C H A P I T R E   II

METHODES UTILISANT LE COMPORTEMENT DU CHAMP TOTAL PRES DES SOURCES

A. RAPPEL DE LA METHODE DE HAVAS-GOLDBERG (1962).

Reprenons la décomposition du champ total $\varphi^{tot} = \varphi^{ext} + \varphi^{ret}$ utilisée par H.J. Bhabha et Harish-Chandra (Cf. I A 2) :

$$\varphi^{tot} = \varphi^{ext} + \frac{1}{2}(\varphi^{ret} - \varphi^{av}) + \frac{1}{2}(\varphi^{ret} + \varphi^{av}) \qquad (29)$$

les deux premiers termes de (29) sont réguliers sur la ligne d'univers de la particule considérée. On a vu qu'ils constituaient le champ " efficace " gouvernant le mouvement de la particule. En revanche, le troisième terme :

$$\varphi_{sym} = \frac{1}{2}(\varphi_{ret} + \varphi_{av}) \qquad (30)$$

devient infini quand on tend vers la ligne d'univers. Cependant P. Havas et J.N. Goldberg ont proposé de vérifier directement que la contribution de φ_{sym} à l'équation de mouvement (contribution nécessairement infinie) pouvait être éliminée par la renormalisation.

Or pour $\varphi_{ret} = (S/R)_+$ (pour les notations voir " Notations " ou II C) H.J. Bhabha et Harish-Chandra avaient calculé près de la ligne :

$$\frac{1}{2}(\varphi_{ret} - \varphi_{av}) = -\left[\dot{S} + \frac{S}{3}\ddot{u}_i z^i + \dot{S}\dot{u}_i z^i\right]_c + O(\epsilon^2) \qquad (31)$$

d'où l'on déduit sur la ligne :

$$\frac{1}{2}(\varphi_{ret} - \varphi_{av}) = -\dot{S} \qquad (31a)$$

$$\frac{1}{2}(\varphi^{ret}_{,i} - \varphi^{av}_{,i}) = -\left[\frac{S}{3}(\ddot{u}_i + \dot{u}^2 u_i) + \dot{S}\dot{u}_i + \ddot{S} u_i\right] \qquad (31b)$$

Mais H.J. Bhabha et Harish-Chandra avaient aussi calculé près de la ligne :

(32) $$\varphi_{sym} = \left\{ \frac{S}{\epsilon} + \frac{S\dot{u}_i}{2\epsilon} r^i + A_{ik}(s)\frac{r^i r^k}{\epsilon} + B(s)\,\epsilon \right\}_c + O(\epsilon^2)$$

Alors P. Havas et J.N. Goldberg ont proposé de prendre comme valeurs formelles de φ_{sym} et de sa dérivée première sur la ligne :

(32a) $$\varphi_{sym}^{H.G.} = \frac{S}{\epsilon}$$

(32b) $$\varphi_{sym,i}^{H.G.} = \frac{S\,\dot{u}_i}{2\epsilon}$$

Ce sont ces expressions que l'on devra remplacer dans l'équation de mouvement pour vérifier qu'elles peuvent être éliminées par la renormalisation.

B. EXAMEN CRITIQUE DE LA METHODE PRECEDENTE

1. - Ambiguïté de $\varphi_{sym,i}$

Le manque de clarté mathématique du procédé est certain puisque, φ_{sym} étant infini sur la ligne, ne possède pas de développement de Taylor en un point de cette ligne; il est donc sujet à caution d'identifier $\varphi_{sym,i}$, avec le coefficient de r_i .

2. - Cohérence

Mais surtout les expressions (32a) et (32b) violent une exigence que nous rencontrons ici pour la première fois et qui doit être satisfaite si l'on veut que l'application de la méthode soit sans ambiguïté. Cette exigence de COHERENCE est évidente quand on pense, par exemple, que la force de Lorentz peut s'écrire de deux façons :

(33a) $$F_i = -e\,\varphi_{ik}\,u^k \qquad \text{où} \qquad \varphi_{ik} = \varphi_{i,k} - \varphi_{k,i}$$

ou encore

(33b) $$F_i = e\, u^k \varphi_{k,i} - e \frac{d}{ds} \varphi_i$$

Il faut donc, pour éviter l'ambiguïté, que toute expression formelle d'un champ et de ses dérivées, destinée à être remplacée dans une équation de mouvement vérifie des conditions de cohérence du type :

(34) $$u^i \, (\mathcal{A}_{,i}) \equiv \frac{d}{ds} (\mathcal{A})$$

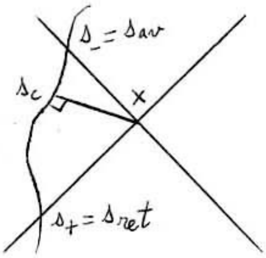
Or les expressions (32a) et (32b) ne vérifient pas une telle condition. D'ailleurs on verra que ces formules même amendées pour être cohérentes ne conduisent pas à des renormalisations en accord avec celles fournies par la méthode de Dirac, alors que, rappelons le, ces dernières avaient un sens physique clair.

3. - Erreur dans φ_{sym}.

Enfin l'expression (32) de φ_{sym} dûe à Bhabha et Harish-Chandra est erronée (En effet ils trouvent $B^{B.C.} = \frac{1}{2}(\ddot{S} - \frac{5 \dot{u}^2}{12})$ au lieu de $\frac{1}{2}(\ddot{S} + \frac{5 \dot{u}^2}{4})$). Pour toutes ces raisons, nous allons reprendre le calcul de φ_{sym} et de ses dérivées et essayer d'introduire à la place de (32a) et (32b) des expressions formelles ayant une origine mathématique claire et satisfaisant l'exigence de cohérence signalée ci-dessus.

C. METHODE DES CHAMPS MOYENS

1. - Expression du champ près des sources.



Nous allons tout exprimer en fonction de s_c (point contemporain) défini par $R_c \equiv (x - z_c, u_c) = 0$
et de :

$$\epsilon \equiv \sqrt{-z_c^2} \equiv \sqrt{-(x - z_c)^2}$$

Pour ce faire, on utilise systématiquement des développements de Taylor autour de s_c :

$$A(s_c+\sigma) = A_c + \dot{A}_c\,\sigma + \ddot{A}_c\,\frac{\sigma^2}{2} + \dddot{A}_c\,\frac{\sigma^3}{6} + \cdots$$

En particulier, pour $A(s) = r^2 \equiv \left(x - z(s)\right)^2$ on a, utilisant :

$$r_i \equiv x_i - z_i(s) \qquad \dot{r}_i = -u_i \qquad R \equiv r_i u^i \qquad R' \equiv r_i \dot{u}^i \qquad R'' \equiv r_i \ddot{u}^i \text{ etc}\ldots$$

les dérivées successives :

$$r^2 \quad , \; -2R \quad , \; 2-2R' \quad , \; -2R'' \quad , \; -2\dot{u}^2 - 2R''' \quad , \ldots$$

et leurs valeurs en s_c :

$$-\epsilon^2 \quad , \quad 0 \quad , \; 2(1-R'_c) \quad , \; -2R''_c \quad , \; -2(\dot{u}_c^2 + R'''_c) \quad , \ldots$$

D'où

(35) $$r^2(s_c+\sigma) = -\epsilon^2 + (1-R'_c)\,\sigma^2 - \frac{R''_c}{3}\,\sigma^3 - \frac{1}{12}(\dot{u}_c^2 + R'''_c)\,\sigma^4 + \cdots$$

Les points retardés s_+ et avancés s_- sont définis par

$$r_\pm^2 = r^2(s_c + \sigma_\pm) = 0$$

D'où, grâce à (35), l'équation en σ :

$$\epsilon^2 = (1-R'_c)\,\sigma^2 - \frac{R''_c}{3}\,\sigma^3 - \frac{\dot{u}_c^2 + R'''_c}{12}\,\sigma^4 + O(\sigma^5)$$

On en déduit, en extrayant la racine :

$$\sigma = \frac{\pm \epsilon}{\sqrt{1-R'_c}} \left[1 - \frac{R''_c \sigma}{3(1-R'_c)} - \frac{\dot{u}_c^2 + R'''_c}{12(1-R'_c)} \sigma^2 \ldots \right]^{-1/2}$$

D'abord, on voit qu'on a les deux solutions en changeant ϵ en $-\epsilon$. Il suffit donc de prendre $+\epsilon$; cela donne $\sigma > 0$, donc le point avancé. On aura les expressions retardées en changeant ϵ en $-\epsilon$.

On voit que σ est du premier ordre en ϵ mais R''_c aussi; donc, les deux premiers termes de la puissance $-1/2$ sont du 2ème ordre. On a donc tout de suite σ au 3ème ordre, en développant la puissance $-1/2$ au premier ordre et en y remplaçant σ par ϵ, R'_c et R'''_c par 0.
D'où

$$\sigma_- = \frac{\epsilon}{\sqrt{1-R'_c}} + \frac{R''_c}{6} \epsilon^2 + \frac{\dot{u}_c^2}{24} \epsilon^3 + O(\epsilon^4) \tag{36}$$

Ensuite, il nous faut $R(\sigma)$ et, comme $\dot{r}^2 = -2R$, on a déjà écrit ses dérivées plus haut, d'où

$$R(\sigma) = -(1-R'_c)\sigma + \frac{R''_c}{2}\sigma^2 + \frac{\dot{u}_c^2 + R'''_c}{6}\sigma^3 + O(\sigma^4)$$

Soit, en reportant σ_- :

$$R_- = -(1-R'_c)\left[\frac{\epsilon}{\sqrt{1-R'_c}} + \frac{R''_c}{6}\epsilon^2 + \frac{\dot{u}_c^2}{24}\epsilon^3 + O(\epsilon^4)\right] + \frac{R''_c}{2}\left[\epsilon^2 + O(\epsilon^3)\right] + \frac{\dot{u}_c^2}{6}\left[\epsilon^3 + O(\epsilon^4)\right]$$

c'est à dire

$$R_- = -\sqrt{1-R'_c}\,\epsilon + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) R''_c \epsilon^2 + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{24}\right) \dot{u}_c^2 \epsilon^3 + O(\epsilon^4)$$

D'où

$$R_- = -\sqrt{1-R_c'}\,\epsilon + \frac{R_c''}{3}\epsilon^2 + \frac{\dot{u}_c^2}{8}\epsilon^3 + O(\epsilon^4) \tag{37}$$

Le dernier coefficient étant faussement $-\dot{u}_c^2/24$ chez Bhabha et Harish-Chandra. (On voit, dans la ligne ci-dessus d'où vient l'erreur), cette erreur se répercutant dans φ_{sym} ci-dessous.

Maintenant on peut atteindre les potentiels solutions de :

$$\Box\,\varphi = 4\pi \int_L S(s)\,\delta^{(4)}(x-z(s))\,ds$$

expressément :

$$\varphi^{ret}_{av} = \pm\left(\frac{S}{R}\right)_\pm$$

avec, rappelons-le

$$R \equiv (x-z, u)$$

En effet, on peut écrire utilisant (36) :

$$S_- = S_c + \dot{S}_c\,\sigma_- + \ddot{S}_c\frac{\sigma_-^2}{2} + O(\sigma^3) = S_c + \dot{S}_c\frac{\epsilon}{\sqrt{1-R_c'}} + \ddot{S}_c\frac{\epsilon^2}{2} + O(\epsilon^3)$$

et, réécrivant (37) sous la forme :

$$R_- = -\sqrt{1-R_c'}\,\epsilon\left[1 - \frac{R_c''}{3}\epsilon - \frac{\dot{u}_c^2}{8}\epsilon^2 + O(\epsilon^3)\right]$$

On en déduit le potentiel avancé :

$$-\left(\frac{S}{R}\right)_- = \frac{1}{\epsilon\sqrt{1-R'_c}}\left[S_c + \dot{S}_c\frac{\epsilon}{\sqrt{1-R'_c}} + \ddot{S}_c\frac{\epsilon^2}{2}\right]\left[1 - \frac{R''_c}{3}\epsilon - \frac{\dot{u}_c^2}{8}\epsilon^2\right]^{-1}$$

$$= \frac{1}{\epsilon\sqrt{1-R'_c}}\left[S_c + \dot{S}_c\frac{\epsilon}{\sqrt{1-R'_c}} + \ddot{S}_c\frac{\epsilon^2}{2}\right]\left[1 + \frac{R''_c}{3}\epsilon + \frac{\dot{u}_c^2}{8}\epsilon^2\right]$$

$$= \frac{1}{\epsilon\sqrt{1-R'_c}}\left[S_c + \dot{S}_c\frac{\epsilon}{\sqrt{1-R'_c}} + S_c\left(\frac{R''_c}{3}\epsilon + \frac{\dot{u}_c^2}{8}\epsilon^2\right) + \ddot{S}_c\frac{\epsilon^2}{2}\right]$$

c'est à dire

$$-\left(\frac{S}{R}\right)_- = \frac{S_c}{\epsilon\sqrt{1-R'_c}} + \frac{\dot{S}_c}{1-R'_c} + S_c\left(\frac{R''_c}{3} + \frac{\dot{u}_c^2}{8}\epsilon\right) + \ddot{S}_c\frac{\epsilon}{2} + O(\epsilon^2)$$

ou encore avec

$$(1-R'_c)^{-1/2} = 1 + R'_c/2 + 3/8\, R'^2_c \qquad \text{et} \qquad (1-R'_c)^{-1} = 1 + R'_c$$

$$(38) \qquad -\left(\frac{S}{R}\right)_- = \frac{S_c}{\epsilon} + \left[\frac{SR'}{2\epsilon} + \dot{S}\right]_c + \left[S\left(\frac{3}{8}\frac{R'^2}{\epsilon} + \frac{R''}{3} + \frac{\dot{u}^2\epsilon}{8}\right) + \dot{S}R' + \frac{\ddot{S}\epsilon}{2}\right]_c + O(\epsilon^2)$$

avec

$$\left(\frac{S}{R}\right)_+(\epsilon) = \left(\frac{S}{R}\right)_-(-\epsilon) \quad \text{soit} \quad \varphi_{ret}(\epsilon) = -\varphi_{av}(-\epsilon)$$

On en déduit le champ régulier de radiation :

$$(39) \qquad \frac{1}{2}(\varphi_{ret} - \varphi_{av}) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{S}{R}\right)_+ + \left(\frac{S}{R}\right)_-\right] = -\left[\dot{S} + \frac{SR''}{3} + \dot{S}R'\right]_c + O(\epsilon^2)$$

en accord avec H.J. Bhabha et Harish-Chandra (Cf. (31)). On en déduit bien <u>sur la ligne</u> :

$$(39a) \qquad \frac{1}{2}(\varphi_{ret} - \varphi_{av}) = -\dot{S}$$

et on peut atteindre les dérivées premières en identifiant (39) à un développement de Taylor (ce qui est licite puisque $\frac{1}{2}(\varphi_{ret} - \varphi_{av})$ est régulier) d'où :

$$-\left[\underset{c}{S} \frac{\underset{c}{\ddot{u}}_i}{3} + \underset{c}{\dot{S}} \underset{c}{\dot{u}}_i \right] \underset{c}{\eta}^i = \frac{1}{2}(\varphi_{ret} - \varphi_{av})_{,i} \underset{c}{\eta}^i$$

Mais $\underset{c}{\eta}^i$ satisfait une équation linéaire : $\underset{c}{u}_i \underset{c}{\eta}^i = 0$, d'où seulement :

$$\frac{1}{2}(\varphi_{ret} - \varphi_{av})_{,i} = -\left[S \frac{\ddot{u}_i}{3} + \dot{S} \dot{u}_i + \lambda u_i \right]$$

on peut alors déterminer λ en utilisant une relation de cohérence :

$$\frac{1}{2}(\varphi_{ret} - \varphi_{av})_{,i} u^i \equiv \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{2}(\varphi_{ret} - \varphi_{av}) \right]$$

d'où

$$\lambda = \ddot{S} - S \frac{u \ddot{u}}{3}$$

D'où enfin :

(39b) $$\frac{1}{2}(\varphi_{ret} - \varphi_{av})_{,i} = -\left[\frac{S}{3}(\ddot{u}_i + \dot{u}^2 u_i) + \dot{S} \dot{u}_i + \ddot{S} u_i \right]$$

Le problème est maintenant d'étudier $\varphi_{sym} = \frac{1}{2}(\varphi_{ret} + \varphi_{av}) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{S}{R}\right)_+ - \left(\frac{S}{R}\right)_- \right)$ et ses dérivées quand $\epsilon \to 0$. On déduit de (38)

(40) $$\varphi_{sym} = \left\{ \frac{S}{\epsilon} + \frac{SR'}{2\epsilon} + \frac{S}{8}\left(\frac{3R'^2}{\epsilon} + \dot{u}^2 \epsilon \right) + \frac{\ddot{S}}{2} \epsilon \right\}_c + O(\epsilon^2)$$

d'où l'on déduit, comme on va le vérifier :

$$\varphi_{Sym,i} = \left\{ \frac{S\,r_i}{\epsilon^3}\left(1+\frac{R'}{2}+\frac{3}{8}R'^2\right) + \left[\frac{S\dot{u}_i}{2\epsilon}+\frac{\dot{S}u_i}{\epsilon}\right]\left(1+\frac{3}{2}R'\right) + \frac{Su_i}{2}\frac{R''}{\epsilon} - \frac{1}{2}\left(\frac{S\dot{u}^2}{4}+\ddot{S}\right)\frac{r_i}{\epsilon} \right\}_c + O(\epsilon) \qquad (41)$$

En effet, φ_{Sym} s'écrit encore

$$\varphi_{Sym} = \frac{S_c}{\epsilon\sqrt{1-R'_c}} + \frac{1}{2}\left(\frac{S_c\dot{u}_c^2}{4}+\ddot{S}_c\right)\epsilon + O(\epsilon^2)$$

qu'il suffit de dériver en utilisant :

$$\epsilon_{,i} = -\frac{r_{c\,i}}{\epsilon} \qquad \left(\frac{1}{\epsilon}\right)_{,i} = \frac{r_{c\,i}}{\epsilon^3} \qquad s_{c,i} = \left(\frac{u_i}{1-R'}\right)_c$$

d'où

$$R'_{c,i} = \left\{(x^k - z^k(s_c))\,\dot{u}_k(s_c)\right\}_{,i} = \left(\delta_i^k - \frac{u_i u^k}{1-R'}\right)\dot{u}_k + r^k\ddot{u}_k\frac{u_i}{1-R'} = \left(\dot{u}_i + \frac{R''}{1-R'}u_i\right)_c$$

Finalement

$$\varphi_{Sym,i} = \frac{S_c}{\sqrt{1-R'_c}}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)_{,i} + \frac{\dot{S}_c}{\epsilon\sqrt{1-R'_c}}s_{c,i} + \frac{1}{2}\frac{S_c}{\epsilon(1-R'_c)^{3/2}}R'_{c,i} + \frac{1}{2}\left(\frac{S_c\dot{u}_c^2}{4}+\ddot{S}_c\right)\epsilon_{,i} + O(\epsilon)$$

$$= \left\{\frac{S}{\sqrt{1-R'}}\frac{r_i}{\epsilon^3} + \frac{\dot{S}u_i}{\epsilon(1-R')^{3/2}} + \frac{S}{2\epsilon(1-R')^{3/2}}\left[\dot{u}_i + \frac{R''}{1-R'}u_i\right] - \frac{1}{2}\left(\frac{S\dot{u}^2}{4}+\ddot{S}\right)\frac{r_i}{\epsilon}\right\}_c$$

On retrouve bien (41) en développant les puissances de $1-R'$. On va maintenant utiliser (40) et (41) pour rechercher des expressions formelles cohérentes, susceptibles de représenter la partie de la selfinteraction destinée à être renormalisée.

2. - Introduction des champs moyens.

Quand $\epsilon \to 0$, on a d'après (40) :

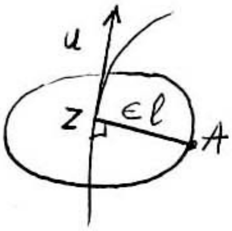
$$\varphi_{Sym} = \frac{S_c}{\epsilon} + \frac{S_c\dot{u}_{c\,i}}{2}\frac{r_c^{\,i}}{\epsilon} + O(\epsilon)$$

Le deuxième terme de cette expression est borné et ne tend pas vers zéro avec ϵ ; cependant son comportement " oscillant " en fonction de la direction d'approche de la ligne suggère de prendre comme valeur " efficace " de φ_{sym} sa MOYENNE sur la sphère contemporaine : $R_c = 0 \quad \underset{c}{r}^2 = -\epsilon^2$.

Nous noterons $\langle \quad \rangle$ cette moyenne, définie par :

$$\langle A \rangle \equiv \frac{1}{4\pi} \int A(z + \epsilon \ell)\, d\Omega_0$$

où $(u\ell) = 0$, $\ell^2 = -1$ et où Ω_0 désigne l'angle solide dans le 3-espace lié à u .



Cette moyenne est bien sûr, distincte de la moyenne sur la sphère retardée utilisée en I C.

Alors naturellement $\langle \underset{c}{r}_i \rangle = 0$ d'où :

(40a) $$\langle \varphi_{sym} \rangle = \frac{S}{\epsilon}$$

en accord avec (32a).
De même, pour la dérivée (41), on a facilement compte-tenu de $\langle \underset{c}{r}^i \rangle = 0$:

$$\langle \varphi_{sym,i} \rangle = \frac{S}{\epsilon^3} \langle \underset{c}{r}_i \left(\frac{R'_c}{2} + \frac{3}{8} R'^2_c \right) \rangle + \frac{S \dot{u}_i}{2\epsilon} + \frac{\dot{S} u_i}{\epsilon}$$

or si, en raison de l'imparité

$$\langle \underset{c}{r}_i R'^2_c \rangle = \underset{c}{\dot{u}}^k \underset{c}{\dot{u}}^\ell \langle \underset{c}{r}_i \underset{c}{r}_k \underset{c}{r}_\ell \rangle = 0$$

il vient, en revanche

$$\langle \underset{c}{r}_i R'_c \rangle = \underset{c}{\dot{u}}^k \langle \underset{c}{r}_i \underset{c}{r}_k \rangle = -\dot{u}_i \frac{\epsilon^2}{3}$$

comme on le vérifie immédiatement dans le repère lié à u_c où

$$\underset{c}{r}_0 = 0 \qquad \dot{u}_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \langle r^\alpha r^\beta \rangle = \frac{\epsilon^2}{3} \delta^{\alpha\beta}$$

D'où :

$$\langle \varphi^{sym}_{,i} \rangle = \frac{S \dot{u}_i}{3 \epsilon} + \frac{\dot{S} u_i}{\epsilon} \tag{41a}$$

cette expression diffère doublement de (32b); mais elle a, cette fois, une origine mathématique claire et surtout elle est cohérente avec (40a) puisqu'on a :

$$u^i \langle \varphi^{sym}_{,i} \rangle = \frac{\dot{S}}{\epsilon} = \frac{d}{ds} \langle \varphi^{sym} \rangle$$

Mais on peut aussi, à cuase de la forme de l'élément de surface du tube contemporain, $-dS_k = \epsilon \underset{c}{r}_k (1 - R'_c)\, d\underset{0}{\Omega}\, ds$, décider de prendre une moyenne sur $\underset{0}{\Omega}$, moyenne pondérée par un facteur du type : $(1 - R'_c)^\nu$. Des valeurs naturelles de ν étant 0, 1 et 1/2 (car l'énergie est quadratique en φ). On notera $\langle\ \rangle_\nu$ une telle moyenne. Il n'y a d'ailleurs pas besoin de préciser, pour les applications que l'on va en faire, si $\langle A \rangle_\nu = \langle A (1 - R'_c)^\nu \rangle$ ou $\dfrac{\langle A (1 - R'_c)^\nu \rangle}{\langle (1 - R'_c)^\nu \rangle}$ car $\langle (1 - R'_c)^\nu \rangle = 1 + O(\epsilon^2)$.

On voit alors facilement, en refaisant le calcul ci-dessus, que cette ν -moyenne n'apporte qu'un seul terme nouveau :

$$\frac{S}{\epsilon^3} \langle \underset{c}{r}_i (-\nu R'_c) \rangle = \frac{\nu S}{3 \epsilon} \dot{u}_i$$

d'où

$$\langle \varphi^{sym} \rangle_\nu = \frac{S}{\epsilon} \qquad \text{et} \qquad \langle \varphi^{sym}_{,i} \rangle = \frac{1+\nu}{3} \frac{S \dot{u}_i}{\epsilon} + \frac{\dot{S} u_i}{\epsilon}$$

Rassemblant ceci avec (39a) et (39b), on obtient la ν-moyenne du champ retardé :

$$
(42) \quad \begin{cases} \text{(a)} \quad \langle \varphi^{ret} \rangle_\nu = \dfrac{S}{\epsilon} - \dot{S} \\[2ex] \text{(b)} \quad \langle \varphi^{ret}_{,i} \rangle_\nu = \dfrac{1+\nu}{3} \dfrac{S \dot{u}_i}{\epsilon} + \dfrac{\dot{S} u_i}{\epsilon} - \dfrac{S}{3}(\ddot{u}_i + \dot{u}^2 u_i) - \dot{S} \dot{u}_i - \ddot{S} u_i \end{cases}
$$

On a ainsi des expressions cohérentes qui peuvent servir de base à une méthode de calcul de la selfinteraction : on remplacera (42) dans les équations du mouvement; les termes finis donneront les " freinages " radiatifs et les termes en ϵ^{-1} devront pouvoir s'éliminer par renormalisation.

3. - Application aux champs électromagnétique, scalaire et tensoriel.

Désignons en général l'équation de mouvement par $\Lambda_i = 0$ où $\Lambda_i \equiv \mu \dot{u}_i + \mathcal{L}_i(\varphi)$, μ étant la masse inerte non renormalisée. Comme on sait que les termes finis dans (42) redonneront les termes radiatifs bien connus (Cf. I), on ne s'intéressera qu'aux termes en ϵ^{-1} et à la renormalisation qu'ils entraînent.

α) pour le champ électromagnétique on a

$$\Lambda_i = \mu \dot{u}_i + e\, \varphi_{ik} u^k$$

et

$$\varphi_{ik} = \varphi_{i,k} - \varphi_{k,i} \qquad \text{où} \qquad \varphi_i = \frac{e u_i}{R}$$

On a donc

$$S = e u_i \qquad \text{d'où} \qquad \langle \varphi^{sym}_{i,k} \rangle_\nu = e\left(\frac{1+\nu}{3} u_i \dot{u}_k + \dot{u}_i u_k \right) \epsilon^{-1}$$

c'est à dire

$$\langle \varphi^{sym}_{ik} \rangle_\nu = \frac{2-\nu}{3} e \, \dot{u}_{[i} u_{k]} \epsilon^{-1} \quad \text{donc} \quad e \langle \varphi^{sym}_{ik} \rangle_\nu u^k = \frac{2-\nu}{3} e^2 \dot{u}_i \epsilon^{-1}$$

Donc il apparaît dans Λ_i un terme en : $\left(\mu + \frac{2-\nu}{3} \frac{e^2}{\epsilon}\right) \dot{u}_i$

Ce qui donne si on appelle m la masse observable c'est à dire celle justement qui apparaît dans l'équation du mouvement :

$$\mu = m - \frac{2-\nu}{3} \frac{e^2}{\epsilon}$$

β) pour le champ scalaire on a

$$\Lambda_i = \left[(\mu - M\varphi) u_i\right]^{\cdot} + M \varphi_{,i}$$

Ici $S = M$ d'où $\langle \varphi^{sym} \rangle_\nu = \frac{M}{\epsilon}$ et $\langle \varphi^{sym}_{,i} \rangle_\nu = \frac{1+\nu}{3} \frac{M \dot{u}_i}{\epsilon}$

d'où un terme en :

$$\left(\mu - \frac{2-\nu}{3} \frac{M^2}{\epsilon}\right) \dot{u}_i$$

c'est à dire la relation :

$$\mu = m + \frac{2-\nu}{3} \frac{M^2}{\epsilon}$$

γ) pour le champ tensoriel :

$$\Lambda_i = \left[(\mu + M u^r u^s h_{rs}) u_i - 2M h_{ik} u^k\right]^{\cdot} + M u^r u^s h_{rs,i}$$

avec $$S = M (u_i u_k + h \eta_{ik})$$

d'où

$$\langle h^{sym}_{rs} \rangle_\nu = \frac{M}{\epsilon} \, (u_r u_s + h \, \eta_{rs})$$

$$\langle h^{sym}_{rs,i} \rangle_\nu = \frac{1+\nu}{3} (u_r u_s + h \, \eta_{rs}) \frac{M \dot{u}_i}{\epsilon} + (u_r u_s)^{\cdot} \, \frac{M u_i}{\epsilon}$$

Donc

$$\langle h^{sym}_{ik} \rangle_\nu \, u^k = (h+1) \frac{M}{\epsilon} \, u_i \qquad\qquad u^r u^s \langle h^{sym}_{rs} \rangle = (h+1) \frac{M}{\epsilon}$$

et

$$u^r u^s \langle h^{sym}_{rs,i} \rangle_\nu = \frac{1+\nu}{3} (h+1) \frac{M \dot{u}_i}{\epsilon}$$

On obtient donc un terme en

$$\left(\mu + M^2 \frac{h+1}{\epsilon} - 2 M^2 \frac{h+1}{\epsilon} + \frac{1+\nu}{3} \, \frac{h+1}{\epsilon} \, M^2 \right) \dot{u}_i$$

qui donne

$$\mu = m + (h+1) \, \frac{2-\nu}{3} \, \frac{M^2}{\epsilon}$$

En résumé, on obtient par les méthodes de ce chapitre les renormalisations :

$$(43) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mu^{II}_{elm} &= m - \frac{2-\nu}{3} \, \frac{e^2}{\epsilon} \\ \mu^{II}_{Scal} &= m + \frac{2-\nu}{3} \, \frac{M^2}{\epsilon} \\ \mu^{II}_{Tens} &= m + (h+1) \frac{2-\nu}{3} \, \frac{M^2}{\epsilon} \end{aligned} \right.$$

Au lieu de celles, interprétables physiquement, données par le Chapitre I :

$$(44)\quad \begin{cases} \mu^{I}_{elm} = m - \dfrac{e^2}{2\epsilon} \\ \mu^{I}_{Scal} = m - \dfrac{M^2}{2\epsilon} \\ \mu^{I}_{Tens} = m - (h+1)\dfrac{M^2}{2\epsilon} \end{cases}$$

On voit, à cause du changement de signe dans (43), qu'il est impossible de rendre compatibles les renormalisations (43) et (44).

Cependant, le choix $\gamma = 1/2$ (suggéré par le fait que l'énergie est quadratique dans le champ) donne :

$$(43a)\quad \begin{cases} \mu^{II}_{elm} = m - \dfrac{e^2}{2\epsilon} \\ \mu^{II}_{Scal} = m + \dfrac{M^2}{2\epsilon} \\ \mu^{II}_{Tens} = m + (h+1)\dfrac{M^2}{2\epsilon} \end{cases}$$

La dernière équation (cas tensoriel) est conforme au résultat de S. Mavrides (1966) (en remplaçant h par $-k/1+4k$ et en introduisant le rapport masse inerte, masse grave), mais diffère par le signe du coefficient de ϵ^{-1}, de l'expression obtenue au Chapitre I. Il n'est donc pas possible de l'interpréter à partir de l'énergie du champ coulombien.

En somme on voit que si la méthode des champs moyens est cohérente et donne bien les termes radiatifs habituels, elle se révèle, en revanche, incapable de fournir des renormalisations dont l'interprétation physique soit simple.

L'emploi (très simplifié grâce au procédé du Chapitre I) de la méthode de Dirac est donc indispensable si l'on veut obtenir des renormalisations intuitivement significatives.