(B_n(\mathcal{A}^\bullet(\mathcal{E} \setminus \{0\}))),$$

l'algèbre de Hopf des intégrales itérées sur $\mathcal{E} \setminus \{0\}$. Le point essentiel est que la \mathbb{Q} -structure sur les formes $\omega^{(i)}, \nu$ fournit une \mathbb{Q} -structure universelle sur cette algèbre. Son gradué associé par la longueur est tout simplement l'algèbre tensorielle $[\omega^{(0)}]\mathbb{Q} \oplus [\nu]\mathbb{Q}$, donc les intégrales itérées sur $\mathcal{E} \setminus \{0\}$ sont codées par les mots en deux lettres $\omega^{(0)}$ et ν comme il le faut. Nous avons donc la version elliptique du membre de gauche de (3.2), et ses versions en dimension supérieure.

ii). *Moyenner des fonctions multivaluées.* L'idée de base pour construire des fonctions sur \mathcal{E} , qui remonte au moins à Jacobi, est de moyenner par l'action 'multiplication par q ' dans (3.3). Pour appliquer cette idée aux fonctions multivaluées, un certain nombre de problèmes se présentent. Prenons l'exemple de la fonction $\text{Li}_1(z) = -\log(1-z)$. Nous voulons prendre

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \text{Li}_1(q^n z)$$

comme définition d'une fonction elliptique multivaluée. Pour cela, il faut d'abord choisir un relevement du chemin $q^{\mathbb{R}}$ dans un revêtement universel de \mathbb{C}^\times , mais le vrai problème est que la somme diverge car $\text{Li}_1(q^n z) \sim q^n z$ si $n \gg 0$, et $\text{Li}_1(q^n z) \sim \log(q^n z)$ si $n \ll 0$. L'astuce pour régler ce problème est d'introduire une variable supplémentaire u et de prendre:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} u^n \text{Li}_1(q^n z)$$

comme définition. Cette somme converge si $1 < u < |q|^{-1}$, ce qui tue la divergence logarithmique à l'infini sans détruire la convergence en 0. Si on écrit $u = \exp(2i\pi\alpha)$, la fonction précédente a un pôle simple en $\alpha = 0$, avec résidu 1, et on peut la régulariser en posant

$$\mathcal{E}^{\text{reg}}(\xi; \alpha) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(2i\pi n\alpha) \text{Li}_1(q^n z) - \frac{1}{\alpha}$$

Cette fonction est régulière en $\alpha = 0$, et les coefficients de son développement comme série en α sont des fonctions à monodromie unipotente. En fait, on peut retrouver la fonction F en moyennant la fonction $\frac{z}{z-1}$ de la même manière. Appliquant la même idée aux polylogarithmes classiques $\text{Li}_n(z)$, on retrouve les polylogarithmes elliptiques classiques de Bloch ($n = 2$), Beilinson et Levin (n quelconque). Ces fonctions ont déjà beaucoup d'applications en arithmétique.

Si on veut généraliser cette idée aux polylogarithmes multiples on s'aperçoit très vite que cela ne suffit pas de moyenner par rapport à une seule variable. On est donc obligé de passer en dimension supérieure et construire les polylogarithmes multiples en un nombre quelconque de variables sur $\mathcal{E}^{(n)}$. Les polylogarithmes elliptiques multiples s'obtiennent en moyennant:

$$\sum_{m_1, \dots, m_r} u_1^{m_1} \dots u_r^{m_r} \text{Li}_{n_1, \dots, n_r}(q_1^{m_1} x_1, \dots, q_r^{m_r} x_r).$$

Pour u_1, \dots, u_r dans une certaine région, cette somme converge absolument et on peut en extraire la partie finie pour obtenir une série génératrice de fonctions 'polylogarithmes elliptiques multiples' comme auparavant. Pour démontrer cela on se heurte au fait que les singularités ne sont plus des diviseurs à croisement normaux, et on doit analyser l'asymptotique locale de $\text{Li}_{n_1, \dots, n_r}(x_1, \dots, x_r)$ à l'infini sur une compactification lisse de $\mathfrak{M}_{0, r+3}$. Cette méthode pour mollifier des sommes avec des variables auxiliaires, calculer les divergences, et extraire les pôles est assez générale, et devrait s'appliquer sans trop de peine à des variétés toriques, et devrait permettre de construire les fonctions unipotentes sur des variétés abéliennes.

En conclusion, nous obtenons de cette manière une famille de fonctions unipotentes sur une courbe elliptique épointée et on démontre l'analogie de la formule de Kontsevich:

Théorème 11. *Les polylogarithmes multiple elliptiques sont précisément les intégrales itérées sur $\mathcal{E}^{(n)}$. En particulier, toutes les périodes du group fondamental unipotent de $\mathcal{E} \setminus \{0\}$ sont des combinaisons des valeurs de polylogarithmes multiple elliptiques.*

Il faut noter que la notion de période dans le théorème est relative à la \mathbb{Q} -structure définie précédemment. On s'attend à ce que cette construction ait plusieurs applications en arithmétique.

3.3. Espaces de configurations plus généraux. Dans le preprint

Gauss-Manin connection for iterated integrals, preprint, (avec A. Levin)

nous étudions la construction bar relative à une fibration d'algèbres différentielles graduées. La remarque de base est que la connection de Gauss-Manin classique s'interprète comme la différentiation sous une intégrale. Dans cet article nous définissons une connection de Gauss-Manin correspondant à la différentiation sous une intégrale itérée:

$$\int \omega_1 \circ \dots \circ \omega_n .$$

Plus précisément, on se donne des algèbres différentielles gradués $A_B \subset A_T$, et on définit $A_F = A_T/A_B^{\geq 1}A_T$. On dit que A_B, A_T, A_F est une *fibration* si A_T est libre en tant que A_B -module, et à ce moment là, une section $i_F : A_F \rightarrow A_T$ donne une décomposition

$$A_T \cong A_B \otimes_{A_B^0} A_F$$

de A_B -modules. On voit A_B, A_T, A_F comme des espaces de formes différentielles sur la base, l'espace total, et la fibre, respectivement. La connexion de Gauss-Manin classique

$$\nabla : H^q(A_F) \longrightarrow A_B^1 \otimes_{A_B^0} H^q(A_F)$$

se généralise alors en une connection que nous notons

$$(3.4) \quad \nabla_{\mathbb{B}} : H^q(\mathbb{B}(A_F)) \longrightarrow A_B^1 \otimes_k H^q(\mathbb{B}(A_F))$$

où \mathbb{B} est la construction bar, et on suppose désormais que A_B est connexe pour simplifier. Cette construction a beaucoup d'applications: notamment pour le calcul symbolique des intégrales de périodes, et permet aussi, par exemple, de retrouver les formules pour l'action de Galois motivique sur des intégrales itérées. En particulier, si on note V_F, V_B et V_T l'algèbre des intégrales itérées sur A_F, A_B et A_T (cohomologie de la construction bar en degré zéro), on a

$$(3.5) \quad V_T \cong V_{A_B} \otimes_k V_{A_F}$$

sous certaines conditions sur A_T . Autrement dit, on a une description des intégrales itérées sur une fibration, ce qui est un ingrédient crucial dans la preuve du théorème 10 dans le cas des formes différentielles sur les $\mathfrak{M}_{0,n}$. La décomposition (3.5) permet aussi de déduire que le complexe bar-de Rham (qui existe en toute généralité) n'a pas de cohomologie non-triviale dans certains cas. Notamment, on déduit l'analogie elliptique du théorème 9, et aussi une version pour les espaces de configuration des points sur une courbe de genre quelconque.

3.4. Projets et ouvertures.

- (1) Il y a sans doute une interprétation opéradique de la cohomologie de $\mathfrak{M}_{0,n}^\delta$ qu'il reste à expliciter, et qui expliquerait la formule du théorème 8. Cela ferait un bon projet pour un mémoire de maîtrise. Egalement, le lien entre les $\mathfrak{M}_{0,n}^\delta$ et les variétés associées aux algèbres amassées reste aussi à décrire, car la combinatoire semble être assez proche.
- (2) Comme mentionné ci-dessus, la méthode de §3.2 permet de construire des fonctions multivaluées sur, par exemple, des variétés abéliennes et d'en tirer les conséquences arithmétiques. Il faut faire le lien avec le faisceau 'polylogarithme' étudié par Wildeshaus et autres.
- (3) La suite de §3.2, qui n'est pas encore disponible (27), et d'en donner l'interprétation en théorie de Hodge, et de définir des *multizêtas elliptiques* en prenant des points base tangentiels. Cela donne des fonctions multivaluées sur le disque $\{q : |q| < 1, q \neq 0\}$ qui généralisent les séries d'Eisenstein et les multizêtas à la fois. Elles admettent un développement comme série en q , polynomiale en $\log q$, dont les coefficients sont des multizêtas. Ceux-ci donnent un mécanisme, en faisant tendre q vers 0, pour obtenir des relations exotiques entre multizêtas provenant des formes paraboliques pour $SL_2(\mathbb{Z})$ (voir aussi la discussion au §5.3). C'était pour moi une des motivations principales de développer toute cette théorie.
- (4) Une autre application potentielle de §3.2 est la conjecture de Zagier reliant polylogarithmes et valeurs spéciales des fonctions L pour les courbes elliptiques. On peut aussi restreindre les polylogarithmes multiples elliptiques en des points à multiplication complexe, ou même des points de torsion, pour obtenir diverses applications arithmétiques.

4. GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE ET FONCTIONS ZÊTA DE DEDEKIND

Il s'agit du travail publié dans l'article:

'Dedekind zeta Motives for totally real number fields', à paraître dans *Inventiones*, 2013

4.1. Théorèmes de Borel. Soit k un corps de nombres avec r_1 places réelles et r_2 places complexes, et soit $\zeta_k(s)$ sa fonction zêta de Dedekind. Elle admet un pôle simple en 1, et son résidu est donné par la formule célèbre

$$\text{Res}_{s=1} \zeta_k(s) = \frac{2^{r_1} (2\pi)^{r_2} R h_k}{w \sqrt{|d_k|}}$$

où h_k est le nombre de classes de k , w le nombre de racines de l'unité, d_k le discriminant de k , et R le régulateur de Dirichlet. Un vaste programme en arithmétique cherche, en particulier, à décrire les valeurs $\zeta_k(n)$, pour n entier ≥ 2 , et de les relier à des invariants supérieurs de k . L'approche standard fait intervenir la K -théorie algébrique. En particulier, dans deux articles fondateurs de 1977 et 1978 ([6, 7]), Borel démontre que pour $n \geq 2$,

$$(4.1) \quad \dim_{\mathbb{Q}}(K_{2n-1}(k) \otimes \mathbb{Q}) = \begin{cases} r(n) = r_1 + r_2, & \text{si } n \text{ est impair;} \\ r(n) = r_2, & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Ensuite il définit le régulateur de Borel:

$$r_B : K_{2n-1}(k) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}^{r(n)}$$

dont l'image Λ est un \mathbb{Q} -réseau. Son covolume est bien défini à un multiple rationnel près, et Borel démontre la formule suivante, généralisation de la formule de Dirichlet:

$$\zeta_k(n) = \alpha \operatorname{covol}(\Lambda) \quad \text{pour un } \alpha \in \mathbb{Q}^\times .$$

Les conjectures de Lichtenbaum, et de Bloch-Kato prédisent une formule bien plus précise mais il n'y a eu peu de progrès dans cette direction (par exemple, les facteurs rationnels ne sont pas explicites). Une difficulté majeure semble être la construction des éléments non-triviaux dans $K_{2n-1}(k)$.⁵ L'analogie du théorème de Borel pour les fonctions L d'Artin des représentations non-abéliennes est presque entièrement ouvert.

4.2. Le point de vue motivique. Un point de vue plus savant sur la K -théorie algébrique passe par la cohomologie motivique. Nous disposons d'une catégorie Tannakienne de motifs de Tate mixtes $\mathcal{MT}(k)$ sur k (dont l'existence repose sur les calculs de Borel mentionnés ci-dessus). Le lien avec la K -théorie est l'isomorphisme suivant:

$$\operatorname{Ext}_{\mathcal{MT}(k)}^1(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(n)) \cong \begin{cases} K_{2n-1}(k) \otimes \mathbb{Q} & \text{si } n \geq 1, \\ 0 & \text{si } n \leq 0, \end{cases}$$

Les éléments de la K -théorie correspondent donc aux générateurs de l'algèbre de Lie du groupe de Galois motivique, et ne forment qu'une minuscule partie de la catégorie $\mathcal{MT}(k)$. Le problème très vaste est donc *de construire explicitement tous les objets de la catégorie $\mathcal{MT}(k)$, et de calculer leur périodes*. Les périodes 'version mixtes' des fonctions zêta de Dedekind ne sont pas connues. Ce problème a deux étapes:

- (1) (Génération) Construire les éléments M correspondant aux générateurs du $\operatorname{Ext}_{\mathcal{MT}(k)}^1$ par la cohomologie des variétés algébriques les plus simples possibles.
- (2) (Liberté) Construire toutes leurs extensions itérées.

Dans l'article (17) je donne une réponse positive à la première étape du problème dans le cas de corps de nombres totalement réels.

4.3. Résultats. Par le théorème de Borel, il doit correspondre aux valeurs $\zeta_k(n)$ des motifs de Tate mixtes dont les périodes sont $\zeta_k(n)$. C'est le résultat suivant:

Théorème 12. (17) Soit k un corps de nombres totalement réel. Il existe des éléments canoniques

$$\operatorname{mot}(k, n) \in \mathcal{MT}(k) \quad \text{pour } n \geq 2$$

tel $\operatorname{mot}(k, n) \in \det \operatorname{Ext}_{\mathcal{MT}(k)}^1(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(n))$, et dont la période (image sous le régulateur déduit par la réalisation de Hodge) est un multiple rationnel de $\zeta_k(n)$.

La construction passe par la géométrie hyperbolique, généralisant des idées de Zagier, Neumann, Bloch, Goncharov et bien d'autres. Soit Γ un sous-groupe arithmétique sans torsion de la restriction des scalaires $R_{k/\mathbb{Q}}SO(n, 1)$ qui agit proprement sur un produit:

$$\mathbb{H}^n \times \dots \times \mathbb{H}^n$$

d'espaces hyperboliques \mathbb{H}^n de dimension n . Le quotient M est un espace symétrique non-compact, et on peut montrer, par un calcul de nombre de Tamagawa (Siegel, Ono, Weil), que son volume $\operatorname{vol}(M)$ est un multiple rationnel de $\zeta_k(n)$ multiplié par des produits de $\zeta_k(2m)$ pour

⁵Il y a eu, cependant, beaucoup de progrès sur ces conjectures durant la dernière vingtaine d'années dans le cas des corps cyclotomiques (Burns-Flach, Benois-Quang Do, Huber-Kings, etc), c'est-à-dire les fonctions L de Dirichlet. C'est le cas où on sait construire des éléments explicites dans la K -théorie supérieure.

m allant de 1 à n . Ceux-ci se réduisent à des puissances de π par Siegel-Klingen. On dispose donc d'une interprétation de $\zeta_k(n)$ comme intégrale, mais qui n'est pas encore une période.

La variété M est très loin d'être algébrique (elle peut avoir, par exemple, une dimension réelle égale à 3). Cependant, on peut lui associer un motif de la manière suivante. En triangulant astucieusement la variété M par des produits de simplexes géodésiques hyperboliques, on voit que le volume est aussi la somme des produits de volumes des simplexes dans la triangulation. Ensuite, par un argument de Goncharov passant par le modèle de Klein de la géométrie hyperbolique, un tel simplexe peut 's'algébriser' car il définit une famille d'hyperplans relatif à une quadrique (représentant le complexifié de la boule unité dans \mathbb{R}^n , bord de l'espace hyperbolique dans le modèle de Klein). Cela définit un motif de Tate mixte, et le motif total de M s'obtient en recollant les motifs ainsi obtenus. Il faut montrer que le motif total de M est bien défini, est produit d'extensions simples de $\mathbb{Q}(0)$ par $\mathbb{Q}(n)$, et donne bien un déterminant.

Outre une nouvelle démonstration, motivique, du résultat de Borel dans le cas totalement réel, cet argument montre aussi comment engendrer la K -théorie rationnelle de k avec des motifs des quadriques et c'est donc un premier pas pour la construction explicite d'une catégorie des motifs de Tate mixtes sur k . On obtient aussi une formule pour $\zeta_k(n)$ comme déterminant des volumes de simplexes hyperboliques. Pour $n = 2$ et 3, ceux-ci s'écrivent en termes des polylogarithmes uniformes classiques, et on peut redémontrer une conjecture célèbre de Zagier reliant valeurs de fonctions zêta aux valeurs des polylogarithmes classiques (les cas $n \geq 4$ de cette conjecture sont inconnus).

4.4. Quelques pistes.

- (1) Il existe beaucoup d'exemples de variétés hyperboliques non-arithmétiques en toute dimension (Gromov-Piatetski Shapiro). La construction ci-dessus leur associe un élément dans $K_{2n-1}(\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}$ et le volume s'interprète comme le régulateur. Cependant, il n'existe aucune conjecture qui prédit à quoi doit ressembler un tel nombre (c'est une période de $\mathcal{MT}(k)$). D'un autre côté, on peut imaginer des formules pour le volume d'une telle variété en moyennant sur le groupe fondamental Γ ou passant par des séries d'Eisenstein. D'où un projet avec un aspect expérimental: décrire ces morceaux de régulateur. On peut rêver même d'en décrire suffisamment pour obtenir une décomposition d'une valeur de fonction L d'Artin comme déterminant de ces nouveaux nombres.
- (2) La construction ci-dessus se prolonge-t-elle au cas des espaces symétriques de rang supérieur? Dans l'article (17) je considère tous les groupes discrets agissant sur des produits d'espaces hyperboliques. On peut s'attendre à ce que n'importe quel groupe discret d'un groupe classique (par exemple SL_n) définisse un motif de Tate mixte. Les formules pour les covolumes connues pour de tels groupes discrets donneraient des formules pour $\zeta_k(n)$ pour n'importe quel corps de nombres k .
- (3) Le fait que l'on obtienne une extension de $\mathbb{Q}(0)$ par $\mathbb{Q}(n)$ est très lié au fait que les variétés M que l'on considère n'ont pas de bord. Si on prend des variétés avec un bord, on devrait pouvoir construire des extensions itérées non-triviales. De là le rêve de construire $\mathcal{MT}(k)$ tout entier par voie géométrique.
- (4) Le fait que la version du théorème de Borel démontrée ci-dessus soit motivique ouvre la possibilité d'étudier ses réalisations p -adiques. Existe-t-il une bonne notion de volume p -adique (avec des conditions sur p) pour les variétés hyperboliques de dimension 3?

5. MULTIZÊTAS ET $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\})$

Je survole le contenu des trois articles:

‘Mixed Tate motives over \mathbb{Z} ’, Annals of Math., vol. 175, no.1 (2012), 949-976

‘On the decomposition of motivic multiple zeta values’, Advanced Studies in Pure Mathematics 63, (2012), Galois-Teichmüller Theory and Arithmetic Geometry pp. 31-58

‘Depth-graded motivic multiple zeta values’, preprint.

5.1. Le groupe fondamental pro-unipotent. Je passerai très rapidement sur mes travaux sur le groupe fondamental motivique de la droite projective moins trois points, car ceci fait l’objet d’un exposé très complet de P. Deligne au séminaire Bourbaki:

‘Multizêtas, d’après Francis Brown’, Séminaire Bourbaki no. 1048, Janvier 2012

J’y ajouterai seulement quelques mots de motivation, et ensuite quelques applications des résultats principaux. Soit $x \in \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ un point base rationnel, et soit $\hat{\pi}_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}, x)$ le complété profini du groupe fondamental de la droite projective moins trois points. La théorie du groupe fondamental étale donne lieu à une suite exacte courte:

$$0 \longrightarrow \hat{\pi}_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}, x) \longrightarrow \pi_1^{et}(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}, x) \longrightarrow \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow 0$$

Le théorème célèbre suivant est dû à Belyi en 1979.

Théorème 13. *L’action $\rho : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \text{Out}(\hat{\pi}_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}, x))$ est fidèle.*

Le résultat principal de (14) est une version motivique de ce théorème. Soit donc

$$\pi_1^{mot}(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}, \vec{1}_0, -\vec{1}_1),$$

le toiseur fondamental motivique de la droite projective moins trois points, relatif aux points base tangentiels en 0 et 1 donnés par les vecteurs 1 et -1 respectivement. C’est un pro-schéma dans la catégorie des motifs de Tate mixtes sur \mathbb{Z} . Son anneau de fonctions régulières

$${}_0\Pi_1 = \mathcal{O}(\pi_1^{mot}(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}, \vec{1}_0, -\vec{1}_1)) \in \text{Ind } \mathcal{MT}(\mathbb{Z})$$

est un ind-objet dans $\mathcal{MT}(\mathbb{Z})$. Concrètement, sa réalisation de de Rham est

$${}_0\Pi_1^{dR} = \bigoplus_{n \geq 0} H_{dR}^1(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\})^{\otimes n}$$

où $H_{dR}^1(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\})$ est un espace vectoriel gradué sur \mathbb{Q} de dimension 2 et de poids 2. Du coup, ${}_0\Pi_1$ est l’algèbre tensorielle sur $\mathbb{Q}e_0 \oplus \mathbb{Q}e_1$ munie de la loi de multiplication donnée par le produit de mélange. L’espace vectoriel sous-jacent a pour base l’ensemble des mots w en deux lettres e_0 et e_1 . Par la théorie Tannakienne, l’objet ${}_0\Pi_1$ est déterminé par l’action du groupe de Galois motivique

$$\rho^{\mathcal{MT}} : \mathcal{G}_{\mathcal{MT}(\mathbb{Z})} \longrightarrow \text{Aut}({}_0\Pi_1^{dR}),$$

qui est compatible avec sa structure d’algèbre. Dans (14), j’ai démontré que $\rho^{\mathcal{MT}}$ est injectif: c’est l’analogie du théorème de Belyi dans le cadre motivique:

Théorème 14. (Conjecture de Deligne-Ihara version motivique) *L’action du groupe de Galois motivique $\mathcal{G}_{\mathcal{MT}(\mathbb{Z})}$ sur ${}_0\Pi_1^{dR}$ est fidèle.*

De manière équivalente:

Théorème 15. *La catégorie $\mathcal{MT}(\mathbb{Z})$ est engendrée par ${}_0\Pi_1$. Autrement dit, tout motif de Tate mixte sur \mathbb{Z} est obtenu par sous-quotients de ${}_0\Pi_1$, twists de Tate et par produit tensoriel.*

Le corollaire permet de construire explicitement tous les éléments de $\mathcal{MT}(\mathbb{Z})$ à partir de certaines configurations d'hyperplans. On peut en calculer les périodes aisément, ce qui prouve la conjecture folklorique suivante, énoncée pour la première fois explicitement par Goncharov:

Théorème 16. *Les périodes de tout motif de Tate mixte sur \mathbb{Z} sont combinaisons lineaires à coefficients dans $\mathbb{Q}[(2i\pi)^{-1}]$ de multizêtas.*

Au lieu de prendre la réalisation de Hodge (ce qui donne les périodes), on peut en prendre la réalisation ℓ -adique, ce qui donne une flèche

$$\rho_\ell : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{Out}(\pi_1^\ell(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}, \vec{1}_0))$$

sur le complété ℓ -adique du complété profini du groupe fondamental de $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$. La filtration par la série centrale descendante sur le membre de droite induit une filtration sur $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Le gradué, tensorisé par \mathbb{Q}_ℓ , est une algèbre de Lie G_ℓ .

Théorème 17. *(Conjecture de Deligne-Ihara) G_ℓ , est libre avec un générateur en chaque degré impair ≤ -3 .*

La partie 'génération' a été démontrée différemment par Hain et Matsumoto.

On sait que les relations d'associateur de Drinfel'd sont motiviques. On déduit que ces équations admettent beaucoup de solutions.

Théorème 18. *Le groupe des associateurs de Drinfel'd contient $\mathcal{G}_{\mathcal{MT}(\mathbb{Z})}$. Son algèbre de Lie graduée contient une algèbre de Lie libre avec un générateur en chaque degré impair ≤ -3 .*

Les travaux d'Alekseev, Torossian etc, entraînent des résultats similaires pour le problème de Kashiwara-Vergne. On obtient comme corollaire de l'injectivité de $\rho^{\mathcal{MT}}$ l'existence de beaucoup de solutions à ce problème aussi.

5.1.1. *L'algèbre de Lie motivique.* Le théorème 14 permet de voir le groupe de Galois motivique de manière très concrète. L'action sur l'élément $1 \in {}_0\Pi_1^{dR}$ donne une application

$$\text{Aut}({}_0\Pi_1) \longrightarrow {}_0\Pi_1^{dR}$$

En composant avec cette flèche, et par l'injectivité de $\rho^{\mathcal{MT}}$, on déduit une injection

$$\text{Lie}^{\text{gf}}(\mathcal{G}_{\mathcal{MT}}(\mathbb{Z})) \longrightarrow {}_0\Pi_1^{dR}$$

Notons \mathfrak{g}^m son image, et le crochet de Lie par $\{\}$. C'est l'algèbre de Lie motivique, munie du crochet de Ihara (qui n'est pas le crochet $[\ , \]$ habituel de l'algèbre tensorielle sur $\mathbb{Q}e_0 \oplus \mathbb{Q}e_1$). Or on sait que \mathfrak{g}^m est libre avec un générateur σ_{2n+1} en chaque degré impair, et on peut calculer, par exemple:

$$\sigma_3 = [e_0, [e_0, e_1]] - [e_1, [e_0, e_1]]$$

Les éléments $\sigma_3, \sigma_5, \sigma_7, \sigma_9$ sont canoniques. A partir de σ_{11} , ils ne le sont plus car on peut y rajouter un multiple de $\{\sigma_3, \{\sigma_3, \sigma_5\}\}$ qui est aussi de degré onze. Un problème important est la description explicite (d'un choix) de générateurs σ_{2n+1} pour tout n .

5.2. Multizêtas motiviques. Un des outils que j'ai introduits pour démontrer le théorème 14 est la notion de multizêta motivique. On remplace les multizêtas par des objets algébriques

$$\zeta^m(n_1, \dots, n_r)$$

qui satisfont aux propriétés suivantes. Soit \mathcal{H} l'espace vectoriel gradué sur \mathbb{Q} engendré par des symboles $\zeta^m(n_1, \dots, n_r)$ et modulo les relations 'motiviques' (qui ne sont pas explicites, mais définies de manière abstraite). C'est une algèbre graduée par le poids $\mathcal{H} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{H}_n$, et en particulier, deux MZV motiviques de poids différents sont linéairement indépendants. Le point clé est que c'est muni d'un homomorphisme période

$$\text{per} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$$

qui à $\zeta^m(n_1, \dots, n_r)$ associe le nombre $\zeta(n_1, \dots, n_r)$, et d'une action du groupe de Galois motivique $\mathcal{G}_{\mathcal{MT}(\mathbb{Z})}$. C'est donc un modèle de ce que devrait être une théorie de Galois transcendante des multizêtas. Dans (14) je démontre:

Théorème 19. *Les éléments motiviques $\zeta^m(n_1, \dots, n_r)$, où $n_i = 2$ ou 3 , forment une base de l'espace vectoriel \mathcal{H} des multizêtas motiviques.*

Il existe une version de ce théorème donnant une base polynomiale des multizêtas motiviques par la famille des éléments $\zeta^m(n_1, \dots, n_r)$, où $n_i = 2$ ou 3 donnée par les mots de Lyndon.

Corollaire 20. *(Conjecture de Hoffman 1997). Tout multizêta est combinaison linéaire à coefficients dans \mathbb{Q} des $\zeta(n_1, \dots, n_r)$ avec $n_i = 2$ ou 3 .*

Ce corollaire découle du théorème précédent en prenant l'application période.

Corollaire 21. *Il existe un associateur rationnel canonique. Il existe des générateurs σ_{2n+1} de l'algèbre de Lie motivique qui sont canoniques.*

Le point essentiel des multizêtas motiviques, que l'on ne voit pas au niveau des nombres réels, est l'action du groupe de Galois motivique. Cette action ne peut pas se calculer directement, mais se factorise via l'action de certains opérateurs différentiels:

$$D_{2r+1} : \mathcal{H}_N \longrightarrow (\mathcal{H}/\zeta^m(2))_{2r+1} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{H}_N$$

que l'on peut calculer très explicitement par une formule simple. Cela permet ensuite de calculer dans certain cas l'action infinitésimale de l'algèbre de Lie de Galois. Les opérateurs 'dérivée par rapport à σ_{2r+1} ' sont canoniques pour $1 \leq r \leq 4$ et donnent, par exemple:

$$\partial_3 \zeta^m(7, 3) = 17 \zeta^m(7) \quad , \quad \partial_5 \zeta^m(7, 3) = 6 \zeta^m(5) \quad , \quad \partial_7 \zeta^m(7, 3) = \zeta^m(3)$$

ce qui montre leur caractère tout à fait non-trivial. Ces idées permettent de décrire des algorithmes de calcul pour les multizêtas motiviques purement en termes de l'action du groupe, et non pas en utilisant des relations entre les multizêtas. C'est le contenu de l'article (16). Le seul bémol est que ces algorithmes sont exacts seulement à la détermination d'un régulateur près, et nécessitent l'identification d'un nombre rationnel $\alpha \in \mathbb{Q}$ qui est donné comme développement infini. Par exemple, on sait a priori que $\zeta^m(2, 3)$ est de la forme

$$\zeta^m(2, 3) = a \zeta^m(5) + b \zeta^m(3) \zeta^m(2), \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{Q}.$$

Applicant la dérivation ∂_3 aux deux membres permet de montrer que $b = 3$ (ce coefficient-là est exact). Le coefficient a ne peut pas se détecter par des méthodes motiviques actuelles, et on doit

le calculer par voie transcendente:

$$a = \frac{\zeta(2, 3) - 3\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(5)} \sim -\frac{11}{2}$$

par un calcul numérique ou autre. En général, ce ne sont que les coefficients des $\zeta^m(n)$ qui sont indéterminés. D'un point de vue pratique (ayant en tête des applications en physique, entre autres), ces algorithmes permettent de reconstruire en quelques secondes n'importe quelle relation entre multizêtas jusqu'en poids 16. Cela élimine la nécessité de stocker des tables (qui deviennent très vite gigantesques, et mettent des mois à calculer par les méthodes classiques).

5.3. Filtration par la profondeur. Ne pouvant pas, pour l'instant, décrire explicitement une famille de générateurs de l'algèbre de Lie \mathfrak{g}^m (bien qu'on connaisse sa structure), nous pouvons cependant nous demander comment décrire l'algèbre de Lie graduée par la profondeur:

$$\mathfrak{d}\mathfrak{g}^m = \text{gr}_D^\bullet \mathfrak{g}^m$$

où la profondeur, au niveau des multizêtas motiviques $\zeta^m(n_1, \dots, n_r)$, est la filtration croissante donnée par l'indice r . La filtration décroissante correspondante sur \mathfrak{g}^m est induite par l'inclusion $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\} \hookrightarrow \mathbb{P}^1 \setminus \{0, \infty\}$, ce qui met en évidence sa nature motivique. Dans (23), je propose d'étudier les multizêtas motiviques gradués par la profondeur, que je note:

$$\zeta_D^m(n_1, \dots, n_r)$$

Un tel élément est la classe de $\zeta^m(n_1, \dots, n_r)$ modulo des multizêtas de profondeur plus petite. On sait depuis Ihara que $\mathfrak{d}\mathfrak{g}^m$ n'est pas libre. C'était précisément l'obstacle qui rendait la démonstration du théorème 14 difficile. D'où la question: si $\mathfrak{d}\mathfrak{g}^m$ n'est pas libre, quelle est sa structure? J'avance alors la conjecture suivante (basée sur les calculs de Broadhurst-Kreimer):

Conjecture 1. (23) Soient $\bar{\sigma}_{2n+1} \in \mathfrak{d}\mathfrak{g}_1^m$ l'image des générateurs σ_{2n+1} de \mathfrak{g}^m en profondeur 1. Ces éléments sont canoniques, et on les connaît explicitement. Alors on a

$$(5.1) \quad \begin{aligned} H_1(\mathfrak{d}\mathfrak{g}^m, \mathbb{Q}) &\cong \bigoplus_{n \geq 1} \mathbb{Q}\bar{\sigma}_{2n+1} \oplus S_\bullet(\text{PSL}_2(\mathbb{Z}))[4] \\ H_2(\mathfrak{d}\mathfrak{g}^m, \mathbb{Q}) &\cong S_\bullet(\text{PSL}_2(\mathbb{Z}))[2] \\ H_i(\mathfrak{d}\mathfrak{g}^m, \mathbb{Q}) &= 0 \quad \text{pour tout } i \geq 3. \end{aligned}$$

où $S_{2k}(\text{PSL}_2(\mathbb{Z}))$ est l'espace des formes paraboliques de poids $2k$ pour le groupe modulaire tout entier, et les crochets $[n]$ indiquent des éléments de profondeur n .

L'isomorphisme entre $H_2(\mathfrak{d}\mathfrak{g}^m; \mathbb{Q})[2]$ et $S_\bullet(\text{PSL}_2(\mathbb{Z}))$ est connu depuis longtemps (Ihara-Takao, Goncharov, Schneps), mais l'isomorphisme conjectural $H_1(\mathfrak{d}\mathfrak{g}_4^m, \mathbb{Q}) \cong S_\bullet(\text{PSL}_2(\mathbb{Z}))$ est nouveau et j'en donne une formule surprenante et explicite dans l'article (23) en termes des polynômes des périodes des formes paraboliques.⁶ Du coup, si la conjecture 1 est vraie, elle permet de décrire explicitement toutes les relations entre les $\zeta_D^m(n_1, \dots, n_r)$. Je démontre également qu'elle implique la conjecture célèbre suivante:

Conjecture 2. (Version motivique de la conjecture de Broadhurst-Kreimer)

$$(5.2) \quad \sum_{N, d \geq 0} \dim_{\mathbb{Q}}(\text{gr}_d^D \mathcal{H}_N) s^N t^d = \frac{1 + \mathbb{E}(s)t}{1 - \mathbb{O}(s)t + \mathbb{S}(s)t^2 - \mathbb{S}(s)t^4},$$

⁶Cette construction répond, d'ailleurs, à une question de Ihara, et est très fortement liée au fait que l'algèbre des dérivations stables n'est pas libre modulo 691, et des questions subtiles en cohomologie Galoisienne.

où

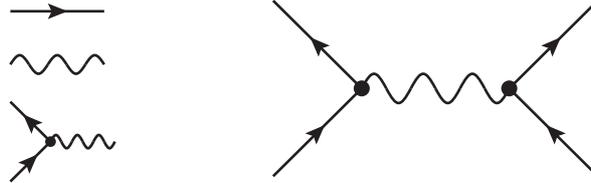
$$(5.3) \quad \mathbb{E}(s) = \frac{s^2}{1-s^2} \quad , \quad \mathbb{O}(s) = \frac{s^3}{1-s^2} \quad , \quad \mathbb{S}(s) = \frac{s^{12}}{(1-s^4)(1-s^6)} .$$

5.4. Ouvertures. Il reste à faire le lien avec les multizêtas elliptiques décrits dans §3.2. Si on interprète les éléments $\bar{\sigma}_{2n+1}$ comme des séries d'Eisenstein, la conjecture 1 est *entièrement modulaire*. C'est cela qui suggère le lien avec l'espace des modules des courbes $\mathfrak{M}_{1,n}$.

Théorie Quantique des Champs

6. UN APERÇU RAPIDE SUR LES INTÉGRALES DE FEYNMAN

Du point de vue perturbatif⁷, une théorie quantique des champs se représente par une famille de sommets et d'arêtes de différents espèces. En bas à gauche, l'électrodynamique quantique QED a un seul sommet et deux types d'arêtes. Ensuite, les graphes de Feynman s'obtiennent en mettant ces éléments ensemble:



Un tel graphe représente une interaction, ou 'processus' entre particules élémentaires; le diagramme ci-dessus représente, entre autres, l'échange d'un photon (ligne qui tortille) entre deux électrons (lignes droites). Les règles de Feynman associent à chaque tel graphe une intégrale multidimensionnelle (éventuellement divergente: on donnera des exemples plus loin), dont la valeur renormalisée s'interprète comme une amplitude, ou probabilité complexe. On doit ensuite prendre la norme - la valeur absolue- de la somme sur toutes les amplitudes de Feynman qui contribuent à chaque processus pour en déduire une prédiction physique. Les diagrammes sans boucles représentent l'approximation classique, et les diagrammes avec plusieurs boucles représentent des approximations quantiques de plus en plus fines. Pourtant cette approche par approximation successive représente un défi calculatoire extrêmement difficile, car le nombre de diagrammes possibles augmente rapidement avec le nombre de boucles, et les intégrales de Feynman elles-mêmes deviennent rapidement complètement inaccessibles par voie analytique, et même par des méthodes numériques. Cependant, c'est la manière principale par laquelle les prédictions pour les accélérateurs de particules, tel que le LHC, s'obtiennent actuellement, et plusieurs centaines de chercheurs, et une grande partie de la littérature de physique de haute énergie (et la théorie des cordes) est entièrement consacrée, depuis de nombreux années, au calcul des intégrales de Feynman.

Prenons comme premier exemple les graphes avec une et deux boucles qui contribuent au propagateur du photon en électrodynamique quantique:



Ces graphes représentent le passage d'un photon (disons de gauche à droite), avec des étapes intermédiaires où un ou plusieurs électrons ou photons virtuels sont échangés. Le graphe à gauche a pour amplitude $4/3$, la somme des trois graphes à droite vaut 4. En fait le résultat

⁷La quasi-totalité des prédictions quantitatives pour les accélérateurs des particules s'obtiennent par l'approche perturbative, i.e., en calculant des intégrales de Feynman. En outre, cette recette calculatoire est parfaitement rigoureuse du point de vue mathématique, si l'on se permet de traiter des séries asymptotiques

β_{QED} est connu numériquement, depuis 2012, jusqu'à 5 boucles:

$$\frac{4}{3}a + 4a^2 - \frac{62}{3^2}a^3 - \left(\frac{5570}{3^5} + \frac{832}{3^2}\zeta(3)\right)a^4 - \left(\frac{195067}{2 \cdot 13^5} + \frac{800}{3}\zeta(3) + \frac{416}{3}\zeta(4) - \frac{6880}{3}\zeta(5)\right)a^5 + \dots$$

où a est le paramètre $(\frac{e}{4\pi})^2 \sim 1/137$, et e est la charge de l'électron. Ce résultat, qui pourrait sembler anodin à première vue, représente quand même les travaux d'un nombre très considérable de physiciens pendant plusieurs *décennies*! Ce résultat est aussi exceptionnel, parce que pour la plupart des théories qui font partie du modèle standard, la limite actuelle des connaissances est seulement de l'ordre de deux boucles (pour le secteur faible) ou trois boucles (pour la chromodynamique quantique).

Il est frappant que les valeurs de la fonction zêta de Riemann apparaissent dans ce calcul, et que le poids augmente d'une certaine manière en fonction du nombre de boucles. En plus, les coefficients ont des dénominateurs divisibles par 2 ou 3 seulement, et le terme $\zeta(2)$ est absent. Peut-on, par pensée pure, déduire *a priori* cette structure arithmétique?

Prenons comme deuxième exemple le moment magnétique de l'électron. L'approximation 'classique', $g = 2$ est connue par Dirac (le magnéton de Bohr). Les termes de premier ordre ont été calculés en 1947 (un seul diagramme), le second ordre en 1957 (sept diagrammes), et le troisième ordre a été complété en 1996 (72 diagrammes):

$$(6.1) \quad \frac{g-2}{2} = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\pi} + \left(\frac{197}{2^4 3^2} - \zeta(\overline{2}) + 6 \zeta(\overline{2}) \log 2 - \zeta(\overline{3})\right) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{28259}{2^6 3^4} - \frac{34202}{3^3 5} \zeta(\overline{2}) - \frac{1192}{3} \zeta(\overline{2}) \log 2 - \frac{278}{3^3} \zeta(\overline{3}) - \frac{13}{5} \zeta(\overline{2})^2 - \frac{50}{3} \zeta(\overline{1}, \overline{3}) + \frac{166}{3^2} \zeta(\overline{2}) \zeta(\overline{3}) + \frac{36}{3^2} \zeta(\overline{5})\right) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3$$

où $\frac{\alpha}{\pi} = (\frac{e}{2\pi})^2$. Ici les nombres $\log 2, \zeta(\overline{m}, \overline{n})$ etc sont des sommes d'Euler: c'est-à-dire des périodes de $\pi_1^{mot}(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, -1, \infty\})$ (ou de manière équivalente $\mathcal{MT}(\mathbb{Z}[\frac{1}{2}])$, par un théorème de Deligne). Le fait que l'on obtient des périodes qui sont des multizêtas ramifiés en 2 est dû à la présence d'une masse (la masse de l'électron) dans les intégrales correspondantes.

La valeur expérimentale du moment magnétique connue actuellement [23] est:

$$\frac{g-2}{2} =_{ex} 1.00115965218073(\pm 28)$$

alors que la prédiction donnée par les intégrales de Feynman est

$$\frac{g-2}{2} =_{th} 1.00115965218113(\pm 86).$$

L'accord entre ces deux nombres est une des meilleures réussites de la science moderne: c'est équivalent à mesurer la distance entre la terre et la lune avec une erreur qui est au plus l'épaisseur d'un cheveu humain.

Notons aussi que les résultats analogues du côté de la chromodynamique quantique sont pour l'instant nettement moins bons puisque la constante de couplage α_s correspondante est beaucoup plus grande, et le développement converge bien plus lentement. Dans ce cas, on serait obligé de monter plus loin dans la tour des diagrammes de Feynman correspondants.

6.1. La renormalisation. Comme mentionné ci-dessus, la plupart des intégrales de Feynman sont très divergentes. En plus, ces divergences s'emboîtent de manière compliquée car tout graphe hérite des divergences de chacun de ses sous-graphes. Il ne suffit pas d'appliquer un quelconque procédé de régularisation: les contraintes physiques demandent que l'ensemble des

amplitudes de tous les graphes doivent se régulariser simultanément, et de manière consistante, pour respecter, entre autres, la localité. La théorie de la renormalisation (pour les divergences dites ultra-violettes), résout tous ces problèmes à la fois.

La renormalisation a mis beaucoup de temps à se mettre en place, et la première formulation rigoureuse est due à Bogoliobov, Parasiuk, Hepp et Zimmerman. Cependant, ce procédé est resté apparemment très compliqué pendant bien longtemps avant la découverte, par Kreimer, puis Connes-Kreimer, d'une structure d'algèbre de Hopf sous-jacente. Combinatoirement, la renormalisation provient d'un coproduit sur l'algèbre libre engendrée par tous les graphes dans une théorie quantique des champs rénormalisable quelconque (avec multiplication donnée par l'union disjointe):

$$(6.2) \quad \Delta : \mathbb{Z}[\text{Graphes}] \longrightarrow \mathbb{Z}[\text{Graphes}] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\text{Graphes}]$$

$$(6.3) \quad \Delta(\Gamma) = \sum \gamma \otimes \Gamma/\gamma$$

La forme du coproduit est toujours la même: on prend la somme sur une certaine sous-famille de sous-graphes divergents γ , et le membre de droite Γ/γ est le graphe quotient obtenu en contractant le sous-graphe γ dans Γ . Le *groupe de renormalization* peut alors s'interpréter comme un sous-groupe à un paramètre du groupe pro-unipotent $\text{Spec } \mathbb{Q}[\text{Graphes}]$. Malgré ces avancées, et le fait que la renormalisation date de plus de quarante ans, le problème central de la renormalisation de la gravité, par exemple, est complètement ouvert pour le moment.

Bien que la renormalisation des divergences ultra-violettes soit à peu près sous contrôle, les singularités dites infra-rouges posent encore problème.

Un troisième aspect de nature analytique est la question de la divergence des séries perturbatives. On sait qu'elles doivent s'interpréter comme des séries asymptotiques, mais il n'est pas du tout connu à partir de quel point elles vont commencer à diverger. Bien plus difficile encore que la détermination du rayon de convergence des séries dans le plan de Borel, est la question de resommation de ces séries, et des questions non-perturbatives. Cela semble totalement hors de portée pour le moment.

6.2. Quelles périodes pour la physique? Comme on peut le constater sur ces exemples, les amplitudes de Feynman sont toujours des périodes. En plus, pratiquement toutes les amplitudes qui ont été calculées depuis la naissance de ce domaine sont des sommes d'Euler ou des nombres multizêtas (à part quelques exemples d'intégrales elliptiques dans des processus qui dépendent de plusieurs masses). De ce fait, le sentiment a émergé dans les années 90 que *toutes les amplitudes qui dépendent d'un seul paramètre externe dans certaines théories quantiques des champs devraient être des multizêtas*.⁸ Pour des conjectures précises, voir §7. C'est exactement cette problématique qui m'a attiré vers ce domaine, et la question sur laquelle j'ai passé quelques années de réflexion depuis ma thèse. L'espoir est le suivant: si on arrivait à comprendre la nature de la totalité des amplitudes dans une théorie donnée (si par exemple, ils étaient tous des valeurs multizêtas), on aurait une très bonne chance de résoudre complètement la théorie, resommer la série divergente, montrer l'existence de la théorie, et essayer de la comprendre du point de vue non-perturbatif. Ce programme est plus ou moins possible pour des modèles 'jouet' de théories en 2 dimensions d'espace-temps, mais cela n'est connu actuellement pour aucune théorie en 4 dimensions d'espace-temps.

⁸On peut montrer (parfois à l'aide du théorème 7) que c'est bien le cas pour certaines théories à deux dimensions d'espace-temps. On discutera de l'évidence numérique pour cette conjecture dans le paragraphe suivant.

Nous devons à Broadhurst et Kreimer la première étude systématique des périodes en théorie quantique des champs, et la philosophie qu'il faut prendre au sérieux les nombres qui apparaissent dans les intégrales de Feynman. De là, le programme du groupe de Galois cosmique formulé par Pierre Cartier: mettre en relation le groupe de renormalization et le groupe de Galois motivique des motifs de Tate mixtes qui agit sur les périodes dans le développement perturbatif.

6.3. Les enjeux mathématiques. Etant donné le succès spectaculaire des méthodes perturbatives en théorie quantique des champs, et la confirmation du modèle standard par la découverte récente de ce qui est probablement le boson de Higgs, il est impératif d'approfondir notre compréhension mathématique des amplitudes de Feynman.

Quelques questions:

- Quelles sont les périodes qui servent à exprimer les amplitudes de Feynman? Peut-on déduire, par 'pensée pure', des informations qualitatives (poids, arithmétique des coefficients, action de groupe de Galois motivique, compensation des périodes, etc) sur le développement perturbatif sans avoir à calculer toutes les intégrales?
- Arriver à une compréhension mathématique des divergences et de leur régularisation. Un problème central est la renormalisation de la gravité qui reste complètement ouvert. Un traitement rigoureux des singularités infra-rouges manque actuellement aussi.
- Mise en place des algorithmes effectifs pour le calcul des intégrales de Feynman, avec des applications pour les prédictions théoriques.

En conclusion, la théorie de la perturbation fournit un procédé parfaitement bien défini⁹ pour obtenir presque toutes les prédictions physiques à haute énergie que l'on veut, et en outre, cela fait intervenir des objets mathématiques très riches. Il est temps de mieux les comprendre.

⁹A mon avis, le problème de fonder la théorie quantique des champs en étudiant rigoureusement les intégrales de chemin doit d'abord passer par une meilleur compréhension des aspects perturbatifs.

7. UN SURVOL DU PROGRAMME DU GROUPE DE GALOIS COSMIQUE

7.1. **Graphes primitifs dans ϕ^4 .** On peut formuler les intégrales de Feynman dans un langage proche de la géométrie algébrique en prenant le point de vue paramétrique. Dans ce qui suit je vais me restreindre à une théorie scalaire ϕ^4 en 4 dimensions sans masses pour simplifier. Quelques remarques préliminaires sont essentielles:

- Toutes les amplitudes dans une théorie vectorielle (e.g. de jauge) se réduisent à des amplitudes scalaires. Cela ne change que les numérateurs des intégrales considérées: les dénominateurs restent les mêmes. Du coup, les amplitudes dans la théorie ϕ^4 déterminent les amplitudes dans bien d'autres théories: quand on change la théorie, on change les *combinaisons linéaires* des périodes qui apparaissent, mais pas les périodes elles-mêmes. Du coup, on peut voir ϕ^4 comme une théorie 'universelle', ou une sorte de borne supérieure, du point de vue de l'ensemble des périodes qui apparaissent.
- La théorie ϕ^4 sans masse contient un très grand nombre de périodes dites 'primitives' qui sont *indépendantes du choix de schéma de renormalisation*. Cela donne une grande famille de nombres que l'on peut analyser. Ces amplitudes-là servent aussi pour tester les méthodes calculatoires.

Plus précisément, soit G un graphe (qui peut avoir des arêtes multiples), avec N_G arêtes et $h_G = h_1(G)$ boucles. A chaque arête e de G , on associe un paramètre (variable de Schwinger) α_e . Le polynôme de Kirchhoff de G est donné par:

$$\Psi_G = \sum_{T \subseteq G} \prod_{e \notin T} \alpha_e \in \mathbb{Z}[\alpha_e]$$

où la somme porte sur l'ensemble des arbres couvrants de G , c'est-à-dire l'ensemble des sous-graphes connexes T qui passent par chaque sommet et ne contiennent pas de boucles. Pour définir le résidu de G , on suppose G primitif et log-divergent: autrement dit, $N_G = 2h_G$ et

$$(7.1) \quad N_\gamma > 2h_\gamma$$

pour tout sous-graphe strict $\gamma \subset G$. Avec ces conditions, le résidu de G est donné par l'intégrale projective absolument convergente suivante:

$$(7.2) \quad I_G = \int_\sigma \frac{\Omega_{N_G}}{\Psi_G^2}$$

où $\sigma = \{(\alpha_1 : \dots : \alpha_{N_G}) \in \mathbb{P}^{N_G-1}(\mathbb{R}), \alpha_i \geq 0\}$ est le simplexe réel dans l'espace projectif, et $\Omega_{N_G} = \sum_{i=1}^{N_G} (-1)^i \alpha_i d\alpha_1 \dots \widehat{d\alpha_i} \dots d\alpha_{N_G}$. Le premier exemple non-trivial est le tétraèdre, ci-dessous à gauche, dont le polynôme de Kirchhoff a seize termes:

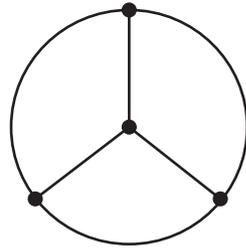
$$(7.3) \quad \Psi_G = (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)(\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6) + \alpha_4\alpha_5\alpha_6 + (\alpha_1 + \alpha_2)\alpha_4\alpha_5 + (\alpha_1 + \alpha_3)\alpha_4\alpha_6 + (\alpha_2 + \alpha_3)\alpha_5\alpha_6$$

Il n'y a rien d'évident de montrer que son intégral I_G vaut $6\zeta(3)$. En général, (7.2) définit une application de l'ensemble des graphes primitifs log-divergents vers les nombres réels positifs:

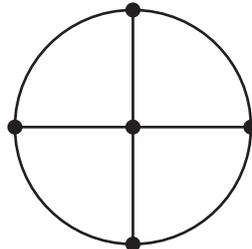
$$\{\text{Graphes primitifs}\} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Tout l'enjeu est de d'avoir des renseignements sur cette application.

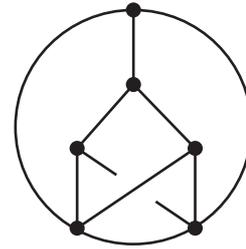
En voici quelques exemples:



$$I_G = 6\zeta(3)$$

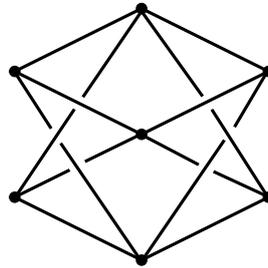


$$I_G = 20\zeta(5)$$



$$I_G = 36\zeta(3)^2$$

Les graphes ci-dessus ont $h_G = 3, 4,$ et 5 boucles. En général, le ‘poids transcendant’ de la période est égale à $2h_G - 3$. Le graphe à droite a le poids $2h_G - 4$: c’est le premier exemple du phénomène de ‘chute de poids’, ce qui fait preuve de la subtilité de la filtration par le poids. Ensuite, le premier multizêta irréductible apparaît à 6 boucles:



$$I_G = \frac{27}{5}\zeta(5, 3) + \frac{45}{4}\zeta(5)\zeta(3) - \frac{261}{20}\zeta(8)$$

Pour une liste très complète des périodes connues à ce jour, voir [19]. La méthode de calcul de ces graphes est très astucieuse: transformation en coordonnées polaires, développement en termes des polynômes orthogonaux de Gegenbauer, et ensuite, l’application des méthodes d’accélération de convergence, ce qui permet de calculer l’intégrale à un grand nombre de décimales. Ensuite un algorithme de réduction de réseau (LLL ou PSLQ) permet d’identifier, dans beaucoup de cas, l’amplitude avec une combinaison de multizêtas. Très peu de graphes sont connus analytiquement, c’est-à-dire, ont une période qui est prouvée.

Dans les années 80, Broadhurst et Kreimer avaient effectué dans [8] un très gros travail numérique, et avaient calculé les I_G pour tous les graphes jusqu’à 6 boucles, et certains graphes jusqu’à 9 boucles, à suffisamment de décimales pour identifier les nombres I_G avec des combinaisons linéaires de multizêtas. D’où la conjecture folklorique

Conjecture 3. Les intégrales I_G sont toutes des multizêtas.

Cette conjecture est importante pour la raison suivante: si tous les graphes de Feynman dans un théorie donnée donnent des multizêtas, cela donne l’espoir de résoudre complètement la théorie et resommer sa série perturbative. Cela démontrerait l’existence de la théorie et donnerait également son comportement non-perturbatif. A l’heure actuelle, nous ne savons réaliser ce programme que pour des modèles jouets à deux dimensions.

Dans l’article [9], Cartier, et aussi Konstevich [16], §5 ont repris cette idée du point de vue motivique. Les multizêtas étant des représentations du groupe de Galois motivique (de la catégorie des motifs de Tate mixtes sur les entiers), l’idée du programme du groupe de Galois ‘cosmique’ est de réaliser cette action de groupe de Galois motivique sur la série perturbative:

La parenté de plus en plus manifeste entre le groupe de Grothendieck - Teichmüller d'une part, et le groupe de renormalisation de la Théorie Quantique des Champs n'est sans doute que la première manifestation d'un groupe de symétrie des constantes fondamentales de la physique, une espèce de groupe de Galois cosmique !
P. Cartier

Autrement dit, il devrait y avoir un groupe de Galois 'cosmique' qui agit sur les constantes fondamentales de la physique via les séries perturbatives, en relation avec le groupe de renormalisation. Selon la conjecture précédente, ce groupe devrait être $\text{Gal}(\mathcal{MT}(\mathbb{Z}))$.

Plus tard, Connes et Marcolli ont trouvé dans [10] une catégorie Tannakienne liée au groupe de renormalisation qui est très proche, et isomorphe aux représentations de $\text{Gal}(\mathcal{MT}(\mathbb{Z}[i][1/2]))$.

7.2. Interprétation cohomologique. Les intégrales de Feynman ci-dessus peuvent se reformuler dans le langage de la géométrie algébrique de la manière suivante. Soit d'abord

$$X_G \subset \mathbb{P}^{N_G-1}$$

l'hypersurface du graphe G , donnée par l'annulation du polynôme de Kirchhoff Ψ_G (qui est homogène de degré h_G). En général, cette hypersurface est très singulière. La forme différentielle de Feynman

$$\omega_G := \frac{\Omega_{N_G}}{\Psi_G^2} \in \Omega^{N_G-1}(\mathbb{P}^{N_G-1} \setminus X_G)$$

est définie sur le complémentaire de X_G . Ensuite, soit $B = V(\prod_{i=1}^{N_G} \alpha_i)$ l'union des hyperplans dans \mathbb{P}^{N_G-1} donnés par l'annulation des coordonnées. Le bord du domain d'intégration σ est contenu dans $B(\mathbb{R})$, et définit une chaîne relative

$$\sigma \in C_n(\mathbb{P}^{N_G-1}(\mathbb{C}), B(\mathbb{C}))$$

L'idée naïve serait de considérer le groupe de cohomologie relatif

$$H^{N_G-1}(\mathbb{P}^{N_G-1} \setminus X_G, B \setminus (B \cap X_G)),$$

mais il s'avère que I_G n'en est pas une période parce que l'intersection $\sigma \cap X_G$ est non-vide. Dans l'article fondateur [4], on explique comment, en éclatant successivement des intersections des hyperplans B_i , on arrive à séparer la transformée stricte de X_G de l'image inverse de σ , de sorte que l'image inverse de ω_G soit sans pôles sur le diviseur exceptionnel. On obtient de cette manière un 'motif' - ou plutôt une structure de Hodge mixte,

$$\text{mot}_G = H^{N_G-1}(\tilde{\mathbb{P}}^{N_G-1} \setminus \tilde{X}_G, \tilde{B} \setminus (\tilde{B} \cap \tilde{X}_G))$$

et on a le théorème important suivant, qui ouvre la porte à une étude de l'intégrale I_G par des méthodes de la géométrie algébrique.

Théorème 22. (Bloch-Esnault-Kreimer 2006) I_G est une période de mot_G .

La philosophie est que si mot_G est un motif de Tate mixte sur \mathbb{Z} , cela impliquerait, par le théorème 16 que I_G est un multizêta. Le problème était donc de démontrer que mot_G est de Tate mixte (que l'on ne savait faire en aucun cas à cette époque). En tous cas, la conjecture 3 devient donc la conjecture suivante, annoncée au congrès européen des mathématiciens en 2008:

Conjecture 4. (Marcolli [18], conjecture 1.1) I_G est une période d'un motif de Tate mixte.

Une approche élémentaire, un peu différente, a été proposée par Kontsevich bien avant en 1997. Il avait proposé d'étudier la fonction de comptage de points

$$q \mapsto |X_G(\mathbb{F}_q)|$$

de l'ensemble des puissances des nombres premiers vers les entiers.

Conjecture 5. (Kontsevich 1997) Le nombre de points de $X(\mathbb{F}_q)$ sur un corps fini à q éléments dépend de manière polynomiale en q .

La motivation pour cette conjecture est la suivante: si la cohomologie $H^i(X_G)$ est de Tate mixte pour tout i , alors en particulier le polynôme de Poincaré est aussi de Tate mixte. En prenant la réalisation ℓ -adique, la formule des traces de Lefschetz, cela implique, par un raisonnement standard, que le nombre de points $|X_G(\mathbb{F}_q)|$ dépend de manière polynomiale en q .

Ce problème a été étudié par un certain nombre de théoriciens des graphes, avant que Stembridge démontre dans [21] que la conjecture est vraie pour tout graphe avec moins de 12 arêtes. Ensuite, Belkale et Brosnan ont démontré en 2003, à la très grande surprise de tous les experts (y compris eux-mêmes!), que la conjecture 5 est génériquement fausse:

Théorème 23. (Belkale-Brosnan [3]) Soit Y un schéma de type fini sur $\text{Spec } \mathbb{Z}$, et soit $[Y]_q$ sa fonction de comptage de points \mathbb{F}_q . Alors il existe un nombre fini de graphes G_1, \dots, G_N et des polynômes $p_1, \dots, p_N \in \mathbb{Z}[q]$ tels que

$$s(q)[Y]_{\mathbb{F}_q} = \sum_{i=1}^N p_i(q)[X_{G_i}]_q$$

où $s(q)$ est un produit de facteurs $q^M - 1$, pour $M > 1$.

La preuve utilise le théorème d'universalité de Mnëv mais ne fournit pas de contre-exemple calculable. On arrive donc à une espèce de conflit entre le théorème 23 qui dit que les fonctions de comptage des points sont de type très généraux, et toute l'expérience numérique, qui montre que les graphes 'physiques' donnent bel et bien des multizêtas.

Il pourrait y avoir plusieurs mécanismes pour résoudre cette contradiction apparente:

- Les contre-exemples que l'on obtient à partir de la méthode de Belkale-Brosnan ont des sommets avec des milliers d'arêtes. Les graphes qui interviennent dans la physique ont des sommets de degré au plus 4, et sont topologiquement très différents.
- La fonction de comptage de points concerne la caractéristique d'Euler de l'hypersurface du graphe X_G , alors que la période I_G est déterminée par la cohomologie relative en degré égal à la moitié de la dimension seulement. Il se peut que le support de I_G (le plus petit motif sous-quotient de mot_G qui a I_G comme période) soit toujours de type Tate mixte, même si la caractéristique d'Euler de X_G ne l'est pas.
- De toute façon, ce qui importe est la somme sur tous les graphes à un ordre donné (un graphe individuel n'a pas de sens physique: seule la somme sur tous les graphes donne une quantité qui peut se mesurer). Même s'il existait des graphes qui ont des périodes compliquées, elles pourraient se compenser quand on prend le développement perturbatif tout entier. Plusieurs physiciens ont exprimé le sentiment que ce développement devrait se trivialisier avec le bon choix de schéma de renormalisation.

Le premier point suggère de comprendre comment la topologie des graphes peut contraindre la fonction de comptage des points. Le second dit que la fonction de comptage de points n'est

pas tout à fait liée à l'arithmétique de la période: il se peut que X_G ait une fonction de comptage non-polynomiale alors que I_G soit un multizêta.

Pour bien voir cette distinction et formuler la notion du support de I_G , il faut comprendre les *répères* de mot_G . Ce sont les deux classes données par la forme différentielle et le domaine d'intégration:

$$[\omega_G] \in (\text{mot}_G)_{dR} \quad \text{et} \quad [\sigma] \in (\text{mot}_G)_B^\vee$$

Ces données permettent de sélectionner une seule période I_G à l'intérieur de mot_G . Le support de mot_G est le plus petit sous-quotient de mot_G qui 'contient' les deux répères. On peut montrer que $[\sigma]$ est dans W_0 , ou W est la filtration par le poids, et un calcul facile montre que $W_0 \text{mot}_G \cong \mathbb{Q}(0)$ est de type Tate. Il reste donc à comprendre le répère qui correspond à la forme différentielle.

Problème 24. [4] "On aimerait que la partie de poids maximal de $M = \text{mot}_G$ soit de Tate,

$$\text{gr}_{max}^W M = \mathbb{Q}(-p)^{\oplus r}$$

En plus, on aimerait qu'il existe une sous-structure de Hodge de rang un $i : \mathbb{Q}(-p) \hookrightarrow \text{gr}_{max}^W M$ tel que l'image de $\omega_G \in M_{dR}$ dans $\text{gr}_{max}^W M_{dR}$ engendre $i(\mathbb{Q}(-p))_{dR}$."

Dans le même article, Bloch, Esnault et Kreimer ont vérifié cette conclusion pour une famille de graphes (les roues), et Doryn a ensuite généralisé ce résultat pour une classe de graphes zig-zag dans sa thèse.

8. RÉSULTATS ET ARTICLES

8.1. Résumé des résultats. J'explique la conclusion de mes résultats (certains en collaboration) dans cette direction avant de les traiter en plus grand détail dans les paragraphes qui suivent.

- Sens positif: j'ai obtenu des critères sur la combinatoire d'un graphe G pour que I_G satisfasse à toutes les conjectures ci-dessus: I_G est un multizêta, mot_G est de Tate mixte, $[X_G]$ est un polynôme en q , le problème des répères est résolu. Ces critères sont valables pour une grande classe de graphes, qui contient pratiquement tous les exemples connus des physiciens. Toutes les conjectures précédentes sont vraies pour cette famille.
- Sens négatif: il existe des graphes explicites, physiques, (même planaires!) qui sont modulaires. Cela veut dire que la fonction de comptage $[X_G]$ est donnée par les coefficients de Fourier d'une forme modulaire, et très loin d'être un polynôme. La conjecture de Kontsevich est donc fautive pour ces graphes-là. En outre, le répère donné par la forme de Feynman n'est pas de type Tate, donc la conjecture de Marcolli et le problème des répères sont faux aussi. A ce moment-là, les conjectures standard disent que I_G n'est pas un multizêta, et la conjecture 3 est sans aucun doute fautive.
- Renormalisation et poids: Avec Kreimer nous avons défini un motif renormalisé mot_G^{ren} , pour la période renormalisée des graphes avec des sous-divergences. D'autre part, les méthodes géométriques ci-dessus permettent de conclure que les graphes avec sous-divergences ont des chutes de poids. Il n'y a donc aucun moyen de changer le schéma de renormalisation pour se débarrasser des contre-exemples modulaires.

Du coup, il faut complètement repenser le groupe de Galois cosmique.

Une partie des idées qui suivront est survolée dans l'article (19) et dans des transparents pour la conférence "Amplitudes 2012" qui sont disponibles sur ma page web.

8.2. **Périodes des graphes de Feynman.** Je passe en revue les quatre articles (7), (18), (12), (24), qui traitent principalement des aspects ‘périodes’ des intégrales de Feynman:

The massless higher-loop two-point function, Comm. in Math. Physics 287 , 925-958 (2009)

On the periods of some Feynman integrals, arXiv:0910.0114v2, (2009), 1-69.

Spanning forest polynomials and the transcendental weight of Feynman graphs (avec K. Yeats), Comm. in Math. Physics, vol. 301, 357-382 (2011)

Proof of the zig-zag conjecture (avec O. Schnetz), arXiv:1208.1890 (2012)

8.2.1. *The massless higher-loop two-point function.* L’article (7) est mon premier article de physique. Il s’agit de traiter des graphes de Feynman ‘décorés’, où les propagateurs sont élevés à la puissance $n_i\varepsilon$, et l’on considère les coefficients dans un développement par rapport à ε . L’intérêt est que chaque tel graphe de Feynman décoré code, en effet, une infinité de graphes de Feynman avec des sous-divergences données par des chaînes de ‘bulles’ - qui sont des sous-graphes avec 2 arêtes et 2 sommets.

Le meilleur résultat précédent dans cette direction était le seul graphe primitif à 2 boucles et avec deux pattes externes (‘master massless 2 loop 2-point function’) dont on avait conjecturé pendant longtemps que son développement de Taylor s’écrivait en termes de multizêtas. Ce problème a été résolu en 2003 par Bierenbaum and Weinzierl, par une méthode de Mellin-Barnes qui se généralise difficilement. Le résultat suivant introduit une nouvelle manière de calculer les graphes de Feynman, et prolonge le record précédent par 3 ordres dans la série perturbative.

Théorème 25. *Il existe un algorithme pour le calcul effectif des développements de Taylor des graphes de Feynman décorés en termes de multizêtas (eventuellement avec des racines de l’unité pour certains graphes non-planaires), pour tous les graphes jusqu’à 5 boucles, à une seule exception près.*

Cet algorithme est en cours d’implémentation par C. Bogner, et indépendamment par E. Panzer, qui a réussi à pousser la méthode jusqu’à 7 boucles! Il a déjà donné lieu à un certain nombre d’applications concrètes en physique (voir §8.5). Il faut signaler que le théorème précédent ne donne qu’une borne supérieure pour les périodes qui peuvent apparaître: il est possible qu’on puisse enlever la restriction des racines de l’unité en suivant l’analyse plus détaillée de l’article décrit au paragraphe suivant.

8.2.2. *Periods of Feynman integrals.* Le but du preprint (18) est de construire les fondements géométriques et combinatoires pour le théorème précédent et bâtir une théorie beaucoup plus générale pour l’analyse des intégrales de Feynman.

L’idée est de construire une suite d’hypersurfaces X_i , où $X_{N_G-1} = X_G$ et de montrer que dans beaucoup de cas, les compléments $\mathbb{P}^i \setminus X_i$ se fibrent linéairement les uns sur les autres. Je définis des invariants polynomiaux des graphes et je montre que de telles fibrations existent si et seulement si ces invariants s’annulent. Ensuite, par la propriété universelle des espaces des modules de courbes de genre 0 avec n points marqués $\mathfrak{M}_{0,n}$, on dispose d’une application des $\mathbb{P}^{n_i} \setminus X_i$ vers les $\mathfrak{M}_{0,n}$, et la période peut se calculer dans ces espaces-là. Or, on sait par le résultat principal de ma thèse que les périodes de $\mathfrak{M}_{0,n}$ sont des multizêtas. Finalement, il faut comprendre sous quelles conditions combinatoires ces obstructions polynomiales s’annulent.

Plus en détail: j'étudie systématiquement certains polynômes $\Psi_{G,K}^{I,J}$ qui dépendent de trois sous-ensembles I, J, K d'arêtes de G et qui généralisent le polynôme de Kirchhoff (le cas où les I, J, K sont vides). Il y a un dictionnaire délicat entre les relations algébriques satisfaites par ces polynômes et la combinatoire de G . De là, on peut définir certains invariants polynomiaux qui dépendent de la structure locale du graphe G . Ces résultats sur les polynômes $\Psi_{G,K}^{I,J}$ ont servi de manière essentielle dans pratiquement tous mes travaux en physique.

Ensuite, je développe des techniques pour calculer le discriminant Δ_k de $\mathbb{P}^{N_G-1} \setminus X_G$ par rapport à une projection sur \mathbb{P}^k . Le discriminant est très singulier et, dans certains cas, peut s'exprimer en fonction des $V(\Psi_{G,K}^{I,J})$. Cela permet de définir les hypersurfaces X_i mentionnées précédemment. On montre que si les invariants définis ci-dessus s'annulent, alors les projections $\mathbb{P}^{N-1} \setminus X_G \rightarrow \mathbb{P}^i \setminus X_i$ se factorisent par des fibrations en courbes dont la monodromie est unipotente. Cela sera vrai seulement par rapport à certains choix d'ordres sur les arêtes de G .

Ces techniques devraient être utiles pour déterminer les singularités de Landau des intégrales de Feynman en fonction des données cinématiques, et on peut envisager des applications pour l'étude des singularités infra-rouges.

La dernière étape est d'appliquer toute la machinerie du groupe fondamental de de Rham des espaces des modules $\mathfrak{M}_{0,n}$. Toute fibration en courbes de genre 0 peut s'envoyer dans une courbe universelle $\mathfrak{M}_{0,n+1} \rightarrow \mathfrak{M}_{0,n}$, et quand la monodromie est unipotente, et modulo quelques subtilités liés à la ramification, on peut calculer ses périodes en utilisant les techniques de la construction bar du §3. En mettant le tout ensemble, on a en particulier:

Théorème 26. *Il existe une classe infinie de graphes, définis de manière combinatoire, qui donnent des multizêtas, et tels que leur motif mot_G (ou une variante) soit de Tate mixte.*

Une telle famille de graphes est celle d'épaisseur au plus 3, où l'épaisseur est un invariant combinatoire relativement facile à calculer que je définis dans le même article. La démonstration du théorème donne l'algorithme effectif pour calculer les périodes mentionné précédemment.

La conclusion de cette théorie est qu'une raison pour laquelle les multizêtas apparaissent est à cause de cette propriété remarquable de fibration en courbes de genre zéro. On verra plus loin que c'est en fait *la seule raison* que les multizêtas apparaissent: dès que les obstructions à l'existence de telles fibrations sont non-triviales, on tombe sur des contre-exemples modulaires.

Dans cet article je décris un procédé très simple et efficace pour calculer une des obstructions polynomiales décrites précédemment. J'appelle cela la *réduction des dénominateurs*, qui jouera un rôle central dans les articles qui suivent. Pour cela, on part du polynôme Ψ_G et on construit une suite de polynômes en éliminant successivement des variables:

$$(8.1) \quad D_0 = \Psi_G \quad , \quad D_1 = \Psi_{G,\emptyset}^{1,1} \Psi_{G,1}^{\emptyset,\emptyset} \quad , \quad D_2 = \Psi_{G,\emptyset}^{1,2} \quad , \quad \dots \quad , \quad D_k, \dots$$

où chaque dénominateur D_k est un résultant du précédent. Cette suite dépend d'un ordre choisi sur les arêtes de G . La classe des graphes pour lesquelles D_k est toujours de degré au plus 1 en α_k s'appelle *réductible par dénominateurs*. Cette classe contient tous les graphes dont la période est connue numériquement, tous les graphes d'épaisseur ≤ 3 , et tous les graphes jusqu'à 7 boucles. On tombe sur des contre-exemples modulaires tout de suite en sortant de cette classe.

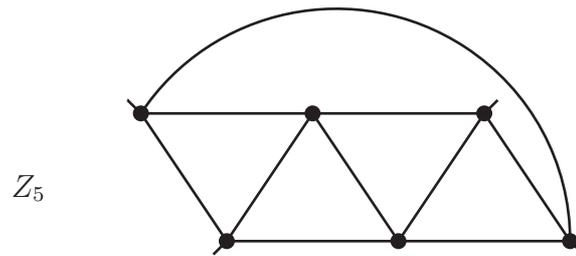
8.2.3. *Poids transcendant.* La série perturbative est graduée par le nombre de boucles, et les multizêtas par le poids. La grande surprise est que ces graduations *ne coïncident pas*: certains

graphes ont une chute de poids. Kreimer a soulevé la question d'essayer de comprendre, combinatoirement, pourquoi ce phénomène existe.

Dans l'article (12), nous utilisons la méthode de réduction des dénominateurs pour répondre à cette question, et nous prouvons des critères combinatoires pour qu'un graphe ait une chute de poids (transcendant). Le fait est que si un D_k dans (8.1) s'annule, alors il y a une chute de poids. Ces critères suffisent pour expliquer toutes les données qui sont disponibles à ce jour. Plus tard, avec Doryn, nous avons rendu la réduction des dénominateurs cohomologique, d'où une démonstration rigoureuse de chute de poids dans le sens motivique.

8.2.4. *La conjecture zig-zag.* Puisque les intégrales I_G ne donnent pas des nombres connus aujourd'hui en mathématiques, il reste la question: pour quelles graphes G peut-on déterminer explicitement la période I_G ?

Il est assez étonnant que, malgré le fait que les théories quantique des champs ont plus de cinquante ans, *il n'y a qu'une seule famille de graphes non-triviaux pour laquelle une formule conjecturale existe.* Cette famille est la famille des graphes zig-zag (il existe, certes, d'autres familles de graphes, tels que les roues, pour lesquelles on connaît la période, mais ces graphes-là ne sont pas physiques). Dans 1995, Broadhurst et Kreimer ont conjecturé que les graphes zig-zag (ci-dessous) donnent lieu aux zêtas simples.



Théorème 27. (avec O. Schnetz). (Conjecture zig-zag 1995) Soit Z_n le graphe zig-zag avec $n \geq 3$ boucles. Sa période est égale à

$$I_{Z_n} = 4 \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} \left(1 - \frac{1 - (-1)^n}{2^{2n-3}} \right) \zeta(2n-3).$$

Ceci est la première famille infinie de graphes primitifs dans n'importe quelle théorie quantique des champs renormalisable qui ont été calculés. C'est-à-dire, la totalité des résultats précédents se résument en un nombre fini d'exemples, plus des résultats pour des graphes avec divergences triviales (du style des chaînes de bulles comme ci-dessus).

Ce résultat est aussi important du point de vue motivique. On constate expérimentalement que les *seuls graphes* dans ϕ^4 qui sont des zêtas simples sont les zig-zag [19]. Ces graphes-là jouent donc le rôle des générateurs de l'algèbre de Lie motivique.

La démonstration du théorème précédent utilise une théorie des *fonctions graphiques* due à Schnetz, et qui repose sur une théorie des polylogarithmes multiples uniformes que j'ai construite quand j'étais étudiant (1). Ceci est une méthode pour évaluer I_G , pour une famille assez restreinte de graphes G , en termes des polylogs uniformes. La famille zig-zag correspond aux

versions univaluées des polylogarithmes multiples du genre $\text{Li}_{2,\dots,2,3,2,\dots,2}(z)$, que l'on ne connaît pas explicitement (car cela fait intervenir des multizêtas dont on ne connaît pas l'écriture dans, disons, la base de Hoffmann).

Dans (24), nous construisons à la main la famille de fonctions multivaluées qu'il faut pour calculer les I_{Z_n} . Cela repose sur des propriétés miraculeuses des multizêtas du type

$$\zeta(2, \dots, 2, 3, 2, \dots, 2)$$

On conclut en utilisant un théorème de Zagier qui exprime ces nombres comme combinaisons linéaires explicites des $\zeta(2n+1)$ et $\zeta(2, \dots, 2)$ (qui a servi dans ma démonstration de la conjecture de Deligne-Ihara), pour exprimer I_{Z_n} comme zêta simple.

8.3. Autour du programme du groupe de Galois cosmique. Les articles suivants:

A K3 in ϕ^4 (avec O. Schnetz), Duke Mathematical Journal, Vol. 161 (2012), 1817-1862

Framings and the cohomology of graph hypersurfaces (avec D. Doryn), preprint

Modular forms in Quantum Field Theory (avec O. Schnetz), preprint

The Galois coaction on ϕ^4 theory (avec O. Schnetz), preprint

montrent définitivement que le groupe décrivant les périodes en ϕ^4 est très loin d'être le groupe de Grothendieck-Teichmüller.

8.3.1. *Un K3 dans ϕ^4 et la conjecture de Kontsevich.* Soit X_G l'hypersurface du graphe G . Au lieu de considérer la fonction de comptage des points sur les corps finis, il est mieux de considérer la classe de l'hypersurface X_G dans le groupe de Grothendieck:

$$[X_G] \in K_0(\text{Var}_k)$$

où k est un corps. C'est le groupe libre engendré par des classes d'isomorphisme $[V]$ de schéma réduit V , modulo des relations de découpage.

Soit $\mathbb{L} = [\mathbb{A}_k^1]$ le motif de Lefschetz. Si $[X_G]$ est un polynôme en \mathbb{L} , alors cela implique que $[X_G]_q = \#X_G(\mathbb{F}_q)$ est (le même) polynôme en q , car $\mathbb{L}_q = q$.

Théorème 28. *Soit G un graphe d'épaisseur ≤ 3 . Alors la classe $[X_G]$ dans le groupe de Grothendieck est un polynôme en le motif de Lefschetz \mathbb{L} .*

Ce résultat implique *a fortiori* que la conjecture de Kontsevich est vraie pour de tels graphes. En plus, ce polynôme peut se calculer effectivement, et nous le faisons pour quelques familles de graphes. A ma connaissance, c'est le seul résultat positif dans la direction de la conjecture 5 qui soit valable pour une infinité de graphes physiques.

Pour ensuite construire des contre-exemples, nous définissons l'invariant c_2 d'un graphe. Plus précisément, on démontre qu'il existe une classe $c_2(G) \in K_0(\text{Var}_k)/\mathbb{L}$ telle que

$$[X_G] \equiv c_2(G)\mathbb{L}^2 \pmod{\mathbb{L}^3}$$

Au niveau du comptage des points, on a donc

$$[X_G]_q \equiv c_2(G)_q q^2 \pmod{q^3}$$

où $c_2(G)$ est une fonction qui à $q = p^n$, pour p premier, associe un élément $c_2(G)_q$ de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. L'invariant $c_2(G)$ a de très bonnes propriétés combinatoires, et contient beaucoup d'information sur la période I_G . On démontre que $c_2(G)_q$ peut se calculer par la réduction des dénominateurs (8.1), donc l'invariant c_2 détecte aussi le poids transcendant de I_G .

Pour falsifier la conjecture de Kontsevich, il suffit d'exhiber un G avec $c_2(G)$ non-constant. Pour simplifier, notons $\tilde{c}_2(G)$ la restriction de c_2 aux nombres premiers seulement:

$$\tilde{c}_2(G) = (c_2(G)_2, c_2(G)_3, c_2(G)_5, \dots) \in \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_5 \times \dots$$

Théorème 29. Soit G le graphe suivant avec 8 boucles. Alors $\tilde{c}_2(G) = (\bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_5, \dots)$ où \bar{a}_p est la classe de a_p modulo p , et les a_n sont les coefficients de Fourier de la forme modulaire

$$\sum a_n z^n = (\eta(z)\eta(z^7))^3$$

de poids 3 et niveau 7. Ici, on note $\eta(z)$ la fonction eta de Dedekind:

$$\eta(z) = z^{1/24} \prod_{n \geq 1} (1 - z^n).$$

On peut ensuite montrer par le théorème des nombres premiers et la théorie de la multiplication complexe que $c_2(G)$ est hautement non-constant et G fournit le contre-exemple voulu. En plus, le graphe G a l'épaisseur 4, donc les résultats précédents sont probablement optimaux.

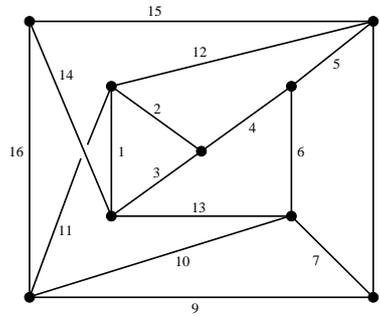


FIGURE 1. Un contre-exemple modulaire à la conjecture de Kontsevich

Le graphe ci-dessous avec 9 boucles, d'épaisseur 4, dans ϕ^4 , fournit un contre-exemple planaire avec la même fonction de comptage de points. Du coup, même la version très affaiblie de la conjecture pour les graphes planaires (il y a une longue tradition en théorie quantique des champs de se restreindre à la 'limite planaire' d'une théorie) est toujours fausse.

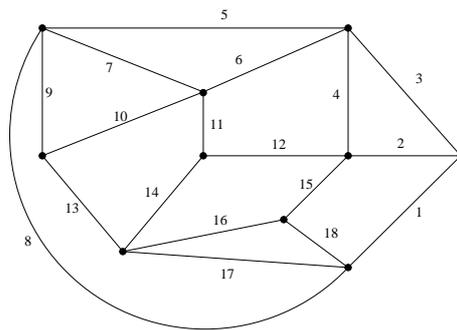


FIGURE 2. Un contre-exemple *planaire*, d'épaisseur 4, à la conjecture 5

Pour démontrer le théorème précédent, on applique la réduction des dénominateurs pour un ordre bien choisi des arêtes de G . En effectuant des changements de variables astucieux, on

tombe enfin sur une surface quartique dans \mathbb{P}^3 . Il faut ensuite démontrer qu'elle est modulaire en utilisant toute la théorie de Shioda-Inose sur la classification des $K3$ singuliers, et les résultats de Serre, Livné et autres sur la modularité des représentations Galoisiennes de dimension 2.

Puisque le motif sous-jacent de ces contre-exemples est une puissance symétrique du H^1 d'une certaine courbe elliptique \mathcal{E} à multiplication complexe, on s'attend à ce que la période I_G soit une période du groupe fondamental motivique de \mathcal{E} privé d'un certain nombre de points. Cela devrait donc s'exprimer en fonction des polylogarithmes multiples elliptiques de §3.2.

8.3.2. *Le problème des repères et la conjecture de Marcolli.* Le but de l'article

Framings and cohomology of graph hypersurfaces, (avec D. Doryn), preprint est de rendre la réduction des dénominateurs (8.1) cohomologique, donner une version cohomologique du c_2 , et montrer que ceci est précisément le repère donné par la forme différentielle de Feynman ω_G . Cela explique pourquoi le comptage des points contrôle le poids transcendant.

L'idée est que la réduction des dénominateurs se traduit en une série d'isomorphismes

$$\mathrm{gr}_{N-3}^W H^n(\mathbb{P}^{N-n} \setminus D_n) \cong \mathrm{gr}_{N-3}^W H^{n-1}(\mathbb{P}^{N-n-1} \setminus D_{n+1})(-1)$$

pour $n \geq 5$, et que la forme différentielle $[\frac{\Omega_{N-n}}{D_n}]$ engendre $\mathrm{gr}_{N-3}^W H^n(\mathbb{P}^{N-n} \setminus D_n)$. Cela donne une machine pour calculer les repères des graphes de Feynman. En particulier:

Théorème 30. *Soit G un graphe réductible par dénominateurs avec N arêtes. Alors,*

$$\mathrm{gr}_{max}^W = \mathrm{gr}_{2N-6}^W H^{N-1}(\mathbb{P}^{N-1} \setminus X_G) \cong \mathbb{Q}(3-N),$$

est engendré par la classe de la forme différentielle de Feynman $[\omega_G]$.

Si l'un des dénominateurs D_n s'annule, alors on a une chute de poids:

$$\mathrm{gr}_{2N-6}^W H^{N-1}(\mathbb{P}^{N-1} \setminus X_G) = 0$$

et les poids de la cohomologie $H^{N-1}(\mathbb{P}^{N-1} \setminus X_G)$ sont $< 2(N-3)$.

La première équation du théorème dit que

$$\mathrm{gr}_4^W H^{N-1}(X_G) = \mathbb{Q}(-2),$$

et $\mathrm{gr}_i^W H^{N-2}(X_G) = 0$ pour $i \leq 3$. Ce résultat est une très grande généralisation du théorème de Bloch-Esnault-Kreimer pour les graphes de type 'roue'.

Il restait la possibilité que les contre-exemples modulaires, qui ont des fonctions de comptage des points qui ne sont pas des polynômes, donnent quand même des périodes qui sont des multizêtas parce que le support de I_G à l'intérieur de mot_G est de type Tate mixte. Cela voudrait dire que la partie modulaire de la caractéristique d'Euler de X_G provient d'une autre partie de la cohomologie que celle qui nous intéresse. En utilisant les techniques ci-dessus, on montre encore que cela ne peut pas être le cas:

Théorème 31. *Soit G le contre-exemple modulaire avec 8 boucles. Alors la forme différentielle $[\omega_G]$ de Feynman engendre la partie bigraduée de la cohomologie de type $(13, 11)$:*

$$\mathrm{gr}^{13,11} H_{dR}^{15}(\mathbb{P}^{15} \setminus X_G; \mathbb{C})$$

qui est de dimension 1. Ceci n'est pas de type Tate, donc la conjecture de Marcolli est fausse.

Ce théorème démontre que la partie modulaire de la fonction de comptage de points que nous avons considérée avec Schnetz provient précisément de la forme différentielle de Feynman. Il n'y a donc aucun moyen de s'en débarrasser en changeant de modèle géométrique, et cela tue définitivement l'espoir que I_G soit de type multizêta.

Il se passe quand même quelque chose de curieux: on montre que la partie de degré maximal possible de la cohomologie de X_G est toujours de type Tate. Autrement dit: les contre-exemples modulaires ont forcément une chute de poids, dans le sens décrit ci-dessus. Ceci pourrait laisser un petit espoir que la partie de poids maximal d'une théorie quantique des champs soit de type multizêta.

8.3.3. *Formes modulaires en QFT.* On peut ensuite se demander ce qui se passe plus loin dans la série perturbative. Cette question reste totalement hors de portée en général, mais l'invariant c_2 nous donne un moyen d'analyser la nature arithmétique des périodes I_G sans avoir à les calculer. Dans ce travail en commun avec O. Schnetz, de nature expérimentale, nous avons calculé les invariants $c_2(G)_p \in \mathbb{F}_p$ pour des petits nombres premiers pour tous les graphes dans ϕ^4 jusqu'à 10 boucles (c'est loin d'être trivial, car les polynômes Ψ_G sont de degré 20 et comportent des millions de termes, donc une approche naïve est totalement impossible. En plus il y a des dizaines de milliers de graphes. Il faut évoquer toute la théorie du c_2 pour s'en sortir).

La surprise est qu'il existe un grand nombre de telles séries qui coïncident, expérimentalement, avec des développements de Fourier de formes modulaires. La probabilité que le vecteur

$$(c_2(G)_2, \dots, c_2(G)_{19}) \in \mathbb{F}_2 \times \dots \times \mathbb{F}_{19},$$

par exemple, soit identifié 'par accident' est de l'ordre de $1/10^7$. Nous trouvons:

- ≤ 6 boucles: On démontre que $[X_G]$ est toujours un polynôme.
- 7 boucles: On obtient aussi quelques nouveaux invariants c_2 qui sont des fonctions de comptage quasi-polynomiales $[X^2 + X + 1]_q, [X^2 - 1]_q$.
- 8 boucles. A partir de ce point-là, on est obligé de se restreindre au calcul du c_2 . On obtient les quatre invariants c_2 modulaires donnés par les formules:

$$\begin{array}{ll} \eta(q)^2 \eta(q^2) \eta(q^4) \eta(q^8)^2 & \text{de poids 3 et niveau 8} \\ (\eta(q) \eta(q^7))^3 & \text{de poids 3 et niveau 7} \\ (\eta(q) \eta(q^5))^4 & \text{de poids 4 et niveau 5} \\ (\eta(q) \eta(q^3))^6 & \text{de poids 6 et niveau 3} \end{array}$$

Nous avons une description complète des invariants c_2 pour tous les graphes à cet ordre.

- $\ell = 9, 10$. On trouve encore une douzaine de formes modulaires et beaucoup d'autres séries $c_2(G)$ que l'on n'arrive pas à identifier pour l'instant.

Voici une table des formes modulaires qui apparaissent dans la théorie quantique des champs à huit, neuf, et dix boucles:

poids	2	3	4	5	6	7	8
niveau	11	$\boxed{7}_8$	$\boxed{5}_8$	$\boxed{4}_9$	$\boxed{3}_8$	$\boxed{3}_9$	$\boxed{2}_{10}$
	14	$\boxed{8}_8$	$\boxed{6}_9$	7	$\boxed{4}_9$	7	3
	15	11	$\boxed{7}_{10}$	8	5	8	$\boxed{5}_{10}$
	17	$\boxed{12}_9$	8	11	6	11	6
	19	15	9	12	$\boxed{7}_9$	15	7
	20	15	10	15	8	15	8
	21	16	12	15	9	16	8
	24	19	$\boxed{13}_9$	19	$\boxed{10}_{10}$	19	9
	26	20	\vdots	20	10	20	10
	26	20	$\boxed{17}_{10}$	20	10	20	12

Conclusion: les intégrales I_G sont beaucoup plus exotiques que personne n'avait imaginé, mais sont quand-même très spéciales.

Quelques remarques importantes:

- Les formes modulaires de poids 2 n'apparaissent pas. On ne sait pas pourquoi. Cependant, si l'on considère des graphes dans ϕ^5 - avec des sommets de degré 5 - on trouve bien des courbes elliptiques modulaires donnant des formes de poids 2.
- Nous avons une description complète de la théorie à 8 boucles. Les contre-exemples modulaires sont isolés, et donc *ne peuvent pas se compenser quand on prend la somme sur tous les graphes*.
- Les éléments de la table ont des niveaux très bas. Est-ce un accident ?

8.3.4. *L'action de Galois motivique sur ϕ^4* . Si les périodes de ϕ^4 restent inaccessibles, nous pouvons quand même essayer de comprendre la partie (importante) qui donne bien des multizêtas. Les données numériques sont considérables [19]. On dispose maintenant (voir §5.2) de la notion de multizêta motivique, sur laquelle nous pouvons explicitement calculer l'action du groupe de Galois motivique de $\mathcal{MT}(\mathbb{Z})$. D'où la question: '*comment agit le groupe de Galois motivique sur la partie de la série perturbative que l'on connaît?*'.

C'est la question à laquelle on essaye de répondre dans l'article (30). Il s'agit, aussi, d'un travail expérimental. On traduit tous les résultats connus pour les périodes de ϕ^4 en termes des multizêtas motiviques, et on calcule la coaction. On trouve les phénomènes suivants:

- Les périodes de ϕ^4 sont fermées sous l'action du groupe de Galois motivique.
- L'action du groupe de Galois motivique se factorise par un sous-groupe strict.

Le second point implique que les périodes de ϕ^4 satisfont à des contraintes fortes qui s'écrivent en termes de la coaction. Cela donne une restriction subtile sur les combinaisons linéaires des multizêtas qui ont le droit d'apparaître.

Même sur la partie de ϕ^4 qui est de type multizêta, ce n'est pas le groupe de Grothendieck-Teichmüller qui agit, mais un quotient bien plus petit!

La conclusion de tout cela est que les périodes des théories quantiques des champs sont bien plus complexes que ce que l'on avait pu imaginer, mais satisfont à des contraintes fortes, et subtiles, liées à l'action du groupe de Galois motivique.

8.4. **Renormalisation.** L'idée de l'article

Angles, scales and parametric renormalization, arXiv:1112.1180v1 (2011), 1-56 (avec D. Kreimer)

est de reformuler la renormalisation dans un langage de la géométrie algébrique et de démontrer ses propriétés rigoureusement.

La renormalisation consiste, premièrement, à choisir une échelle S , qui est une fonction quadratique définie positive des impulsions q_i externes des particules, et des masses m_e en question. On dispose de l'algèbre de Hopf de Kreimer $H = \mathbb{Q}[\text{Graphes}]$, dont le spectre définit un groupe pro-algébrique. Le choix du groupe de renormalisation sera un sous-groupe à un paramètre de H : on peut voir H comme le groupe universel par lequel se factorisent tous les groupes de renormalisation possibles. Le choix de S donne d'abord une décomposition des paramètres cinématiques en fonction de l'échelle S , et des angles $\Theta_{ij} = S^{-1}(q_i \cdot q_j)$ et $\Theta_e = S^{-1}m_e^2$ qui n'ont pas de dimension. On note S_0, Θ_0 le point de renormalisation. A un graphe $\Gamma \in H$, on associe l'amplitude renormalisée via la loi de convolution sur H :

$$\Phi^{ren}(\Gamma) = \Phi_{fin}^{-1}(\Theta_0) \star \Phi_{1-s}(S) \star \Phi(\Theta_0)(\Gamma)$$

Ici, $\Phi_\Theta : H \rightarrow \mathbb{C}$ est une application qui dépend purement des angles Θ , et pas de l'échelle S . C'est donné par des intégrales explicites paramétriques qui sont absolument convergentes. Ensuite, l'application $\Phi_{1-s} : H \rightarrow \mathbb{C}$ dépend d'un choix de morphisme $H \rightarrow H_{1-s}$ où H_{1-s} est une algèbre de Hopf de graphes avec une seule échelle. Le point essentiel est que l'on définit une application 'règles de Feynman renormalisées'

$$\Phi : H_{1-s} \longrightarrow \mathbb{C}[\log(S/S_0)]$$

qui définit un morphisme de groupes $\mathbb{G}_a \rightarrow \text{Spec } H_{1-s}$. Le morphisme Φ_{1-s} est obtenu en composant avec celui-ci, et ne dépend que de l'échelle S . On a donc une procédure pour séparer complètement les dépendances en les angles Θ et l'échelle S en termes d'intégrales finies.

Concrètement, pour tout graphe Γ on écrit son amplitude renormalisée comme somme et produits d'intégrales de périodes qui convergent absolument. Pour cela on se sert des polynômes des graphes Ψ_Γ , mais également du second polynôme de Symanzik Φ_Γ qui intervient de manière essentielle. Ces intégrales paramétriques se prêtent ensuite à toute l'analyse des périodes que l'on a effectué dans §8.2.2, et pourront se calculer aussi par l'algorithme de §8.5.

Dans cet article nous démontrons rigoureusement le théorème célèbre de Hepp sur la finitude des amplitudes renormalisées, et le théorème du groupe de renormalisation de Callan-Symanzik.

8.4.1. *Propriétés du c_2* . Ensuite, dans l'article

On the c_2 invariants of Feynman graphs, preprint 2012 (avec O. Schnetz, K. Yeats)

nous démontrons un certain nombre de choses, dont l'essentiel, ici, est le résultat suivant:

Théorème 32. *Soit G un graphe avec $2h_G = N_G$. Si G contient un sous-graphe divergent, alors $c_2(G)$ s'annule.*

Cela devrait impliquer, pour les graphes avec une seule échelle, que les contre-exemples modulaires ne peuvent pas disparaître lorsqu'on prend la somme sur tous les graphes. Il n'y a donc aucun moyen de changer le schéma de renormalisation pour que seulement des périodes de type multizêta y restent. Il ne reste strictement rien à récupérer des conjectures du style 'QFT = multizêta'.

8.4.2. *La réincarnation d'un groupe de Galois cosmique?* Le corollaire du travail précédent est que *les amplitudes renormalisées pour n'importe quel graphe* et non seulement les graphes primitifs sont des périodes de motifs (structures de Hodge mixtes). On peut donc définir l'action d'un groupe Tannakien sur les motifs avec repères

$$[M, \omega_{\Gamma}^{ren}, \sigma]$$

où $M = \text{mot}_G^{ren}$ est une structure de Hodge mixte, $\sigma \in M_B^{\vee}$ et $\omega_{\Gamma}^{ren} \in M_{dR}$. On obtient donc un groupe 'motivique' qui agit sur toutes les périodes motiviques de ϕ^4 , et on peut ensuite se poser des questions sur la nature de cette action. Il n'est déjà pas clair que ce groupe préserve l'algèbre engendrée par les périodes motiviques de ϕ^4 .

8.5. Algorithmique et applications en physique. Une partie de mon grant ERC est consacrée à l'implémentation de la méthode d'intégration paramétrique ci-dessus pour obtenir de nouvelles méthodes efficaces pour le calcul des intégrales de Feynman et leurs applications à la physique.

Cela a été effectué par Fabian Wissbrock, un étudiant postdoc, qui a appliqué la méthode pour le calcul de certains graphes avec masses dans la théorie de la chromodynamique quantique, décrit dans le preprint:

Massive 3-loop Ladder Diagrams for Quarkonic Local Operator Matrix Elements, J. Ablinger, J. Bluemlein, A. Hasselhuhn, S. Klein, C. Schneider, F. Wissbrock, arXiv:1206.2252 (2012)

C'est, d'après leur conclusion, la *seule méthode* connue qui soit capable de résoudre le diagramme le plus difficile considéré dans cet article. Il y aura donc sans doute d'autres applications quand on passe à des ordres plus élevés.

D'un autre côté, Christian Bogner, actuellement en postdoc à Berlin, est en train d'implémenter la méthode de manière très générale, et de l'optimiser pour des calculs à grand nombre de boucles. Quelques remarques: d'après les résultats ci-dessus, cette méthode d'intégration symbolique et paramétrique va, en théorie, très nettement plus loin que les méthodes existantes. En plus, c'est la seule méthode qui existe qui soit capable de traiter les sous-divergences non-triviales (qui ne se réduisent pas à des bulles), en la combinant avec les travaux de §8.4. Récemment Erik Panzer a réussi à calculer les premiers exemples de ce type (graphes de Feynman avec des sous-divergences non-triviales) dont le premier a 6 boucles, en utilisant cette méthode.

8.6. Quelques problèmes et ouvertures.

- (1) *Théories de jauge.* Un travail en cours avec Kreimer a pour but de généraliser toute cette histoire aux théories de jauge. Un objectif est de pouvoir donner des informations qualitatives sur la série perturbative et d'essayer d'expliquer les 'annulations miraculeuses' de certains zêtas. Aussi, il est inacceptable que le calcul de $g - 2$ en électrodynamique quantique à 5 boucles prennent plus de 25 ans de travail et de nombreux années de post-doc. Ceci doit pouvoir s'automatiser et se traiter de manière beaucoup plus efficace.
- (2) *Singularités infra-rouges.* Il s'agit de traiter rigoureusement les singularités infra-rouges et de comprendre, par exemple, le théorème de Kinoshita-Lee-Nauenberg dans le contexte de la géométrie algébrique.
- (3) *La conjecture de complétion.* Une conjecture importante, mais j'espère, abordable, est de démontrer que l'invariant c_2 est stable par l'opération de complétion de graphes. Il faut montrer que $c_2(G_1) = c_2(G_2)$ lorsque $\hat{G}_1 \cong \hat{G}_2$, où \hat{G} est le graphe complété de G (rajouter un sommet, et le connecter aux 4 sommets trivalents).

- (4) *Vers une formule pour la coaction motivique.* Un but ultime, très ambitieux, serait d'essayer de comprendre combinatoirement l'action du groupe de Galois motivique sur les amplitudes de ϕ^4 . Il s'agit de définir une sorte de coproduit combinatoire sur les graphes qui est compatible aux périodes. Les graphes zig-zag, par exemple, devraient être les seuls éléments primitifs pour ce coproduit.

9. RÉSULTATS ANTÉRIEURS À MA THÈSE

9.1. Critère de Li pour l'hypothèse de Riemann.

Journal of Number theory **111** (2005), 1-32.

X.-J. Li a démontré en 1997 que l'hypothèse de Riemann est équivalente à une série infinie d'inégalités P_1, \dots, P_n, \dots en les premiers n coefficients du développement de Taylor de la fonction zêta de Riemann. Dans cet article, j'ai démontré une version effective de ce critère pour une classe très générale de fonctions zêtas et de fonctions L . Précisément, je montre que la positivité des premières N inégalités P_1, \dots, P_N est équivalente à l'existence d'une grande région sans zéros à l'intérieur de la bande critique. Il s'avère que la première inégalité de Li $P_1 \geq 0$ est toujours vraie, et dans le cas de la fonction zêta de Riemann équivaut à l'inégalité

$$2 + \gamma > \log(4\pi),$$

où γ est la constante d'Euler. La seconde inégalité de Li, $P_2 \geq 0$, est beaucoup plus profonde, et n'est pas connue en général. Soit $\zeta(s)$ la fonction zêta de Dedekind d'un corps de nombres, ou une fonction L de Dirichlet. Si $\xi(s)$ est la fonction complétée par des facteurs gamma, l'inégalité $P_2 \geq 0$ peut s'écrire:

$$(9.1) \quad 2 \left(\frac{\xi'(1)}{\xi(1)} + \frac{\xi''(1)}{\xi(1)} \right) \geq \left(\frac{\xi'(1)}{\xi(1)} \right)^2.$$

Dans cet article je démontre que l'inégalité (9.1) entraîne que $\zeta(s)$ n'a pas de zéros de Siegel. La question de l'existence ou non des zéros de Siegel reste un problème important dans la théorie analytique des nombres, et l'inégalité ci-dessus donne l'espoir de trouver un critère arithmétique ou géométrique pour la non-existence de tels zéros (les quantités $\xi(1), \xi'(1)$ sont des périodes ou des logarithmes de périodes, mais rien n'est connu sur la nature de $\xi''(1)$).

9.2. Versions uniformes des polylogarithmes multiples.

Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Ser. I **338** (2004), 527-532.

Des versions uniformes (sans monodromie) des polylogarithmes classiques

$$\text{Li}_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n}$$

ont été construites par Zagier, Ramakrishnan, Bloch, Wojtkowiak et d'autres, et donnent lieu conjecturalement aux applications régulateurs en K -théorie algébrique, aux fonctions volume pour les variétés hyperboliques, et aux valeurs spéciales des fonctions L d'Artin (conjecture de Zagier). Par exemple, la version uniforme du dilogarithme due à Bloch-Wigner est la fonction analytique réelle:

$$\Im(\text{Li}_2(z) + \log|z| \log(1-z)).$$

Dans ce travail je construis, plus généralement, toutes les versions uniformes des polylogarithmes multiples en une variable $\text{Li}_w(z)$, où $w \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. On dispose donc d'une version uniforme canonique de toute intégrale itérée sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$. Cela peut se faire de telle manière que toutes les relations algébriques et différentielles (par rapport à $\frac{\partial}{\partial z}$) sont préservées. Toute

équation différentielle unipotente sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ a donc une solution uniforme en termes de ces fonctions. En particulier, toutes les versions précédentes des polylogarithmes classiques uniformes s'expriment explicitement en termes de ces fonctions plus générales.

Dans un travail non publié, je généralise cette construction pour donner des versions canoniques uniformes des fonctions polylogarithmes en plusieurs variables complexes: notamment pour toutes les intégrales itérées sur $\mathfrak{M}_{0,n}$.

Le travail ci-dessus a récemment trouvé plusieurs applications en physique des hautes énergies: souvent les intégrales de Feynman, vues comme fonctions des paramètres cinématiques externes, sont uniformes par définition ('no branch cuts in unphysical channels'), et s'expriment donc en termes des polylogarithmes uniformes décrits ci-dessus. C'est le cas notamment pour certaines topologies en ϕ^4 (travaux de O. Schnetz, et indépendamment, J. Drummond) et aussi en $N = 4$ Super Yang-Mills, devenue extrêmement populaire en ce moment. Voir, par exemple:

Single-valued harmonic polylogarithms and the multi-Regge limit, arXiv:1207.0186, Lance J. Dixon, Claude Duhr, Jeffrey Pennington (2012), 1-71

Generalised ladders and single-valued polylogarithms, arXiv:1207.3824, J. M. Drummond (2012), 1-27

Three-mass triangle integrals and single-valued polylogarithms, arXiv:1209.2722, F. Chavez, C. Duhr, (2012) 1-31.

L'idée de la construction de ces fonctions a aussi servi à résoudre la conjecture zig-zag en théorie quantique des champs (travail en commun avec O. Schnetz). Voir la partie §8.2.4.

9.3. **Biologie.** En début de thèse, j'ai travaillé sur quelques questions liées à la biologie. Il en est sorti, entre autres, un article de combinatoire

On arithmetic and Asymptotic properties of up-down numbers, (avec T. Fink, K. Willbrand), Discrete Math. 307 (2007), 1722-1736.

qui traite du comptage du nombre $C(\sigma)$ de permutations de longueur N avec un profil $\sigma \in \{+, -\}^N$ donné (le profil d'une permutation $\pi(1), \dots, \pi(n)$ est la suite des signes $(\pi(i+1) - \pi(i))$ pour $1 \leq i < n$.) Ces nombres interviennent dans la classification des singularités des fonctions d'une variable réelle (Arnold), et sont liés aux coefficients de Littlewood-Richardson pour la multiplication des foncteurs de Schur. Dans cet article nous avons donné une formule universelle, des estimations asymptotiques, et des congruences p -adiques pour ces nombres.

10. LISTE DES TRAVAUX

- (1) *Single-valued multiple polylogarithms in one variable*, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 338 (2004), 527-532.
- (2) *Li's criterion and zero-free regions for L-functions*, Journal of Number theory 111 (2005), 1-32.
- (3) *Périodes des espaces des modules $\overline{\mathfrak{M}}_{0,n}$ et multizêtas*, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 342 (2006), 949-954.
- (4) *Unbiased pattern detection in microarray data series*, Bioinformatics 22, (15 June 2006), 1471-1476 (with S. Ahnert, T. Fink, K. Willbrand)
- (5) *On arithmetic and asymptotic properties of up-down numbers* (avec T. Fink and K. Willbrand), Discrete Math. 307 (2007), 1722-1736.
- (6) *1-D random landscapes and non-random data series* (avec T. Fink, K. Willbrand), EPL 79, (2007) 38006
- (7) *The massless higher-loop two-point function*, Comm. in Math. Physics 287, Number 3, 925-958 (2009)
- (8) *Multiple zeta values and periods of moduli spaces $\mathfrak{M}_{0,n}$* , Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 4^e série, t. 42, p. 373-491, (2009)
- (9) *The algebra of cell-zeta values* (avec S. Carr, L. Schneps), Compositio Mathematica, volume 146, no. 03, pp. 731-771 (2010)
- (10) *Inversion of series and cohomology of moduli spaces $\mathfrak{M}_{0,n}^\delta$* (avec J. Bergstrom), Clay Math Proceedings, Vol. 11, (2010)
- (11) *Multiple zeta values and periods: From moduli spaces to Feynman integrals*, Proceedings of 'Combinatorics and Physics', Contemporary Mathematics Volume 539, (2011)
- (12) *Spanning forest polynomials and the transcendental weight of Feynman graphs* (avec K. Yeats), Comm. in Math. Physics, vol. 301, pp. 357-382 (2011)
- (13) *On Multiple Zeta Values*, Arbeitstagung talk 2011 (MPIM preprint series).
- (14) *Mixed Tate Motives over \mathbb{Z}* , Annals of Mathematics, vol. 175, no.1 (2012), 949-976
- (15) *A K3 in ϕ^4* (avec O. Schnetz), Duke Mathematical Journal, Vol. 161, No. 10 (2012), 1817-1862
- (16) *On the decomposition of Motivic Multiple Zeta Values*, Advanced Studies in Pure Mathematics 63, (2012) GaloisTeichmüller Theory and Arithmetic Geometry pp. 31-58
- (17) *Dedekind Zeta motives for totally real fields*, à paraître dans Inventiones, arXiv:0804.1654v1, 63 pp.

DISPONIBLE OU SOUMIS

- (18) *On the periods of some Feynman integrals*, arXiv:0910.0114v2, (2009), 1-69.
- (19) *Iterated Integrals in Quantum Field Theory*, <http://www.math.jussieu.fr/~brown/>
- (20) *Angles, scales and parametric renormalization*, arXiv:1112.1180v1 (2011), 1-56 (avec D. Kreimer)
- (21) *Multiple Elliptic Polylogarithms*, arXiv:1110.6917v1 (2011), 1-40 (avec A. Levin)
- (22) *On the c_2 invariants of Feynman graphs*, arXiv:1203.0188v1 (2012) (avec O. Schnetz, K. Yeats)
- (23) *Depth-graded motivic multiple zeta values*, <http://www.math.jussieu.fr/~brown/>
- (24) *Proof of the zig-zag conjecture*, (avec O. Schnetz), arXiv:1208.1890
- (25) *Framings for graph hypersurfaces* (avec D. Doryn), arXiv:1301.3056 (2013), 1-27.

EN PRÉPARATION

- (26) *Gauss-Manin for iterated integrals*, (avec A. Levin)
- (27) *Representation Theory of Polylogarithms*
- (28) *Multiple Elliptic Zeta values* (avec A. Levin)
- (29) *Modular forms in Quantum Field Theory* (avec O. Schnetz)
- (30) *On the Galois coaction on ϕ^4 theory* (avec O. Schnetz)
- (31) *Anatomy of an Associator*, 65pp

REFERENCES

- [1] **Y. André**: *Une introduction aux motifs*, Panoramas et Synthèses 17, SMF (2004).
- [2] **A. Beilinson, A. Goncharov, V. Schechtman, A. Varchenko**: *Aomoto dilogarithms, mixed Hodge structures and motivic cohomology of a pair of triangles in the plane*, The Grothendieck Festschrift, Birkhauser, (1990), 131-172.
- [3] **P. Belkale, P. Brosnan**: *Matroids, motives, and a conjecture of Kontsevich*, Duke Math. J. 116, No.1, 147-188 (2003).
- [4] **S. Bloch, H. Esnault, D. Kreimer**: *On motives associated to graph polynomials*, Comm. Math. Phys. 267 (2006), no. 1, 181-225.
- [5] **J. Blümlein, D. J. Broadhurst, J. A. M. Vermaseren**: *The Multiple Zeta Value Data Mine*, Comput. Phys. Commun. 181 (2010), 582-625.
- [6] **A. Borel**: *Stable real cohomology of arithmetic groups*, Annales Ecole Normale Sup. 7, No. 4, (1974), 235-272.
- [7] **A. Borel**: *Cohomologie de SL_n et valeurs de fonctions zêta aux points entiers*, Annali della Scuola Norm. di Pisa, (1976), 613-635, + erratum.
- [8] **D. Broadhurst, D. Kreimer**: *Knots and numbers in ϕ^4 theory to 7 loops and beyond*, Int. J. Mod. Phys. C 6, 519 (1995).
- [9] **P. Cartier**, *La folle journée, de Grothendieck à Connes et Kontsevich : évolution des notions d'espace et de symétrie. Les relations entre les mathématiques et la physique théorique*, Festschrift for the 40th anniversary of the IHES, Inst. Hautes études Sci., Bures-sur-Yvette, 1998, pp. 23-42, traduction anglaise au Bulletin de l'AMS.
- [10] **A. Connes, M. Marcolli**: *Renormalization and motivic Galois theory*, Int Math Res Notices (2004) 4073-4091.
- [11] **P. Deligne**: *Multizêtas*, Séminaire Bourbaki, no. 1048, Janvier 2012
- [12] **P. Deligne, A. Goncharov**: *Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 38 no. 1 (2005), 1-56.
- [13] **A. B. Goncharov**: *Galois symmetries of fundamental groupoids and noncommutative geometry*, Duke Math. J. Volume 128, Number 2 (2005), 209-284.
- [14] **W. T. Gowers**: *The Two Cultures of Mathematics*, <https://www.dpmms.cam.ac.uk/~wtg10/2cultures.pdf>
- [15] **G. Kirchhoff**: *Ueber die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Ströme geführt wird*, Annalen der Physik und Chemie 72 no. 12 (1847), 497-508.
- [16] **M. Kontsevich**: *Operads and motives in deformation quantization*, Letters in Math. Physics Volume 48, Number 1 (1999), 35-72.
- [17] **M. Kontsevich, D. Zagier**: *Periods*, in Mathematics unlimited - 2001 and beyond, Ed. Engquist and Schmidt, pp. 771-808, Springer, 2001.
- [18] **M. Marcolli**: *Feynman Integrals and Motives*, "European Congress of Mathematics, Amsterdam 14-18 July 2008", pp.293-332, European Mathematical Society, 2010.
- [19] **O. Schnetz**: *Quantum periods: A census of ϕ^4 transcendentals*, Jour. Numb. Theory and Phys. 4 no. 1 (2010), 1-48.
- [20] **R. P. Stanley**: *Spanning trees and a conjecture of Kontsevich*, Ann. Comb. 2, No.4, 351-363 (1998).
- [21] **J. Stembridge**: *Counting points on varieties over finite fields related to a conjecture of Kontsevich*, Ann. Combin. 2 (1998) 365-385.
- [22] **O. Schlotterer, S. Stieberger**: *Motivic Multiple Zeta Values and Superstring Amplitudes*, arXiv:1205.1516 (2012), 1-55.
- [23] **D. Styer**: *Calculation of the anomalous magnetic moment of the electron*, www.oberlin.edu/physics/dstyer/.../Moment.pdf
- [24] **D. Zagier**: *Hyperbolic manifolds and special values of Dedekind zeta-functions*, Invent. Math. 83 (1986), 285-301.
- [25] **D. B. Zagier**, *Evaluation of the multiple zeta values $\zeta(2, \dots, 2, 3, 2, \dots, 2)$* , Annals of Math., Volume 175, no. 1 (2012).