

## C O N C L U S I O N      G E N E R A L E

En somme, nous avons prouvé que, si le principe de la méthode de P.A.M. Dirac était clair, l'application qu'en a faite cet auteur était non seulement malaisée, mais ne permettait pas de comprendre simplement l'intervention de l'énergie rayonnée à l'infini dans la selfinteraction. La formulation simplifiée utilisant le tube retardé, formulation que nous avons donnée de cette méthode, a permis de rendre évidente cette intervention tout en allégeant considérablement les calculs : on a alors pu appliquer cette méthode non seulement au champ électromagnétique, cas déjà traité par P.A.M. Dirac, mais au champ scalaire et à un champ tensoriel ( théorie linéaire de la gravitation ). De plus, on a pu donner des renormalisations ainsi obtenues une interprétation physique simple car elles s'insèrent dans un cadre qui, dès le départ, suggérait et rendait possible une telle interprétation

Cependant, on ne doit pas considérer cette interprétation comme contraignante pour d'autres méthodes qui ne présentent pas le même cadre : par exemple, les renormalisations obtenues au Chapitre II C, renormalisations qui seraient les mêmes (pour  $\nu = 1/2$ ) que celles données par la méthode des potentiels plus que retardés ( comparer ( 42 ) et ( 56 ) ), différent de celles du Chapitre I, mais cela n'est pas à considérer comme une objection contre ces méthodes puisque la masse -non-renormalisée dans ces théories, n'a pas à être interprétée a priori comme la masse totale d'un tube entourant la particule, ce qui était le cas en méthode de P.A.M. Dirac : ce qui compte, en fait, c'est la possibilité d'une telle renormalisation.

Une exigence bien plus impérieuse ( et dont la violation serait dirimante ) est celle de cohérence, c'est elle qui nous a poussé à reprendre les calculs de P. Havas et J.N. Goldberg; ce qui nous a conduit à reconnaître une erreur dans le travail de H.J. Bhabha - Harish-Chandra et à proposer l'emploi des champs moyens comme vecteurs de la selfinteraction. Mais une telle méthode se complique beaucoup au delà du premier ordre et ne permet peut être pas toujours d'assurer la cohérence.

Aussi, avons nous proposé une nouvelle méthode, entretenant des liens de parenté avec celles de M. Riesz et de E. Schmutzer, méthode fondée sur l'emploi

des champs plus que retardés : les avantages de cette méthode étant non seulement une cohérence évidente, mais surtout une simplicité extrême de calcul obtenue par un procédé de prolongement analytique : il est alors possible d'écrire tous les termes de selfinteraction par simple inspection. L'intérêt de ce procédé rejaillit d'ailleurs sur les autres méthodes puisque, comme le montre la comparaison finale, la selfinteraction finie est donnée dans toutes les méthodes par le même terme dont seul le nom change :

$$A_0(0, \Delta) = \frac{1}{2} (\psi_{\text{ret}} - \psi_{\text{adv}})_0 = \frac{\text{Terme}}{\epsilon^0} \langle \psi_{\text{ret}} \rangle_\nu = \frac{\text{Terme}}{\epsilon^0} \psi(z, \epsilon)$$

A P P E N D I C E      I  
=====

DEMONSTRATION DE  ${}^{(0)}\mathcal{Z} = \frac{1}{2}(\mathcal{Z}_{ret} - \mathcal{Z}_{av})_0$  S.T. MA ( 1947 )

D'après la définition ( 45 ) des potentiels de M. Riesz, on peut écrire :

$$(A_1) \quad {}^{(\alpha)}\varphi(x) = \frac{\alpha}{\beta} \int_{s_A}^{s_+(x)} S(s) r_{xz}^{\alpha-2} ds$$

avec  $\beta = 2^\alpha \Gamma^2(\frac{\alpha}{2} + 1)$  et par conséquent quand  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\beta \rightarrow 1$  on peut donc l'omettre dans la suite. On voit alors que  ${}^{(\alpha)}\varphi(x)$  est un cas particulier des potentiels introduits en ( 57 ) explicitement

$$(A_2) \quad {}^{(\alpha)}\varphi(x) = {}_{[0]}^{(\alpha)}\Phi(x) \quad \text{et par conséquent}$$

$$(A_3) \quad {}^{(\alpha)}\mathcal{Z}(x) = {}_{[0]}^{(\alpha)}\mathcal{Z}\mathcal{I}(x)$$

d'où, d'après ( 60 ) :

$$(A_4) \quad {}^{(0)}\mathcal{Z}(x) = \underset{\epsilon^0}{\text{Terme}} \mathcal{Z}(x, \epsilon) = \underset{\epsilon}{\text{Partie finie}} \mathcal{Z}(x, \epsilon)$$

d'où

- en dehors de la ligne :

$${}^{(0)}\mathcal{Z}(x) = \mathcal{Z}(x, 0) = \mathcal{Z}_{ret}(x)$$

- sur la ligne :

$${}^{(0)}\mathcal{Z}(z(s)) = \mathcal{Z}(s) = \underset{\epsilon^0}{\text{Terme}} \mathcal{Z}(z(s), \epsilon) = \underset{\epsilon}{\text{Partie finie}} \mathcal{Z}(z, \epsilon)$$

Il faut donc évaluer la partie finie en  $\epsilon$  des dérivées du potentiel plus que retardé sur la ligne. Pour cela, on va développer  $\mathcal{Z}(x, \epsilon) = \left(\frac{S}{R}\right)$  en série de puissances pour  $X$  voisin de la ligne. C'est dire qu'on reprend les calculs du II C dans le cas  $\epsilon \neq 0$ . L'équation (35) s'écrit :

$$(A_5) \quad r_c^2(\Delta_c + \sigma) = r_c^2 + (1 - R_c')\sigma^2 - \frac{R_c''}{3}\sigma^3 - \frac{1}{12}(\dot{u}_c^2 + R_c''')\sigma^4 + \dots$$

Quand on cherchait le point retardé, on prenait  $r_c^2(\Delta_c + \sigma) = 0$  d'où l'équation en  $\sigma$  :

$$-r_c^2 = (1 - R_c')\sigma^2 - \frac{R_c''}{3}\sigma^3 - \frac{1}{12}(\dot{u}_c^2 + R_c''')\sigma^4 + \dots$$

Ici, on aura  $r_c^2(\Delta_c + \sigma) = \epsilon^2$  d'où la nouvelle équation en  $\sigma$  :

$$\epsilon^2 - r_c^2 = (1 - R_c')\sigma^2 - \frac{R_c''}{3}\sigma^3 - \frac{1}{12}(\dot{u}_c^2 + R_c''')\sigma^4 + \dots$$

c'est à dire la même équation où l'on a remplacé  $-r_c^2$  par  $\epsilon^2 - r_c^2$ . On en déduit que si l'on pose

$$\mathcal{F}_{ret}(x) = \sum_{l=-1}^{\infty} a_l(r_c^l, \dot{u}_c) (\sqrt{\epsilon^2 - r_c^2})^l$$

alors on aura aussi

$$\mathcal{Z}(x, \epsilon) = \sum_{l=-1}^{\infty} a_l(r_c^l, \dot{u}_c) (\sqrt{\epsilon^2 - r_c^2})^l$$

on aura aussi d'après II C 1 équation (38)

$$\mathcal{Z}_{av}(x) = \sum_{l=-1}^{\infty} -a_l(r_c^l, \dot{u}_c) (-\sqrt{-r_c^2})^l = \sum_{l=-1}^{\infty} (-1)^{l+1} a_l(r_c^l, \dot{u}_c) (\sqrt{-r_c^2})^l$$

On passe aux champs  $\mathcal{Z}(x) = \frac{\partial^n}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_n}} \varphi(x)$  en utilisant les formules :

$$A_{c,i} = \left( \frac{u_i}{1-R} \right)_c ; \quad r_{c,i} = \delta_x^i - \left( \frac{u_i u_x}{1-R} \right)_c \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x^i} (-r_c^2) = \frac{\partial}{\partial x^i} (\epsilon^2 - r_c^2) = -2 r_c^i$$

d'où

$$\mathcal{Z}_{ret}(x) = \frac{\partial^n}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_n}} \varphi_{ret}(x) = \sum_{l=-n-1}^{\infty} A_{2l+1}(r_c^i, \frac{1}{\epsilon}) \sqrt{-r_c^2}^{2l+1} + \sum_{l=0}^{\infty} A_{2l}(r_c^i, \frac{1}{\epsilon}) (-r_c^2)^l$$

$$\mathcal{Z}(x, \epsilon) = \frac{\partial^n}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_n}} \varphi(x, \epsilon) = \sum_{l=-n-1}^{\infty} A_{2l+1}(r_c^i, \frac{1}{\epsilon}) \sqrt{\epsilon^2 - r_c^2}^{2l+1} + \sum_{l=0}^{\infty} A_{2l}(r_c^i, \frac{1}{\epsilon}) (\epsilon^2 - r_c^2)^l$$

$$\mathcal{Z}_{ar}(x) = \frac{\partial^n}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_n}} \varphi_{ar}(x) = \sum_{l=-n-1}^{\infty} A_{2l+1}(r_c^i, \frac{1}{\epsilon}) \sqrt{-r_c^2}^{2l+1} - \sum_{l=0}^{\infty} A_{2l}(r_c^i, \frac{1}{\epsilon}) (-r_c^2)^l$$

ces équations, où les  $A_m(r_c^i, \frac{1}{\epsilon})$  sont les mêmes coefficients, contiennent toute l'information voulue pour démontrer l'égalité en question. En effet, on a :

sur la ligne  $r_c^i = 0$  d'où avec  $Z = Z(\frac{1}{\epsilon})$  :

$$\mathcal{Z}(z, \epsilon) = \sum_{l=-n-1}^{\infty} A_{2l+1}(0, \frac{1}{\epsilon}) \epsilon^{2l+1} + \sum_{l=0}^{\infty} A_{2l}(0, \frac{1}{\epsilon}) \epsilon^{2l} \quad \text{d'où}$$

$$\text{Partie finie } \mathcal{Z}(z, \epsilon) = \text{Terme } \mathcal{Z}(z, \epsilon) = A_0(0, \frac{1}{\epsilon})$$

Or on a aussi

$$\frac{1}{2}(\mathcal{Z}_{ret} - \mathcal{Z}_{ar}) = \sum_{l=0}^{\infty} A_{2l}(r_c^i, \frac{1}{\epsilon}) (-r_c^2)^l$$

dont la valeur sur la ligne, c'est à dire en  $r_c^i = 0$  est :

$$\frac{1}{2}(\mathcal{Z}_{ret} - \mathcal{Z}_{avr})(z) = A_0(0, \delta_c)$$

on a donc bien montré que :

$$(A_6) \quad {}^{(0)}\mathcal{Z}(z) = \underset{[0]}{\mathcal{Z}}(z) = \underset{\epsilon=0}{\text{Term}} \mathcal{Z}(z, \epsilon) = \frac{1}{2}(\mathcal{Z}_{ret} - \mathcal{Z}_{avr})(z) = A_0(0, \delta_c)$$

De plus, les formules précédentes permettent de comparer la méthode des champs plusque retardés et la méthode des champs moyens. On a en effet :

$$\mathcal{Z}(z, \epsilon) = \sum_{l=0}^n \frac{A_{-(2l+1)}^{(0, \delta_c)}}{\epsilon^{2l+1}} + A_0(0, \delta_c) + O(\epsilon)$$

$$\langle \mathcal{Z}_{ret}(x) \rangle_{\nu} = \sum_{l=0}^n \frac{\langle A_{-(2l+1)}^{(r_c^i, \delta_c)} \rangle_{\nu}}{\epsilon_c^{2l+1}} + A_0(0, \delta_c) + O(\epsilon)$$

où  $\epsilon_c$  désigne  $\sqrt{-r_c^2}$ .

D'où les mêmes termes finis :  $A_0(0, \delta_c)$  mais pas les mêmes termes en  $\frac{1}{\epsilon^{2l+1}}$

En effet, on voit facilement que :

$$\langle A_{-(2l+1)}^{(r_c^i, \delta_c)} \rangle_{\nu} = A_{-(2l+1)}^{(0, \delta_c)} + B_{-(2l+1)}^{(\delta_c)} \epsilon_c^2 + C_{-(2l+1)}^{(\delta_c)} \epsilon_c^4 + \dots$$

De sorte que, en général, les termes de renormalisation seront différents.

Par exemple, on se rappelle que ce n'est que pour  $\nu = 1/2$  que l'on a obtenu le même terme  $\left(\frac{1+\nu}{3} S \dot{u}_i + \dot{S} u_i\right) \epsilon^{-1}$  que par les potentiels plusque retardés :  $\left(\frac{1}{2} S \dot{u}_i + \dot{S} u_i\right) \epsilon^{-1}$ .

mais surtout, il est très difficile de calculer  $\langle A_{-(2l+1)}^{(r_c^i, \delta_c)} \rangle_{\nu}$ , et l'on n'est même pas sûr que les expressions que l'on trouvera soient finalement cohérentes. Au contraire, on avait  $A_{-(2l+1)}^{(0, \delta_c)}$  par simple inspection et la cohérence de ces termes était évidente sous la forme :

$$A_{-k}^{(0, \delta_c)} = \underset{[-k]}{\mathcal{Z}}(\delta_c) = \underset{\epsilon^{-k}}{\text{Term}} \mathcal{Z}(z, \epsilon)$$

A P P E N D I C E    I I  
=====

EXPRESSION GENERALE DE  $a^{k-2}, i_1, \dots, i_m$

Introduisons pour désigner  $\frac{\partial A(a^k)}{\partial a^i}$  la notation :  $\underbrace{A a^i}$  qu'on appellera une contraction. On a alors bien sûr :

$$(A_7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \underbrace{A_1 A_2 \dots A_p a^i} = \sum_{q=1}^p \underbrace{A_1 \dots A_q \dots A_p a^i} \\ a_i a_k = \eta_{ik} \\ a^\alpha a_i = \alpha a^{k-2} a_i \end{array} \right.$$

On va alors démontrer par récurrence que :

$$(A_8) \quad \left\{ \begin{array}{l} a^{k-2}, i_1, \dots, i_m = (k-2)(k-4) \dots (k-2m+2)(k-2m) a^{k-2m-2} a_{i_1} \dots a_{i_m} \\ + (k-2) \dots (k-2m+2) a^{k-2m} \sum_{c_1} a_{i_1} \dots \underbrace{a_{i_p} \dots a_{i_m}}_{c_1} \\ + (k-2) \dots (k-2m+4) a^{k-2m+2} \sum_{c_1, c_2} a_{i_1} \dots \underbrace{\underbrace{\dots}_{c_1}}_{c_2} \dots a_{i_m} \\ + \dots \\ + (k-2) \dots (k-2m+2m) a^{k-2m+2m-2} \sum_{c_1, c_2, \dots, c_m} a_{i_1} \dots \underbrace{\underbrace{\underbrace{\dots}_{c_1}}_{c_2} \dots}_{c_m} \dots a_{i_m} \\ + \dots \end{array} \right.$$

c'est à dire un résultat analogue au théorème de Wick, le terme général contenant une somme sur  $m$  contractions ( c'est à dire  $m$  métriques  $\eta_{i\alpha i\beta}$  ) deux à deux disjointes puisque  $\underbrace{a_i a_k}_{\eta_{ik}} = \eta_{ik}$  est une constante et donc n'est plus dérivée.

(  $A_8$  ) est vrai pour  $n=0$  , vérifions-le pour  $n+1$  en contractant par  $a_{i_{n+1}}$  . Le terme à  $m$  contractions viendra de l'ancien terme à  $m-1$  contractions où l'on contracte un  $a_{i_\alpha}$  ( $1 \leq \alpha \leq m$ ) par  $a_{i_{n+1}}$  et de l'ancien terme à  $m$  contractions où l'on contracte ( c'est à dire dérive ) la puissance de  $a$  d'où :

$$(k-2) \dots (k-2m+2(m-1)) a^{k-2n-2(m-1)-2} \sum_{c_m} \sum_{c_1, \dots, c_{m-1}} a_{i_1} \dots a_{i_m} a_{i_{n+1}}$$

$$+ (k-2) \dots (k-2m+2m)(k-2n+2m-2) a^{k-2n+2m-4} \sum_{c_1, \dots, c_m} a_{i_1} \dots a_{i_m} a_{i_{n+1}}$$

on retrouve bien toutes les contractions possibles dans  $a_{i_1} \dots a_{i_{n+1}}$  avec le coefficient prévu. Q.E.D.

On voit alors directement, sur la formule générale (  $A_8$  ), que le rapport entre deux termes consécutifs est égal à la plus grande des puissances de  $a$  de ces termes. Comme on a démontré ( III C 5 (  $\delta$  ) ) que ces puissances sont toujours négatives ( dans les cas qui nous intéressent ), on voit par là que les signes sont alternés dans le développement (  $A_8$  ) selon le nombre de contractions.



B I B L I O G R A P H I E  
=====

- H.J. BHABHA et HARISH-CHANDRA ( 1946 ) : Proc. roy. Soc. A 185, 250.
- P.A.M. DIRAC ( 1938 ) : Proc. Roy. Soc. A 167, 148.
- HARISH-CHANDRA ( 1946 ) : Proc. Roy. Soc. A 185, 269.
- P. HAVAS et J.N. GOLDBERG ( 1962 ) : Phys. rev. 128, 398.
- S.T. MA ( 1947 ) : Phys. Rev. 71, 787.
- S. MAVRIDES ( 1966 ) : Nuovo Cimento X 45, 859.
- F. RHORLICH ( 1965 ) : Classical Charged Particles. Addison-Wesley.
- M. RIESZ ( 1949 ) : Acta Mathematica 81, 1.
- A. SCHILD ( 1960 ) : Journ. of Math. Anal. and Appl. 1, 127-131.
- E. SCHMUTZER ( 1966 ) : Annalen der Physik 17, 107.  
Cf. aussi son livre " Relativistische Physik " ( 1968 ).  
B.G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig.