THESE de DOCTORAT D'ETAT

ès Sciences Physiques

présentée à l'UNIVERSITE PIERRE et MARIE CURIE
Paris 6

par

Thibaut DAMOUR

pour obtenir le grade de DOCTEUR ès SCIENCES

Sujet de la thèse : Quelques propriétés mécaniques, électromagnétiques, thermodynamiques et quantiques des trous noirs.

Soutenue le : 10 Janvier 1979, Mention Très Honorable

devant le jury composé de :

Monsieur A. LICHNEROWICZ
Madame Y. CHOQUET-BRUHAT
Monsieur L. BEL
Monsieur B. CARTER
Monsieur R. HAKIM
Monsieur A. PAPAPETROU

Je souhaite manifester ma profonde gratitude à Monsieur R. RUFFINI qui a suggéré le thème de mes travaux et m'a initié à ce type de recherche.

Je tiens à exprimer ma très vive reconnaissance à Monsieur B. CARTER pour ses précieux conseils et pour avoir suivi mes recherches avec attention.

Je désire également témoigner mon profond respect à Monsieur A. PAPAPETROU et le remercier pour les nombreuses discussions que j'ai eues avec lui.

Je suis heureux de remercier chaleureusement Monsieur L. BEL qui en m'accueillant fréquemment avec hospitalité dans son laboratoire m'a permis de nombreux échanges.

J' ai profité de discussions avec Mademoiselle N.DERUELLE et Messieurs S. BONAZZOLA, B. LINET, J. MADORE et R. ZNAJEK, qu'ils en soient vivement remerciés.

Que soient remerciées Mesdames G. GELUGNE, F. MATHERN-COURCELLE et E. VEIA pour la gentillesse et la célérité avec lesquelles elles ont procédé à la frappe de ce travail.

QUELQUES PROPRIETES MECANIQUES ELECTROMAGNETIQUES, THERMODYNAMIQUES ET QUANTIQUES DES TROUS NOIRS

SOMMAIRE.

INTRODUCTION.

La plupart des recherches concernant les trous noirs en théorie d'Einstein se sont limitées à étudier soit les états stationnaires généraux des trous noirs soit des perturbations de certains états stationnaires particulièrement simples.

La première voie de recherche a conduit à la découverte des lois générales de la statique, de l'électrostatique et de la thermostatique des trous noirs. (pour une revue cf. Carter 1978)

Des résultats ayant un plus fort contenu dynamique n'ont pu être obtenus que par des méthodes perturbatives : étude de particules d'épreuve ou de champs d'épreuve dans des métriques de Kerr-Newman. (pour une revue générale du vocabulaire, des résultats de base et des références originales concernant les trous noirs cf. De Witt et De Witt 1973).

En particulier Penrose (1969) découvrit un phénomène riche de conséquences: de l'énergie et du moment angulaire pouvaient être extraits d'un trou noir de Kerr.

Jusqu'alors les trous noirs avaient été conçus comme des objets passifs susceptibles, certes, de convertir de la masse propre extérieure en énergie avec un rendement théorique pouvant atteindre 100%, mais cachant en leur sein une masse énorme qui semblait destinée à rester inerte à tout jamais.

Or en analysant des expériences de pensée à la Penrose, Christodoulou (1970) et Christodoulou et Ruffini (1971) ont introduit les concepts de transformations réversibles et irréversibles d'un trou noir et ont montré que la masse-énergie totale M d'un trou noir au repos isolé de moment angulaire total $\vec{J}$ et de charge électrique totale Q vérifiait la formule :

$$(1) \qquad M^2 = \left(M_{ir} + \frac{Q^2}{4M_{ir}}\right)^2 + \frac{\vec{J}^{\,2}}{4M_{ir}^2}, \text{ avec } \left(\frac{\vec{J}}{M}\right)^2 + Q^2 \leq M^2,$$

où la masse irréductible du trou noir, M_{ir}, ne peut qu'augmenter dans toute transformation classique et représente par conséquent la seule partie vraiment inerte de la masse totale. En revanche Q et J peuvent être modifiés à volonté en faisant tomber des particules appropriées dans le trou noir. Ils en tirèrent alors la conclusion, d'une grande importance potentielle pour l'astrophysique, qu'un fort pourcentage de l'énergie totale d'un trou noir pouvait être stockée sous une forme extractable : par exemple 29% sous forme d'énergie cinétique de rotation ou même 50% sous forme d'énergie coulombienne.

Bekenstein (1973) analysa alors plus en détail la notion d'irréversibilité dans la physique des trous noirs et étendit la terminologie thermodynamique à ces derniers en proposant en particulier de leur attribuer une entropie proportionnelle à M_{ir}^2 (voir chapitre III pour les détails). Cependant l'analogie thermodynamique ne semblait pas complète puisque l'entropie d'un corps non isolé peut bien diminuer si l'entropie du monde extérieur augmente assez alors qu'ici M_{ir}^2 ne pouvait qu'augmenter comme le montrait les travaux de Christodoulou et Ruffini (1971) ainsi qu'un résultat indépendant de Hawking (1971) sur l'accroissement de la surface d'un trou noir.

Cette limitation a été levée depuis par Hawking lui-même (1975). Il a montré que l'interaction entre un trou noir et des champs d'épreuve quantifiés conduisait à une véritable évaporation de la masse irréductible du trou noir. Autrement dit même la masse "inerte" M_{ir} dans la formule (1) peut être extraite en principe, mais ce phénomène d'évaporation est très lent, et par conséquent négligeable, pour des trous noirs d'une taille "astrophysique".

Tous ces résultats indiquent clairement qu'il y a grand intérêt à considérer les trous noirs comme des entités dynamiques (et non plus statiques) capables de subir ou d'exercer des forces, d'absorber ou de fournir de l'énergie ou des charges électriques. Nous avons pu obtenir dans cette voie des résultats exacts dans le cas non stationnaire le plus général (chapitre I, II, III). Nous pouvons interpréter ces résultats par analogie avec la physique classique. Pour ce faire nous introduisons de nouveaux concepts associés à la surface d'un trou noir ; entre autres : vitesse de surface, densité surfacique d'impulsion, pression superficielle, distribution surfacique de charge et de courant.

Dans le chapitre I nous obtenons une relation que l'on peut décrire comme "la loi fondamentale de la dynamique de surface d'un trou noir". Nous montrons qu'il existe une remarquable analogie entre la surface d'un trou noir ("l'horizon") et une "bulle"en mouvement décrite comme un fluide newtonien soumis à des forces extérieures et à des pressions internes. Ces pressions internes se décomposent en :

- une pression superficielle scalaire proportionnelle à la gravité de surface du trou noir,
- des contributions de type visqueux qui s'interprètent en attribuant à la surface du trou noir une viscosité de cisaillement égale à $(16\pi)^{-1}$ ainsi qu'une viscosité de dilatation égale à $-(16\pi)^{-1}$.

Une application de cette loi montre en particulier que la gravité de surface d'un trou noir stationnaire doit être uniforme, ce afin d'assurer l'équilibre mécanique de la surface du trou noir.

Dans le chapitre II nous écrivons les lois régissant l'électromagnétisme et l'électrodynamique de surface d'un trou noir : "conservation de l'électricité", "loi de Faraday", "loi d'Ohm", "force de Lorentz". Prolongeant l'analogie du chapitre I nous pouvons interpréter ces résultats en disant que la surface d'un trou noir est analogue à une "bulle" qui peut être électrisée et parcourue par des courants de conduction. La"loi d'Ohm" s'interprète alors en attribuant à cette "bulle" une résistivité électrique de surface, égale à 377 ohm (4π) (Damour 1977c),(cf. aussi Znajek 1977). En particulier nous étudions les "courants de Foucault" induits par la rotation du trou noir dans un champ magnétique uniforme incliné sur l'axe de rotation. Un tel système constitue un moteur électrodynamique où les phénomènes d'induction créent un couple relatif entre le rotor (le trou noir) et le stator (les sources lointaines du champ magnétique).

Dans le chapitre III nous étudions la dilatation de la surface du trou noir. Nous interprétons, après Bekenstein (1973), cette dilatation comme un accroissement de "l'entropie du trou noir". Nous montrons comment cet accroissement "d'entropie" est lié, d'une façon anticipée ("a-causale"), à un "dégagement de chaleur", lequel contient des termes qui s'interprètent, en plein accord avec les chapitres I et II, comme des dissipations visqueuses et un effet Joule. A ce propos nous étudions en détail les courants de Foucault stationnaires créés par la rotation du trou noir dans un champ magnétique extérieur quelconque, ainsi que les marées stationnaires induites par la rotation du trou noir dans un champ gravitationnel perturbateur. Nous montrons que ces états <u>dissipatifs</u> quasi-stationnaires vérifient, dans certaines approximations, le principe de production minimum d'entropie de Prigogine (1968).

Le reste de nos recherches utilise l'approximation consistant à étudier des champs d'épreuve placés dans le champ de fond (gravitationnel et électromagnétique) d'un trou noir stationnaire.

Nous nous sommes intéressés à certains effets quantiques associés aux trous noirs (chapitre IV). Nous avons étudié la création de particules dans des champs extérieurs stationnaires (Damour 1977a). Chemin faisant, nous passons en revue certaines des méthodes utilisées pour quantifier un champ en interaction avec un champ classique extérieur, nous rectifions un résultat classique de J. Schwinger, et nous montrons comment utiliser ces méthodes dans le cas d'un trou noir (cf. aussi Deruelle 1977).

Appliquant ces méthodes au champ gravitationnel et électromagnétique d'un trou noir nous avons découvert entre autres :

- une nouvelle démonstration, très courte et directe, du phénomène d'évaporation quantique des trous noirs de S.W. Hawking (Damour et Ruffini 1976). Nous calculons "l'effet tunnel" d'une particule à travers l'horizon en employant une méthode de prolongement analytique (cf. aussi Damour 1977a).

- un phénomène d'instabilité quantique d'un trou noir tournant ou chargé dû à l'existence d'états résonnants "à largeur négative" (Damour, Deruelle et Ruffini 1976).

- la décharge quantique, par polarisation du vide, d'un trou noir chargé tournant (Damour et Ruffini 1975).

Ce dernier phénomène pourrait se révéler important pour l'astrophysique car il suggère la possibilité d'une décharge explosive d'un trou noir analogue au claquage d'un condensateur : cette décharge se traduisant non seulement par un violent dégagement d'énergie ($\sim 10^{41}$ erg) sous forme sans doute d'une bouffée de rayons γ mais ayant une signature plus précise à travers l'émission de particules chargées extrêmement énergétiques ($\sim 10^{20}$ eV).

Mais la condition d'existence de ce phénomène (ainsi semble-t-il que de tout autre phénomène d'extraction d'énergie d'un trou noir) est l'existence d'une structure électromagnétique autour du trou noir. Nous donnons donc au chapitre V des arguments de natures dynamique et thermodynamique pour montrer que l'existence d'une telle structure est non seulement possible mais probable. Dans ces analyses des magnétosphères possibles autour des trous noirs nous introduisons les nouveaux concepts de lignes d'accélération et d'horizon-plasma (Damour, Hanni, Ruffini et Wilson 1978). Nous obtenons aussi les conditions générales d'équilibre thermodynamique entre des conducteurs chargés tournants (Damour 1976) et nous montrons, à partir d'une réécriture de la formule de variation de masse d'un trou noir (Carter 1973), que ces conditions d'équilibre s'étendent, sans modifications, au cas où un trou noir fait partie du système. En particulier nous étudions le système constitué d'un trou noir tournant entouré d'une spire de courant et nous calculons la charge électrique totale portée par le trou noir à l'équilibre (Damour 1977b).

Enfin, au chapitre VI, nous étudions un mécanisme (Ruffini et Wilson 1975 Damour 1975) qui exhibe la possibilité d'extraire du moment angulaire d'un trou noir dans des conditions astrophysiques réalistes.

L'extraction de moment angulaire et d'énergie cinétique de rotation d'un trou noir paraît d'un extrême intérêt quand on pense aux observations des sources galactiques de rayons X, aux observations des sources extragalactique géantes ainsi qu'aux phénomènes observés dans les quasars. L'importance de mécanismes de ce genre (cf. aussi Blandford et Znajek 1977) réside non seulement dans la possibilité de puiser à une source énorme d'énergie (cf. éq.(1)) mais encore dans le fait que cette extraction d'énergie laissera sans doute une signature vectorielle dans l'espace : $\vec{J}$ définissant en effet une direction privilégiée. (On pensera par exemple au mécanisme de Leblanc et Wilson (1970)). Dans le chapitre VI nous utilisons les équations de la magnétohydrodynamique relativiste (Lichnerowicz 1967) pour décrire la chute d'un plasma magnétisé dans un trou noir tournant. Nous en trouvons des solutions analytiques approchées qui nous permettent de montrer en particulier l'existence de deux phénomènes physiquement intéressants :

- l'existence d'un couple exercé par le trou noir sur le plasma via les lignes de force magnétique.

- l'existence d'une séparation de charge entre le trou noir et sa magnétosphère.

RAPPELS PRELIMINAIRES.

Qu'on nous pardonne de faire fi de la rigueur mathématique pour rappeler ici les quelques résultats fondamentaux, concernant les trous noirs, que nous utiliserons dans ce travail. Le lecteur intéressé trouvera dans Hawking et Ellis (1973) les définitions précises et les démonstrations correspondantes.

Considérons un espace-temps satisfaisant aux équations d'Einstein et"asymptotiquement plat". A partir d'un point p de l'espace-temps, nous émettons tous les"signaux"possibles (c.a.d. toutes les courbes issues de p et dont la tangente est, en chaque point, dirigée vers le futur (temporel ou isotrope)). Dans le cas où aucun des signaux émis par p ne parvient à l' "infini", on dit que le point p est situé dans un trou noir. On appelle horizon, ou surface du trou noir, la frontière du trou noir c.a.d. la frontière entre la région d'où on ne peut pas"télégraphier"à l'infini et la région où on peut le faire.

Le résultat fondamental, que nous utiliserons constamment dans ce travail, est que l'horizon est une hypersurface isotrope Σ engendrée par des segments géodésiques qui peuvent commencer mais non pas se terminer. Ces segments géodésiques, ou générateurs, sont les trajectoires du vecteur ℓ normal (et donc tangent) à Σ . De plus toute section spatiale S de Σ (une 2-surface obtenue, par exemple, par intersection avec une hypersurface spatiale x^o= constante) est nécessairement compacte. Mais la topologie de S ne sera nécessairement celle d'une 2-sphère qu'au voisinage de l'équilibre. L'horizon n'étant pas connexe en général, nous nous intéresserons ci-dessous à une seule composante connexe de l'horizon.

Enfin remarquons que la plupart des résultats des chap. I et II, et certains de ceux du chapitre III, sont valables non seulement pour l'horizon mais plus généralement pour toute hypersurface isotrope (admettant des sections compactes).

CONVENTIONS ET NOTATIONS

Les références sont indiquées par des parenthèses. Ex.: Papapetrou(1966), (éq.(16))
Les équations sont numérotées à partir de (1) dans chaque chapitre, si l'on se réfère à une équation dans un autre chapitre on rappellera celui-ci. Ex. : (cf. équation I(51a)).

On utilise, sauf prescription contraire, des unités telles que:

$1 = G = c = \hbar = k$ (constante de Boltzmann.)

La signature choisie est $-+++$ sauf dans les appendices A (chap.I) et B (chap.II).

Le produit scalaire des deux vecteurs X et Y est noté: X.Y .

Les tenseurs de l'espace-temps sont indiciés par des lettres latines minuscules: $a,b,\ldots = 0,1,2,3$. Ex. : g_{ab}.

Les tenseurs relatifs à l'horizon sont indiciés par des lettres latines majuscules surlignées: $\bar{A}, \bar{B}, \ldots = 0,2,3$. Ex. : $\chi^{\bar{A}}_{\bar{B}}$

Les tenseurs relatifs à une section S de l'horizon sont indiciés par des lettres latines majuscules: $A, B, \ldots = 2,3$. Ex.: γ_{AB}, D_{AB}.

Le déterminant de g_{ab} est noté $-\bar{g}$ et celui de γ_{AB}, γ.

Les dérivées ordinaires (agissant sur un scalaire) sont notées indifféremment:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^a} = \partial_a \varphi = \varphi_{,a}$$

Les dérivées covariantes sont notées:

- dans l'espace-temps: $\nabla_X Y$ et $\nabla_c g_{ab}$ ou $g_{ab;c}$ par rapport à une base $\{e_c\}$.
- sur l'horizon (connection réduite): $\bar{\bar{\nabla}}_X Y$ et $\bar{\nabla}_{\bar{C}} \chi^{\bar{A}}_{\bar{B}} \equiv \chi^{\bar{A}}_{\bar{B}|\bar{C}}$ par rapport à une base (tangente à l'horizon) $\{e_{\bar{A}}\}$.
- sur une section S de l'horizon: $D_{AB\|C}$ par rapport à une base $\{e_C\}$ (au chapitre III $D_{AB|C}$ désigne la dérivée covariante associée à la métrique approximée à l'ordre zéro: $\gamma^{(0)}_{AB}$).

Les coefficients de connection sont définis par: $\nabla_{e_b} e_a = \Gamma^c_{ab}\, e_c$.

En général on identifie un vecteur et l'opérateur de dérivation associé:

Ex.: $v = v^a \partial_a = v^{\bar{A}} \partial_{\bar{A}}$.

La plupart du temps on emploie des bases naturelles: $e_A = \partial_A$.

On indique parfois le caractère contravariant par une flèche supérieure (Ex. $\vec{v}$ pour v^A) et le caractère covariant par un tilde inférieur (Ex. $\underset{\sim}{\gamma}$ pour γ_{AB}). (Notations de Carter 1978).

La normale à l'horizon est notée: $\vec{\ell}$, e_o (en coordonnées comouvantes) et aussi $\ell = \ell^a \partial_a = D = d_0 = \partial_0 + v^A \partial_A$ (en coordonnées non comouvantes).

Le champ électromagnétique s'écrit: $F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a$ en fonction du quadripotentiel A_a (alors A_o = -(potentiel électrique usuel)).

Les équations inhomogènes de Maxwell sont: $F^{ab}{}_{;b} = 4\pi J^a$, où J^a est le quadricourant électrique.

Le tenseur de Riemann-Christoffel est: $R^a{}_{bcd} = \partial_c \Gamma^a_{bd} - \partial_d \Gamma^a_{bc} + \Gamma^e_{bd} \Gamma^a_{ec} - \Gamma^e_{bc} \Gamma^a_{ed}$

Le tenseur de Ricci est: $R_{bd} = R^a{}_{bad} = \partial_c \Gamma^c_{bd} - \cdots$

Les équations d'Einstein s'écrivent donc: $R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = +8\pi T_{ab}$, où T_{ab} est le tenseur d'énergie-impulsion (avec $T_{oo} \geqslant 0$) qui a une contribution électromagnétique égale à : $T_{ab}^{e.m.} = (4\pi)^{-1} (F_{ac} F_{b.}{}^{c} - \frac{1}{4} F_{cd} F^{cd} g_{ab})$

La 4-forme élément de volume est notée: $\sqrt{g}\ \epsilon_{abcd}$.

La 2-forme élément de surface (sur une section S de l'horizon) est notée:

$\epsilon_{AB} = \sqrt{\gamma}\ \epsilon^{23}_{AB}$.

On dénote par une barre la conjugaison complexe. Ex.: $\bar{m}^a$.

Pour un trou noir général on indique parfois les quantités liées à l'horizon par l'indice "H". La gravité de surface du trou noir sera notée: g (ne pas confondre avec $\bar{g} = -\text{dét}\ g_{ab}$)(cette quantité est notée κ par B.Carter).

La densité surfacique d'impulsion sera notée: π_A , le taux de dilation: θ et le taux de glissement (ou de cisaillement): σ_{AB}. Ne pas confondre $\sigma = -\sigma_{AB} m^A m^B$ avec σ_H : la densité surfacique de charge $(Q_H = \oint \sigma_H dS)$.

Pour un trou noir de Kerr-Newman de masse M, de moment angulaire total J et de charge électrique e,(aussi notée Q ou Q_H), on note comme d'habitude $a = J/M$; alors on a: $a^2 + e^2 \leqslant M^2$, $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + e^2$, $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2\theta$, $r_+ = M + (M^2 - a^2 - e^2)^{1/2}$ = "rayon de l'horizon", $\Omega_H = a/(r_+^2 + a^2)$ = vitesse angulaire, $\Phi_H = e r_+ / (r_+^2 + a^2)$ = potentiel électrique comouvant, et $g = (M^2 - a^2 - e^2)^{1/2} / (r_+^2 + a^2)$ = gravité de surface.

CHAPITRE I

MECANIQUE DES TROUS NOIRS

I. MECANIQUE DES TROUS NOIRS.

I. Introduction.

Nous allons déduire des équations d'Einstein une équation vectorielle que nous interprèterons comme " la loi fondamentale de la dynamique de surface des trous noirs".

Cette équation concerne le comportement de l'horizon (que nous appellerons souvent "surface du trou noir") et, notre étude étant au départ purement locale, cette équation sera en fait valable pour toute hypersurface isotrope.

Mathématiquement nous pouvons interpréter l'équation que nous obtiendrons comme une équation de Codazzi contractée pour une hypersurface isotrope. Pour introduire celle-ci rappellons le fait bien connu, (Lichnerowicz 1955), (Bruhat 1962), que l'étude du problème de Cauchy pour les équations d'Einstein conduit, étant donnée une hypersurface non isotrope de normale unitaire ℓ , à séparer en deux groupes les équations d'Einstein: équations d'évolution et conditions initiales. Parmi ces dernières se trouvent la projection sur l'hypersurface du covecteur $R_a{}^b \ell_b$ Explicitement nous pouvons introduire le projecteur orthogonal

$$(1) \qquad h^a{}_b = \delta^a{}_b - \ell^a \ell_b / \ell^2$$

et la seconde forme fondamentale de l'hypersurface considérée:

$$(2) \qquad \chi_{ab} = \ell_{c;d}\, h^c{}_a\, h^d{}_b$$

Le tenseur χ pris sous forme mixte : $\chi^a{}_b$ peut aussi se définir en chaque point p comme une transformation linéaire du plan tangent à l'hypersurface : T_p en lui-même (transformation de Weingarten (Hicks 1965)) au moyen de la formule

$$(3) \qquad Z \in T_p \xrightarrow{\chi} \chi(Z) = \nabla_Z \ell \in T_p$$

où ∇ dénote la dérivée covariante ambiante.

Par calcul direct à partir de l'eq(2) on peut obtenir l'expression (cf. par exemple Hawking-Ellis 1973)

$$\chi^{b}{}_{a|b} - \chi^{b}{}_{b|a} = \ell^{b} R_{bc} h^{c}{}_{a} \tag{4}$$

où la barre désigne la projection sur l'hypersurface de la dérivée covariante ambiante ($t^{a}{}_{b|c} = h^{a}_{e} h^{h}_{b} h^{i}_{c} t^{e}{}_{h;i}$) qui est égale à la dérivée covariante riemannienne définie par la métrique induite. L'équation (4) peut aussi s'obtenir en contractant les équations de Codazzi qui, avec celles de Gauss relient la courbure interne, la courbure ambiante et la deuxième forme fondamentale d'une hypersurface (cf. par exemple Eisenhart 1926) c'est pourquoi nous nous réferons à l'équation (4) comme: équation de Codazzi contractée. Malheureusement dans le cas d'une <u>hypersurface isotrope</u> ($\ell^2 = 0$) nous ne pouvons pas utiliser directement cette approche, le vecteur normal ℓ n'étant pas complémentaire du plan tangent à l'hypersurface. Nous devons reprendre les choses à la base ce qui peut se faire de diverses façons: par une approche intrinsèque, ou par l'utilisation de systèmes de coordonnées adaptées (par exemple Sachs 1962), ou encore en employant un repère mobile convenable. Afin de n'utiliser dans cet exposé que des techniques bien connues nous utiliserons la deuxième approche (coordonnées) cependant nous indiquerons en appendice la forme que prennent nos résultats avec les notations de Newman et Penrose (Newman-Penrose 1962) ceci afin de faciliter les comparaisons avec les résultats publiés dans la littérature.

2. <u>Géométrie intrinsèque d'une hypersurface isotrope</u>.

Notre première tâche sera donc de définir des coordonnées adaptées à l'étude d'une hypersurface isotrope Σ . Nous prendrons comme coordonnée x^1 une coordonnée constante sur Σ (par exemple $x^1 = 0$).

Puis, à l'intérieur de $\sum$ nous considérons des coordonnées x°, x^2, x^3 telles que x^2 et x^3 sont constantes le long de chaque générateur (ou rayon) c'est-à-dire le long des trajectoires de la normale $\vec{\ell}$ à $\sum$ (car $\vec{\ell}$ est par définition à la fois normal et tangent à $\sum$). x° sert alors de paramètre le long des générateurs et nous ne supposerons aucune normalisation pour x° sur $\sum$ (en particulier x° ne sera pas un paramètre affine) ceci afin de se garder la possibilité de normaliser x° à l'infini (quand cela s'avèrera possible et désirable). Etant donné x° nous normalisons cependant le vecteur normal $\vec{\ell}$ comme étant :

(5) $$\vec{\ell} = \frac{\partial}{\partial x^o}\Big|_\Sigma = e_o$$

Et pour des raisons qui apparaîtront plus tard nous noterons souvent la dérivée le long de ℓ : d_o avec un "d" droit plutôt que ∂_o .

Nous désignerons par S_{x° une section x° = const. de $\sum$ (où x^1 est déjà constante). La base des vecteurs coordonnés sera notée indifféremment $\partial/\partial x^a$, ∂_a ou e_a . Il sera utile dans la suite d'employer un indice majuscule pour désigner les coordonnées internes des sections S_{x° : $x^A, x^B, \cdots$ pour x^2 ou x^3.

(6) A, B, C,$\cdots$ = 2,3.

Enfin nous aurons aussi besoin d'un indice général pour désigner les coordonnées internes à $\sum$, nous utiliserons alors un indice majuscule surligné : $x^{\bar{A}}$ pour x°, x^2 ou x^3.

(7) $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \ldots = 0, 2,3.$

Ces notations étant précisées nous remarquons que la seule restriction géométrique que nous ayons imposée est que le vecteur normal ℓ transporte au sens de Lie les sections successives S_{x° de l'hypersurface $\sum$.

Nous devons maintenant imposer le fait que ℓ est normal à $\sum$: soit

(8) $$g_{o\bar{A}} = e_o \cdot e_{\bar{A}} = 0$$

c'est-à-dire que parmi les g_{0a} (a = 0, 1, 2, 3) <u>seul g_{01}</u> est non nul. (Et il faut bien que g_{01} soit non nul pour que g soit régulier).

La métrique induite sur Σ (ou première forme fondamentale) $g_{\bar{A}\bar{B}}$ se réduit donc à g_{AB} que nous noterons γ_{AB} indiquant par là un objet géométrique intrinsèque d'une section S_{x^o}. Nous pouvons donc écrire :

$$ds^2|_{\Sigma} = \gamma_{AB}\, dx^A\, dx^B = ds^2|_{S_{x^0}} \tag{9}$$

γ_{AB} comme il est bien connu, mesure donc la distance entre les générateurs (au voisinage d'un point x^o, x^A de Σ). γ_{AB} définit une métrique Riemanienne positive sur S_{x^0}.Nous noterons γ le déterminant de γ_{AB} et γ^{AB} la matrice inverse de γ_{AB}. γ^{AB} ainsi défini est un objet géométrique intrinsèque à S_{x^o}.

Il est important pour la suite d'introduire la dérivée de Lie de la métrique Riemanienne $\underset{\sim}{\gamma}$ par rapport au vecteur ℓ de déplacement le long des générateurs. Plus exactement, par analogie avec la mécanique des milieux continus (Germain, 1973) nous appellerons tenseur des taux de déformation $\underset{\sim}{D}$ la moitié de cette dérivée de Lie.

Comme ℓ transporte les sections S_{x^o} , on voit que $\underset{\sim}{D}$ est intrinsèque aux sections et qu'on peut écrire, avec nos conventions de coordonnées :

$$D_{AB} = \frac{1}{2}\left(\pounds_{\ell}\, \underset{\sim}{\gamma}\right)_{AB} = \frac{1}{2}\, d_0\, \gamma_{AB} \tag{10}$$

Il est traditionnel aussi de décomposer la déformation en trace et en partie sans trace.

$$D_{AB} = \sigma_{AB} + \frac{1}{2}\,\theta\, \gamma_{AB} \tag{11}$$

où $\theta = \gamma^{AB} D_{AB}$ est la trace du taux de déformation et où σ_{AB} (avec $\gamma^{AB}\sigma_{AB} = 0$) est le tenseur de glissement, ou si l'on préfère de cisaillement (en anglais "shear"). θ ainsi défini est le scalaire de dilatation surfacique, car si l'on considère un élément de surface dS de S_{x^0} :

$$dS = \sqrt{\gamma}\; dx^2 \wedge dx^3 \tag{12}$$

il varie sous l'effet d'un transport de Lie par ℓ, selon la loi :

(13) $$\pounds_\ell (dS)/dS = d_0 \sqrt{\gamma}/\sqrt{\gamma} = \frac{1}{2} \gamma^{AB} d_0 \gamma_{AB} = \theta .$$

3. Transformation de Weingarten et connection affine réduite.

Il nous reste à considérer la connection affine et ses coefficients Γ :

(14) $$e_{a;b} = \Gamma^c_{ab}\, e_c$$

Premièrement, nous savons que le vecteur $\ell = e_0$ est tangent à des géodésiques (cela se démontre aisément en utilisant l'équation $g_{0\bar{A}} = 0$) d'où

(15a) $$e_{0;0} = \Gamma^0_{00}\, e_0$$

c'est-à-dire que :

(15b) $$\Gamma^A_{00} = \Gamma^1_{00} = 0$$

le scalaire Γ^0_{00} jouant un rôle important dans la physique des trous noirs a reçu un nom : gravité de surface et nous le désignerons par la lettre g (il est noté κ par B.Carter, 1973).

(15c) $$\Gamma^0_{00} \equiv g \qquad \text{soit} \qquad \nabla_\ell \ell = g\, \ell$$

Le vecteur $e_{0;A}$ doit être tangent à Σ (il suffit de différencier $e_0 \cdot e_0 = \text{const.} = 0$ pour s'en convaincre) d'où

(16a) $$e_{0;A} = \Gamma^0_{0A}\, e_0 + \Gamma^B_{0A}\, e_B$$

(16b) $$\Gamma^1_{0A} = 0$$

La quantité Γ^0_{0A} va jouer un rôle essentiel dans la suite aussi convient-il de la désigner d'une façon spéciale ; nous poserons :

(17) $$\Gamma^0_{0A} \equiv \Omega_A$$

pour suivre, Hajicek (1975) qui a introduit Ω_A dans le cas où $D_{BC} = 0$ sous le nom de "champ gravito-magnétique". Nous proposerons plus bas une interprétation différente pour Ω_A .

Il est aisé de calculer Γ^B_{0A} en utilisant les symboles de Christoffel

$$g_{Bb}\, \Gamma^b_{0A} = \frac{1}{2} (g_{0B,A} + g_{BA,0} - g_{A0,B}) = \frac{1}{2}\, g_{BA,0} = D_{AB}$$

or d'après (8) et (16b) on a

$$g_{Bb}\,\Gamma_{0A}^{\ b} = \gamma_{BC}\,\Gamma_{0A}^{\ C}$$

d'où en inversant :

(18a) $$\Gamma_{0A}^{\ B} = \gamma^{BC} D_{AC} = D_A^B = \frac{1}{2}\gamma^{BC}\gamma_{AC,0}$$

d'où l'on déduit la relation utile :

(18b) $$\Gamma_{0B}^{\ B} = D_B^B = \theta .$$

On peut donc écrire (16a) sous la forme :

(18c) $$\nabla_{e_A}\ell = \Omega_A\,\ell + D_A^B\,e_B .$$

Ces résultats nous permettent d'écrire explicitement la transformation tangente $\chi_{\bar{A}}^{\bar{B}}$ de Weingarten (cf. Hicks, 1965) définie par la généralisation au cas isotrope de l'équation (3) c'est-à-dire encore par :

(19) $$\nabla_{e_{\bar{A}}}\ell = \chi_{\bar{A}}^{\bar{B}}\,e_{\bar{B}}$$ pour toute base $e_{\bar{A}}$ tangente à Σ .

($\chi_{\bar{A}}^{\bar{B}}$ existe car ℓ^2 = const., alors χ est un tenseur intrinsèque à Σ induit par la connection ambiante).

On peut écrire explicitement χ , sous forme d'une matrice, dans la base employée ci-dessus :

(20) $$\left(\chi_{\bar{A}}^{\bar{B}}\right) = \begin{pmatrix} \chi_0^0 & \chi_A^0 \\ \chi_0^B & \chi_A^B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & \Omega_A \\ 0 & D_A^B \end{pmatrix} = \left(\Gamma_{0\bar{A}}^{\ \bar{B}}\right)$$

C'est cette quantité qui va satisfaire une équation en tout point semblable à l'équation de Codazzi contractée du cas nonisotrope.

Prolongeant les définitions de Hicks (1965) la deuxième forme fondamentale de Σ : II sera alors obtenue en abaissant l'indice contravariant de χ c'est-à-dire si X et Y sont tangents à Σ :

(21a) $$\mathrm{II}(X,Y) \equiv g(X,\chi(Y)) = g_{\bar{A}\bar{B}}\,X^{\bar{A}}\chi_{\bar{C}}^{\bar{B}}\,Y^{\bar{C}}$$

d'où, comme $g_{0\bar{A}} = 0$, une forme symétrique :

(21b) $$\mathrm{II}(X,Y) = g_{AB}\,\chi_C^B\,X^A Y^C = D_{AB}\,X^A Y^B$$

Donc, on peut dire que dans le cas isotrope, la deuxième forme fondamentale et définie par le taux de déformation (c'est-à-dire σ_{AB} et θ) alors

que la transformation de Weingarten dépend en outre de g et Ω_A .
Enfin, nous complétons la liste des coefficients de connection qui nous intéressent avec :

(22a) $$e_{A;0} = e_{0;A} = \Omega_A e_0 + D_A^B e_B$$

(22b) $$e_{A;B} = \Gamma_{AB}^0 e_0 + \Gamma_{AB}^C e_C + \Gamma_{AB}^1 e_1 .$$

On a en utilisant les symboles de Christoffel :

$$g_{0a} \Gamma_{AB}^a = g_{01} \Gamma_{AB}^1 = \frac{1}{2}(g_{A0,B} + g_{0B,A} - g_{BA,0}) = - D_{AB}$$

soit :

(23) $$\Gamma_{AB}^1 = - D_{AB}/g_{01}$$

et $$g_{Ca} \Gamma_{AB}^a = g_{CD} \Gamma_{AB}^D + g_{C1} \Gamma_{AB}^1 = \frac{1}{2}(g_{AC,B} + g_{CB,A} - g_{BA,C})$$
d'où

(24) $$\Gamma_{AB}^C = \left\{ {C \atop AB} \right\} + D_{AB} \gamma^{CD} g_{D1}/g_{01}$$

où $\left\{ {C \atop AB} \right\} = \frac{1}{2} \gamma^{CD}(\gamma_{AD,B} + \gamma_{DB,A} - \gamma_{BA,D})$ sont les coefficients de la connection Riemanienne de S_{x^0} .

Etant données l'hypersurface Σ , la connection ambiante ∇ et une direction arbitraire transverse à Σ (par exemple e_1) nous définissons maintenant la restriction de la connection ambiante à Σ : $\bar{\nabla}$: si X et Y sont des vecteurs tangents à Σ , $\bar{\nabla}_X Y$ sera la projection sur Σ , par rapport à e_1, de $\nabla_X Y$. Autrement dit si $e_{\bar{A}}$ est une base du plan tangent à Σ on définira cette connection réduite à Σ par :

(25) $$\bar{\nabla}_{e_{\bar{B}}} e_{\bar{A}} \equiv e_{\bar{A}|\bar{B}} \equiv \Gamma_{\bar{A}\bar{B}}^{\bar{C}} e_{\bar{C}}$$

où les $\Gamma_{\bar{A}\bar{B}}^{\bar{C}}$ sont les coefficients Γ_{ab}^c de ∇ dans la base ($e_1, e_{\bar{A}}$)avec une simple restriction du domaine des indices. Insistons sur le fait que cette connection réduite dépend du choix arbitraire d'une direction transverse à Σ (c'est-à-dire complémentaire du plan tangent à Σ) alors que la transformation de Weingarten χ est un tenseur défini sur Σ indépendamment du choix d'une direction transverse. En revanche, χ dépend explicitement de la normalisation choisie pour ℓ.

4. Equation de Codazzi contractée.

Intéressons nous maintenant au tenseur de Ricci ambiant R_{ab} ou plutôt aux composantes de ce dernier qui interviennent comme conditions initiales dans le cas non isotrope : ce sont les projections sur Σ de $\ell^a R_{ab}$ c'est-à-dire les composantes $\ell^a R_{ab} e^b_{\bar A}$. Or, on a dans notre système de coordonnées :

$$\ell^a R_{ab} e^b_{\bar A} \equiv R_{0\bar A} \equiv R^{a}_{\cdot\, 0a\bar A} = R^{1}_{\cdot\, 01\bar A} + R^{\bar B}_{\cdot\, 0\bar B\bar A} .$$

Mais on a d'après (8)

$$\forall b,c \qquad g_{01}\, R^{1}_{\cdot\, 0bc} = g_{0a}\, R^{a}_{\cdot\, 0bc} = R_{00bc} = 0\,, \text{ soit } R^{1}_{\cdot\, 0bc} = 0\,,$$

d'où

$$R_{0\bar A} = R^{\bar B}_{\cdot\, 0\bar B\bar A} = \Gamma^{\bar B}_{0\bar A,\bar B} - \Gamma^{\bar B}_{0\bar B,\bar A} + \Gamma^{a}_{0\bar A}\Gamma^{\bar B}_{a\bar B} - \Gamma^{a}_{0\bar B}\Gamma^{\bar B}_{a\bar A}$$

l'indice a prend les valeurs 0, 1, 2, 3 mais d'après (15b) et (16b) on a

$$\Gamma^{1}_{0\bar A} = 0$$

Donc, on peut restreindre a à 0, 2, 3 d'où :

$$R_{0\bar A} = \left\{\Gamma^{\bar B}_{0\bar A,\bar B} + \Gamma^{\bar C}_{0\bar A}\Gamma^{\bar B}_{\bar C\bar B} - \Gamma^{\bar B}_{0\bar C}\Gamma^{\bar C}_{\bar B\bar A}\right\} - \Gamma^{\bar B}_{0\bar B,\bar A}$$

On voit apparaître ainsi la dérivée covariante réduite de $\chi^{\bar B}_{\bar A} = \Gamma^{\bar B}_{0\bar A}$ considéré comme objet tensoriel interne à Σ (c'est-à-dire précisément la transformation de Weingarten) d'où :

$$\boxed{R_{0\bar A} = \chi^{\bar B}_{\bar A\,|\bar B} - \chi^{\bar B}_{\bar B\,|\bar A}} \qquad (26)$$

Ce résultat est exactement analogue à l'équation de Codazzi contractée pour une hypersurface non isotrope (4). La définition de χ comme transformation de Weingarten (c'est-à-dire dérivée du vecteur normal) est identique. La seule différence étant que Σ n'étant pas munie d'une métrique Riemanienne propre il a été nécessaire de la munir d'une connection en réduisant la connection ambiante à Σ . Cette réduction dépend du choix de e_1 , cependant, nous allons maintenant explicitement vérifier que le deuxième membre de l'équation (26) ne dépend pas du choix de e_1 , ce qui doit être a priori puisque le premier membre n'en dépend pas.

Séparant dans (26) les termes avec indices 0 on trouve aisément après quelques réductions :

(27a) $$R_{00} = -\Gamma^{B}_{0B,0} + \Gamma^{0}_{00}\Gamma^{B}_{0B} - \Gamma^{C}_{0B}\Gamma^{B}_{C0}$$

(27b) $$R_{0A} = \Gamma^{0}_{0A,0} + \Gamma^{0}_{0A}\Gamma^{B}_{0B} + \left[\Gamma^{B}_{0A,B} + \Gamma^{C}_{0A}\Gamma^{B}_{CB} - \Gamma^{B}_{0C}\Gamma^{C}_{BA}\right] - \left(\Gamma^{0}_{00} + \Gamma^{B}_{0B}\right)_{,A}$$

Or, $\Gamma^{0}_{00} = g$, $\Gamma^{0}_{0A} = \Omega_A$, $\Gamma^{C}_{0B} = D^{C}_{B}$ sont indépendants de e_1 seuls les termes en Γ^{C}_{AB} à l'intérieur des crochets dépendent du choix de e_1. Mais il est immédiat de vérifier , en utilisant l'expression (24) pour Γ^{C}_{AB}, que les termes en $g_{D1}\gamma^{DC}D_{AB}$ s'éliminent (car $\Gamma^{C}_{0A} = D^{C}_{A}$). Les termes entre crochets s'écrivent donc :

(28) $$\Gamma^{B}_{0A,B} + \Gamma^{C}_{0A}\Gamma^{B}_{CB} - \Gamma^{B}_{0C}\Gamma^{C}_{AB} = D^{B}_{A,B} + D^{C}_{A}\left\{{B \atop CB}\right\} - D^{B}_{C}\left\{{C \atop AB}\right\} \equiv D^{B}_{A\,\|B}$$

Où l'on a introduit une double barre pour indiquer la dérivée covariante associée à la métrique Riemanienne des sections S_{χ^0} (définie à partir des symboles de Christoffel de γ_{AB}).

En remplaçant maintenant les coefficients Γ par leurs noms on a le double résultat :

(29a) $$R_{00} = -d_0\theta + g\theta - D_{AB}D^{AB}$$

(29b) $$R_{0A} = (d_0+\theta)\Omega_A + D^{B}_{A\,\|B} - (g+\theta)_{,A} \quad .$$

C'est-à-dire, décomposant le taux de déformation selon (11) $(\underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{\sigma} + \frac{1}{2}\theta\underset{\sim}{\gamma})$:

(30a) $$\boxed{R_{00} = -d_0\theta + g\theta - \sigma_{AB}\sigma^{AB} - \frac{1}{2}\theta^2}$$

(30b) $$\boxed{R_{0A} = (d_0+\theta)\Omega_A + \sigma^{B}_{A\,\|B} - \left(g+\frac{1}{2}\theta\right)_{,A}}$$

La première équation (30a) est bien connue (équation de Raychaudhuri généralisée à une congruence isotrope , (cf. eg. Carter, 1978) et s'écrit souvent en introduisant la convergence ρ au lieu de la dilatation surfacique θ par

(31a) $$\rho = -\frac{1}{2}\theta \quad \text{ou} \quad \theta = -2\rho$$

(31b) $$d_o \rho = g\rho + \rho^2 + |\sigma|^2 + \frac{1}{2} R_{\ell\ell}$$

avec : $|\sigma|^2 = \frac{1}{2}\sigma_{AB}\sigma^{AB}$ et $R_{\ell\ell} \equiv R_{ab}\ell^a\ell^b = R_{oo}$

Nous verrons au chapitre suivant comment l'on peut donner de cette équation une interprétation thermodynamique plus complète que celle qu'on lui attribue d'habitude.

Nous allons maintenant nous attacher à montrer que l'autre équation (30b), qui semble-t-il n'avait jamais été remarquée, peut être interprétée comme décrivant la dynamique de surface des trous noirs.

5. Densité surfacique d'impulsion d'un trou noir.

Du point de vue géométrique : étant donnés Σ et ses sections S_{x^o} transportées, au sens de Lie, par le vecteur $\ell = e_o$ il est aisé de vérifier que R_{oo}, g et θ sont des scalaires définis sur chaque S_{x^o}, que R_{oA} et Ω_A sont des covecteurs sur chaque S_{x^o} et σ_{AB} un tenseur bicovariant. Alors pour écrire (30b) de façon explicitement covariante (par rapport aux changements de coordonnées dans les sections) il suffit de remarquer que $d_o\Omega_A$ est en fait la dérivée de Lie du covecteur $\underset{\sim}{\Omega}$ selon le vecteur $\vec{\ell}$:

(32) $$d_o\Omega_A = (\pounds_\ell \underset{\sim}{\Omega})_A$$

Alors la dérivée qui intervient dans (30b) peut s'interpréter comme la dérivée de Lie de la 2-forme à valeurs covectorielles :

(33) $$\Omega_A\, dS = \Omega_A \sqrt{\gamma}\, dx^2 \wedge dx^3$$

car d'après (13) et (32) :

(34) $$\left[(d_0 + \theta)\,\Omega_A\right] dS = \left[\mathcal{L}_\rho\left(\underset{\sim}{\Omega}\, dS\right)\right]_A$$

En d'autres termes Ω_A apparaît comme une densité surfacique covectorielle et $d_0 + \theta$ comme la dérivée de Lie de cette densité. Nous allons voir que Ω_A peut en fait s'interpréter (à un coefficient près) comme densité surfacique d'impulsion.

Du point de vue physique, les équations d'Einstein donnent:

(35) $$R_{0\bar{A}} = 8\pi\, T_{0\bar{A}}$$

où T_{ab} est le tenseur d'énergie-impulsion.

L'élément de surface de Σ s'écrit (avec $g = -$ dét g_{ab})

$$d\Sigma_a = \sqrt{g}\, \epsilon_{bcda}\, dx^b \wedge dx^c \wedge dx^d / 3!$$

où ϵ_{bcda} est complètement antisymétrique et satisfait:

$$\epsilon_{0123} = +1$$

Or dans le système de coordonnées ci-dessus on peut écrire sur Σ (avec $\gamma_{AB}\, C^B = g_{1A}$).

$$ds^2 = \gamma_{AB}\,(dx^A + C^A dx^1)(dx^B + C^B dx^1) + (g_{11} - \gamma_{AB}\, C^A C^B)(dx^1)^2 + \tag{36}$$
$$+\ 2\, g_{01}\, dx^0\, dx^1$$

d'où immédiatement

$$\sqrt{g} = g_{01}\,\sqrt{\gamma} \tag{37}$$

Or g_{01} vaut ℓ_1 la seule composante non nulle de ℓ_a d'où :

$$d\Sigma_a = \ell_a\ dx^0 \wedge dS \tag{38}$$

avec $\quad dS = \sqrt{\gamma}\ dx^2 \wedge dx^3$

Donc le flux d'énergie-impulsion à travers Σ est (le signe - est dû à la signature, ℓ^a étant orienté vers le futur) :

$$-T^{ab}\, d\Sigma_a = \left(-T^{ab}\,\ell_a\right)\ dx^0 \wedge dS$$

Donc le 4-vecteur $-T^{ab}\,\ell_a$ représente un flux d'énergie-impulsion à travers Σ par unité de surface propre (dS) et par unité de temps x^0.

Si l'on en prend une projection spatiale selon le vecteur e_A :

$-T^a{}_b\,\ell_a\,e^b_A\, dS = -T_{oA}\, dS$ représentera un flux d'impulsion à travers dS <u>par unité de temps x^0</u>. D'après les fondements de la dynamique un tel flux est une <u>force</u> que l'on peut noter $f_A\, dS$ où <u>f_A est une densité surfacique de force</u> : On a donc

$$f_A = -T_{oA} = -\frac{1}{8\pi}\, R_{aA}\,\ell^a \tag{39}$$

Donc on peut réécrire (30b) comme

$$\left[\mathcal{L}_\ell\left(-\frac{\Omega}{8\pi}\right)\right]_A = f_A - \partial_A\left(\frac{g}{8\pi}\right) + \left(\frac{1}{8\pi}\,\sigma_A{}^B\right)_{\|B} - \partial_A\left(\frac{\theta}{16\pi}\right) \tag{40a}$$

L'équation fondamentale de la dynamique dit que la force est égale à la dérivée de l'impulsion. En interprétant ici le mot dérivée au sens de Lie on voit qu'il apparaît comme naturel de considérer la quantité $-\Omega_A/8\pi$ comme densité surfacique d'impulsion. Vu l'importance de cette quantité dans l'interprétation dynamique de l'équation (30b) que nous donnerons au paragraphe suivant nous introduisons pour elle la nouvelle notation π_A soit :

$$\boxed{\pi_A \equiv -\Omega_A/8\pi .} \qquad (40b)$$

Il convient, à ce point, d'insister sur le fait que, bien que notre étude jusqu'à présent ait été valable pour une surface isotrope quelconque, l'introduction de densités sufaciques semble surtout intéressante (d'un point de vue heuristique) dans le cas de l'horizon d'un trou noir. En effet, l'horizon d'un trou noir étant la frontière de la région d'où l'on peut télégraphier à l'infini, l'intérieur du trou noir ne saurait influencer la physique à l'extérieur (infini futur compris). Il paraît donc intéressant et simplificateur de remplacer autant que possible toute la structure interne du trou noir par des densités superficielles à l'horizon. L'exemple le plus simple d'une telle schématisation de surface est donné par le concept de quadricourant électrique de surface d'un trou noir (Damour 1977c)(cf. chapitre II) qui assure la conversation de l'électricité dans la variété excisée du trou noir mais munie de sa surface comme bord. Nous allons voir qu'en ce qui concerne la dynamique générale d'un trou noir, ce programme peut être mené assez loin de façon cohérente.

Vérifions par exemple que l'interprétation de π_A (40b) comme densité surfacique d'impulsion est cohérente avec la définition habituelle du moment angulaire d'un trou noir axisymétrique.

Dans le cas où l'espace-temps admet un vecteur de Killing axisymétrique: $\vec{m}_\varphi$, le moment angulaire total associé admet une décomposition en moment angulaire dû au tenseur l'impulsion-énergie extérieur au trou noir :

(41) $$J_{ext} = + \frac{1}{8\pi} \int_{\sigma} R^a{}_b \, m_\varphi^b \, d\sigma_a$$

(où σ est une hypersurface spatiale joignant l'infini à une section S de l'horizon et où $d\sigma_a \lambda^a$ est positif quand λ^a est orienté vers le futur) et en une contribution venant de la section S du trou noir

(42) $$J_H = - \frac{1}{16\pi} \oint m_\varphi^{a;b} \, dS_{ab}$$

où

(43) $$dS_{ab} = (n_a \ell_b - n_b \ell_a) \, dS$$

n étant un vecteur isotrope orthogonal à la section S et normalisé par :

(44) $$n_a \ell^a = + 1$$

(pour une revue de ces propriétés cf. Carter 1978).

Utilisant l'antisymétrie de $m_\varphi{}^{a;b}$ on a

$$J_H = - \frac{1}{8\pi} \oint n_a \left(m_\varphi{}^a{}_{;b} \, \ell^b \right) dS$$

En coordonnées adaptées on a $\ell = \frac{\partial}{\partial x^0}$ et $m_\varphi = \frac{\partial}{\partial \varphi}$ où φ est l'angle de rotation autour de l'axe de symétrie. Donc ℓ et m_φ commutent c'est-à-dire :

$$m_\varphi{}^a{}_{;b} \, \ell^b = \ell^a{}_{;b} \, m_\varphi^b$$

d'où

$$J_H = - \frac{1}{8\pi} \oint n_a \left(\ell^a{}_{;b} \, m_\varphi^b \right) dS$$

Mais par définition on a (18c) :

$$\ell_{;A} = \nabla_{e_A} \ell = \Omega_A \ell + D_A^B e_B$$

Donc en contractant par le vecteur n orthogonal à e_B et satisfaisant (44) on a :

$$n_a \nabla_{e_A} \ell^a = \Omega_A = -(8\pi)\pi_A \quad . \tag{45}$$

D'où prenant $e_A = m_\varphi$ (il faut pour celà que la section S soit axisymétrique)

$$-\frac{1}{8\pi}\, n_a\, \ell^a{}_{;b}\, m_\varphi^b = \pi_A\, m_\varphi^A = \pi_\varphi$$

π_φ étant la projection selon ∂_φ du covecteur π_A. Et finalement on a bien

$$J_H = \oint \pi_\varphi\, dS \tag{46}$$

en parfaite conformité avec l'interprétation, proposée par nous, de π_A comme densité surfacique d'impulsion du trou noir. Remarquons bien que ce résultat ne suppose nullement que l'espace-temps soit stationnaire.

6. Cinétique et dynamique de la surface d'un trou noir.

Maintenant tous les autres termes de l'équation (40a) vont s'interpréter simplement en les comparant à ceux de l'équation de Navier-Stokes d'un fluide Newtonien (Germain 1973) dans un espace euclidien à n dimensions.

Considérons un fluide visqueux. Soient : v^i ($i = 1,\dots, n$) son champ de vitesses, π_i sa densité volumique d'impulsion, p sa pression, f_i la densité de force extérieure, η et ζ les coefficients de viscosité de cisaillement et de dilatation. On peut écrire l'équation classique de Navier-Stokes (en coordonnées cartésiennes).

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \theta\right)\pi_i + v^k \pi_{i,k} = f_i - p_{,i} + 2\eta\, \sigma_i{}^k{}_{,k} + \zeta\,\theta_{,i} \tag{47}$$

où l'on définit à partir du taux de déformation du fluide

$$D_{ik} = \frac{1}{2}(v_{i,k} + v_{k,i}) \tag{48a}$$

le taux de glissement

$$\sigma_{ik} = D_{ik} - \frac{1}{n} D_{ss}\, \delta_{ik} \tag{48b}$$

et le taux de dilatation

(48c) $$\theta = D_{kk} = v^k{}_{,k} \, .$$

Celà se compare très précisement avec (40) si l'on introduit un système de coordonnées sur l'horizon tel que la surface du trou noir soit en mouvement. Nous voulons dire par là que nous avons choisi ci-dessus des coordonnées x^A dans les sections S_{x^o} telles que chaque générateur de l'horizon corresponde à une valeur fixe de chaque x^A. Maintenant nous relâchons cette contrainte.

En d'autres termes si l'on considère les générateurs comme les particules d'un fluide nous admettons maintenant la possibilité d'un mouvement de ce fluide par rapport au système de coordonnées (x^o, x^A) de l'horizon. L'horizon correspondant toujours à une valeur fixe de la coordonnée x^1 on peut normaliser la tangente aux générateurs comme étant :

(49a) $$\ell = \ell^a \partial_a = \partial_o + v^A \partial_A$$

C.a.d. étant donnée la coordonnée x^o (un champ scalaire), le vecteur $\vec{\ell}$ est normalisé par :

(49b) $$\ell(x^o) \equiv \ell^a \partial_a x^o = 1$$

(une telle normalisation est nécessaire pour que ℓ transporte les sections S_{x^o} au sens de Lie).

Alors v^A mesure le déplacement des générateurs dans la direction ∂_A pendant l'unité de temps x^o. Donc on peut considérer v^A comme la vitesse du fluide susmentionné. Insistons bien qu'il s'agit là d'une divitesse $\vec{v} = v^A \partial_A$ rapportée à un temps extérieur arbitraire x^o et non d'une quadrivitesse mesurée en temps propre. Ce concept de vitesse de surface d'un trou noir fut introduit dans le contexte de l'électromagnétisme des trous noirs (Damour 1977c cf. chapitre II) pour son utilité dans la formulation de la loi d'Ohm. Il fut alors vérifié que le module de $\vec{v}$ (voir (50b))

est toujours inférieur à 1 pour les métriques de Kerr-Newmann, n'atteignant
1 qu'à l'équateur d'un trou noir de Kerr extrême (a = M). Il est tentant de <u>conjecturer</u> que cette propriété est vraie pour un trou noir stationnaire général, V étant défini comme la différence entre ℓ et le vecteur de Killing stationnaire $\partial_0 = k$ d'où :

$$V^2 = k^2 < 1 \quad ? \quad \text{(sur l'horizon)}$$

Dans un tel système de coordonnées (non - comouvantes) les relations (8) se trouvent remplacées par

(50a) $$g_{0A} = - \gamma_{AB} V^B$$

(50b) $$g_{00} = + \gamma_{AB} V^A V^B$$

de sorte que la métrique induite sur l'horizon peut s'écrire

(50c) $$ds^2|_\Sigma = \gamma_{AB} (dx^A - V^A dx^0)(dx^B - V^B dx^0) .$$

Les définitions de g et Ω_A se font toujours selon la base $\{\ell, e_A = \partial_A\}$ c'est-à-dire (cf. (15c) et (18c)) :

(51a) $$\nabla_\ell \ell = g \ell$$

(51b) $$\nabla_{e_A} \ell = \Omega_A \ell + D_A^B e_B .$$

En revanche l'expression de la dérivée de Lie selon ℓ est maintenant modifiée par des termes "convectifs". Par exemple :

(52a) $$D_{AB} = \tfrac{1}{2}(\pounds_\ell \gamma)_{AB} = \tfrac{1}{2}(\partial_0 \gamma_{AB} + V^C \partial_C \gamma_{AB} + \partial_A V^C \gamma_{CB} + \partial_B V^C \gamma_{AC})$$

C'est en prévision d'une telle modification que nous avons employé ci-dessus un d droit pour désigner la dérivée le long de ℓ afin d'éviter les confusions avec ce qui va être noté ∂_0 dorénavant.

L'équation (52a) peut encore s'écrire en utilisant la dérivée covariante Riemannienne des sections S_{x^0} :

(52b) $$D_{AB} = \frac{1}{2}\left(V_{A\parallel B} + V_{B\parallel A} + \partial_0 \gamma_{AB} \right).$$

D'où la dilatation surfacique et le glissement :

(52c) $$\theta = \gamma^{AB} D_{AB} = V^{C}{}_{\parallel C} + \frac{1}{2}\gamma^{AB}\partial_0 \gamma_{AB} = V^{C}{}_{\parallel C} + \frac{\partial_0 \sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma}}$$

(52d) $$\sigma_{AB} = D_{AB} - \frac{1}{2}\theta\,\gamma_{AB}$$

De même la dérivée du covecteur Ω_A s'écrit :

(53a) $$(\pounds_{\ell}\,\underset{\sim}{\Omega})_A = \partial_0 \Omega_A + V^B \partial_B \Omega_A + \partial_A V^B \Omega_B$$

ou encore :

(53b) $$(\pounds_{\ell}\,\underset{\sim}{\Omega})_A = \partial_0 \Omega_A + V^B \Omega_{A\parallel B} + V^B{}_{\parallel A}\,\Omega_B$$

Ce qui permet d'écrire l'équation de Codazzi contractée (30b) sous la forme :

(54) $$R_{ab}\,\ell^a e^b_A = \partial_0 \Omega_A + \theta\,\Omega_A + V^B \Omega_{A\parallel B} + V^B_{\parallel A}\,\Omega_B + \\ + \sigma_A{}^B{}_{\parallel B} - \left(g + \frac{1}{2}\theta\right)_{,A}.$$

En introduisant la densité surfacique d'impulsion $\pi_A = -\Omega_A/8\pi$ (40b) on peut réécrire (54) sous la forme de "<u>l'équation fondamentale de la dynamique de surface du trou noir</u>" :

$$(55)\quad \boxed{(\partial_0+\theta)\pi_A + V^B\,\pi_{A\|B} + V^B_{\ \|A}\,\pi_B = f_A - \left(\frac{g}{8\pi}\right)_{,A} + 2\,\frac{1}{16\pi}\,\sigma_A{}^B{}_{\|B} - \frac{1}{16\pi}\,\theta_{,A}}$$

L'analogie entre (55) et (47) est frappante et l'on peut dire que le "fluide des générateurs" de l'horizon est :

- un fluide visqueux dans un espace Riemannien à deux dimensions muni de la métrique γ_{AB}.
- de densité surfacique d'impulsion $\pi_A = -\Omega_A/8\pi$
- de vitesse V^A
- de densité de force extérieure $f_A = -T_{aA}\ell^a$ (cf. pour un exemple II (34))
- de pression $+g/8\pi$
- de coefficient de viscosité de cisaillement $\eta = +1/(16\pi)$
- de coefficient de viscosité de dilatation $\zeta = -1/(16\pi)$

Mis à part le fait que le taux de dilatation (52b) contienne un terme en $\partial_0\,\gamma_{AB}$ (mais ceci est une généralisation bien naturelle du cas classique) et que certaines dérivées ordinaires deviennent covariantes les seules différences sont l'apparition d'une dérivée de Lie de l'impulsion par rapport à la vitesse et le fait important que l'impulsion de surface n'est plus nécessairement colinéaire à la vitesse. Mais cette dernière situation ne saurait arriver en général car le covecteur $\underset{\sim}{\pi}$ est bien défini dès que x^0 et par conséquent les sections S_{x^0} sont données alors que pour définir le vecteur $\vec{V}$ il faut se donner le système de coordonnées x^A dans chaque section. En ce sens $\underset{\sim}{\pi}$ est bien plus invariant que $\vec{V}$ ne dépendant que du choix d'un champ scalaire (x^0) qui est parfois fixé par d'autres considérations. Notons que même dans le cas stationnaire x^0

(pris égal au paramètre du groupe des translations dans le temps) n'est défini sur l'horizon que modulo une fonction arbitraire additive des x^A (qui correspond au choix arbitraire des sections).

Du point de vue de l'interprétation physique plusieurs remarques s'imposent :

- Notre fluide est muni d'une <u>pression de surface</u> $g/8\pi$ où g est la gravité surface et non comme Bekenstein (1973) l'avait suggéré d'une <u>tension de surface</u> $g/8\pi$. Cette suggestion venait de l'existence d'un terme $(8\pi)^{-1} g dS$ dans la différentielle de l'énergie d'un trou noir en fonction de son moment angulaire, de sa charge électrique et de sa surface S. Pourtant l'interprétation de $g/8\pi$ comme pression de surface (c'est-à-dire une tension superficielle négative) est naturelle si l'on se rapporte à l'exemple de l'électromagnétisme. En effet si l'on essaie de faire un modèle classique de l'électron comme une bulle électrisée il faut contrecarrer la répulsion électrostatique en munissant cette bulle d'une tension de surface (tension de Poincaré). Dans le cas gravitationnel notre approche consiste, en gros, à faire un modèle d'un trou noir comme une bulle, il nous faut donc contrecarrer l'attraction gravifique (gravité de surface) en munissant cette bulle d'une tension de surface négative.

- Le fait que ce fluide soit visqueux avait été indiqué par Hawking et Hartle (1972) en partant de la dissipation causée par des marées sur l'horizon (chapitre II). La valeur $(16\pi)^{-1}$ pour le coefficient de viscosité de cisaillement de surface est une conséquence de leurs arguments, mais jamais n'avait été exhibé l'analogue de la loi de Navier-Stokes : (55).

- Le fait que la viscosité de dilatation de ce fluide soit négative ($-(16\pi)^{-1}$) n'a jamais été suggéré. Cependant nous verrons au chapitre III que cette valeur est en parfait accord avec l'interprétation thermodynamique que nous donnerons de l'équation de Raychaudhuri généralisée (30a).

De plus on peut justifier ce signe négatif en remarquant que dans le cas classique $\zeta < 0$ veut dire que le fluide est instable par rapport à une expansion ou à ~~une~~ contraction (car la pression visqueuse supplémentaire $-\zeta\theta$ ne s'oppose pas à la cause) ce qui paraît naturel pour l'horizon d'un trou noir qui a tendance à imploser ou exploser selon les conditions initiales et qui n'est en fait défini que de façon <u>finale</u> (c'est-à-dire par une condition à $x^0 = +\infty$).

7. Application à l'état d'équilibre d'un trou noir.

Considérons un trou noir en état d'équilibre c'est-à-dire en état stationnaire admettant un vecteur de Killing k qui est orienté dans le temps à l'infini. k sera normalisé de sorte que

(56) $$k^2 = -1 \text{ à l'infini.}$$

L'horizon du trou noir devant être invariant par k, on en déduit que k est tangent à l'horizon.

Alors on peut introduire une coordonnée temporelle x° telle que $k = \partial/\partial x^0$ partout. La coordonnée x° feuillète l'espace temps et en particulier l'horizon ce qui définit comme ci-dessus des sections S_{x^0} . Comme ci-dessus, on complète le système de coordonnées avec une coordonnée "radiale" x^1 (telle que $x^1 = 0$ sur l'horizon) et des coordonnées x^A, fixes par rapport à k, sur les sections S_{x^0} . Le vecteur normal à l'horizon ℓ est alors normalisé de sorte que :

(57a) $$\ell = k + v$$

où k est le vecteur de Killing stationnaire et où v est tangent aux sections S_{x^0} c'est-à-dire

(57b) $$v = v^A \partial_A$$

On retrouve donc des conventions de coordonnées identiques à celles employées ci-dessus dans le cas non-comouvant, avec en plus la restriction que rien ne doit dépendre de la coordonnée x°.

En outre, on sait par un théorème de Hawking (1973) que :

(58) $$\theta \geqslant 0$$

Or, si θ était strictement positif quelque part, cela impliquerait un accroissement de surface de l'horizon ce qui ne saurait arriver en état stationnaire d'où :

(59) $$\theta = 0$$

Utilisant cette information dans l'équation de Raychaudhuri généralisée (30a) et utilisant l'hypothèse de positivité de l'énergie faite par Hawking (1973)(d'où : $R_{\ell\ell} = R_{ab}\ell^a\ell^b \geqslant 0$) on obtient

(60a) $$R_{\ell\ell} = 0$$

et

(60b) $$\sigma_{AB} = 0$$

Or : $$\sigma_{AB} + \frac{1}{2}\theta\gamma_{AB} = D_{AB} = \frac{1}{2}(v_{A\|B} + v_{B\|A})$$

d'où : (60c) $$v_{A\|B} + v_{B\|A} = (\pounds_v \underset{\sim}{\gamma})_{AB} = 0$$

c'est-à-dire que v est un vecteur de Killing de la géométrie des sections S_{x^0}. Hawking a démontré que S_{x^0} devait avoir la topologie d'une sphère donc l'isométrie engendrée par v (si $v \neq 0$) doit être du type : symétrie axiale et par conséquent on peut introduire sur chaque S_{x^0} une coordonnée ignorable φ (de période 2π) et une constante Ω_H telle que :

(61) $$v = \Omega_H\, \partial_\varphi$$

La constante Ω_H ainsi introduite est appellée vitesse angulaire de rotation du trou noir (Carter, 1973). L'équation de Codazzi (54) se réduit alors à :

(62) $$(\pounds_v \underset{\sim}{\Omega})_A = \partial_A g + \ell^a R_{ab}\, e^b_A$$

Or, l'hypothèse de dominance de l'énergie (c'est-à-dire, qu'aucun flux d'énergie ne soit dirigé dans l'espace) implique que le vecteur $T_{ab}\ell^a$ n'est pas spatial, or on vient de voir (60a) que $T_{ab}\ell^a\ell^b = 0$ donc $T_{ab}\ell^a$ est nul ou parallèle à ℓ_b, d'où si l'on admet l'hypothèse de dominance de l'énergie :

(63) $$R_{ab}\ell^a e^b_A = 8\pi T_{ab}\ell^a e^b_A = 0$$

Donc, si le trou noir ne tourne pas (v = 0) on déduit immédiatement de (62) et (63) que g est uniforme sinon ($v \neq 0$) on obtient :

(64) $$(\pounds_v \underset{\sim}{\Omega})_A = \Omega_H\, \partial_\varphi \Omega_A = \partial_A g$$

Avec Hawking (1973) nous pouvons choisir des sections S_{x^0} telles que g soit constant le long des générateurs ce qui implique donc :

(65) $$\pounds_v g = \Omega_H \partial_\varphi g = 0 \quad d'où \quad \partial_\varphi g = 0$$

En dérivant encore l'équation (64) on trouve donc que $\partial^2_\varphi \Omega_A = 0$ soit comme Ω_A doit être périodique en φ que $\partial_\varphi \Omega_A$ est nul et donc aussi $\partial_A g$. Nous avons donc montré qu'à l'état stationnaire, la gravité de surface (convenablement normalisée) était uniforme sur le trou noir. Cette uniformité s'interprétant d'après (55) comme une condition d'équilibre <u>mécanique</u> (uniformité de la pression de surface).

Remarquons enfin que la démonstration précédente indique que le vecteur $V = \Omega_H \partial_\varphi$ après normalisation convenable transporte non seulement la géométrie induite de l'horizon γ_{AB} mais encore son impulsion et sa gravité de surface. (Ω_A et g) c'est-à-dire la transformation de Weingarten qui est une courbure extrinsèque de l'horizon. Ce résultat est le début de la démonstration par Hawking que v est en fait un vecteur de Killing de la <u>géométrie ambiante</u>. (cf. Hawking-Ellis, 1973).

APPENDICE A

Afin de faciliter les comparaisons entre notre exposé et certains travaux de la littérature nous allons indiquer la forme que prennent nos résultats quand on utilise les notations de Newman et Penrose (1962). (Ci-dessous (NP 4.4), désigne l'équation (4.4), de l'article de Newman et Penrose).

Nous utilisons provisoirement dans cet appendice la signature + - - - . Comme <u>tétrade isotrope</u> nous prenons : pour l le vecteur normal à l'hypersurface Σ, pour m un vecteur complexe <u>tangent</u> à la section S_{x^0} et pour n le vecteur transverse à Σ et orthogonal à S_{x^0}. La normalisation de ces vecteurs est telle que (la barre désignant le complexe conjugué):

(A1) $$n_a \cdot l^a = - m_a \bar{m}^a = 1$$

sont les seuls produits contractés non nuls. Les opérateurs de dérivation correspondants à la tétrade $l, n, m, \bar{m}$ sont notés respectivement $D, \Delta, \delta, \bar{\delta}$.

D'après les commutateurs :

(NP 4.4) $$\bar{\delta}\delta - \delta\bar{\delta} = (\bar{\mu}-\mu)D + (\bar{\rho}-\rho)\Delta - (\bar{\alpha}-\beta)\bar{\delta} - (\bar{\beta}-\alpha)\delta$$

$$\delta D - D\delta = (\bar{\alpha}+\beta-\bar{\pi})D + \kappa\Delta - \sigma\bar{\delta} - (\bar{\rho}+\epsilon-\bar{\epsilon})\delta$$

on voit immédiatement (Frobenius) que :

. Le fait que l, m et $\bar{m}$ soient tangents à Σ implique

(A2) $\kappa = 0$ (c'est-à-dire l est géodésique).

et

(A3) $$\rho = \bar{\rho}$$

. Le fait que m et $\bar{m}$ soient tangents à S_{x^0} implique en outre :

(A4) $$\mu = \bar{\mu}$$

De plus, nous imposons comme ci-dessus que l transporte au sens de Lie les sections S_{x^0} c'est-à-dire que le commutateur $[l, m]$ c'est-à-dire $[D, \delta]$

soit une combinaison linéaire de m et $\bar{m}$ d'où

(A5) $$\bar{\alpha} + \beta = \bar{\pi}$$

Les coefficients qui nous interesseront sont :

$$\text{(A6)}\left\{\begin{aligned} \epsilon &= \tfrac{1}{2}\left(\ell_{a;b}\, n^a \ell^b - m_{a;b}\, \bar{m}^a \ell^b\right) \\ \rho &= \ell_{a;b}\, m^a \bar{m}^b \\ \sigma &= \ell_{a;b}\, m^a m^b \\ \alpha &= \tfrac{1}{2}\left(\ell_{a;b}\, n^a \bar{m}^b - m_{a;b}\, \bar{m}^a \bar{m}^b\right) \\ \beta &= \tfrac{1}{2}\left(\ell_{a;b}\, n^a m^b - m_{a;b}\, \bar{m}^a m^b\right) \end{aligned}\right.$$

Par définition, (cf. 15c) : $\ell_{a;b}\,\ell^b = g\,\ell_a$ on en déduit d'abord :

(A7) $$\epsilon + \bar{\epsilon} = g = \text{ gravité de surface.}$$

De plus, ρ et σ peuvent s'écrire :

(A8a) $$\rho = \tfrac{1}{2}(\rho + \bar{\rho}) = \tfrac{1}{2}(\ell_{a;b} + \ell_{b;a})\, m^a \bar{m}^b = \tfrac{1}{2}(\mathcal{L}_\ell\, \underset{\sim}{g})_{ab}\, m^a \bar{m}^b$$

(A8b) $$\sigma = \tfrac{1}{2}(\ell_{a;b} + \ell_{b;a})\, m^a m^b = \tfrac{1}{2}(\mathcal{L}_\ell\, \underset{\sim}{g})_{ab}\, m^a m^b$$

Mais, m^a étant tangent à S_{χ^0} peut se remplacer par m^A on voit ainsi apparaître la dérivée de Lie par rapport à ℓ de la métrique induite sur S_{χ^0} c'est-à-dire $-\gamma_{AB}$ (où l'on change de signe à cause du changement de signature de sorte que γ_{AB} soit toujours une métrique Riemanienne positive).

d'où :

(A9a) $$\rho = -\tfrac{1}{2}(\mathcal{L}_\ell\, \gamma)_{AB}\, m^A \bar{m}^B$$

(A9b) $$\sigma = -\tfrac{1}{2}(\mathcal{L}_\ell\, \gamma)_{AB}\, m^A m^B$$

Ecrivant par exemple :

(A10) $$m^A = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^A_{(2)} - i\, e^A_{(3)}\right)$$

où $e_{(2)}$ et $e_{(3)}$ forment une <u>base orthonormale</u> du plan tangent à la section S_{χ^0} on trouve :

(A11) $$m^A \bar{m}^B = \tfrac{1}{2}\left(\gamma^{\underline{AB}} + i\, \epsilon^{\overset{\vee}{AB}}\right)$$

où ϵ_{AB} est la forme élément de surface de S_{χ^0} :

$$\frac{1}{2}\,\epsilon_{AB}\, dx^A \wedge dx^B = \sqrt{\gamma}\, dx^2 \wedge dx^3 .$$

En se souvenant de (10) et (11) soit

(A12) $\frac{1}{2}(\pounds_{\ell}\underset{\sim}{\gamma})_{AB} = D_{AB} = \sigma_{AB} + \frac{1}{2}\theta\gamma_{AB}$

on obtient donc (tenant compte de $\gamma_{AB}\, m^A m^B = 0$)

(A13a) $\rho = -\frac{1}{2}\theta$

(A13b) $\sigma = -\sigma_{AB}\, m^A m^B$

En outre, on introduit avec Hajicek (1973) les combinaisons

(A14a) $\Omega = \bar{\alpha} + \beta$

(A14b) $\Gamma = \bar{\alpha} - \beta$

d'où :

(A15) $\Omega = \ell_{a;b}\, n^a m^b$

Mais, on avait par définition (51b)

$$\nabla_{e_A}\ell = \Omega_A \ell + D_A^B e_B$$

d'où en contractant avec m^A :

$$\nabla_m \ell = (\Omega_A m^A)\,\ell + D_A^B m^A e_B ,$$

d'où par contraction avec n :

(A16) $\Omega \equiv n.\nabla_m \ell = \Omega_A m^A$

Quant à Γ il correspond à la connection Riemanienne des sections S_{χ^0} de la façon suivante :

si on considère une quantité complexe :

(A17) $\lambda = \lambda_{A_1 A_2 \dots A_s}\, m^{A_1} m^{A_2} \dots m^{A_s}$

dite de spin s (θ, Ω et σ étant respectivement de spin 0, 1, et 2) $\lambda_{A_1\dots A_s}$ étant un tenseur symétrique, sans traces, intrinsèque à S_{χ^0}.

On peut écrire la dérivée de λ :

(A18) $\delta\lambda = (\lambda_{a_1\dots a_s} m^{a_1}\dots m^{a_s})_{;b}\, m^b = \lambda_{a_1\dots a_s;b}\, m^{a_1}\dots m^{a_s} m^b + s\,\lambda_{a_1\dots a_s}\, m^{a_1}{}_{;b} m^b m^{a_2}\dots m^{a_s}$.

D'après (A14b) on a $\Gamma = m_{a;b}\bar{m}^a m^b$ d'où :

(A19) $m^{a_1}{}_{;b}\, m^b = -\Gamma m^{a_1} +$ une combinaison linéaire de ℓ^{a_1} et n^{a_1}.

Mais $\lambda_{a_1\dots a_s}$ étant un tenseur (covariant) intrinsèque, à S_{χ^0} n'a de contraction non nulle qu'avec des vecteurs tangents à S_{χ^0} (c'est-à-dire m^{a_1}) d'où l'on tire :

(A20) $(\delta + s\Gamma)\lambda = \lambda_{a_1 \dots a_s ; b}\, m^{a_1} \dots m^{a_s} m^b$

D'après la formule de Gauss (Kobayashi-Nomizu, 1963) le second membre de (A20) vaut : $\lambda_{a_1 \dots a_s ; b}\, m^{a_1} \dots m^{a_s} m^b = \lambda_{A_1 \dots A_s \| B}\, m^{A_1} \dots m^{A_s} m^B$

Donc, introduisant l'opérateur $\eth = \delta + s\Gamma$ (Geroch, Held, Penrose, 1973) on a :

(A21) $\eth \lambda = \lambda_{A_1 \dots A_s \| B}\, m^{A_1} \dots m^{A_s} m^B = (\delta + s\Gamma)(\lambda_{A_1 \dots A_s} m^{A_1} \dots m^{A_s})$.

Telle est la dérivée covariante interne à S_{χ^0} d'une quantité de spin s. On définit de même $\bar{\eth}$ où $({}_{\| B}\, m^B)$ est remplacé par $({}_{\| B}\, \bar{m}^B)$ d'où les résultats :

$$\bar{\eth} = \bar{\delta} - s\bar{\Gamma}$$
$$\overline{\eth \lambda} = \bar{\eth}\, \bar{\lambda}$$

(le spin de $\mu_{A_1 \dots A_s} \bar{m}^{A_1} \dots \bar{m}^{A_s}$ étant - s par définition).

Considérons alors l'équation (NP 4.2a):

$$D\rho - \bar{\delta}\kappa = \rho^2 + \sigma\bar{\sigma} + (\epsilon + \bar{\epsilon})\rho - \bar{\kappa}\tau - \kappa(3\alpha + \bar{\beta} - \pi) + \Phi_{00}$$

Elle s'écrit en tenant compte des résultats précédents (A2 - 3).

$$D\rho = \rho^2 + |\sigma|^2 + g\rho + \tfrac{1}{2} R_{ab}\, \ell^a \ell^b$$

On voit alors facilement qu'elle est identique à l'eq. (30a) obtenue ci-dessus [cf. (31b)].

En revanche, pour obtenir l'équation (30b) il faut combiner les eq.

$\overline{\text{(NP4.2d)}}$ $D\bar{\alpha} - \delta\bar{\epsilon} = (\bar{\rho} + \epsilon - 2\bar{\epsilon})\bar{\alpha} + \bar{\beta}\sigma - \beta\bar{\epsilon} - \bar{\kappa}\bar{\lambda} - \kappa\bar{\gamma} + (\bar{\epsilon} + \bar{\rho})\bar{\pi} + \bar{\Phi}_{10}$

(NP4.2e) $D\beta - \delta\epsilon = (\alpha + \pi)\sigma + (\bar{\rho} - \bar{\epsilon})\beta - (\mu + \gamma)\kappa - (\bar{\alpha} - \bar{\pi})\epsilon + \Psi_1$

(NP4.2k) $\delta\rho - \bar{\delta}\sigma = \rho(\bar{\alpha} + \beta) - \sigma(3\alpha - \bar{\beta}) + (\rho - \bar{\rho})\tau - (\mu - \bar{\mu})\kappa - \Psi_1 + \Phi_{01}$

D'où , par calcul direct :

$$(D + \bar{\epsilon} - \epsilon)(\bar{\alpha} + \beta) - \sigma(\bar{\alpha} + \beta) - \delta(\epsilon + \bar{\epsilon}) + \delta\rho - [\bar{\delta} + 2(\bar{\beta} - \alpha)]\sigma \equiv$$
$$\equiv \sigma(\pi - \alpha - \bar{\beta}) + \rho(\bar{\alpha} + \beta + \tau) + \bar{\rho}(\bar{\pi} - \tau) -$$
$$- \kappa\bar{\mu} - \bar{\kappa}\bar{\lambda} + 2\Phi_{01}$$

Afin de simplifier le premier membre on introduit le covecteur d'espace-temps ·

(A22) $\hat{\Omega}_b \equiv n_a \ell^a{}_{;b}$ $\quad$ (avec $n_a \ell^a = +1$)

tel que : $\Omega \equiv \bar{\alpha} + \beta \equiv \ell_{a;b} n^a m^b = \hat{\Omega}_b m^b$

Remarquons que bien qu'on ait :

$$\hat{\Omega}_b m^b = \Omega = \Omega_A m^A$$

$\hat{\Omega}_b$ n'est pas un objet géométrique interne aux sections S_{x^0}. Cependant, sa projection sur S_{x^0} est identique à Ω_A.

La dérivée $D\Omega$ du scalaire Ω peut alors s'interpréter comme une dérivée de Lie dans l'espace-temps:

$$D\Omega = \mathcal{L}_\ell(\hat{\Omega}_b m^b) = m^b(\mathcal{L}_\ell \hat{\Omega})_b + \hat{\Omega}_b(\mathcal{L}_\ell m)^b .$$

Le commutateur $\mathcal{L}_\ell m = -\mathcal{L}_m \ell$ se lit directement à partir de

(NP 44) $(\mathcal{L}_\ell m)^b = -[\delta, D]x^b = (\bar{\pi} - \bar{\alpha} - \beta)\,\ell^b - \kappa\, n^b + \sigma \bar{m}^b + (\bar{\rho} + \epsilon - \bar{\epsilon})\, m^b$

d'où en remplaçant et en tenant compte de $\hat{\Omega}_b \ell^b = \epsilon + \bar{\epsilon}$, $\hat{\Omega}_b n^b = \gamma + \bar{\gamma}$:

Le résultat final est donc

(A23) $$m^b(\mathcal{L}_\ell \hat{\Omega})_b - (\rho + \bar{\rho})\Omega - \delta(\epsilon + \bar{\epsilon}) + \delta\rho - [\bar{\delta} - 2(\alpha - \bar{\beta})]\,\sigma \equiv$$
$$\equiv \sigma(\pi - \alpha - \bar{\beta}) + \bar{\rho}(\bar{\pi} - \bar{\alpha} - \beta) + (\rho - \bar{\rho})\tau - \kappa\bar{\nu} - \bar{\kappa}\lambda + 2\Phi_{01} .$$

D'aprés les hypothèses faites (A2-5) le second membre se réduit à $2\Phi_{01} = 8\pi T_{ab}\ell^a m^b$ (car Newman et Penrose utilisent un tenseur de Ricci opposé au nôtre)

Ce résultat s'identifie alors terme à terme avec l'expression (30b) ou (54). Il suffit en effet de constater que

$$m^b(\mathcal{L}_\ell \hat{\Omega})_b = m^b(\ell^a \hat{\Omega}_{b,a} + \ell^a{}_{,b}\hat{\Omega}_a) = m^B(\Omega_{B,0} + V^A \Omega_{B,A} + V^A{}_{,B}\Omega_A)$$
$$\delta(\epsilon + \bar{\epsilon}) = m^A g_{,A}$$
$$\delta\rho = -\tfrac{1}{2}\theta_{,A} m^A$$

et en utilisant (A21), (A13b), (A11) et le fait que σ est symétrique et sans trace :

$$[\bar{\delta} - 2(\alpha - \bar{\beta})]\,\sigma = \bar{\eth}\sigma = -\sigma_{AB\|C}\bar{m}^C m^A m^B = -\sigma_A{}^B{}_{\|B} m^A .$$

Afin de compléter l'interprétation de Ω et d'indiquer comment passer de nos résultats à ceux de Prior (1977 a, b) ; considérons aussi la quantité :

(A24) $$\eth\alpha - \bar{\eth}\beta \equiv \delta\alpha - \bar{\delta}\beta + 2\alpha\beta - \alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} = \mu\rho - \lambda\sigma - \Psi_2 + \Lambda + \Phi_{11} \equiv K$$

où nous introduisons la courbure complexe K de S_{x^0} (Geroch, Held, Penrose, 1973) qui dépend de Ψ_2 c'est-à-dire du tenseur de Riemann-Christoffel.

Exprimant α et β en fonction de Ω et Γ et séparant K en parties réelles et imaginaires on obtient deux équations :

(A25a) $$K + \bar{K} = \eth\bar{\Gamma} + \bar{\eth}\Gamma = \delta\bar{\Gamma} + \bar{\delta}\Gamma - 2\Gamma\bar{\Gamma}$$

(A25b) $$K - \bar{K} = \eth\bar{\Omega} - \bar{\eth}\Omega .$$

La première équation est l'équation de Gauss pour la 2-surface S_{x^0} (Eisenhart, 1926) et indique que K + $\bar{K}$ est la courbure de Gauss de S_{x^0}.

La deuxième équation s'écrit :

(A25c) $$K - \bar{K} = i\,\epsilon^{AB}\,\Omega_{A\|B}$$

C'est-à-dire (K-$\bar{K}$)/i est le rotationnel de Ω_A . Donc, modulo un gradient, Ω_A peut s'obtenir à partir de la partie imaginaire de la courbure complexe de S_{x^0} . Notons que Hajicek (1977) normalise Ω_A (dans le cas où $\sigma = \rho = 0$) en imposant l'annulation de sa divergence.