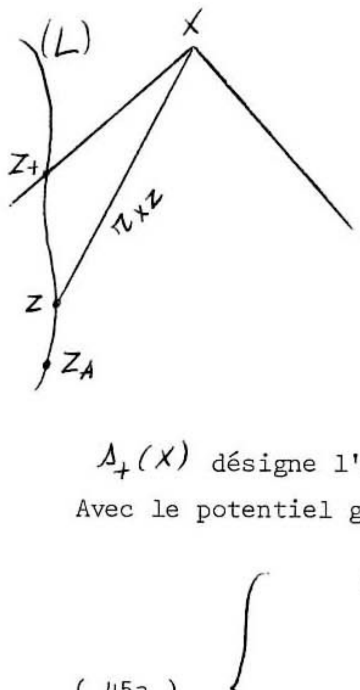
C H A P I T R E III

METHODES UTILISANT UNE LOI DE FORCE DIRECTE DE LA PARTICULE SUR ELLE-MEME

A. RAPPEL DES METHODES DE M. RIESZ (1949) ET DE E. SCHMUTZER (1966).

1. - Potentiels de Riesz (1949).

Ils sont définis par le prolongement analytique jusqu'en $\alpha = 0$ de :



$$ {}^{(\alpha)}\varphi(x) \equiv \frac{4\pi}{H_4(\alpha+2)} \int_{s_A}^{s_+(x)} S(s)\, r_{xz}^{\alpha-2}\, ds \qquad (45)$$

où

$$ r_{xz} \equiv \sqrt{(x-z)^2} $$

$$ H_4(\alpha) = \pi\, 2^{\alpha-1}\, \Gamma\!\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) \Gamma\!\left(\tfrac{\alpha}{2}-1\right) $$

et s_A est une constante pendant que, comme d'habitude $s_+(x)$ désigne l'abscisse du point retardé associé à x .

Avec le potentiel généralisé ${}^{(\alpha)}\varphi(x)$ sont aussi définis les champs ${}^{(\alpha)}\mathcal{H}(x)$:

$$ (45a) \quad \begin{cases} {}^{(\alpha)}\mathcal{H}(x) \equiv D_x \left\{ {}^{(\alpha)}\varphi(x) \right\} \\[2ex] \text{avec} \quad D_x \equiv \dfrac{\partial^n}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_n}} \end{cases} $$

Quand x est sur la ligne d'univers L c'est à dire quand $x = z_0 \equiv z(s_0)$ il est facile de voir que le prolongement en $\alpha = 0$ de ${}^{(\alpha)}\mathcal{H}(z_0)$ existe et qu'il est fini. On a donc, en ${}^{(0)}\mathcal{H}(z_0)$, un champ défini sur la ligne, champ qui peut servir directement à engendrer une self-force de la particule sur elle-même.

D'ailleurs, S.T. Ma (1947) a prouvé en général que :

$$(46) \qquad {}^{(0)}\mathcal{U}(z_0) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{U}_{ret} - \mathcal{U}_{av}\right)_0$$

c'est à dire l'équivalence de la méthode de Riesz avec celle de Dirac.

Vue l'importance de ce résultat et l'utilisation que nous en ferons, nous le redémontrerons en Appendice I.

2. - Méthode de E. Schmutzer (1966).

E. Schmutzer a introduit un champ formel de selfinteraction de la ligne d'univers ainsi défini : on part du champ retardé habituel $\mathcal{U}_{ret}(x)$, champ qui est une fonction rationnelle de $x, z_+, \dot{z}_+, \ldots$; $S(s_+), \dot{S}_+, \ldots$ (par exemple $\varphi_{ret}(x) = S_+/(x - z_+, \dot{z}_+)$). On y remplace formellement x par $z(s)$ et z_+ par $z(\tilde{s}) = z(s - \sigma)$ (ce qui viole la condition de retard : $(x-z)^2 = 0$); puis, on développe toutes les quantités qui interviennent en séries de puissances de $\sigma = s - \tilde{s}$ autour du point s .

On obtient ainsi :

$$(47) \quad \begin{cases} \text{(a)} \quad \varphi^{schm} = \dfrac{S}{\sigma} - \dot{S} \\[2ex] \text{(b)} \quad \varphi^{schm}_{,i} = \dfrac{S\dot{u}_i}{2\sigma} + \dfrac{\dot{S}u_i}{\sigma} - \dfrac{S}{3}(\ddot{u}_i + \dot{u}^2 u_i) - \dot{S}\dot{u}_i - \ddot{S}u_i \end{cases}$$

expressions que l'on remplace dans l'équation du mouvement, σ^{-1} s'éliminant par renormalisation.

B. EXAMEN CRITIQUE DES METHODES PRECEDENTES

1. - Utilisation incomplète de la méthode de M. Riesz.

La méthode de Riesz est, mathématiquement, très claire et nous fournit aussi une nouvelle méthode de calcul des champs propres de radiation $\frac{1}{2}\left(\mathcal{U}_{ret} - \mathcal{U}_{av}\right)$.

En fait, on n'en a pas tiré tout le profit possible. Par exemple, S.T. Ma (1947) a bien proposé un procédé de calcul des champs de radiation utilisant les potentiels de Riesz; mais la mise en oeuvre de ce procédé, quoique plus simple que celle nécessitée par la méthode de Harish-Chandra (1946), est encore très complexe comparée à la méthode que nous proposons ci-dessous (III C). Cette dernière va réduire le calcul à une simple inspection.

2. - <u>Difficultés de la méthode de E. Schmutzer.</u>

L'origine mathématique de la méthode de Schmutzer est en revanche peu claire puisque le remplacement $x = z(s)$, $z_+ = z(s') = z(s-\sigma)$, est incompatible avec la condition $(x-z)^2 = 0$ qui a pourtant été utilisée dans le calcul de l'expression formelle de $\mathcal{U}_{ret}(x, z_+, \dot{z}_+, \dots)$. Cependant, on voit que pour le potentiel et sa dérivée première, cette méthode donne les mêmes résultats formels (Cf. (47)) que les champs moyens (42) dans le cas $\nu = 1/2$. En particulier, les termes finis sont bien les termes radiatifs classiques.

Mais les calculs auxquels cette méthode donne lieu sont assez lourds (nous verrons plus bas une façon de les alléger) et surtout, quand l'ordre de dérivation augmente ($\varphi^{schm}_{,ik}$; $\varphi^{schm}_{,ik\ell}$ etc ...), les termes finis ne coïncident plus avec les termes radiatifs et les expressions formelles obtenues ne sont plus cohérentes (au sens du II B). Par exemple :

$$u^\ell \varphi^{schm}_{,ik\ell} \neq \frac{d}{ds} \varphi^{schm}_{,ik}$$

(il serait très difficile de vérifier directement ces dernières affirmations à partir de la définition des champs de Schmutzer, mais cela sera très facile grâce à la méthode que nous allons introduire).

Pour toutes les raisons ci-dessus énoncées, nous allons maintenant exposer une nouvelle méthode, dont la cohérence sera évidente, et dont la mise en oeuvre jouit d'une légèreté de calculs si exceptionnelle qu'il sera possible d'obtenir comme sous-produit l'expression complète de $\frac{1}{2}\left[\varphi^{ret}_{,ik\ell} - \varphi^{av}_{,ik\ell}\right]_L$: quantité inaccessible par les méthodes ordinaires et obtenue ici par simple inspection.

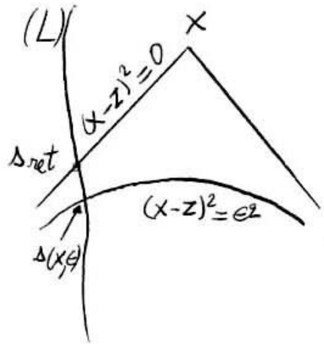
C. METHODE DES POTENTIELS PLUSQUE RETARDES.

1. - Principe de la méthode.

Considérons, au lieu du potentiel retardé habituel :

$$\varphi_{ret}(x) = \left(\frac{S}{R}\right)_+ \tag{48a}$$

où $R \equiv (x-z, u)$ et où z, le point de L associé à x, satisfait :



$$(48)\quad \begin{cases} \text{(b)} & (x-z)^2 = 0 \\ \text{(c)} & x^0 - z^0 > 0 \end{cases}$$

le potentiel plusque retardé, défini par les relations :

$$(49)\quad \begin{cases} \text{(a)} & \varphi(x,\epsilon) = \left(\dfrac{S}{R}\right) \\ \text{(b)} & (x-z)^2 = \epsilon^2 \\ \text{(c)} & x^0 - z^0 > 0 \end{cases}$$

(b) et (c) : définition du point plusque retardé associé à x : $z(x,\epsilon)$

Le potentiel est tel que $\varphi(x,0) \equiv \varphi_{ret}(x)$ mais, quand ϵ est différent de zéro, $\varphi(x,\epsilon)$ est régulier sur la ligne d'univers L ce qui le rend apte à exprimer une selfinteraction de la ligne.

La propriété la plus remarquable de ce potentiel plusque retardé est qu'il possède, ainsi que toutes ses dérivées successives, la même structure formelle que les potentiels et champs retardés habituels. En effet, on obtient en différenciant (49b) :

$$(x_i - z_i)(dx^i - u^i ds) = \epsilon\, d\epsilon$$

soit

$$ds = \frac{r_i}{R}\, dx^i - \frac{\epsilon}{R}\, d\epsilon$$

où, comme d'habitude, $r_i \equiv x_i - z_i$ et où tout est pris au point plusque retardé.

On a donc

$$(50) \begin{cases} \text{(a)} \quad \dfrac{\partial s}{\partial x^i}(x,\epsilon) = \dfrac{r_i}{R} \\[2ex] \text{(b)} \quad \dfrac{\partial s}{\partial \epsilon}(x,\epsilon) = -\dfrac{\epsilon}{R} \end{cases}$$

comme (50a) ne contient pas ϵ explicitement, on voit que la différenciation est formellement la même que dans le cas $\epsilon = 0$, c'est à dire le cas retardé usuel. Donc, toutes les dérivées de $\varphi(x,\epsilon)$ auront la même structure formelle que les dérivées correspondantes de $\varphi_{ret}(x)$. Par exemple :

$$\varphi_{,i} = \frac{\dot{S}\, r_i}{R^2} - \frac{S}{R^2} R_{,i} = \frac{\dot{S}\, r_i}{R^2} - \frac{S}{R^2}\left[u_i + \frac{R^1 - 1}{R} r_i\right]$$

Considérons alors avec $\varphi(x,\epsilon)$ toutes ses dérivées notées $\mathcal{Y}(x,\epsilon)$:

$$(51) \begin{cases} \mathcal{Y}(x,\epsilon) \equiv D_x\, \varphi(x,\epsilon) \\[2ex] D_x \text{ désignant } \dfrac{\partial^n}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_n}} \end{cases}$$

En particulier, la valeur de $\mathcal{Y}$ en un point $z_0 = z(s_0)$ de L est finie et peut, en fait, se développer en série de Laurent de ϵ :

$$(52) \quad \mathcal{Y}(z(s_0),\epsilon) = \sum_{k=-m}^{0} {}_{[k]}\mathcal{Y}(s_0)\, \epsilon^k + O(\epsilon) = \frac{{}_{[-m]}\mathcal{Y}(s_0)}{\epsilon^m} + \ldots + \frac{{}_{[-1]}\mathcal{Y}(s_0)}{\epsilon} + {}_{[0]}\mathcal{Y}(s_0) + O(\epsilon)$$

(on désigne, sans distinction, par ${}_{[n]}f$ ou $\underset{x^n}{\text{Terme}}\, f(x)$ le coefficient de x^n

dans le développement d'une fonction $f(x)$, n étant un entier relatif quelconque).

La méthode que l'on propose ici consiste à utiliser $\mathcal{U}(z_0, \epsilon)$ comme champ de selfinteraction et, par conséquent, à insérer le développement (52) dans l'équation de mouvement : ${}_{[0]}\mathcal{U}$ définira la selfinteraction finie, les autres termes ${}_{[-k]}\mathcal{U}\ \epsilon^{-k}$ seront éliminés par la renormalisation.

D'abord , il est prouvé en appendice que ${}_{[0]}\mathcal{U}(s_0)$ identique à ${}^{(0)}\mathcal{U}(z_0)$ de la méthode de Riesz est égal à $\frac{1}{2}(\mathcal{U}_{ret} - \mathcal{U}_{av})_0$ et, par conséquent, la méthode ici prônée redonnera les termes finis habituels de selfinteraction. Cependant, il sera possible de trouver une formule très simple pour tous les termes du développement (52) : ${}_{[-k]}\mathcal{U}(s_0)$. Aussi le cas particulier de cette formule pour $k = 0$ nous fournira une méthode nouvelle et très courte de calcul des champs de radiation habituels.

2. - Cohérence de la méthode.

Contrairement à plusieurs autres méthodes, la cohérence de cette méthode est presque évidente. En effet, X et ϵ étant des variables indépendantes on a :

$$\frac{d}{ds_0}\mathcal{U}(z(s_0), \epsilon) = \frac{dz^i}{ds_0}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x^i}(z(s_0), \epsilon)$$

et, en développant en puissances de ϵ , on peut identifier les coefficients d'où :

$$\text{(53)} \qquad \frac{d}{ds_0}\left({}_{[-k]}\mathcal{U}(s_0)\right) = u^i\left[{}_{[-k]}\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x^i}\right)(s_0)\right]$$

ce qui est la forme précise de la relation de cohérence formelle.
(Elle peut servir de vérification complémentaire des calculs).

3. - Application directe de la méthode à φ et $\varphi_{,i}$.

Notons $\tilde{s}$ le point plusque retardé $s(X,\epsilon)$, on a explicitement :

$$
(54) \quad \begin{cases} \varphi(z_0,\epsilon) = \dfrac{S(\tilde{s})}{(z(s_0)-z(\tilde{s}),\tilde{u})} \\ \varphi_{,i}(z_0,\epsilon) = \dfrac{\dot{S}(\tilde{s})}{(z_0-\tilde{z},\tilde{u})^2}(z_{0i}-\tilde{z}_i) - \dfrac{S(\tilde{s})}{(z_0-\tilde{z},\tilde{u})^2}\left[\tilde{u}_i - \dfrac{1-(z_0-\tilde{z},\tilde{\dot{u}})}{(z_0-\tilde{z},\tilde{u})}(z_{0i}-\tilde{z}_i)\right] \end{cases}
$$

Etant donné la fréquence beaucoup plus grande de l'argument $\tilde{s}$ que de l'argument s_0 , il est tout indiqué de développer en puissances de $\sigma = s_0 - \tilde{s}$ <u>autour de $\tilde{s}$</u> et non autour de s_0 . On a ainsi très simplement :

$$
z_{0i} - \tilde{z}_i = z_i(\tilde{s}+\sigma) - z_i(\tilde{s}) = \sigma\left(\tilde{u}_i + \frac{\sigma}{2}\tilde{\dot{u}}_i + \frac{\sigma^2}{6}\tilde{\ddot{u}}_i + O(\sigma^3)\right)
$$

$$
R = (z_{0i}-\tilde{z}_i)\tilde{u}^i = \sigma\left(1 - \frac{\sigma^2}{6}\tilde{\dot{u}}^2 + O(\sigma^3)\right)
$$

$$
R' = (z_{0i}-\tilde{z}_i)\tilde{\dot{u}}^i = \frac{\sigma^2}{2}\widetilde{\dot{u}^2} + O(\sigma^3)
$$

d'où

$$
\tilde{u}_i - \frac{1-R'}{R}(z_{0i}-\tilde{z}_i) = \tilde{u}_i - \frac{1-\frac{\sigma^2}{2}\tilde{\dot{u}}^2}{1-\frac{\sigma^2}{6}\tilde{\dot{u}}^2}\left(\tilde{u}_i + \frac{\sigma}{2}\tilde{\dot{u}}_i + \frac{\sigma^2}{6}\tilde{\ddot{u}}_i\right)
$$

$$
= -\frac{\sigma}{2}\tilde{\dot{u}}_i + \frac{\sigma^2}{3}\left(\tilde{\dot{u}}^2\tilde{u}_i - \frac{1}{2}\tilde{\ddot{u}}_i\right)
$$

Donc en remplaçant dans (54) :

$$
\varphi = \frac{\tilde{S}}{\sigma} + O(\sigma)
$$

$$
\varphi_{,i} = \frac{\tilde{\dot{S}}}{\sigma}\,\frac{\tilde{u}_i + \frac{\sigma}{2}\tilde{\dot{u}}_i + O(\sigma^2)}{1+O(\sigma^2)} - \frac{\tilde{S}}{\sigma(1+O(\sigma^2))}\left(-\frac{\tilde{\dot{u}}_i}{2} + \frac{\sigma}{3}\left(\tilde{\dot{u}}^2\tilde{u}_i - \frac{\tilde{\ddot{u}}_i}{2}\right)\right)
$$

c'est à dire

$$\varphi_{,i} = \frac{1}{\sigma}\left[\widetilde{\dot{S} u_i} + \frac{1}{2}\, \widetilde{S \dot{u}_i} \right] - \frac{\tilde{S}}{3}\left(\tilde{\dot{u}}^2 \tilde{u}_i - \frac{1}{2}\tilde{\ddot{u}}_i\right) + \frac{\widetilde{\dot{S}\dot{u}_i}}{2} + O(\sigma)$$

La translation de $\tilde{s}$ en s_0 se fait maintenant très simplement car :

$$\frac{\tilde{M}}{\sigma} + \tilde{N} = \frac{M(s_0-\sigma)}{\sigma} + N(s_0-\sigma) = \frac{M(s_0)}{\sigma} - \dot{M}(s_0) + N(s_0) + O(\sigma)$$

d'où, avec $S \equiv S(s_0)$ etc... :

$$(55)\quad \begin{cases} \varphi = \dfrac{S}{\sigma} - \dot{S} \\[2ex] \varphi_{,i} = \dfrac{1}{\sigma}\left[\dfrac{S\dot{u}_i}{2} + \dot{S} u_i \right] - \dfrac{S}{3}(\ddot{u}_i + \dot{u}^2 u_i) - \dot{S}\dot{u}_i - \ddot{S} u_i \end{cases}$$

On retrouve ainsi (47) bien que plus simplement, maintenant il faut remplacer σ en fonction de ϵ . Mais il est immédiat que

$$\epsilon^2 = (z_0 - \tilde{z})^2 = \left[\sigma\left(\tilde{u}_i + \frac{\sigma}{2}\tilde{\dot{u}}_i + O(\sigma^2)\right)\right]^2 = \sigma^2(1+O(\sigma^2)) \qquad \text{d'où } \epsilon = \sigma(1+O(\sigma^2))$$

de sorte que le développement (55) est encore vrai avec ϵ au lieu de σ .
D'où enfin :

$$\varphi(z_0,\epsilon) = \frac{{}_{[-1]}\varphi}{\epsilon} + {}_{[0]}\varphi$$

$$\varphi_{,i}(z_0,\epsilon) = \frac{{}_{[-1]}\varphi_{,i}}{\epsilon} + {}_{[0]}\varphi_{,i}$$

$$(56)\quad \begin{cases} {}_{[-1]}\varphi = S & {}_{[0]}\varphi = -\dot{S} \\[2ex] {}_{[-1]}\varphi_{,i} = \frac{1}{2} S\dot{u}_i + \dot{S} u_i & {}_{[0]}\varphi_{,i} = -\dfrac{S}{3}(\ddot{u}_i + \dot{u}^2 u_i) - \dot{S}\dot{u}_i - \ddot{S} u_i \end{cases}$$

Le calcul que l'on vient de faire pour φ et $\varphi_{,i}$ se complique à l'extrême pour les dérivées supérieures, aussi va-t-on utiliser les liens entre le potentiel plusque retardé et le potentiel de Riesz pour en déduire un procédé très efficace de calcul de ${}_{[-k]}\mathcal{U}(s_0)$.

4. - Formules générales pour les ${}_{[-k]}\mathcal{U}(s)$.

Ces formules seront obtenues par un procédé de prolongement analytique. Partons d'une généralisation des potentiels de Riesz. Soit pour $\mathcal{R}(\alpha)$ assez grand :

$$(57) \qquad {}^{(\alpha)}_{[-k]}\overline{\Phi}(x) \equiv \alpha \int_{s_A}^{s_+(x)} S(s)\, r_{xz}^{\alpha+k-2}\, ds$$

où $r_{xz} \equiv \sqrt{(x-z)^2}$, s_A est une constante et $s_+(x)$ le point retardé associé à x .

Le prolongement analytique sera effectué jusqu'en $\alpha = 0$.
Utilisant ϵ à la place de s comme variable d'intégration dans (57) on a, d'après (50b)

$$ds = -\frac{\epsilon\, d\epsilon}{R} \qquad \text{et} \qquad r_{xz} = \epsilon \qquad \text{d'où :}$$

$$(58) \qquad {}^{(\alpha)}_{[-k]}\overline{\Phi}(x) = \alpha \int_0^{\epsilon_A(x)} \left(\frac{S}{R}\right) \epsilon^{\alpha+k-1}\, d\epsilon = \alpha \int_0^{\epsilon_A(x)} \varphi(x,\epsilon)\, \epsilon^{\alpha+k-1}\, d\epsilon$$

avec $\qquad \epsilon_A(x) = r_{xz(s_A)}$

On introduit aussi les champs associés à ${}^{(\alpha)}_{[-k]}\overline{\Phi}(x)$:

$$(57a) \qquad {}^{(\alpha)}_{[-k]}\overline{\Psi}(x) \equiv D_x \left\{ {}^{(\alpha)}_{[-k]}\overline{\Phi}(x) \right\}$$

avec

$$D_x = \frac{\partial^n}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_n}}$$

ce qui donne, d'après (58)

$$(58a) \qquad {}^{(\alpha)}_{[-k]}\mathcal{I}(x) = \alpha \int_0^{\epsilon_A(x)} \mathcal{H}(x,\epsilon)\, \epsilon^{\alpha+k-1} d\epsilon \; + \alpha\, E_A(x)$$

Le terme supplémentaire $\alpha\, E_A(x)$ provient de la variation de la limite $\epsilon_A(x)$. Mais il s'annule avec α , de sorte qu'il ne jouera aucun rôle dans la suite.

Le prolongement analytique du premier terme va nous être donné par le théorème suivant : si l'on peut écrire $f(x) = \sum_{n=-p}^{q} {}_{[n]}f\, x^n + x^q o(1)$ alors :

$$(\text{Prolong. Analyt.})_{\alpha=0} \;\; \alpha \int_0^A f(x)\, x^{\alpha-1} dx = {}_{[0]}f = \underset{x^0}{\text{Terme}}\, f(x)$$

Appliquant ceci à la fonction :

$g(x) = f(x)\, x^k$ on a pour $-q \leq k\, (\leq p)$:

$$(59) \qquad (\text{Prolong. analyt.})_{\alpha=0} \;\; \alpha \int_0^A f(x)\, x^{\alpha+k-1} dx = {}_{[-k]}f = \underset{x^{-k}}{\text{Terme}}\, f(x)$$

En sorte que (58a) nous donne :

$$(60) \qquad {}^{(0)}_{[-k]}\mathcal{I}(x) = \underset{\epsilon^{-k}}{\text{Terme}}\, \mathcal{H}(x,\epsilon)$$

En prenant $x = z(s_0)$ on a donc les coefficients du développement (52) :

$$(61) \qquad {}_{[-k]}\mathcal{H}(s_0) = \underset{\epsilon^{-k}}{\text{Terme}}\, \mathcal{H}(z_0,\epsilon) = {}^{(0)}_{[-k]}\mathcal{I}(z(s_0))$$

On obtiendra alors le résultat annoncé en dérivant ${}^{(\alpha)}_{[-k]}\Phi(x)$ sous la forme

(57), d'où :

$$\underset{[-k]}{\overset{(\alpha)}{\mathcal{I}}}(x) \equiv D_x \left\{ \underset{[-k]}{\overset{(\alpha)}{\Phi}}(x) \right\} = \alpha \int_{s_A}^{s_+(x)} S(s)\, D_x\, \tau_{xz}^{\alpha+k-2}\, ds \tag{62}$$

sans termes supplémentaires dûs à $s_+(x)$ car $\tau_{xz_+} = 0$ (on se souvient que l'on prend $\mathcal{R}(\alpha)$ assez grand pour éviter toute divergence).

Introduisons alors comme variables, à la place de s et x :

$$(63)\quad \begin{cases} \text{(a)} & \sigma \equiv s - s_0 \quad < 0 \\ \text{(b)} & a_i \equiv \dfrac{x_i - z_i(s)}{-\sigma} \end{cases}$$

où s_0 est une constante telle que, après dérivation : $x = z(s_0)$; en attendant, on a :

$$\tau_{xz} = (-\sigma)\, a \qquad \text{avec} \qquad a \equiv \sqrt{a_i a^i}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{1}{-\sigma} \frac{\partial}{\partial a^i}$$

d'où

$$D_x \equiv \frac{\partial^n}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_n}} = \frac{1}{(-\sigma)^n} \frac{\partial^n}{\partial a^{i_1} \ldots \partial a^{i_n}} \equiv \frac{1}{(-\sigma)^n} D_a$$

en sorte que

$$D_x\, \tau_{xz}^{\alpha+k-2} = (-\sigma)^{\alpha+k-n-2} D_a\, a^{\alpha+k-2}$$

Alors (62) donne pour $x = z(s_0)$, ce qui implique $s_+(x) = s_0$:

$$\underset{[-k]}{\overset{(\alpha)}{\mathcal{I}}}(z(s_0)) = \alpha \int_{\sigma_A}^{0} \left\{ S(s_0+\sigma)\, D_a\, a^{\alpha+k-2} \right\} (-\sigma)^{\alpha+k-n-2}\, d\sigma \tag{62a}$$

mais, comme $X = Z(s_0)$, on a

$$a_i = \frac{z_i(s_0+\sigma) - z_i(s_0)}{\sigma} = u_i + \frac{\dot{u}_i}{2}\sigma + \frac{\ddot{u}_i}{6}\sigma^2 + \dots$$

et

$$a \equiv \sqrt{a_i a^i} = 1 + O(\sigma^2)$$

La fonction entre accolades dans (62a) est donc une <u>fonction continue de α</u>, développable en série de puissances de σ . Or il est facile de voir que le théorème (59) se généralise à ce cas et donne :

$$(\ 64\ ) \qquad \underset{\alpha = 0}{(\text{ Prolong. Analyt. })}\ \alpha \int_0^A f(x,\alpha)\, x^{\alpha-\ell-1}\, dx = \underset{x^\ell}{\text{Terme}}\ f(x,0)$$

que l'on appliquera à (62a) en prenant

$$\ell = n+1-K$$

$$x = -\sigma$$

on obtient donc, en se souvenant de (61), la formule annoncée :

$$(\ 65\ ) \qquad \boxed{\underset{[-K]}{\Psi}(s_0) \equiv \underset{\epsilon^{-K}}{\text{Terme}}\ \Psi(z(s_0),\epsilon) = (-)^{n+1-K} \underset{\sigma^{n+1-K}}{\text{Terme}} \left[S(s_0+\sigma)\, D_a\, a^{K-2} \right]}$$

c' est à dire explicitement : pour obtenir le coefficient de ϵ^{-K} dans $\varphi_{,i_1\dots i_m}(z(s),\epsilon)$, il suffit de calculer $\frac{\partial^n a^{K-2}}{\partial a^{i_1}\dots\partial a^{i_n}}$ (avec $a = \sqrt{a_i a^i}$ et par conséquent $\frac{\partial a}{\partial a^i} = \frac{a_i}{a}$ et $\frac{\partial a_i}{\partial a^K} = \eta_{iK}$), puis de chercher le coefficient de σ^{n+1-K} (affecté du signe $(-)^{n+1-K}$) dans $S(s+\sigma)\frac{\partial^n a^{K-2}}{\partial a^{i_1}\dots\partial a^{i_n}}$, en utilisant les développements remarquablement simples :

$$S(s+\sigma) = S + \dot{S}\sigma + \frac{\ddot{S}}{2}\sigma^2 + \frac{S^{(3)}}{6}\sigma^3 + \frac{S^{(4)}}{24}\sigma^4 + \dots + \frac{S^{(n)}}{n!}\sigma^n + \dots \tag{65a}$$

$$a_i = \frac{z_i(s+\sigma) - z_i(s)}{\sigma} = u_i + \frac{\dot{u}_i}{2}\sigma + \frac{\ddot{u}_i}{6}\sigma^2 + \frac{u_i^{(3)}}{24}\sigma^3 + \frac{u_i^{(4)}}{120}\sigma^4 + \dots + \frac{u_i^{(n)}}{(n+1)!}\sigma^n + \dots \tag{65b}$$

il est nécessaire d'avoir $a^{-\nu}$. Pour cela on commence par élever (65b) au carré d'où :

$$a^2 = 1 - \frac{\dot{u}^2}{12}\sigma^2 - \frac{\dot{u}\ddot{u}}{12}\sigma^3 - \frac{1}{5}\left(\frac{\ddot{u}^2}{9} + \frac{\dot{u}u^{(3)}}{8}\right)\sigma^4 - \dots \tag{65c}$$

puis, en élevant ceci à la puissance $-\nu/2$:

$$a^{-\nu} = 1 + \frac{\nu}{24}\dot{u}^2\sigma^2 + \frac{\nu}{24}\dot{u}\ddot{u}\sigma^3 + \left\{\frac{\nu}{10}\left(\frac{\ddot{u}^2}{9} + \frac{\dot{u}u^{(3)}}{8}\right) + \frac{\nu(\nu+2)}{8}\left(\frac{\dot{u}^2}{12}\right)^2\right\}\sigma^4 + \dots \tag{65d}$$

Pour être complet, écrivons les premiers $D_a\, a^{k-2}$:

$$\left\{\begin{aligned}
a^{k-2}{}_{,i} &= (k-2)\, a^{k-4} a_i \\
a^{k-2}{}_{,ik} &= (k-2)(k-4)\, a^{k-6} a_i a_k + (k-2) a^{k-4} \eta_{ik} \\
a^{k-2}{}_{,ikl} &= (k-2)(k-4)(k-6)\, a^{k-8} a_i a_k a_l + (k-2)(k-4) a^{k-6}(\eta_{ik} a_l + \eta_{kl} a_i + \eta_{li} a_k) \\
&\ \vdots \\
a^{k-2}{}_{,i_1\dots i_n} &= (k-2)\dots(k-2n)\, a^{k-2n-2} a_{i_1} a_{i_2}\dots a_{i_n} + \dots
\end{aligned}\right. \tag{65e}$$

L'expression générale de $a^{k-2}{}_{,i_1\dots i_n}$ est décrite en Appendice II.

Les formules (65) donnent alors le résultat cherché par simple inspection. Elles permettent aussi d'avoir un grand nombre de renseignements "a priori " sur ${}_{[-k]}\mathcal{U}(\Delta)$: nombre de termes, leurs signes, cas où ${}_{[-k]}\mathcal{U} = 0$.

5. - Propriétés générales des ${}_{[-k]}\mathcal{U}(\Delta)$

α) ${}_{[-k]}\mathcal{U}$ est nul quand k est pair et non nul.
C'est à dire le développement (52) ne contient que des puissances négatives impaires de ϵ .
En effet, si $k = 2\ell + 2$, d'après (65) ${}_{[-k]}\mathcal{U}$ est donné par $D_a a^{2\ell}$ mais $a^{2\ell} = (a^2)^{\ell}$ est un polynôme de degré 2ℓ en a_i et, comme $n+1-k$ doit être positif, n est au moins égal à $2\ell+1$ d'où $D_a a^{2\ell} = 0$ Q.E.D.

β) Le développement (65c) n'a que des signes " moins " si l'on élimine $uu^{(n)}$.
On entend, par élimination de $u u^{(n)}$, son remplacement en fonction de $\dot{u} u^{(n-1)}$, $\ddot{u} u^{(n-2)}$,... (par exemple $u\ddot{u} = -\dot{u}^2$) obtenu en dérivant l'identité $u^2 = 1$.
En effet, en dérivant $u \cdot u = 1$ n fois on a :

$$(66) \qquad 0 = \sum_{p=0}^{n} \frac{u^{(p)}}{p!}\,\frac{u^{(n-p)}}{(n-p)!} = \frac{2\,u\,u^{(n)}}{n!} + \sum_{p=1}^{n-1} \frac{u^{(p)}u^{(n-p)}}{p!\,(n-p)!}$$

De plus comme $a_i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_i^{(n)}}{(n+1)!}\sigma^n$ on a $a^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{n} \frac{u^{(p)}}{(p+1)!}\,\frac{u^{(n-p)}}{(n-p+1)!}\right)\sigma^n$

d'où le coefficient :

$${}_{[n]}a^2 = \sum_{p=0}^{n} \frac{u^{(p)}}{(p+1)!}\,\frac{u^{(n-p)}}{(n-p+1)!} = \frac{2\,u\,u^{(n)}}{(n+1)!} + \sum_{p=1}^{n-1} \frac{u^{(p)}\;u^{(n-p)}}{(p+1)!\,(n-p+1)!}$$

soit, en remplaçant $u\,u^{(n)}$ donné par (66) :

$$(67) \qquad {}_{[n]}a^2 = \sum_{p=1}^{n-1}\left[-\frac{1}{n+1}\,\frac{1}{p!\,(n-p)!} + \frac{1}{(p+1)!\,(n-p+1)!}\right]u^{(p)}u^{(n-p)} = -\sum_{p=1}^{n-1} \frac{p(n-p)\,u^{(p)}u^{(n-p)}}{(n+1)(p+1)!\,(n-p+1)!}$$

l'équation (67) montre bien qu'après élimination de $u u^{(n)}$, tous les termes (après le premier) du développement (65c) sont affectés du signe moins. Profitons de l'équation (67) pour vérifier les termes que nous avons écrits dans (65c) :

$$ {}_{[2]}a^2 = -\frac{1.(2-1)}{3.2!(2-1+1)!}\dot{u}\dot{u} = -\frac{1}{12}\dot{u}^2 $$

$$ {}_{[3]}a^2 = -2.\frac{1.2}{4.2!3!}\dot{u}\ddot{u} = -\frac{1}{12}\dot{u}\ddot{u} $$

$$ {}_{[4]}a^2 = -\sum_{p=1}^{3}\frac{p(4-p)}{5(p+1)!(5-p)!}u^{(p)}u^{(4-p)} = -2\frac{3}{5.2!4!}\dot{u}u^{(3)} - \frac{2.2}{5.3!3!}\ddot{u}^2 = -\frac{1}{5}\left(\frac{\ddot{u}^2}{9}+\frac{\dot{u}u^{(3)}}{8}\right) $$

γ) Le développement (65d) n'a que des signes " plus ".
En effet, on vient de voir que

$$ a^2 = 1-\theta \qquad \text{avec} \qquad \theta = \theta_1+\theta_2+\dots+\theta_n+\dots $$

d'où

$$ a^{-\nu} = (1-\theta)^{-\nu/2} = 1+\frac{\nu}{2}\theta+\frac{\nu(\nu+2)}{8}\theta^2+\dots+\frac{1}{n!}\frac{\nu}{2}\left(\frac{\nu}{2}+1\right)\dots\left(\frac{\nu}{2}+n-1\right)\theta^n+\dots $$

ce qui rend évident la seule présence de signes " plus " dans (65d) et ce qui permet aussi de vérifier les termes déjà écrits.

Ce résultat prendra tout son sens quand on aura vérifié que toutes les puissances de a intervenant dans (65) sont négatives (c'est à dire que $\nu > 0$). En effet, dans les homothéties : $a_i \to \lambda a_i$ $\quad D_a\, a^{k-2}$ varie comme λ^{k-2-n} d'où, si un terme dans $D_a\, a^{k-2}$ contient $a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_p}$ (avec des $\eta_{i_{p+1} i_{p+2}}$ etc... pour compléter), le terme en a sera : $a^{k-2-n-p}$. Or on a vu que $n+1-k$ devait être positif soit :

$$ k = n+1-q \qquad \text{d'où } a^{k-2-n-p} = a^{-(1+p+q)} $$

Q.E.D.

On a donc montré étant donné la seule présence de signes" plus " dans (65a, b, d) que :

δ) le signe des termes de ${}_{[-K]}\mathcal{U}$ est celui des coefficients de $(-)^{n+1-K} D_a\, a^{K-2}$ dont ils sont issus. Or il est démontré, en Appendice II, grâce à la formule générale donnant $a^{K-2}{}_{,i_1\ldots i_n}$, que les signes dans $a^{K-2}{}_{,i_1\ldots i_n}$ sont alternés à partir du terme principal : $(K-2)(K-4)\cdots(K-2n)\, a^{K-2-2n} a_{i_1}\cdots a_{i_n}$, les termes étant rangés selon le nombre de métriques $\eta_{i_\alpha i_\beta}$ qu'ils contiennent. Il suffit donc de s'occuper de ce premier terme dont la contribution à ${}_{[-K]}\varphi_{,i_1\ldots i_n}$ aura le signe de : $(-)^{n+1-K}(K-2)(K-4)\ldots(K-2n)$

Pour $K=0$, on a $(-)^{n+1-0}(-)^n = -$. A partir de là le signe change comme $(-)^K$ et chaque fois que K traverse un zéro de $(K-2)\ldots(K-2n)$ d'où facilement

(68)
signe des termes de ${}_{[-K]}\mathcal{U}$

termes \ K	0	1	3	5	...
principal (sans métrique)	-	+	-	+	...
une métrique	+	-	+	-	...
deux métriques	-	+	-	+	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Exemple de la colonne $K=3$:

$$ {}_{[-3]}\varphi_{,iK} = \underbrace{-S\, u_i u_K}_{\text{terme principal}} + \underbrace{S\, \eta_{iK}}_{\text{une métrique}} $$

ϵ) Calcul a priori du nombre de termes dans $\underset{[-k]}{\mathcal{U}}$

Il suffit, pour cela, de connaître le nombre de termes d'ordre σ^q issus de $\mathcal{S}\, a^{-\nu} a_{i_1} \dots a_{i_p}$. Pour cela, on remplace chaque développement :

$$\mathcal{S} = S + \sigma \dot{S} + \sigma^2 \frac{\ddot{S}}{2} + \dots \qquad \text{ou} \qquad a_i = u_i + \sigma \frac{\dot{u}_i}{2} + \dots$$

par

$$1 + \sigma + \sigma^2 + \dots = \frac{1}{1-\sigma}$$

et

$a^{-\nu} = 1 + \frac{\nu}{24} \dot{u}^2 \sigma^2 + \dots$ par $1 + \sigma^2 + \sigma^3 + \dots = 1 + \frac{\sigma^2}{1-\sigma}$ d'où :

$$\begin{matrix}\text{nombre de} \\ \text{termes } \sigma^q\end{matrix} \left\{ \mathcal{S}\, a^{-\nu} a_{i_1} \dots a_{i_p} \right\} = \underset{\sigma^q}{\text{Terme}} \frac{1}{(1-\sigma)^{p+1}} \left(1 + \frac{\sigma^2}{1-\sigma} \right) = \underset{\sigma^q}{\text{Terme}} \left\{ \frac{1}{(1-\sigma)^{p+1}} + \frac{\sigma^2}{(1-\sigma)^{p+2}} \right\}$$

$$(69) \qquad \begin{matrix}\text{nombre de termes} \\ \text{d'ordre } \sigma^q\end{matrix} \left\{ \mathcal{S}\, a^{-\nu} a_{i_1} \dots a_{i_p} \right\} = \frac{(p+q)!}{p!\, q!} + \frac{(p+q-1)!}{(p+1)!\,(q-2)!}$$

Il suffira d'appliquer (69) à $q = n+1-k$ et, successivement, à $p = n$ (terme principal) $p = n-2$ (une métrique), etc... pour avoir le nombre de termes dans $\underset{[-k]}{\varphi}_{,i_1 \dots i_n}$. D'où :

(70) nombre de termes dans $\underset{[-k]}{\varphi}_{,i_1 \dots i_n}$

$k \backslash n$	0	1	2		3	
0	1	4	14	3	50	11
1	1	2	7	2	25	7
3			1	1	4	2

terme principal

une métrique

On en déduit, par exemple, que $\underset{[0]}{\varphi}_{,ik\ell} = \frac{1}{2} \left(\varphi^{ret}_{,ik\ell} - \varphi^{av}_{,ik\ell} \right)$ contient, complètement développé 50 + 3 x 11 = 83 termes dûs : au terme principal - 48 $\mathcal{S}\, a^{-8} a_i a_k a_\ell$

et aux trois termes avec métrique : 8 $\mathcal{S}\, a^{-6}(\eta_{ik}a_l + \eta_{kl}a_i + \eta_{li}a_k)$

ζ) Difficultés de la méthode de E. Schmutzer .

Les champs de Schmutzer ayant, par définition, la même structure formelle que les champs retardés peuvent être identifiés à des champs plusque retardés dont le paramètre ϵ serait donné par :

$$\epsilon^2 = (z(s) - z(s-\sigma))^2$$

soit d'après (65b, c et d)

$$\epsilon = \sigma\, a(-\sigma) = \sigma\left(1 - \frac{\dot{u}^2}{24}\sigma^2 + \frac{\dot{u}\ddot{u}}{24}\sigma^3 + O(\sigma^4)\right)$$

la méthode consistant à développer en puissances de σ on voit que les résultats seront différents. Plus précisément, pour $\varphi_{,ik}$ et $\varphi_{,ikl}$, on a:

($K \leq n+1$ et K étant nul ou impair) K = 0, 1 et 3 d'où :

$$\varphi_{,ik} = \frac{{}_{[-3]}\varphi_{,ik}}{\epsilon^3} + \frac{{}_{[-1]}\varphi_{,ik}}{\epsilon} + {}_{[0]}\varphi_{,ik}$$

$$\varphi_{,ikl} = \frac{{}_{[-3]}\varphi_{,ikl}}{\epsilon^3} + \frac{{}_{[-1]}\varphi_{,ikl}}{\epsilon} + {}_{[0]}\varphi_{,ikl}$$

soit, en remplaçant ϵ en fonction de σ

$$\varphi^{Schm}_{,ik} = \frac{{}_{[-3]}\varphi_{,ik}}{\sigma^3} + \frac{{}_{[-1]}\varphi_{,ik} + \frac{\dot{u}^2}{8}\,{}_{[-3]}\varphi_{,ik}}{\sigma} + {}_{[0]}\varphi_{,ik} - \frac{\dot{u}\ddot{u}}{8}\,{}_{[-3]}\varphi_{,ik}$$

$$\varphi^{Schm}_{,ikl} = \frac{{}_{[-3]}\varphi_{,ikl}}{\sigma^3} + \frac{{}_{[-1]}\varphi_{,ikl} + \frac{\dot{u}^2}{8}\,{}_{[-3]}\varphi_{,ikl}}{\sigma} + {}_{[0]}\varphi_{,ikl} - \frac{\dot{u}\ddot{u}}{8}\,{}_{[-3]}\varphi_{,ikl}$$

On en déduit, comme annoncé, que les termes finis ne sont plus les termes $_{[0]}\varphi_{,i_1\ldots i_m} = \frac{1}{2}\left(\varphi^{ret}_{,i_1\ldots i_m} - \varphi^{av}_{,i_1\ldots i_m}\right)$ mais, par exemple : $_{[0]}\varphi^{schm}_{,ik} = {}_{[0]}\varphi_{,ik} - \frac{\dot{u}\ddot{u}}{8}\,{}_{[-3]}\varphi_{,ik}$

et surtout qu'on n'a pas de relation de cohérence :

$$_{[-k]}\varphi^{schm}_{,ikl}\, u^l \overset{?}{=} \frac{d}{ds}\left({}_{[-k]}\varphi^{schm}_{,ik}\right)$$

car, par exemple :

$$_{[0]}\varphi^{schm}_{,ikl} = {}_{[0]}\varphi_{,ikl} - \frac{\dot{u}\ddot{u}}{8}\,{}_{[-3]}\varphi_{,ikl}$$

d'où

$$_{[0]}\varphi^{schm}_{,ikl}\, u^l = \frac{d}{ds}\,{}_{[0]}\varphi_{,ik} - \frac{\dot{u}\ddot{u}}{8}\frac{d}{ds}\,{}_{[-3]}\varphi_{,ik} \qquad \text{(on a utilisé (53))}$$

mais

$$\frac{d}{ds}\left({}_{[0]}\varphi^{schm}_{,ik}\right) = \frac{d}{ds}\,{}_{[0]}\varphi_{,ik} - \frac{d}{ds}\left[\frac{\dot{u}\ddot{u}}{8}\,{}_{[-3]}\varphi_{,ik}\right]$$

les deux résultats diffèrent à cause de la dérivée de $\frac{\dot{u}\ddot{u}}{8}$.

6. - Calcul de $_{[-k]}\varphi_{,i_1\ldots i_n}$ jusqu'à $n = 3$.

Ce calcul se fera par simple inspection de la formule (65) : $D_a\, a^{k-2}$ étant donné par (65e) et les divers développements utiles par (65a, b et d).

Les propriétés générales que nous avons détaillées en 5 servent surtout de vérification.

$$\alpha\ )\quad {}_{[-k]}\varphi = (-)^{1-k} \underset{\sigma^{1-k}}{\text{Terme}}\ S\,a^{k-2}$$

d'où trivialement :

$$ {}_{[-1]}\varphi = \underset{\sigma^{0}}{\text{Terme}}\ S\,a^{-1} = S$$

$$ {}_{[0]}\varphi = - \underset{\sigma^{1}}{\text{Terme}}\ S\,a^{-2} = -\dot S$$

$$\beta\ )\quad {}_{[-k]}\varphi_{,i} = (-)^{k} \underset{\sigma^{2-k}}{\text{Terme}}\ (k-2)\,S\,a^{k-4}a_i$$

d'où

$$ {}_{[-1]}\varphi_{,i} = \underset{\sigma}{\text{Terme}}\ S\,a^{-3}a_i = \underset{\sigma}{\text{Terme}}(S+\dot S\sigma)\left(u_i+\frac{\dot u_i}{2}\sigma\right) = S\frac{\dot u_i}{2}+\dot S u_i$$

$$ {}_{[0]}\varphi_{,i} = -2 \underset{\sigma^{2}}{\text{Terme}}\ S\,a^{-4}a_i = -2 \underset{\sigma^{2}}{\text{Terme}}\left(S+\dot S\sigma+\frac{\ddot S}{2}\sigma^2\right)\left(1+\frac{4}{24}\dot u^2\sigma^2\right)\left(u_i+\frac{\dot u_i}{2}\sigma+\frac{\ddot u_i}{6}\sigma^2\right)$$

$$= -2\left\{ S\left(\frac{\ddot u_i}{6}+\frac{\dot u^2}{6}u_i\right)+\dot S\frac{\dot u_i}{2}+\frac{\ddot S}{2}u_i\right\} = -\left\{\frac{S}{3}(\ddot u_i+\dot u^2 u_i)+\dot S\,\dot u_i+\ddot S\,u_i\right\}$$

on a ainsi retrouvé très simplement les résultats (56).

$$\gamma\ )\quad {}_{[-k]}\varphi_{,ik} = (-)^{1+k} \underset{\sigma^{3-k}}{\text{Terme}}\left[(k-2)(k-4)\,S\,a^{k-6}a_i a_k + (k-2)\,S\,a^{k-4}\eta_{ik}\right]$$

d'où

$$ {}_{[-3]}\varphi_{,ik} = \underset{\sigma^{0}}{\text{Terme}}\left[-S\,a^{-3}a_i a_k + \eta_{ik}S\,a^{-1}\right] = -S u_i u_k + S\eta_{ik}$$

$$ {}_{[-1]}\varphi_{,ik} = \underset{\sigma^{2}}{\text{Terme}}\left[3S\,a^{-5}a_i a_k - \eta_{ik}S\,a^{-3}\right] = \underset{\sigma^{2}}{\text{Terme}}\left[3\begin{pmatrix} S \\ +\dot S\sigma \\ +\frac{\ddot S}{2}\sigma^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ + \\ \frac{5}{24}\dot u\dot u\sigma^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_i \\ +\frac{\dot u_i}{2}\sigma \\ +\frac{\ddot u_i}{6}\sigma^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_k \\ +\frac{\dot u_k}{2}\sigma \\ +\frac{\ddot u_k}{6}\sigma^2\end{pmatrix} - \eta_{ik}\begin{pmatrix} S \\ +\dot S\sigma \\ +\frac{\ddot S}{2}\sigma^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ +\frac{3}{24}\dot u^2\sigma^2\end{pmatrix}\right]$$

$$= 3S\left(\frac{\ddot u_{(i}}{6}u_{k)}+\frac{\dot u_i}{2}\frac{\dot u_k}{2}+\frac{5}{24}\dot u^2 u_i u_k\right)+3\dot S\,\frac{\dot u_{(i}}{2}u_{k)}$$

$$+3\frac{\ddot S}{2}u_i u_k - \eta_{ik}\left[S\frac{\dot u^2}{8}+\frac{\ddot S}{2}\right]$$

où $A_{(ik)}$ désigne $A_{ik} + A_{ki}$.

On a donc :

$$ {}_{[-1]}\varphi_{,ik} = S\left(\frac{1}{2}\, \ddot{u}_{(i} u_{k)} + \frac{3}{4}\, \dot{u}_i \dot{u}_k + \frac{5}{8}\, \dot{u}^2 u_i u_k\right) + \frac{3}{2}\, \dot{S}\, \dot{u}_{(i} u_{k)} + \frac{3}{2}\, \ddot{S}\, u_i u_k - \eta_{ik}\left[S\frac{\dot{u}^2}{8} + \frac{\ddot{S}}{2}\right] $$

De même :

$$ {}_{[0]}\varphi_{,ik} = - \frac{\text{Terme}}{\sigma^3}\left[\, 8 S\, a^{-6} a_i a_k - 2\, \eta_{ik}\, S\, a^{-4}\right] $$

$$ = - \frac{\text{Terme}}{\sigma^3}\left[8 \begin{pmatrix} S \\ + \dot{S}\sigma \\ + \frac{\ddot{S}}{2}\sigma^2 \\ + \frac{S^{(3)}}{6}\sigma^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ + \frac{\dot{u}^2}{4}\sigma^2 \\ + \frac{\dot{u}\ddot{u}}{4}\sigma^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ + \frac{\dot{u}_i}{2}\sigma \\ + \frac{\ddot{u}_i}{6}\sigma^2 \\ + \frac{u_i^{(3)}}{24}\sigma^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k \\ + \frac{\dot{u}_k}{2}\sigma \\ + \frac{\ddot{u}_k}{6}\sigma^2 \\ + \frac{u_k^{(3)}}{24}\sigma^3 \end{pmatrix} - 2\,\eta_{ik} \begin{pmatrix} S \\ + \dot{S}\sigma \\ + \frac{\ddot{S}}{2}\sigma^2 \\ + \frac{S^{(3)}}{6}\sigma^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ + \frac{\dot{u}^2}{6}\sigma^2 \\ + \frac{\dot{u}\ddot{u}}{6}\sigma^3 \end{pmatrix} \right] $$

soit, par simple lecture :

$$ {}_{[0]}\varphi_{,ik} = - S\left[\frac{1}{3}\, u^{(3)}_{(i} u_{k)} + \frac{2}{3}\, \ddot{u}_{(i} \dot{u}_{k)} + \dot{u}^2 \dot{u}_{(i} u_{k)} + 2\, \dot{u}\ddot{u}\, u_i u_k\right] $$
$$ - \dot{S}\left[\frac{4}{3}\, \ddot{u}_{(i} u_{k)} + 2\, \dot{u}_i \dot{u}_k + 2\, \dot{u}^2 u_i u_k\right] - 2\, \ddot{S}\, \dot{u}_{(i} u_{k)} $$
$$ - \frac{4}{3}\, S^{(3)} u_i u_k + \eta_{ik}\left[\frac{1}{3} S \dot{u}\ddot{u} + \frac{1}{3}\dot{S}\dot{u}^2 + \frac{1}{3}\, S^{(3)}\right] $$

ce dernier résultat est bien en accord avec les calculs de Harish-Chandra (1946). Mais ces derniers utilisant la forme $\frac{1}{2}\left(\varphi^{ret}_{,ik} - \varphi^{av}_{,ik}\right)$ sont beaucoup plus complexes.

Avant de passer aux dérivées d'ordre supérieur, rassemblons nos résultats

$$
(71)\quad
\begin{cases}
{}_{[-1]}\varphi = S & {}_{[0]}\varphi = -\dot{S} \\[2ex]
{}_{[-1]}\varphi_{,i} = \frac{1}{2} S \dot{u}_i + \dot{S} u_i & {}_{[0]}\varphi_{,i} = -\frac{S}{3}(\ddot{u}_i + \dot{u}^2 u_i) - \dot{S}\dot{u}_i - \ddot{S} u_i \\[2ex]
{}_{[-3]}\varphi_{,ik} = S(\eta_{ik} - u_i u_k) & \\[2ex]
\multicolumn{2}{l}{{}_{[-1]}\varphi_{,ik} = S\left[\frac{1}{2}\ddot{u}_{(i}u_{k)} + \frac{3}{4}\dot{u}_i\dot{u}_k + \frac{5}{8}\dot{u}^2 u_i u_k\right] + \frac{3}{2}\dot{S}\dot{u}_{(i}u_{k)} + \frac{3}{2}\ddot{S} u_i u_k - \eta_{ik}\left[\frac{S\dot{u}^2}{8} + \frac{\ddot{S}}{2}\right]} \\[2ex]
\multicolumn{2}{l}{{}_{[0]}\varphi_{,ik} = -S\left[\frac{1}{3} u^{(3)}_{(i}u_{k)} + \frac{2}{3}\dddot{u}_{(i}\dot{u}_{k)} + \dot{u}^2\dot{u}_{(i}u_{k)} + 2\dot{u}\ddot{u} u_i u_k\right]} \\
\multicolumn{2}{l}{\qquad - \dot{S}\left[\frac{4}{3}\ddot{u}_{(i}u_{k)} + 2\dot{u}_i\dot{u}_k + 2\dot{u}^2 u_i u_k\right] - 2\ddot{S}\dot{u}_{(i}u_{k)} - \frac{4}{3}S^{(3)} u_i u_k} \\
\multicolumn{2}{l}{\qquad + \frac{1}{3}\eta_{ik}\left[S\dot{u}\ddot{u} + \dot{S}\dot{u}^2 + S^{(3)}\right]}
\end{cases}
$$

où $a_{(i}b_{k)}$ désigne $a_i b_k + a_k b_i$

δ) Calcul de ${}_{[-k]}\varphi_{,ik\ell}$

Pour continuer, il nous sera commode d'introduire la convention suivante : tout terme non symétrique dans ses indices désigne, en réalité, la <u>plus petite</u> somme de ce terme et de ses transposés qui est symétrique.

Exemples :

$a_i b_k$ désigne en fait $a_i b_k + a_k b_i$

$a_i b_k c_\ell$ désigne en fait : $a_i b_k c_\ell + a_k b_i c_\ell + a_k b_\ell c_i + a_\ell b_k c_i + a_\ell b_i c_k + a_i b_\ell c_k$

<u>Mais</u> $a_i a_k c_\ell$ désigne seulement $a_i a_k c_\ell + a_k a_\ell c_i + a_\ell a_i c_k$

Avec cette convention, on peut écrire :

$$
{}_{[-k]}\varphi_{,ik\ell} = (-)^k \underset{\sigma 4-k}{\text{Terme}}\left[(k-2)(k-4)(k-6)\, S a^{k-8} a_i a_k a_\ell + (k-2)(k-4)\, S a^{k-6} a_i \eta_{k\ell}\right]
$$

d'où $\;{}_{[-3]}\varphi_{,ik\ell} = -\underset{\sigma}{\mathrm{Terme}}\left[3\,S\,a^{-5}a_i a_k a_\ell - S\,a^{-3}a_i\,\eta_{k\ell}\right]$ soit :

$$(72)\qquad {}_{[-3]}\varphi_{,ik\ell} = -\frac{3}{2}\,S\,\dot{u}_i u_k u_\ell - 3\,\dot{S}\,u_i u_k u_\ell + \eta_{k\ell}\left[S\,\frac{\dot{u}_i}{2} + \dot{S}\,u_i\right]$$

De même, on a :

$${}_{[-1]}\varphi_{,ik\ell} = \underset{\sigma^3}{\mathrm{Terme}}\left[15\,S\,a^{-7}a_i a_k a_\ell - 3\,S\,a^{-5}a_i\,\eta_{k\ell}\right]$$

d'où

$$(73)\qquad \left\{\begin{aligned}
{}_{[-1]}\varphi_{,ik\ell} = {} & \frac{5}{8}\,S\left[u_i^{(3)}u_k u_\ell + 2\,\ddot{u}_i\dot{u}_k u_\ell + 3\,\dot{u}_i\dot{u}_k\dot{u}_\ell + \frac{7}{2}\,\dot{u}^2\dot{u}_i u_k u_\ell + 7\,\dot{u}\ddot{u}\,u_i u_k u_\ell\right] \\
& + \frac{5}{8}\,\dot{S}\left[4\,\ddot{u}_i u_k u_\ell + 6\,\dot{u}_i\dot{u}_k u_\ell + 7\,\dot{u}^2 u_i u_k u_\ell\right] \\
& + \frac{15}{4}\,\ddot{S}\,\dot{u}_i u_k u_\ell + \frac{5}{2}\,S^{(3)}u_i u_k u_\ell \\
& - \frac{1}{8}\,\eta_{k\ell}\,S\left[u_i^{(3)} + \frac{5}{2}\,\dot{u}^2\dot{u}_i + 5\,\dot{u}\ddot{u}\,u_i\right] \\
& - \eta_{k\ell}\,\dot{S}\left[\frac{\ddot{u}_i}{2} + \frac{5}{8}\,\dot{u}^2 u_i\right] - \frac{3}{4}\,\eta_{k\ell}\,\ddot{S}\,\dot{u}_i \\
& - \frac{1}{2}\,\eta_{k\ell}\,S^{(3)}u_i
\end{aligned}\right.$$

et

$${}_{[0]}\varphi_{,ik\ell} = \underset{\sigma^4}{\mathrm{Terme}}\left[-48\,S\,a^{-8}a_i a_k a_\ell + 8\,S\,a^{-6}a_i\,\eta_{k\ell}\right]$$

d'où

$$
(74)\quad \left\{
\begin{aligned}
{}_{[0]}\varphi_{,ik\ell} = & -S\Big[\tfrac{2}{5} u_i^{(4)} u_k u_\ell + u_i^{(3)} \dot u_k u_\ell + \tfrac{4}{3} \ddot u_i \ddot u_k u_\ell + 2 \ddot u_i \dot u_k \dot u_\ell + \tfrac{8}{3} \dot u^2 \ddot u_i u_k u_\ell \\
& \quad + 4 \dot u^2 \dot u_i \dot u_k u_\ell + 8 \dot u \ddot u \dot u_i u_k u_\ell + \Big(\tfrac{64}{15} \ddot u^2 + \tfrac{24}{5} \dot u u^{(3)} + \tfrac{10}{3} (\dot u^2)^2\Big) u_i u_k u_\ell\Big] \\
& - \dot S\big[2 u_i^{(3)} u_k u_\ell + 4 \ddot u_i \dot u_k u_\ell + 6 \dot u_i \dot u_k \dot u_\ell + 8 \dot u^2 \dot u_i u_k u_\ell + 16 \dot u \ddot u u_i u_k u_\ell\big] \\
& - \ddot S\big[4 \ddot u_i u_k u_\ell + 6 \dot u_i \dot u_k u_\ell + 8 \dot u^2 u_i u_k u_\ell\big] - 4 S^{(3)} \dot u_i u_k u_\ell - 2 S^{(4)} u_i u_k u_\ell \\
& + \eta_{k\ell} S\Big[\tfrac{1}{15} u_i^{(4)} + \tfrac{1}{3} \dot u^2 \ddot u_i + \dot u \ddot u \dot u_i + \Big(\tfrac{8}{15} \ddot u^2 + \tfrac{3}{5} \dot u u^{(3)} + \tfrac{(\dot u^2)^2}{3}\Big) u_i\Big] \\
& + \eta_{k\ell} \dot S\big[\tfrac{1}{3} u_i^{(3)} + \dot u^2 \dot u_i + 2 \dot u \ddot u u_i\big] + \eta_{k\ell} \ddot S\big[\tfrac{2}{3} \ddot u_i + \dot u^2 u_i\big] \\
& + \tfrac{2}{3} \eta_{k\ell} S^{(3)} \dot u_i + \tfrac{1}{3} \eta_{k\ell} S^{(4)} u_i
\end{aligned}
\right.
$$

<u>Remarque technique</u> : Il est en fait possible d'écrire directement tous les termes de ${}_{[-k]}\varphi_{,i_1 \dots i_n}$: on écrit tous les produits possibles : $S^{(\beta)}_{[\alpha_0]} a^{-\nu} u_{i_1}^{(\alpha_1)} \dots u_{i_p}^{(\alpha_p)}$ tels que $\beta + \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_p = n + 1 - k$ et l'on pondère chaque terme par le coefficient lu dans (65) et par $\frac{1}{\beta!} \frac{1}{(\alpha_1+1)!} \cdots \frac{1}{(\alpha_p+1)!}$. Puis on peut vérifier par le signe et le nombre de termes que l'on a rien oublié.

COMPARAISON FINALE

Pour comparer les théories étudiées dans ce travail, nous exprimerons leurs résultats dans un langage commun qui sera constitué des coefficients $A_m(r_c^i, s_c)$ du développement des champs retardés $\Psi_{ret} = \frac{\partial^n}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_n}} \varphi_{ret}$ en série de puissances de $\epsilon_c \equiv \sqrt{-r_c^2}$ soit:

$$\Psi_{ret} = \sum_{l=-n-1}^{\infty} A_{2l+1}(r_c^i, s_c)\, \epsilon_c^{2l+1} + \sum_{l=0}^{\infty} A_{2l}(r_c^i, s_c)\, \epsilon_c^{2l}$$

Pour la justification des affirmations ci-dessous, se référer à l'Appendice I.

	PRINCIPE de la méthode	RESULTATS de la selfinteraction finie	RESULTATS pour la renormalisation
CHAPITRE I	Utiliser Ψ_{ret} comme participant à un bilan détaillé de l'énergie	donnée par $\frac{1}{2}(\Psi_{ret} - \Psi_{av})(z)$ soit en fonction des A_m : $A_0(0, s_c)$	n'est obtenue qu'après calcul complet du flux d'énergie
CHAPITRE II	Utiliser directement le champ Ψ_{ret} après l'avoir moyenné sur les angles contemporains : $\langle \Psi_{ret} \rangle_\gamma$	donnée par le terme en ϵ_c^0 de $\langle \Psi_{ret} \rangle_\gamma$ c'est à dire par : $A_0(0, s_c)$	donnée par l'insertion de $\sum_{l=0}^{n} \langle A_{-(2l+1)}(r_c^i, s_c) \rangle_\gamma\, \epsilon_c^{-(2l+1)}$ avec : $\langle A_{-(2l+1)}(r_c^i s_c) \rangle_\gamma =$ $A_{-(2l+1)}(0, s_c) + B_{-(2l+1)}(s_c)\, \epsilon_c^2$ $+ C_{-(2l+1)}(s_c)\, \epsilon_c^4 + \cdots$
CHAPITRE III	Utiliser le champ plusque retardé pris sur la ligne : $\Psi(z, \epsilon)$	donnée par : $\Psi_{[0]}(s) = \underset{\epsilon^0}{\text{Terme}}\ \Psi(z(s), \epsilon)$ soit $A_0(0, s_c)$	donnée par : $\sum_{K=0}^{n+1} \frac{\Psi_{[-K]}(s)}{\epsilon^K}$ avec K impair soit $\sum_{l=0}^{n} A_{-(2l+1)}(0, s_c)\, \epsilon^{-(2l+1)}$