THESE présentée
pour l'obtention
du
DIPLOME de DOCTEUR de 3e CYCLE
à
L'UNIVERSITE DE PARIS VI

spécialité : PHYSIQUE THEORIQUE
mention : Très Honorable

par Monsieur Thibaut DAMOUR
Sujet de la thèse :

THEORIE CLASSIQUE DE LA RENORMALISATION

soutenue le : 5 Juin 1974 devant la Commission composée de :

Madame M.A. TONNELAT	Président
Mademoiselle S. MAVRIDES	examinateur
Monsieur E. ARNOUS	"
Monsieur A. PAPAPETROU	invité

Sc. 3e c. 72-02

R E M E R C I E M E N T S

Je voudrais exprimer ma profonde gratitude à Madame M.A. Tonnelat pour la bienveillance continuelle avec laquelle elle m'a guidé tout au long de ce travail.

Je remercie vivement Mademoiselle S. Mavridès pour l'intérêt qu'elle a bien voulu prendre à ces recherches.

Je tiens à remercier le Professeur Dr. E. Schmutzer pour les fructueuses discussions que j'ai eues avec lui.

Que soient remerciées, Mademoiselle Christine Trécul pour son obligeance, et Madame Marie José Lequerrè pour la gentillesse et la célérité avec laquelle elle a procédé à la frappe et au tirage de ce mémoire.

THEORIE CLASSIQUE DE LA RENORMALISATION

INTRODUCTION

La théorie classique de la renormalisation et de la selfinteraction c'est à dire l'étude de l'influence du champ propre d'une particule sur ses paramètres caractéristiques (masse,...) et sur son mouvement a été inaugurée par M.Abraham et M.H.A. Lorentz dans le cas électromagnétique. Deux sortes de méthodes furent alors employées :

- les unes, se fondant sur la conservation de l'énergie, cherchaient une force dont le travail compenserait la puissance rayonnée : 2/3 $e^2\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)^2$ *

- les autres utilisaient une loi de force directe de la particule non ponctuelle sur elle-même.

Par ces deux méthodes fut obtenue la self-force résiduelle (dite " freinage de rayonnement ")

$$\vec{F}^{self} = \frac{2}{3} e^2 \frac{d^2\vec{v}}{dt^2}$$

M.Abraham a donné l'expression relativiste de cette force :

$$F_i^{self} = \frac{2}{3} e^2 \left(\ddot{u}_i + \dot{u}^2 u_i \right)$$

Mais il faut attendre P.A.M. Dirac (1938) ** pour une déduction entièrement relativiste de cette force dans le cas ponctuel. Après ce travail, qui fut étendu par H.J. Bhabha et Harish-Chandra (1946) à des champs de spin quelconque, d'autres méthodes furent proposées par M. Riesz (1949), P. Havas et J.N. Goldberg (1962) (cas gravitationnel) et E. Schmutzer (1966).

Le but de ce travail est, après avoir brièvement rappelé le principe et les résultats de ces méthodes et après leur avoir fait subir un examen critique aux points de vue de l'interprétation physique, de la cohérence formelle et de

---

* On choisit des unités telles que $c = 1$.

** un nom propre suivi d'une année entre parenthèses fait référence à la bibliographie.

la simplicité des calculs (et parfois de leur justesse), de proposer, selon les cas, soit une modification de la méthode déjà existante : modification d'une application beaucoup plus aisée, soit une nouvelle méthode (Cf. II C méthode des potentiels plusque-retardés) jouissant d'une exceptionnelle légèreté de calculs.

En parallélisme partiel avec le développement historique auquel nous faisions allusion ci-dessus nous regrouperons les méthodes d'étude de la self-interaction des particules ponctuelles en trois grandes classes :

I. Celles qui prennent leur source dans le principe de la conservation de l'énergie-impulsion.

II. Celles qui argumentent du comportement du champ total au voisinage des sources.

III. Celles qui utilisent une loi de force directe de la particule sur elle-même.

PLAN

NOTATIONS GENERALES

indices latins : i , k ,... = 0, 1, 2, 3 indices grecs : α,... = 1, 2, 3

$$\eta_{ik} = \mathrm{diag}(+1,-1,-1,-1) \qquad \eta^{ik} a_k = a_{\underline{i}} \qquad \eta_{ik} b^k = b^{\underline{i}}$$

Convention générale d'Einstein : exemple $\Box\varphi = \varphi_{,s\underline{s}} = \varphi_{,00} - \varphi_{,\alpha\alpha} \quad [\ ,i \equiv \partial_i\ ]$

Produit scalaire : $\eta^{ik} a_i b_k = a^i b_i = a_{\underline{k}} b_k = (ab)$

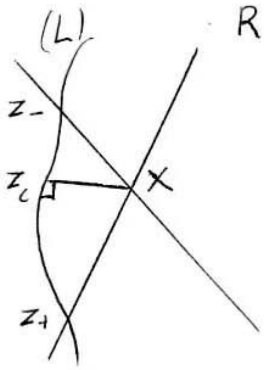
$$a_{[ik]} \equiv a_{ik} - a_{ki} \qquad \text{et} \qquad a_{(ik)} \equiv a_{ik} + a_{ki}$$

En présence d'une ligne d'univers (L) on notera toujours : $s \equiv$ temps propre

$\frac{d}{ds} \equiv \bullet$ (un point)

point de ligne $\equiv z^i(s)$ et $\dot{z}^i \equiv u^i$ d'où $u^2 = 1$; $u\dot{u} = 0$; $u\ddot{u} = -\dot{u}^2$

point de champ $\equiv x^i$ alors $x^i - z^i \equiv r^i$. On fera grand usage de :



$R \equiv (ru) \equiv (x-z, u)$; $R' \equiv (r\dot{u})$; $R'' \equiv (r\ddot{u})$ etc...

point contemporain $z_c \equiv z(s_c)$ avec $s_c = f(x)$ défini par :

$$R_c \equiv (x - z_c, u_c) = 0$$

point retardé (resp. avancé) : $z_+ \equiv z(s_+)$ (resp. $z_- \equiv z(s_-)$)
défini par :

$$r_\pm^2 \equiv (x - z_\pm)^2 = 0 \text{ et signe } r_\pm^0 = \pm 1$$

On déduit des définitions les propriétés suivantes dont nous ferons (sans référence) un usage constant dans la suite :

$$s_{c,i} = \left(\frac{u_i}{1-R'}\right)_c \quad ; \quad s_{\pm,i} = \left(\frac{r_i}{R}\right)_\pm \quad ; \quad R_{\pm,i} = \left(u_i + \frac{R'-1}{R} r_i\right)_\pm$$

φ désigne souvent le champ propre créé par la particule considérée cad φ_{ret}

f ou φ_{ext} désigne le champ extérieur = champ incident + champ retardé des autres particules

φ_{av} désigne le champ avancé créé par la particule considérée

φ_{tot} = champ total = $\varphi_{ext} + \varphi_{ret}$

$\varphi_{sym} = \frac{1}{2}(\varphi_{ret} + \varphi_{av})$ et $\quad \overline{\varphi} = \varphi_{tot} - \varphi_{sym} = \varphi_{ext} + \frac{1}{2}(\varphi_{ret} - \varphi_{av})$

φ_{ret} et φ_{av} satisferont toujours : $\quad \square\, \varphi = 4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} S(s)\, \delta^{(4)}(x - z(s))\, ds$
où $S(s)$ est la source. D'où $\quad \varphi_{\substack{ret \\ av}} = \pm \left(\frac{S}{R}\right)_{\pm}$

Enfin on notera $_{[n]}f$ ou $\underset{x^n}{\text{Terme}}\, f(x)$ le coefficient de x^n $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ dans le développement de $f(x)$ en puissances de x .

NOTATIONS PARTICULIERES

CHAPITRE I

$t_i^{\ k}$ = tenseur d'énergie-impulsion Φ_i = flux d'énergie par unité de temps propre

E_i = énergie totale contenue dans une section d'un tube entourant la particule

$\mu(\epsilon)$ = masse totale de ce tube m = masse inerte observable

M = " masse grave "

la barre désigne la moyenne sur la sphère retardée $(R_+ = \epsilon)$ sauf dans $\bar{M} = M u^i u^k$

φ^c désigne la partie coulombienne du champ φ

$$h_{ik} = \varphi_{ik} + h\,\varphi\,\eta_{ik} \qquad \text{avec} \qquad \varphi = \varphi_s^{\ s}$$

CHAPITRE II

Dans tout ce chapitre ϵ désigne $\sqrt{-r_c^2}$

$\langle\ \rangle$ désigne la moyenne sur la sphère contemporaine

et $\langle\ \rangle_\nu$ cette moyenne pondérée par $(1 - R_c')^\nu$

$\mu(\epsilon)$ = masse inerte non renormalisée m = masse inerte observable

M = masse " grave "

CHAPITRE III

on y distingue les potentiels : φ et les champs $\mathcal{Y} \equiv D_x \varphi \equiv \dfrac{\partial^n}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_n}} \varphi$

on a $\overset{(\alpha)}{\mathcal{Y}}$ = champ de M. Riesz; $\mathcal{Y}^{Schm}$ = champ de E. Schmutzer

$\mathcal{Y}(x, \epsilon)$ = champ plus que retardé; $\underset{[-k]}{\mathcal{Y}}(s)$ = coefficient de ϵ^{-k} dans $\mathcal{Y}(z(s), \epsilon)$

$\overset{(\alpha)}{\underset{[-k]}{\Psi}}$ = champs utilisés comme intermédiaires de calculs

Convention de symétrisation : il est sous-entendu que l'on doit compléter de façon minimale tout terme non symétrique afin qu'il le devienne : exemples :

$a_i b_k$ désigne $a_i b_k + a_k b_i$, $a_i b_k c_\ell$ désigne $a_i b_k c_\ell$ + 5 termes permutés,
MAIS $a_i a_k c_\ell$ désigne $a_i a_k c_\ell + a_k a_\ell c_i + a_\ell a_i c_k$ seulement

APPENDICES

la contraction $\underbrace{A\ \ a_i}$ désigne $\dfrac{\partial A}{\partial a^i}$ d'où $\underbrace{a_i a_k} = \eta_{ik}$

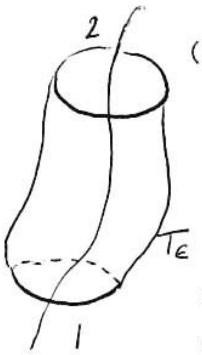
CHAPITRE I

METHODES UTILISANT LA CONSERVATION DE L'ENERGIE

A. RAPPEL DES METHODES DE P.A.M. DIRAC ET H.J. BHABHA- HARISH-CHANDRA

1. - Méthode de P.A.M. Dirac. Champ électromagnétique (1938).

Cette méthode consiste à introduire un bilan détaillé de l'énergie à travers un tube T_ϵ entourant une partie de la ligne d'univers considérée; on écrit :



$$\underbrace{\int_{T_\epsilon} t_i{}^k \, dS_k}_{\text{flux d'énergie sortant de } T_\epsilon} = \underbrace{E_1{}_i - E_2{}_i}_{\text{diminution de l'énergie "interne" de la section 1 à la section 2}} \tag{1}$$

L'orientation doit être telle que $dS_k \lambda^k > 0$ pour tout λ sortant de T_ϵ. L'information ainsi obtenue est indépendante du choix du tube ainsi que l'addition d'une divergence $(\phi_i{}^{k\ell}{}_{,\ell})$ au tenseur d'énergie $t_i{}^k$. P.A.M. Dirac a utilisé le tube contemporain défini par :

$$r_c^2 \equiv (x - z_c)^2 = -\epsilon^2 \tag{2}$$

et pour lequel

$$-dS_k = (1 - R_c^1) \, \epsilon \, r_{c\,k} \, d\Omega_0 \, ds \tag{3}$$

où Ω_0 est un angle solide dans le 3-espace associé à u_c.
Le principe (1) s'écrit alors :

(4) $$\int -t_i^{\ k}(1-R_c^1)\,\epsilon\,\eta_{c\,k}\,d\Omega_0 = -\dot{E}_i^{D}$$

On trouve :

(5) $$\int -t_i^{\ k}(1-R_c^1)\,\epsilon\,\eta_{c\,k}\,d\Omega_0 = \frac{e^2}{2\epsilon}\,\dot{u}_i + e\,\overline{\varphi}_{is}\,u^s$$

où

(6) $$\overline{\varphi}_{ik} = \underbrace{f_{ik}}_{\text{champ extérieur}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(\varphi_{ik}^{ret} - \varphi_{ik}^{av})}_{\text{champ propre de radiation}}$$

La solution la plus simple de (4) est alors :

(7) $$\begin{cases} (a) & E_i^{D} = \mu\,u_i \\ (b) & \mu = m - \dfrac{e^2}{2\epsilon} \\ (c) & m\,\dot{u}_i + e\,\overline{\varphi}_{is}\,u^s = 0 \end{cases}$$

C'est donc le champ propre de radiation qui apparait comme responsable de la self-interaction. Comme il vaut ici :

(8) $$\frac{1}{2}(\varphi_{ik}^{ret} - \varphi_{ik}^{av}) = \frac{2}{3}\,e\,u_{[i}\,\ddot{u}_{k]}$$

(7c) s'écrit :

(9) $$m\,\dot{u}_i - \frac{2}{3}e^2(\ddot{u}_i + \dot{u}^2 u_i) + e\,f_{is}\,u^s = 0$$

on retrouve donc bien la force de "freinage " relativiste donnée par M. Abraham

2.- Travaux de H.J. Bhabha et Harish-Chandra (1946). Champs quelconques.

Ces auteurs décomposent le champ total (supposé ici de masse nulle) $\varphi_{tot} = \varphi_{ext} + \varphi_{ret}$ en :

(10) $$\varphi_{tot} = \varphi_{sym} + \overline{\varphi}$$

où

(10a) $$\varphi_{sym} = \frac{1}{2}(\varphi_{ret} + \varphi_{av})$$

et

(10b) $$\overline{\varphi} = \varphi_{ext} + \frac{1}{2}(\varphi_{ret} - \varphi_{av})$$

Le tenseur d'énergie étant quadratique dans les champs soit $t(\varphi, \psi)$ sa forme polaire symétrique. On a

(11) $$t(\varphi_{tot}, \varphi_{tot}) = t(\varphi_{sym}, \varphi_{sym}) + 2\, t(\varphi_{sym}, \overline{\varphi}) + t(\overline{\varphi}, \overline{\varphi})$$

Or on montre que $t(\varphi_{sym}, \varphi_{sym})$ ne contribue que par une différentielle totale au flux (4) on peut donc l'absorber dans le second membre et à partir de là on prouve facilement que l'on satisfait au principe (1) en prenant comme champ " efficace " gouvernant le mouvement des particules

(12) $$\varphi_{eff} = \overline{\varphi} = \varphi_{ext} + \frac{1}{2}(\varphi_{ret} - \varphi_{av})$$

On retrouve donc ainsi en général ce qu'avait remarqué P.A.M. Dirac dans le cas électromagnétique et le problème de la self-interaction est ramené à celui du calcul de $\frac{1}{2}(\varphi_{ret} - \varphi_{av})$.

B. EXAMEN CRITIQUE DES METHODES PRECEDENTES.

1. - Emploi du tube contemporain.

Le principe physique de la méthode de P.A.M. Dirac est très clair mais l'application qu'il en a donnée est rendue très pénible par l'emploi du tube contemporain. En effet, ce dernier n'étant pas lié à l'expression formelle des champs, on ne peut calculer le flux que pour $\epsilon \to 0$. Cela empêche a priori de relier le résultat obtenu à l'énergie-impulsion rayonnée à l'infini. Et surtout, on ne peut faire le calcul qu'en développant le champ en série de puissances de ϵ ce qui alourdit beaucoup son expression tout en augmentant considérablement les risques d'erreur.

2. - Nécessité de calculer $\frac{1}{2}(\varphi_{ret}-\varphi_{av})$ chez H.J. Bhabha et Harish-Chandra.

Si, pour pallier les inconvénients que l'on vient de signaler, on utilise la formulation simplifiée de H.J. Bhabha et Harish-Chandra, on perd de précieux renseignements : notamment la renormalisation donnée par l'équation (7b) et de toutes façons il reste encore à calculer $\frac{1}{2}(\varphi_{ret}-\varphi_{av})$, ce qui devient très pénible quand l'ordre de dérivation [qui permet de passer du potentiel au champ] augmente. En fait Harish-Chandra (1946) n'a poussé le calcul que jusqu'aux dérivées secondes. On trouvera au contraire en III C une méthode (Cf. formule (65)) dont un cas particulier fourni très simplement le champ propre de radiation.

3. - Erreur de calcul chez H.J. Bhabha et Harish-Chandra.

Enfin il y a une erreur de calcul dans le travail de H.J. Bhabha - et Harish-Chandra. Cette erreur n'influence pas les résultats et sera rectifiée en II C (Cf. formule (37)).

C. FORMULATION SIMPLIFIEE DE LA METHODE.

1. - Emploi du tube retardé.

On se rappelle (Cf. I A 1) que le choix du tube à travers lequel on calculera le flux d'énergie est libre. Alors il est très agréable d'utiliser le tube retardé défini par

$$R_+ \equiv (x-z_+, u_+) = \epsilon \tag{13}$$

Cette expression contrairement à celle du tube contemporain, ne conduit qu'à des calculs très légers et permet, de plus, le calcul du flux propre étant valable pour tout ϵ , de relier directement le résultat obtenu à l'énergie-impulsion rayonnée à l'infini.

L'élément de surface du tube retardé (13) s'écrit :

(14) $$dS_\kappa = R_{+,\kappa} \quad \epsilon^2 \; d\underset{0}{\Omega} \; ds$$

où $\underset{0}{\Omega}$ est un angle solide dans le 3-espace associé à u_+ .
Le principe (1) s'écrit alors

(15a) $$\Phi_i = - \dot{E}_i$$

où Φ_i , flux sortant par unité de temps propre, s'écrit :

(15b) $$\Phi_i \equiv 4\pi\epsilon^2 \; \overline{t_i{}^\kappa R_{+,\kappa}}$$

La barre symbolisant une moyenne sur $\underset{0}{\Omega}$. Pour s'en servir, il suffira d'utiliser les résultats :

(16) $$\left\{ \begin{array}{llll} (a) & \overline{r_i} = \epsilon u_i & (b) & \overline{R'} = 0 \\ (c) & \overline{R' r_i} = -\dfrac{\epsilon^2}{3} \dot{u}_i & (d) & \overline{R'^2 r_i} = -\dfrac{\epsilon^3}{3} \dot{u}^2 u_i \end{array} \right.$$

(Pour alléger les notations on supprime jusqu'à la fin du chapitre l'indice + , devenu inutile, puisqu'ici toutes les quantités sont retardées).

Les formules (16) se vérifient très facilement dans le repère lié à u_+ où:
$u_i = \delta_i^0$, $\dot{u}_0 = 0$, $r^0 = \epsilon$ et $r^\alpha r^\alpha = \epsilon^2$ donc :

$$\overline{r^0} = \epsilon \qquad \overline{r^\alpha} = 0 \qquad \overline{r^\alpha r^\beta} = \frac{\epsilon^2}{3}\delta^{\alpha\beta} \qquad \overline{r^\alpha r^\beta r^\gamma} = 0$$

(a) : $\overline{r_0} = \epsilon$ et $\overline{r_\alpha} = -\overline{r^\alpha} = 0$ d'où (16a)

(b) : c'est une conséquence de (a) contracté par $\dot{u}_i$

(c) : $\overline{R' r_0} = \overline{\dot{u}_\alpha r^\alpha \epsilon} = 0$ et $\overline{R' r_\alpha} = -\dot{u}_\beta \overline{r^\beta r^\alpha} = -\frac{\epsilon^2}{3} \dot{u}_\alpha$ d'où (16c)

(d) : En contractant (16c) par $\dot{u}^i$ on a $\overline{R'^2} = -\frac{\epsilon^2}{3} \dot{u}^2$ d'où $\overline{R'^2 r_0} = \overline{R'^2 \epsilon} =$

$= -\frac{\epsilon^3}{3} \dot{u}^2$ et $\overline{R'^2 r_\alpha} = 0$ par imparité d'où (16d).

Appliquons les idées précédentes au champ électromagnétique, au champ scalaire et à un champ tensoriel.

2. - Champ électromagnétique.

Il se présente sous la forme :

(17a) $$\varphi_i^{tot} = \left(\frac{e u_i}{R}\right)_+ + f_i$$

(17b) $$\varphi_{ik}^{tot} = \varphi_{[i,k]}^{tot}$$

où f rassemble le champ incident et les champs retardés des autres particules.
Le tenseur d'énergie est :

(17c) $$4\pi\, t_i^{tot\,k} = \varphi_{is}^{tot}\, \varphi^{tot\, sk} - \frac{1}{4}\, \varphi_{rs}^{tot}\, \varphi^{tot\, sr}\, \delta_i^k$$

Il est intéressant de considérer d'abord la seule contribution de $\varphi_i = \frac{e u_i}{R}$

$$\varphi_{i,k} = e\frac{\dot{u}_i}{R} s_{,k} - \frac{e u_i}{R^2} R_{,k} = \frac{e\dot{u}_i}{R}\frac{r_k}{R} - \frac{e u_i}{R^2}\left(u_k + \frac{R'-1}{R} r_k\right)$$

d'où

$$\varphi_{ik} = a_{[i}\, r_{k]} \qquad \text{avec} \qquad a_i = \frac{e}{R^2}\left(\dot{u}_i + \frac{1-R'}{R} u_i\right)$$

et

$$\varphi_{is}\,\varphi_{sk} = (a_i r_s - a_s r_i)(a_s r_k - a_k r_s) = (ar)[a_i r_k + a_k r_i] - a^2 r_i r_k$$

d'où en retirant $\frac{1}{4}\eta_{ik}$ Trace :

$$4\pi\, t_{ik} = (ar)\left[a_{(i}\, r_{k)} - \frac{(ar)}{2}\eta_{ik}\right] - a^2 r_i r_k$$

avec

$$(a r) = \frac{e}{R^2} \qquad \text{et} \qquad a^2 = \frac{e^2}{R^4}\left(\dot u^2 + \left(\frac{1-R'}{R}\right)^2 \right)$$

Calculons alors

$$\Phi_i^{self} = 4\pi \epsilon^2 \overline{t_{ik} R'^k}$$

on a

$$4\pi\epsilon^2 t_{ik} = e\left(a_i r_k + a_k r_i - \frac{e}{2\epsilon^2} \eta_{ik}\right) - \frac{e^2}{\epsilon^2}\left(\dot u^2 + \left(\frac{1-R'}{\epsilon}\right)^2 \right) r_i r_k$$

avec $a_k = \frac{e}{\epsilon^2}\left(\dot u_k + \frac{1-R'}{\epsilon} u_k\right)$ que l'on doit contracter par $R'^k = u^k + \frac{R'-1}{\epsilon} r^k$

D'où d'abord $r_k R'^k = \epsilon$ et $a_k R'^k = \frac{e}{\epsilon^2}\left(\frac{R'-1}{\epsilon} R' + \frac{1-R'}{\epsilon}(1 + R' - 1)\right) = 0$

Donc

$$4\pi\epsilon^2 t_{ik} R'^k = e\left(a_i \epsilon - \frac{e}{2\epsilon^2} R_{,i}\right) - \frac{e^2}{\epsilon}\left[\dot u^2 + \frac{(1-R')^2}{\epsilon^2}\right] r_i$$

En prenant la moyenne les formules (16) donnent :

$$\overline{a_i} = \frac{e}{\epsilon^2}\left(\dot u_i + \frac{u_i}{\epsilon}\right) \qquad \overline{R_{,i}} = \overline{\frac{R' r_i}{\epsilon}} = -\frac{\epsilon}{3} \dot u_i$$

et $\overline{(1-R')^2 r_i} = \overline{(1-2R' + R'^2) r_i} = \epsilon u_i + \frac{2}{3}\epsilon^2 \dot u_i - \frac{\epsilon^3}{3}\dot u^2 u_i$ que l'on reporte d'où :

$$\Phi_i^{self} = e\left[\frac{e}{\epsilon}\left(\dot u_i + \frac{u_i}{\epsilon}\right) + \frac{e}{6\epsilon}\dot u_i\right] - \frac{e^2}{\epsilon}\left[\epsilon \dot u^2 u_i + \frac{u_i}{\epsilon} + \frac{2}{3}\dot u_i - \frac{\epsilon}{3}\dot u^2 u_i\right]$$

soit

$$\Phi_i^{self} = \frac{e^2}{\epsilon}\dot u_i \left[1 + \frac{1}{6} - \frac{2}{3}\right] - e^2\left[1 - \frac{1}{3}\right] \dot u^2 u_i$$

D'où la contribution du champ propre au flux :

$$\Phi_i^{self} = \frac{e^2}{2\epsilon}\dot u_i - \frac{2}{3} e^2 \dot u^2 u_i \qquad (18)$$

On en déduit la valeur exacte de l'énergie rayonnée par une particule :

$$\text{Energie rayonnée} = \int_1^2 \Phi_i^{self}\, ds = -\frac{2}{3} e^2 \int_1^2 \dot{u}^2 u_i \, ds + \frac{e^2}{2\epsilon} \left[u_i \right]_1^2$$

Le calcul précedent étant vrai pour tout ϵ on peut faire tendre ϵ vers l'infini. On trouve alors $-\frac{2}{3}e^2\int \dot{u}^2 dx_i + O(\frac{1}{\epsilon})$ en accord parfait avec A. Schild (1960). Et l'on comprend ainsi pourquoi ce même terme $-\frac{2}{3}e^2\dot{u}^2 u_i$ interviendra aussi quand $\epsilon \to 0$.

Par contraction de (18) on a aussi

$$\Phi_i^{self} u^i = -\frac{2}{3} e^2 \dot{u}^2 \tag{18a}$$

indépendant de ϵ et pouvant par conséquent forunir un critère local de radiation différent de celui de F. Rhorlich (1965).

Dans le cas qui nous intéresse ici $\epsilon \to 0$ et $\varphi_{ik}^{tot} = \varphi_{ik} + f_{ik}$

On veut $\Phi_i^{tot} = 4\pi\epsilon^2 \; t_i^{tot\,k} R_{,k}$ où $t_i^{tot\,k}$ est quadratique en φ^{tot} .
La partie la plus divergente de φ est sa partie coulombienne en ϵ^{-2} :

$$\varphi_{ik}^{C} = \frac{e}{\epsilon^3} \, u_{[i} \, z_{k]}$$

Vue l'expression de Φ_i^{tot} , on voit que pour $\epsilon \to 0$ les seuls termes supplémentaires viendront des termes croisés (en $\varphi \times f$) et même seulement de $\varphi^C \times f$ où l'on remplace f par sa valeur sur la ligne d'univers. Il suffit aussi de remplacer $R_{,k}$ par $u_k - \frac{z_k}{\epsilon}$. POsons $\gamma_k = \frac{z_k}{\epsilon} - u_k$ on a alors :

$$R_{,k} = -\gamma_k + O(\epsilon) \qquad \varphi_{ik}^{C} = \frac{e}{\epsilon^2} \, u_{[i}\, \gamma_{k]} \qquad (u\gamma) = 0 \qquad \gamma^2 = -1$$

D'où le terme supplémentaire dû aux termes croisés dans t^{tot} :

$$4\pi\epsilon^2 \, t_i^{\overset{croisé}{k}} R_{,k} = \epsilon^2 \left(\varphi^C_{is} f^s{}_k + f_i{}^s \varphi^C_{sk} + \tfrac{1}{2} \varphi^C_{rs} f^{rs} \eta_{ik} \right)(-\gamma^k)$$

$$4\pi\epsilon^2 \, t_i^{\overset{croisé}{k}} R_{,k} = -e\left([u_i\gamma_s - u_s\gamma_i] f^s{}_k + f_i{}^s [u_s\gamma_k - u_k\gamma_s] + u^r\gamma^s f_{rs}\eta_{ik} \right) \gamma^k$$

$$4\pi\epsilon^2 \, t_i^{\overset{croisé}{k}} R_{,k} = -e\big(\underset{1}{u_i f_{sk}\gamma^s\gamma^k} - \underset{2}{\gamma_i f_{sk} u^s \gamma^k} + \underset{3}{f_{is} u^s \gamma_k \gamma^k} - \underset{4}{f_{is}\gamma^s u_k \gamma^k} + \underset{5}{\gamma_i f_{rs} u^r \gamma^s} \big)$$

1 est nul par antisymétrie 2 et 5 s'éliminent 4 est nul à cause de $(u\gamma) = 0$ seul 3 reste et donne à cause de $\gamma^2 = -1$:

$$\Phi_i^{suppl} = e\, f_{is}\, u^s + O(\epsilon) \qquad (18b)$$

D'où le flux total, point de départ de la méthode :

$$\Phi_i^{tot} = \frac{e^2}{2\epsilon}\dot{u}_i - \frac{2}{3}e^2\dot{u}^2 u_i + e\, f_{is}\, u^s + O(\epsilon) \qquad (19)$$

qui doit vérifier

$$\Phi_i^{tot} = -\dot{E}_i \qquad (19a)$$

Or (19) donne $\Phi_i^{tot} u^i = -\frac{2}{3}e^2\dot{u}^2 = \frac{2}{3}e^2\ddot{u}_i u^i$

d'où avec (19a) : $\left(E_i + \frac{2}{3}e^2\dot{u}_i\right)^{\cdot} u^i = 0$

Avec P.A.M. Dirac on peut prendre la solution la plus simple :

$$E_i + \frac{2}{3}e^2\dot{u}_i = \mu\, u_i$$

où μ est une constante.
En reportant dans (19a) on a le système :

$$(20)\quad \begin{cases} \text{(a)} & m\,\dot{u}_i - \frac{2}{3}e^2(\ddot{u}_i + \dot{u}^2 u_i) + e\, f_{is}\, u^s = 0 \\ \text{(b)} & \mu = m - \frac{e^2}{2\epsilon} \\ \text{(c)} & E_i = \mu\, u_i - \frac{2}{3}e^2\dot{u}_i \end{cases}$$

On retrouve bien dans (20a) l'équation de H.A. Lorentz-P.A.M. Dirac.

Si on applique (20c) au cas stationnaire $(\dot{u}_i = 0)$, en se souvenant que d'après le principe (1) E_i représente l'énergie totale contenue dans une section du tube, on voit que μ est la masse totale du tube qui peut se décomposer grâce à (20b) d'une façon formelle mais très claire en :

(20d) $$\mu = \left\{ m - \frac{e^2}{2.0} \right\} + \left\{ \frac{e^2}{2.0} - \frac{e^2}{2.\epsilon} \right\}$$

masse infinie négative de la particule nue — masse infinie positive du champ (coulombien)

On comprend en particulier la nécessité d'un signe " moins " dans $\mu = m - e^2/2\epsilon$ puisque μ , masse totale du tube, comprend la contribution du champ dont la densité d'énergie t_{00} est positive et par conséquent μ doit croître avec ϵ .

Cette remarque prendra tout son intérêt dans la comparaison avec les renormalisations données par les autres méthodes.

Enfin, outre la grande simplification des calculs, un autre avantage de l'emploi du tube retardé (plutôt que contemporain) est que, comme le montre l'équation (20c), il inclut automatiquement dans l'énergie E_i , dans le cas général non stationnaire, la partie dynamique : $-\frac{2}{3} e^2 \dot{u}_i$ qu'on finit par lui attribuer (Cf. P.A.M. Dirac (1938)).

3. - <u>Champ scalaire</u>

On prend $\varphi^{tot} = \frac{M}{R_+} + f$ où M est une constante (" masse grave ") et f comme d'habitude le champ extérieur. Le tenseur d'énergie est alors :

$$4\pi\, t_{ik}^{tot} = \varphi_{,i}^{tot} \varphi_{,k}^{tot} - \frac{1}{2} \varphi_{,s}^{tot} \varphi^{tot,s} \eta_{ik}$$

Cherchons d'abord les termes propres dûs à $\varphi = M/R$ $\varphi_{,i} = -M R_{,i}/R^2$

Donc

$$4\pi \epsilon^2 t_i{}^k R_{,k} = \frac{M^2}{2\epsilon^2} (R_{,s} R^{,s}) R_{,i}$$

Or $R_{,i} = u_i + \frac{R'-1}{\epsilon} z_i$ d'où $R_{,s} R^{,s} = 2R' - 1$

Donc $$\Phi_i^{self} = \frac{M^2}{2\epsilon^2} \overline{(2R'-1) R_{,i}}$$

avec $R_{,i} = u_i + \frac{R'-1}{\epsilon} r_i$ et les formules (16) on a

$$\overline{R_{,i}} = -\frac{\epsilon}{3}\dot{u}_i \quad et \quad \overline{R' R_{,i}} = \overline{R'} u_i + \overline{\frac{R'^2 - R'}{\epsilon} r_i} = -\frac{\epsilon^2}{3}\dot{u}^2 u_i + \frac{\epsilon}{3}\dot{u}_i$$

d'où

$$\Phi_i^{self} = \frac{M^2}{2\epsilon}\dot{u}_i - \frac{1}{3}M^2 \dot{u}^2 u_i$$

Comme dans le cas électromagnétique, ce résultat étant valable pour $\epsilon \to \infty$, on en déduit l'énergie-impulsion rayonnée à l'infini : $-\frac{M^2}{3}\int \dot{u}^2 dx_i$, et l'on comprend pourquoi ce même terme jouera un rôle quand $\epsilon \to 0$ c'est à dire dans la self-interaction.

Avec les mêmes notations que pour le champ électromagnétique, on a le terme supplémentaire quand le champ extérieur f est pris en compte :

Avec

$$R_{,k} = -\gamma_k \qquad \varphi^{C}_{,i} = \frac{M}{\epsilon^2}\gamma_i$$

$$4\pi\epsilon^2 t_i^{\text{croisé}\,k} R_{,k} = \epsilon^2(\varphi_{,i} f_{,k} + \varphi_{,k} f_{,i} - \varphi_{,s} f^{,s} \eta_{ik})(-\gamma^k) = -M(\gamma_i f_{,k}\gamma^k + f_{,i}\gamma_k\gamma^k - \gamma_i f_{,s}\gamma^s)$$

d'où

$$\Phi_i^{suppl} = M f_{,i}$$

D'où le flux total

$$\Phi_i^{tot} = \frac{M^2}{2\epsilon}\dot{u}_i - \frac{1}{3}M^2\dot{u}^2 u_i + M f_{,i} \tag{21}$$

Comme plus haut, on contracte alors l'égalité $\Phi_i^{tot} = -\dot{E}_i$ par u^i

Soit :

$$-\dot{E}_i u^i = -\frac{1}{3}M^2\dot{u}^2 + M\dot{f} = \left(\frac{1}{3}M^2\dot{u}_i + M f u_i\right)^{\circ} u^i$$

D'où :

$$\left(E_i + \frac{1}{3} M^2 \dot{u}_i + M f u_i\right)^{\bullet} u^i = 0$$

On prend la solution la plus simple :

$$E_i + \frac{1}{3} M^2 \dot{u}_i + M f u_i = \mu u_i$$

où μ est une constante.

En reportant cette dernière égalité on obtient le système

$$(22) \quad \begin{cases} \text{(a)} \quad \left[(m - Mf)\, u_i\right]^{\bullet} - \dfrac{M^2}{3}\left(\ddot{u}_i + \dot{u}^2 u_i\right) + M f_{,i} = 0 \\[2ex] \text{(b)} \quad \mu = m - \dfrac{M^2}{2\epsilon} \\[2ex] \text{(c)} \quad E_i = \mu u_i - \dfrac{1}{3} M^2 \dot{u}_i - M f u_i \end{cases}$$

(22a) donne l'équation de mouvement modifiée par la self-interaction, elle ne dépend que de la masse inerte observable : m .

(22c) montre que dans le cas stationnaire isolé $(\dot{u}_i = 0 \;\; f = 0)$, μ est la masse totale du tube. Et dans ce cas (22b) s'interprète très bien à partir de la densité d'énergie du champ coulombien. En effet, on a alors

$$\varphi = \frac{M}{r} \qquad\qquad r = \sqrt{r^\alpha r^\alpha}$$

d'où

$$4\pi t_{00} = \frac{1}{2}\left((\varphi_{,0})^2 + (\varphi_{,\alpha})^2\right) = \frac{M^2}{2 r^4} \quad \text{et} \quad \int_0^\epsilon t_{00}\, r^2 dr\, d\Omega = \int_0^\epsilon \frac{M^2}{2r^2}\, dr = -\frac{M^2}{2r}\Big|_0^\epsilon$$

D'où la même décomposition de μ en masse de la particule + masse du champ :

$$\mu = \left\{m - \frac{M^2}{2.0}\right\} + \left\{\frac{M^2}{2.0} - \frac{M^2}{2.\epsilon}\right\}$$

Ici encore, la présence du signe moins dans μ est nécessaire à cause du caractère positif de t_{oo} .

4. - Champ tensoriel (" théorie linéaire de la gravitation ").

Partons de l'action invariante par paramétrage :

$$A = \frac{1}{8\pi}\int d^4x\,(\varphi_{ik,\ell}\,\varphi^{ik,\ell} + k\,\varphi_{,\ell}\,\varphi^{,\ell}) + \sum_{\text{particules}} \left\{ \int M(\varphi_{ik}u^i u^k + h\,\varphi)\,ds - \int \mu\, ds \right\}$$

où $\varphi \equiv \varphi_s{}^s$ et où h et k sont 2 constantes. M et μ étant constants pour une particule.

Décomposons φ_{ik} en parties irréductibles $\left(\varphi_{ik} = \psi_{ik} + \frac{1}{4}\varphi\eta_{ik}\right)$ et introduisons les transformations $\begin{cases} \psi_{ik} \longrightarrow \psi_{ik} \\ \varphi \longrightarrow \varphi' \end{cases}$

avec $\varphi = \alpha\,\varphi'$ où α est une constante. Si l'on pose :

$$\begin{cases} k' + \frac{1}{4} = \alpha^2\left(k + \frac{1}{4}\right) \\ h' + \frac{1}{4} = \alpha\left(h + \frac{1}{4}\right) \end{cases}$$

on vérifie facilement l'invariance :

$$A_{h',k'}(\varphi'_{ik}) = A_{h,k}(\varphi_{ik})$$

Donc on peut imposer sans restrictions une relation entre h et k . Par exemple, nous adopterons

$$h = k \qquad \text{(que nous noterons } h \text{)}$$

Alors le champ s'écrit très simplement :

$$(23) \qquad \varphi_{ik} = \left(\frac{M u_i u_k}{R}\right)_+ + f_{ik} \qquad\qquad \varphi = \frac{M}{R_+} + f$$

Le tenseur canonique s'écrit :

$$(24) \qquad 4\pi\, t_i{}^k = \varphi_{lm,i}\,\varphi^{lm,k} - \frac{1}{2}\varphi_{lm,s}\,\varphi^{lm,s}\,\delta_i{}^k + h\left[\varphi_{,i}\varphi^{,k} - \frac{1}{2}\varphi_{,s}\varphi^{,s}\,\delta_i{}^k\right]$$

Et l'équation de mouvement d'une particule :

$$\left[\left(\mu + M h^{tot}_{ik} u^i u^k\right) u_l - 2M h^{tot}_{lk} u^k\right]^{\bullet} + M\, h^{tot}_{ik,l}\, u^i u^k = 0$$

où μ (masse inerte non renormalisée) et M (masse grave) sont des constantes et

$$h^{tot}_{ik} \equiv \varphi_{ik} + h\,\varphi\,\eta_{ik}$$

Or, comme on l'a rappelé (I A 1) , la méthode de P.A.M. Dirac est invariante sous l'addition d'une " divergence " au tenseur d'énergie; donc on peut très bien calculer le flux avec le tenseur canonique (24) au lieu du tenseur métrique. Alors le calcul va se ramener presque entièrement au cas scalaire. Posons $\overline{M} = M u^i u^k$ (en supprimant les indices), on voit avec l'aide de (23) et (24) que Φ_i^{self} est la somme de deux termes semblables l'un avec $\overline{M}$ et l'autre avec M (et le coefficient h). Ce dernier est le flux du champ scalaire déjà calculé (Cf. (21)). Le premier terme comporte des expressions en $\overline{M}^2$, en $\overline{M}\dot{\overline{M}}$ et en $(\dot{\overline{M}})^2$. Celles en $\overline{M}^2$ sont donc formellement les mêmes que le cas scalaire :

$$\frac{\overline{M}^2}{2\epsilon}\dot{u}_i - \frac{\overline{M}^2}{3}\dot{u}^2 u_i$$

celles en $\overline{M}\dot{\overline{M}} = \frac{1}{2}(\overline{M}^2)^{\bullet}$ sont nulles car

$$\overline{M}^2 = M u^i u^k M u_i u_k = M^2 = C^{te}$$

celles en $(\dot{\overline{M}})^2$ viennent de :

$$\epsilon^2\left(\frac{\dot{\overline{M}}}{R}\frac{r_i}{R}\frac{\dot{\overline{M}}}{R}\frac{r_k}{R} - \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{\overline{M}}}{R}\frac{r_s}{R}\right)^2\eta_{ik}\right)R^{,k} = \frac{(\dot{\overline{M}})^2}{\epsilon^2}\,r_i\,(r^k R_{,k})$$

Or $\quad r^k R_{,k} = \epsilon \quad$ et $\quad r_i = \epsilon\, u_i$

d'où une contribution de $\left(\dot{\overline{M}}\right)^2 u_i$. Il vient

$$\Phi_i^{self} = \frac{\overline{M}^2 \dot{u}_i}{2\epsilon} - \frac{\overline{M}^2}{3} \dot{u}^2 u_i + \left(\dot{\overline{M}}\right)^2 u_i + h\left(\frac{M^2}{2\epsilon}\dot{u}_i - \frac{M^2}{3}\dot{u}^2 u_i\right)$$

(Signalons pour être complet, que le terme en $\overline{M}\dot{\overline{M}}$ s'écrirait : $\overline{M}\dot{\overline{M}}\left(\frac{u_i}{\epsilon} + \frac{2}{3}\dot{u}_i\right)$)

Avec $\overline{M} = M u^i u^k$ on a $\overline{M}^2 = M^2$ $\left(\dot{\overline{M}}\right)^2 = 2M^2\dot{u}^2$. D'où

(25) $$\Phi_i^{self} = \frac{h+1}{2\epsilon} M^2 \dot{u}_i - \frac{M^2}{3}(h-5)\,\dot{u}^2 u_i$$

De même, le terme supplémentaire s'obtient sans calculs à partir du cas scalaire :

$$\Phi_i^{suppl} = \overline{M}\,\underline{f}_{,i} + h\,M\,f_{,i}$$

Introduisant :

(26) $$h_{ik} \equiv f_{ik} + h f \eta_{ik}$$

il s'écrit

$$\Phi_i^{suppl} = \overline{M}\,\underline{h}_{,i} \equiv M u^r u^s h_{rs,i}$$

D'où le flux total :

(27) $$\Phi_i^{tot} = \frac{h+1}{2\epsilon} M^2 \dot{u}_i - \frac{M^2}{3}(h-5)\,\dot{u}^2 u_i + M u^r u^s h_{rs,i}$$

Comme d'habitude, on transforme $u^i \Phi_i^{tot}$ en $\dot{A}_i u^i$:

$$u^i \Phi_i^{tot} = \frac{M^2}{3}(h-5)\,\ddot{u}_i u^i + M u^k u^l \dot{h}_{kl}$$

Or on vérifie facilement que :

$$u^k u^l \dot{h}_{kl} = u^l \left[2 h_{kl} u^k - h_{rs} u^r u^s u_l \right]^{\cdot}$$

D'où, avec
$$\Phi_i^{tot} = - \dot{E}_i$$

$$\left(E_i + \frac{h-5}{3} M^2 \dot{u}_i + 2M h_{ik} u^k - M u^r u^s h_{rs} u_i \right)^{\cdot} u^i = 0$$

Donc, en prenant la parenthèse égale à μu_i , et, en reportant, le système :

$$(28) \begin{cases} \text{(a)} \left[(m + M u^r u^s h_{rs}) u_i - 2M h_{ik} u^k \right]^{\cdot} - \frac{h-5}{3} M^2 (\ddot{u}_i + \dot{u}^2 u_i) + M u^r u^s h_{rs,i} = 0 \\ \text{(b)} \quad \mu = m - \frac{h+1}{2\epsilon} M^2 \\ \text{(c)} \quad E_i = \mu u_i - \frac{h-5}{3} M^2 \dot{u}_i - 2M h_{ik} u^k + M u^r u^s h_{rs,i} \end{cases}$$

(28c) montre que μ est la masse totale du tube stationnaire isolé; (28b) s'interprètera, comme d'habitude, en décomposant cette masse en une partie dûe à la particule et une autre dûe au champ. On vérifie facilement que cette dernière s'identifie à l'énergie du champ coulombien entourant la particule. (La vérification est d'ailleurs inutile puisque c'est une conséquence immédiate du théorème de Gauss appliqué au volume limité par T_{ϵ_1} , T_{ϵ_2} , et deux troncs de cône extrêmes).

(28a)est l'équation de mouvement d'une particule, compte-tenu de la self-interaction. En particulier, dans le cas $h = -1/2$, la théorie tensorielle ici utilisée s'identifie avec les résultats de la " fast approximation " au 1er ordre. (28a) redonne alors bien l'équation de P. Havas et J.N. Goldberg (1962)) Le terme radiatif dans (28a) étant alors : $+\frac{11}{6} M^2 (\ddot{u}_i + \dot{u}^2 u_i)$ qui est bien le même que $+\frac{11}{3} G M^2 (\ddot{u}_i + \dot{u}^2 u_i)$. En effet, $G = \frac{1}{2}$ si on identifie masse inerte (renormalisée) et masse grave.

Dans le cas général (h quelconque) l'équation (28a) est bien conforme aux résultats de S. Mavrides (1966) (aux changements de notation près. Nous y reviendrons au Chapitre II). En revanche, la renormalisation obtenue par cet auteur diffère de celle donnée par (28b) en ce que le signe " moins " est remplacé par " plus " . Mais, bien sûr, un tel changement détruit l'interprétation physique très claire que l'on a donné de (28b).

En somme, on a prouvé qu'il était possible, par l'emploi du tube retardé, plutôt que contemporain, non seulement d'alléger considérablement la mise en oeuvre de la méthode de Dirac et d'obtenir ainsi rapidement une renormalisation d'interprétation physique claire mais encore de comprendre, d'une façon intuitive, l'intervention de l'énergie-impulsion rayonnée à l'infini $(\epsilon \to \infty)$ dans la selfinteraction $(\epsilon \to 0)$.