

CHAPITRE II

ELECTRODYNAMIQUE DES TROUS NOIRS

II. ELECTRODYNAMIQUE DES TROUS NOIRS.

1. Introduction.

Nous allons nous intéresser dans ce chapitre à l'interaction entre trou noir et champ électromagnétique. Les phénomènes liés à cette interaction semblent d'une très grande importance pour l'Astrophysique comme les chapitres IV, V et VI s'attacheront à le montrer. Dans ce chapitre nous resterons à un niveau plus formel et nous montrerons comment l'approche utilisée dans les chapitres précédents se prolonge ici par l'introduction de quantités surfaciques électromagnétiques (champs, charges et courants) qui satisfont des équations simples et qui permettent d'intéressantes analogies entre un trou noir et une "bulle" conductrice de l'électricité.

Remarquons d'abord que les équations que nous allons écrire auront une validité générale dans le cadre de la théorie d'Einstein-Maxwell et ce n'est que lors des applications ultérieures que nous en ferons, que nous introduirons les approximations usuelles consistant à négliger l'influence gravifique du champ électromagnétique ("champ d'épreuve" dans une métrique de fond). L'article reproduit ci-dessous (Damour, 1977c) utilise une telle approximation (en considérant un champ électromagnétique d'épreuve dans une métrique de Kerr).

2. Courant électrique superficiel d'un trou noir.

Les équations inhomogènes de Maxwell:

$$(1) \quad F^{ab}{}_{;b} = 4\pi J^a$$

assurent, comme il est bien connu, la conservation de l'électricité:

$$(2) \quad J^a{}_{;a} = \frac{1}{\sqrt{g}} (\sqrt{g} J^a)_{,a} = 0$$

Si, comme dans le chapitre précédent, nous voulons ignorer ce qui se passe à l'intérieur du trou noir, nous devons assurer la conservation de l'électricité dans la variété avec bord que constitue l'horizon et

l'extérieur du trou noir. Comme il peut y avoir un flux de charge dans le trou noir il nous faut donc doter l'horizon d'une distribution surfacique de charge et de courant. Mathématiquement le problème consiste à trouver un quadricourant j^a de support sur l'horizon tel que le courant total $J^a Y_H + j^a$ soit conservé, Y_H étant la fonction de Heaviside nulle à l'intérieur du trou noir et égale à +1 à l'extérieur. Il est aisé d'obtenir une solution à ce problème en remplaçant F^{ab} par $F^{ab} Y_H$ dans l'équation inhomogène de Maxwell (1) d'où:

$$(3) \quad (F^{ab} Y_H)_{;b} = F^{ab}_{;b} Y_H + F^{ab} Y_{H;b} = 4\pi (J^a Y_H + j^a)$$

Cela conduit à la définition (Damour 1977c) du quadricourant superficiel du trou noir:

(4)

$$j^a = \frac{1}{4\pi} F^{ab} Y_{H;b}$$

Si l'on considère un champ scalaire φ qui est nul sur l'horizon, positif à l'extérieur et négatif à l'intérieur du trou noir, on a

(5)

$$Y_H = Y(\varphi)$$

d'où en dérivant:

(6)

$$Y_{H;a} = \delta(\varphi) \varphi_{,a}$$

où δ est la distribution de Dirac usuelle.

Or $\varphi_{,a}$ est nécessairement parallèle à la normale l_a à l'horizon, soit

(7)

$$l_a = \omega \varphi_{,a}$$

où ω est un scalaire non nul.

Introduisons une distribution de Dirac sur l'horizon normalisée en fonction du choix de l par l'équation

(8)

$$Y_{H;a} = \delta_H l_a$$

on a :

$$(9) \quad \delta_H = \frac{1}{\omega} \delta(\varphi)$$

Ce qui permet d'écrire le courant superficiel du trou noir comme :

$$(10a) \quad j^a = j_H^a \delta_H$$

avec

$$(10b) \quad j_H^a = \frac{1}{4\pi} F^{ab} l_b$$

Bien sûr le courant j^a est indépendant du choix de la normale l mais la densité superficielle de courant j_H^a en dépend explicitement.

Etant donné un découpage de l'horizon en sections S nous pouvons décomposer j_H^a selon l^a et le plan tangent à S :

$$(11) \quad j_H^a = \sigma_H l^a + c^a \quad \text{où } c^a \text{ est tangent à } S.$$

σ_H , ainsi définie, est une densité surfacique de charge de l'horizon.

En effet, si, comme dans le chapitre I, n_a est un vecteur isotrope orthogonal à la section S alors l'élément de surface de S s'écrit (cf. (I43)):

$$(12) \quad dS_{ab} = (n_a l_b - n_b l_a) dS$$

n_a étant normalisé par

$$(13) \quad n_a l^a = +1$$

D'après le théorème de Gauss la charge totale du trou noir calculée sur S est

$$(14a) \quad Q_H = \frac{1}{4\pi} \oint \frac{1}{2} F^{ab} dS_{ab} = \frac{1}{4\pi} \oint F^{ab} n_a l_b dS$$

Or d'après la définition de σ_H (11) on a, en contractant par n_a :

$$(15) \quad \sigma_H = \int_H^a n_a = \frac{1}{4\pi} F^{ab} n_a \ell_b$$

soit

$$(14b) \quad Q_H = \oint \sigma_H dS$$

Cette relation montre bien en quel sens σ_H est une densité surfacique de charge. Remarquons, cependant que malgré son caractère très naturel, le choix que nous avons fait d'une distribution superficielle de courant n'est pas unique. En effet, nous aurions pu ajouter à $F^{ab} \gamma_H$ un terme $G^{ab} \gamma_H$ où $G^{ab}{}_{;b} \equiv 0$, cela aurait ajouté un terme $\frac{1}{4\pi} G^{ab} \ell_b$ à \int_H^a sans changer son caractère conservé. Par exemple on aurait pu prendre $G^{ab} = {}^*F^{ab}$ le dual de F^{ab} , cela ajouterait un terme σ_H^* à σ_H mais tel que $\oint \sigma_H^* dS \equiv 0$. De tels termes peuvent s'interpréter, selon l'approche précédente, comme densité surfacique de masses magnétiques (R.L.Znajek, communication privée) mais nous préférons ne pas les introduire.

Nous allons montrer que dans la décomposition (11) de \int_H^a le terme C^a tangent à S peut être interprété comme un courant de conduction dans la section S . A ce stade il va nous être commode de procéder comme au chapitre I c'est à dire d'introduire un système de coordonnées adaptées au problème. Pour simplifier nous commencerons par prendre des coordonnées comouvantes (c'est à dire entraînées par les générateurs) x^0, x^1, x^A satisfaisant:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} x^1 = 0 \quad \text{est l'équation de l'horizon,} \\ \ell = \frac{\partial}{\partial x^0} \equiv d_0 \\ x^A (A=2,3) \text{ sont des coordonnées sur chaque section } S_{(x^0 = \text{cst.})} \end{array} \right.$$

Dans ces coordonnées, la métrique peut s'écrire sur l'horizon (où $g_{0A} = 0$)

(cf chap.I):

$$(17) \quad ds^2 = \gamma_{AB} (dx^A + C^A dx^1)(dx^B + C^B dx^1) + 2g_{01} dx^0 dx^1 + (g_{11} - \gamma_{AB} C^A C^B)(dx^1)^2.$$

D'où l'on déduit aisément

$$(17b) \quad \sqrt{g} = \sqrt{\gamma} g_{01}$$

et

$$(17c) \quad g_{01} = l_1 \quad \text{seule composante non nulle de } l_a$$

Preons pour champ φ nul sur l'horizon (utilisé pour définir $Y_H = Y(\varphi)$)

la coordonnée x^1

$$(18a) \quad \varphi = x^1$$

On a donc

$$l_a = \omega \varphi_{,a}$$

où

$$(18b) \quad \omega = l_1 = g_{01} = \sqrt{g} / \sqrt{\gamma}$$

D'où

$$(19) \quad J_H^a = \frac{1}{4\pi} F^{ab} l_b = \frac{\omega}{4\pi} F^{a1} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{g}{\gamma}} F^{a1}$$

J_H^a se réduit aux composantes $J_H^{\bar{A}}$ ($\bar{A} = 0, 2, 3$) qui se décompose en:

$$\text{densité de charge:} \quad \sigma_H = J_H^0$$

$$\text{densité de courant de conduction:} \quad C^A = J_H^A$$

L'équation (1) : $(4\pi)^{-1} (\sqrt{g} F^{a1})_{,a} = -\sqrt{g} J^1$ s'écrit alors :

$$(20) \quad (\sqrt{\gamma} J_H^{\bar{A}})_{,\bar{A}} = -\sqrt{\gamma} J^1 l_1$$

Or dans ces coordonnées on a $\sqrt{\gamma}_{,0} / \sqrt{\gamma} = \theta$ cf. I (13).

Ceci permet d'écrire une équation de conservation de la charge du trou noir:

$$(21) \quad \boxed{(d_0 + \theta) \sigma_H + C^A{}_{;A} = -J^a l_a}$$

où apparaît la divergence de C^A calculée pour la métrique Riemannienne

induite γ_{AB} ($\frac{1}{\sqrt{\gamma}} (\sqrt{\gamma} C^A)_{,A}$) et où $d_0 \sigma_H$ est en fait

$\oint_{\partial V} \sigma_H$ c'est à dire que $(d_0 + \theta) \sigma_H$ est $\oint_{\partial V} (\sigma_H dS) / dS$.

Remarquons la grande analogie entre l'équation (21) et l'équation I (55) du chapitre I décrivant la conservation de l'impulsion :

$$(22) \quad (d_0 + \theta) \pi_A + (8\pi)^{-1} \left[(g + \frac{1}{2} \theta) \delta_A^B - \sigma_A^B \right]_{;B} = - T^a_A \ell_a$$

où apparait la dérivée de Lie $\mathcal{L}_\rho(\pi_A dS)$.

Les deuxièmes membres de ces deux équations sont des flux à travers l'horizon par unité de temps χ^0 et par unité de surface dS (flux de charge ou flux d'impulsion) et les premiers ont la forme habituelle d'une équation de conservation $(\partial_0 \rho + \text{div } \vec{J})$. Ceci montre bien que C^A est un courant électrique dans le repère comouvant c'est à dire un courant de conduction. Nous vérifierons au chapitre III que, de même que les flux internes d'impulsion dans l'éq. (22) (viscosité), la présence d'un tel courant de conduction implique une dissipation (effet Joule).

3. Loi de Faraday et loi d'Ohm d'un trou noir.

Auparavant nous allons voir qu'on peut écrire une loi de Faraday ainsi qu'une loi d'Ohm très simple pour le courant de conduction d'un trou noir.

Comme au chapitre I nous relâchons la contrainte de comouvance des coordonnées (afin de renforcer l'analogie avec une "bulle" tournante).

En d'autres termes les coordonnées χ^A des sections S_{χ^0} ne sont plus entraînées par ℓ et on a au lieu de (16):

$$(23) \quad \ell = \partial_0 + v^A \partial_A$$

où v^A est la vitesse du fluide des générateurs.

Si l'on décompose le vecteur (contravariant) δ_H^a par rapport à la base ∂_0, ∂_A on a

$$(24) \quad \delta_H^a = \sigma_H \ell + c^A \partial_A = \sigma_H \partial_0 + k^A \partial_A$$

où apparait le courant total par rapport aux coordonnées χ^A

$$(25) \quad K^A = C^A + \sigma_H V^A$$

qui se décompose naturellement en courant de conduction et courant de convection. On vérifie qu'avec ces notations la conservation de l'électricité s'écrit:

$$(26) \quad \partial_0(\sqrt{\gamma} \sigma_H) / \sqrt{\gamma} + K^A{}_{||A} = -J^a \ell_a$$

où l'on a utilisé (cf I(52c)) :

$$\theta = \partial_0 \sqrt{\gamma} / \sqrt{\gamma} + V^A{}_{||A}$$

De plus si l'on considère la 2-forme champ électromagnétique:

$$(27a) \quad F = \frac{1}{2} F_{ab} dx^a \wedge dx^b$$

on peut la restreindre à l'horizon ($x^1 = 0$) ce qui donne:

$$(27b) \quad F_H = F_{A0} dx^A \wedge dx^0 + \frac{1}{2} F_{AB} dx^A \wedge dx^B = E_A dx^A \wedge dx^0 + B_{\perp} dS$$

où l'on a défini naturellement :

$$(27c) \quad \begin{cases} E_A = F_{A0} & \text{champ électrique tangent} \\ B_{\perp} = \frac{1}{2} \epsilon^{AB} F_{AB} & \text{induction magnétique normale.} \end{cases}$$

B_{\perp} est tel que $F_{AB} = B_{\perp} \epsilon_{AB}$ où ϵ_{AB} est la 2-forme élément de surface des sections S_{x^0} :

$$(28) \quad dS = \sqrt{\gamma} dx^2 \wedge dx^3 = \frac{1}{2} \epsilon_{AB} dx^A \wedge dx^B.$$

On obtient la loi de Faraday en écrivant que F donc F_H est fermée:

$$0 = dF_H = d(E_A dx^A \wedge dx^0 + \frac{1}{2} F_{AB} dx^A \wedge dx^B) = E_{A,B} dx^B \wedge dx^A \wedge dx^0 + \frac{1}{2} F_{AB,0} dx^0 \wedge dx^A \wedge dx^B$$

d'où

$$(29) \quad E_{A,B} - E_{B,A} = \partial_0 F_{AB}$$

Donc dans une situation stationnaire (par rapport à ∂_0) E_A sera le gradient d'un scalaire Φ :

$$(30) \quad E_A = \partial_A \Phi$$

Les propriétés de $\vec{\Phi}$ seront discutées dans le chapitre III. Notons que $\vec{\Phi}$ est l'opposé du potentiel électrique habituel $\phi = -A_0$ tel qu'il sera utilisé dans le chapitre V.

Nous pouvons maintenant obtenir une relation entre les champs et les courants (c'est à dire une loi d'Ohm) en écrivant:

$$4\pi C_A = 4\pi \int_{Ha} e_A^a = F_{ab} e_A^a \ell^b = F_{A0} + F_{AB} v^B$$

soit

$$(31) \quad E_A + \epsilon_{AB} B_{\perp} v^B = 4\pi C_A = 4\pi \chi_{AB} (K^B - \sigma_H v^B)$$

Le champ électrique tangent entraîné $\vec{E}^* = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}_{\perp}$ est donc égal à 4π fois le courant de conduction surfacique $\vec{C} = \vec{K} - \sigma_H \vec{v}$.

En ce sens un trou noir possède donc une résistivité surfacique de $4\pi = 377 \text{ohm}$.

Pour une approche différente des propriétés électromagnétiques des trous noirs le lecteur pourra se référer à Znajek (1976) et (1977).

4. Force de Lorentz sur un trou noir.

Nous devons compléter cette étude en précisant l'expression du flux d'impulsion (ou force) associé à la présence d'un champ électromagnétique au voisinage d'un trou noir. D'après le chapitre I (eq.39) la densité du flux d'impulsion dans le trou noir ou densité de force électromagnétique agissant sur chaque élément de surface dS est :

$$(32) \quad \int_A^{e.m.} = -T_{ab}^{e.m.} \ell^a e_A^b$$

où le tenseur d'énergie impulsion électromagnétique est (dans le vide):

$$(33) \quad T_{ab}^{e.m.} = \frac{1}{4\pi} (F_{ac} F_b^c - \frac{1}{4} F_{cd} F^{cd} g_{ab})$$

d'où

$$\int_A^{e.m.} = F_{Aa} (F^{ab} \ell_b / 4\pi) = F_{Aa} \int_H^a$$

soit en décomposant $J_H^a = (\sigma_H, 0, K^A)$

$$(34) \quad \int_A^{e.m.} = \sigma_H E_A + F_{AB} K^B = \sigma_H E_A + \epsilon_{AB} B_L K^B.$$

On retrouve bien la force de Lorentz $\sigma_H \vec{E} + \vec{K} \times \vec{B}_L$ ce qui resserre la cohérence à la fois de l'interprétation en termes de courants et charges de surface et de celle en termes d'impulsion superficielle.

Enfin, comme nous en aurons besoin dans la suite, nous calculons ici la composante $T_{\ell\ell} = T_{ab} \ell^a \ell^b$ qui intervient dans l'équation de Raychaudhuri généralisée (I30a). Nous verrons dans l'article reproduit ci-dessous, et de façon plus détaillée, au chapitre suivant que $T_{\ell\ell}$ peut s'interpréter comme un flux de chaleur à travers l'horizon.

On trouve d'après (33)

$$(35) \quad T_{\ell\ell}^{e.m.} \equiv T_{ab}^{e.m.} \ell^a \ell^b = 4\pi J_H^a J_{Ha}$$

Or on avait par définition (11):

$$J_H^a = \sigma_H \ell^a + C^a$$

d'où

$$(36) \quad T_{\ell\ell}^{e.m.} = 4\pi C_A C^A.$$

Que l'on peut écrire sous différentes formes en utilisant la loi d'Ohm(31) par exemple:

$$(37) \quad T_{\ell\ell}^{e.m.} = (E_A + F_{AB} v^B) (K^A - \sigma_H v^A).$$

Nous vérifierons dans l'article ci-dessous et au chapitre III que

l'équation (36) peut s'interpréter en disant que la surface du trou noir est le siège d'une dissipation par effet Joule.

En résumé nous avons exhibé la grande analogie qui existe entre les propriétés électromagnétiques de surface d'un trou noir et celles d'une

"bulle" dotée d'une conductivité électrique de $1/4\pi$.

5. Courants de Foucault d'un trou noir.

L'article reproduit ci-après "Black-hole eddy currents" (Damour 1977c) après avoir introduit, dans le cadre d'une perturbation électromagnétique d'une métrique de Kerr, les concepts et résultats que nous venons de détailler les utilise pour étudier deux types de situations:

- Insertion du trou noir dans un circuit électrique externe. On exhibe une solution (d'épreuve) exacte correspondant à ce cas et l'on étudie le couple agissant sur le trou noir ainsi que la dissipation par effet Joule (voir chapitre III pour plus de détails).
- Induction de courants de Foucault à la surface du trou noir à la suite de la rotation de ce dernier dans un champ magnétique non axisymétrique. On utilise la solution de King et Lasota (1977) décrivant un champ magnétique uniforme et l'on en déduit la dissipation causée par les courants de Foucault. Le résultat nouveau est que nous avons pu déduire très simplement de cette dissipation le couple vectoriel (vu de l'infini) qui est exercé sur le trou noir. Ce couple n'avait été obtenu auparavant que par des calculs très lourds.

Black-hole eddy currents

Thibaut Damour

E. R. 176 du CNRS. Groupe d'Astrophysique Relativiste. Observatoire de Paris. 92190 Meudon. France

(Received 19 January 1978)

We study dissipative test electromagnetic fields in a black-hole background. Quantities such as surface velocity, tangential electric field, normal magnetic induction, total surface current, and conduction surface current are introduced and are shown to satisfy Ohm's law with a surface resistivity of $4\pi \simeq 377$ ohms. Associated with these currents there exists a "Joule heating". These currents can exist when the black hole is inserted in an external electric circuit, but they can exist even in the absence of external currents. In particular, we study the eddy currents induced by the rotation of a black hole in an oblique uniform magnetic field, and we show how the computation of the ohmic losses allows a very simple derivation of the torque exerted on the hole.

I. INTRODUCTION

Considerable interest has recently arisen in making models using black holes as energy sources.¹⁻⁴ These models could be relevant both for galactic (γ -ray bursts, x-ray bursters) and extragalactic sources (extended radiosources, quasars). The basic motivation for believing that black holes could provide the energy supply needed in many astrophysical objects comes from the Christodoulou-Ruffini mass formula⁵ which implies that up to 29% (50%) of the total energy of a bare black hole can be stored as rotational (electromagnetic), and therefore extractable, energy. The first realistic model exhibiting a process by which energy could be extracted from a rotating black hole was proposed by Ruffini and Wilson¹ and studied by Damour.² The ingredients needed in that model to perform the energy extraction are the rotation of the hole and a magnetized plasma. A formally related mechanism using the same ingredients though in a somewhat physically different way was proposed by Blandford and Znajek.⁴ Much work is still needed in analyzing the possible magnetospheric structures around black holes.⁶ It was shown by Znajek⁷ that the extraction of rotational energy from the hole by means of axisymmetric magnetospheric currents gives rise to an increase of the irreducible mass. This was described as a Joule heating inside the hole as if the black hole had an effective internal resistance of order unity (i.e., 30 ohms). We shall show here more precisely how one can define, in the general non-axisymmetric case, surface currents on the hole so that a formal vectorial Ohm's law is valid as well as the scalar Joule's law. Moreover we shall pay special attention to the case where there are no external currents and where therefore the surface currents on the hole must be considered as pure eddy currents induced by the motion of the hole in an external magnetic field. Using the solu-

tion of King and Lasota⁸ describing a black hole rotating in a misaligned uniform magnetic field we shall study how the eddy currents can dissipate energy and angular momentum. This will provide a new interpretation as well as a very simple derivation of the vectorial torque exerted by the magnetic field on the hole.

This paper is organized as follows: Section II describes the geometrical and kinematical structure of a Kerr black hole and introduces the notion of surface velocity of a black hole. Section III studies the intrinsic electromagnetic structure of the horizon, consisting of a tangential electric field and a normal magnetic induction. Section IV introduces the concept of a vector surface current which is defined in order to satisfy the conservation of charge and current. The link between these quantities is given in Sec. V (vector Ohm's law) and VI (Joule's law). A simple explicit example of such externally fed currents is given in Sec. VII while Sec. VIII studies the eddy currents generated by the rotation of the hole in an external magnetic field and their dissipative effects.

II. GEOMETRY AND KINEMATICS OF THE HORIZON OF A ROTATING BLACK HOLE

We use ingoing Kerr coordinates $(v, r, \theta, \bar{\varphi})$ to study the future horizon H of a Kerr black hole. The metric can be written as

$$ds^2 = 2\alpha^{\hat{v}}\alpha^{\hat{r}} + \alpha^{\hat{\theta}}\alpha^{\hat{\theta}} + \alpha^{\hat{\varphi}}\alpha^{\hat{\varphi}}, \quad (2.1)$$

where we have introduced the quasiorthonormal basis of forms:

$$\begin{aligned} \alpha^{\hat{v}} &= (\gamma^2 + a^2)\Sigma^{-1}(dv - a\sin^2\theta d\bar{\varphi}), \\ \alpha^{\hat{r}} &= \Sigma(\gamma^2 + a^2)^{-1}\left[dr - \frac{1}{2}\Delta\Sigma^{-1}(dv - a\sin^2\theta d\bar{\varphi})\right], \\ \alpha^{\hat{\theta}} &= \Sigma^{1/2}d\theta, \\ \alpha^{\hat{\varphi}} &= \Sigma^{-1/2}\sin\theta[(\gamma^2 + a^2)d\bar{\varphi} - adv], \end{aligned} \quad (2.2)$$

with $\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta$ and $\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr$

$= (r - r_+) (r - r_-)$ where $r_{\pm} = M \pm (M^2 - a^2)^{1/2}$.

The dual basis of vectors is

$$\begin{aligned} b_{\bar{v}} &= \partial_v + a(r^2 + a^2)^{-1} \partial_{\bar{\varphi}} + \frac{1}{2} \Delta (r^2 + a^2)^{-1} \partial_r, \\ b_{\bar{r}} &= (r^2 + a^2)^{-1} \partial_r, \\ b_{\bar{\theta}} &= \Sigma^{-1/2} \partial_{\theta}, \\ b_{\bar{\varphi}} &= \Sigma^{-1/2} [(\sin\theta)^{-1} \partial_{\bar{\varphi}} + a \sin\theta \partial_v]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

It is such that $\alpha_{\bar{v}}^{\bar{v}} b_{\bar{v}}^{\bar{v}} = \delta_{\bar{v}}^{\bar{v}}$ or $b_{\bar{v}}^{\bar{v}} = g^{\bar{v}\bar{v}} g_{\bar{v}\bar{v}} \alpha_{\bar{v}}^{\bar{v}}$, hence, for instance

$$b_{\bar{v}}^{\bar{v}} = g^{\bar{v}\bar{v}} \alpha_{\bar{v}}^{\bar{v}}. \quad (2.4)$$

The intrinsic geometry of a section $v = \text{const}$ of the future horizon $r = r_+$ is given by

$$ds_H^2 = \omega^{(\theta)} \omega^{(\theta)} + \omega^{(\varphi)} \omega^{(\varphi)}, \quad (2.5)$$

with

$$\begin{aligned} \omega^{(\theta)} &= \Sigma_+^{-1/2} d\theta, \\ \omega^{(\varphi)} &= \Sigma_+^{-1/2} (r_+^2 + a^2) \sin\theta d\bar{\varphi}, \end{aligned}$$

where $\Sigma_+ = r_+^2 + a^2 \cos^2\theta$. Here and in the following the index $+$ means replacing r by r_+ .

The area element is therefore

$$dA = \omega^{(\theta)} \wedge \omega^{(\varphi)} = (r_+^2 + a^2) \sin\theta d\theta \wedge d\bar{\varphi}. \quad (2.6)$$

We introduce the corresponding intrinsic vectors,

$$\begin{aligned} e_{(\theta)} &= \Sigma_+^{-1/2} \partial_{\theta}, \\ e_{(\varphi)} &= \Sigma_+^{-1/2} (r_+^2 + a^2)^{-1} (\sin\theta)^{-1} \partial_{\bar{\varphi}}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

We note the following: When $r = r_+$, $b_{\bar{v}}$ becomes the usual null vector normal to the horizon l ,

$$l^{\alpha} \partial_{\alpha} = b_{\bar{v}} = \partial_v + a(r_+^2 + a^2)^{-1} \partial_{\bar{\varphi}},$$

or in covariant form [see Eq. (2.4) above],

$$l_{\alpha} dx^{\alpha} = \alpha^{\bar{v}} = \Sigma_+ (r_+^2 + a^2)^{-1} dr.$$

Therefore $b_{\bar{\theta}}$ and $b_{\bar{\varphi}}$ become tangential to the horizon and we have

$$b_{\bar{\theta}} = e_{(\theta)}, \quad (2.8)$$

$$b_{\bar{\varphi}} = e_{(\varphi)} + V_{(\varphi)} l,$$

$$\alpha^{\bar{\theta}} = \omega^{(\theta)}, \quad (2.9)$$

$$\alpha^{\bar{\varphi}} = \omega^{(\varphi)} - V^{(\varphi)} dv.$$

In these formulas we have introduced the quantity

$$V_{(\varphi)} = V^{(\varphi)} = a \sin\theta \Sigma_+^{-1/2}, \quad (2.10)$$

which can be interpreted as the rotational velocity of the horizon.

Indeed the null generators of the horizon $l = dx / dv = \partial_v + \Omega \partial_{\bar{\varphi}}$ [where Ω is the angular velocity of the horizon which is $a / (r_+^2 + a^2)$ for the Kerr⁹ geometry and $-g_{v\bar{\varphi}} / g_{\bar{\varphi}\bar{\varphi}}$ in general¹⁰] are tilted with respect to the time-translation Killing vector ∂_v , and $V^{(\varphi)}$ is a direct measure of the tilting of l in

the following sense: During the time dv (as measured at infinity) the displacement $dx = l dv$ acquires a transverse component $d\bar{\varphi} = \Omega dv$ whose corresponding length (as measured locally) is $g_{\bar{\varphi}\bar{\varphi}}^{-1/2} d\bar{\varphi} = \Omega g_{\bar{\varphi}\bar{\varphi}}^{-1/2} dv$ and the ratio (local length)/(global time) is $\Omega g_{\bar{\varphi}\bar{\varphi}}^{-1/2}$ which is precisely $V^{(\varphi)}$. (We can also notice that $V^{(\varphi)} = g_{v\bar{\varphi}}^{-1/2}$.)

Another phrasing would consist in saying that the four-vector $V = l - \partial_v$ represents the three velocity of the horizon (with respect to ∂_v), and the space-time length of $V = \Omega \partial_{\bar{\varphi}}$ is precisely $V^{(\varphi)}$.

It is interesting to note that the maximum value of $V^{(\varphi)}$ is reached when $\theta = \frac{1}{2}\pi$ and $a = M$ (i.e., at the equator of a maximally rotating Kerr hole) and is equal to one. It is tempting to conjecture that this property may hold for a general black hole.

In the following we are going to make projections of tensorial quantities on the forms α and vectors b for four-dimensional entities and on the forms ω and vectors e for two-dimensional entities. (For instance $V^{(\varphi)}$ is just the geometrical component of the two-dimensional $V^{\bar{\varphi}} = \Omega$.)

III. TANGENTIAL ELECTRIC FIELD AND NORMAL MAGNETIC INDUCTION

Given an electromagnetic test field F_{ab} regular on the future horizon H we define the tangential electric field and the normal magnetic induction by the restriction of the form $F = \frac{1}{2} F_{ab} dx^a \wedge dx^b$ to the horizon $r = r_+$. Namely,

$$F = (F_{\theta v} d\theta + F_{\bar{\varphi} v} d\bar{\varphi}) \wedge dv + F_{\bar{\theta} \bar{\varphi}} d\theta \wedge d\bar{\varphi},$$

which can be written after projection on the basis ω , e

$$F = (E_{(\theta)} \omega^{(\theta)} + E_{(\varphi)} \omega^{(\varphi)}) \wedge dv + B_{\perp} \omega^{(\theta)} \wedge \omega^{(\varphi)}, \quad (3.1)$$

where

$$\begin{aligned} E_{(\theta)} &= F_{(\theta)v} = \Sigma_+^{-1/2} F_{\theta v}, \\ E_{(\varphi)} &= F_{(\varphi)v} = \Sigma_+^{-1/2} (r_+^2 + a^2)^{-1} (\sin\theta)^{-1} F_{\bar{\varphi} v}, \\ B_{\perp} &= F_{(\theta)(\varphi)} = (r_+^2 + a^2)^{-1} (\sin\theta)^{-1} F_{\bar{\theta} \bar{\varphi}}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

If the field is stationary we shall have the result that the tangential electric field E_{\parallel} is the gradient of the potential A_{\parallel} ,

$$E_{\parallel} = E_{(\theta)} \omega^{(\theta)} + E_{(\varphi)} \omega^{(\varphi)} = dA_{\parallel}. \quad (3.3)$$

IV. SURFACE CURRENTS

From a phenomenological point of view it is convenient to introduce a surface charge density and a surface current on the horizon. The heuristic justification for such definitions is the following: There exists a four-current

$J^a(v, r, \theta, \bar{\varphi})$ which is defined and conserved all over space-time. However we want *not to consider* what happens inside the black hole ($r < r_+$). Yet some charge and current can go down the hole and disappear from the region $r > r_+$. Therefore if we wish to keep the charge and current conserved in the region $r \geq r_+$, we have to endow the surface $r = r_+$ with charge and current densities. Mathematically the problem is the following: Given $J^a(v, r, \theta, \bar{\varphi})$ such that $J^a_{;a} = 0$ find a complementary current j^a with support on $r = r_+$ such that $J^a Y(r - r_+) + j^a$ is conserved, where Y is the Heaviside function. This problem is very easily solved by noting that the conservation of J is ensured by Maxwell equations $J^a = (4\pi)^{-1} F^{ab}_{;b}$. Replacing F^{ab} by $F^{ab} Y(r - r_+)$ we get the conserved current $J^a Y(r - r_+) + j^a$ where $j^a = (4\pi)^{-1} F^{a\sigma} \delta(r - r_+)$. It is convenient to use a Dirac distribution δ_H on the horizon normalized with respect to the time at infinity v and the local proper area dA such that,

$$\iint f(v, r, \theta, \bar{\varphi}) \delta_H \delta(v - v_0) g^{1/2} d^4 x = \int_H f(v_0, r_+, \theta, \bar{\varphi}) dA.$$

One easily finds

$$\delta_H = (r^2 + a^2)^{-1} \delta(r - r_+). \quad (4.1)$$

Hence we can write the complementary current j^a , with support on the horizon, as

$$j^a = K^a \delta_H, \quad (4.2)$$

with

$$K^a = (4\pi)^{-1} \Sigma_+ (r_+^2 + a^2)^{-1} F^{a\sigma}. \quad (4.3)$$

We have thus defined a surface four-current density K^a which can be decomposed into a surface charge density σ (such that $\int_H \sigma dA$ yields the total charge on the hole) and the geometrical components of a surface current density \bar{K} ,

$$\begin{aligned} \sigma &= K^v, \\ K^{(\theta)} &= \Sigma_+^{-1/2} K^\theta, \\ K^{(\bar{\varphi})} &= \Sigma_+^{-1/2} (r_+^2 + a^2) \sin\theta K^{\bar{\varphi}}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

These quantities satisfy the following conservation law on the horizon:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v} dA + dK^* = J^{\bar{r}} dA, \quad (4.5)$$

with

$$\begin{aligned} K^* &= K^{(\theta)} \omega^{(\theta)} - K^{(\bar{\varphi})} \omega^{(\bar{\varphi})} \\ &= (r_+^2 + a^2) \sin\theta (K^\theta d\bar{\varphi} - K^{\bar{\varphi}} d\theta), \\ J^{\bar{r}} &= (J^a \alpha_a^{\bar{r}}) = \Sigma_+ (r_+^2 + a^2)^{-1} J^r, \end{aligned}$$

and the symbol d denotes exterior differentiation.

V. OHM'S LAW

We are now in position to exhibit a relation between the fields and the currents introduced above which can be thought of as Ohm's law for a rotating black hole. It is sufficient to consider the components $F^{\bar{r}} = F_{\bar{t}\bar{v}}$ and $F^{\bar{\varphi}} = F_{\bar{t}\bar{\varphi}}$ of the electromagnetic field in the basis (α, b) . Using Eqs. (2.8) and (2.9) connecting α and b to ω, e , and $l = \partial_v + a(r_+^2 + a^2)^{-1} \partial_{\bar{\varphi}}$ and taking into account the definitions of the velocity, fields, and currents on the black hole we easily get

$$\begin{aligned} E_{(\theta)} + V_{(\bar{\varphi})} B_{\perp} &= 4\pi K^{(\theta)}, \\ E_{(\bar{\varphi})} &= 4\pi [K^{(\bar{\varphi})} - \sigma V^{(\bar{\varphi})}]. \end{aligned} \quad (5.1)$$

This can be written in a self-explanatory two-dimensional vectorial form, which is valid intrinsically on the horizon,

$$\bar{E} + \bar{V} \times \bar{B}_{\perp} = 4\pi(\bar{K} - \sigma \bar{V}). \quad (5.2)$$

Equation (5.2) has precisely the form of the non-relativistic Ohm's law for a moving charged conductor of surface resistivity $4\pi \approx 377$ ohms. This result constitutes a clear confirmation of Carter's assertion¹⁰ that a "black hole is analogous to an ordinary body (with finite viscosity and electrical conductivity)." This was conjectured starting from the equilibrium properties of black holes. The analog of the viscous dissipation was described by Hawking and Hartle¹¹ in terms of the increase of the area of the hole due to the surface shear of the null generators of the horizon (tidal friction). The dimensionless coefficient of viscosity was then a number of order unity.

More recently Znajek⁷ has interpreted the contribution to the increase of the area of a hole arising from an external electric circuit as a Joule dissipation, the internal resistance of the hole so introduced being of order unity.

We have shown here how it is possible to define a conserved surface current on the hole so that the vectorial Ohm's law is satisfied.¹² In the following it will be found useful to introduce the notions of the surface conduction current \bar{C} (the total current \bar{K} minus the convection current $\sigma \bar{V}$) and of the "dragged-along" electric field \bar{E}^* ,

$$\bar{C} = \bar{K} - \sigma \bar{V}, \quad \bar{E}^* = \bar{E} + \bar{V} \times \bar{B}_{\perp}. \quad (5.3)$$

We are going to show that this conduction current not only enters naturally Ohm's law, Eq. (5.2), but allows one to express very simply the analog of Joule's law.

VI. JOULE'S LAW

We can as usual¹³ define the heat dQ dissipated in the hole as

$$\dot{Q} = (8\pi)^{-1} \kappa dA = dM - \Omega dS_z, \quad (6.1)$$

where κ is the surface gravity,^{10,14} Ω is the angular velocity, and dA , dM , and dS_z are the increases in, respectively, area, mass, and angular momentum of the hole. The total energy flux into the hole is given by an integral on the horizon¹⁴:

$$\begin{aligned} \dot{M} = dM/dv &= + \int_H T_{\nu}^r g^{1/2} d\theta d\bar{\varphi} \\ &= \int_H T_{\nu}^b l_b dA, \end{aligned} \quad (6.2)$$

where T_{ab} is the test energy-momentum tensor at the horizon.

The angular momentum flux is

$$\begin{aligned} \dot{S}_z = dS_z/dv &= - \int_H T_{\nu}^r g^{1/2} d\theta d\bar{\varphi} \\ &= - \int_H T_{\nu}^b l_b dA. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Hence we get the heat production as

$$\begin{aligned} \dot{Q} = \dot{M} - \Omega \dot{S}_z &= \int_H (T_{\nu b} + \Omega T_{\nu b}) l^b dA \\ &= \int_H T_{ab} l^a l^b dA. \end{aligned} \quad (6.4)$$

In the case of an electromagnetic field we have on the horizon,

$$T_{ab} l^a l^b = (4\pi)^{-1} F_{ac} F_b{}^c l^a l^b. \quad (6.5)$$

Projecting onto the tetrad (α, b) only the θ, φ components contribute. Hence we find easily the Joule's law,

$$\dot{Q} = \int_H 4\pi (\bar{C})^2 dA. \quad (6.6)$$

The integrand in Eq. (6.6) can be written in forms,

$$\begin{aligned} 4\pi (\bar{C})^2 &= (4\pi)^{-1} (\bar{E}^*)^2 = \bar{E}^* \cdot \bar{C} \\ &= (\bar{E} + \bar{V} \times \bar{B}_1) \cdot (\bar{K} - \sigma \bar{V}). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Developing the last expression we find

$$\dot{Q} = \int_H \bar{E} \cdot \bar{K} dA - \int_H (\sigma \bar{E} + \bar{K} \times \bar{B}_1) \cdot \bar{V} dA, \quad (6.8)$$

which corresponds to the above splitting of \dot{Q} in \dot{M} and $-\Omega \dot{S}_z$. In other words this means that we can express directly the torque \dot{S}_z on the black hole as due to a Laplace-Lorentz force on the surface charge and current densities:

$$\dot{S}_z = \int_H (\sigma \bar{E} + \bar{K} \times \bar{B}_1) \cdot (\bar{V}/\Omega) dA, \quad (6.9)$$

with a "lever arm"

$$|\bar{R}| = |\bar{V}|/\Omega = \Sigma^{-1/2} (r_*^2 + a^2) \sin\theta.$$

VII. A SIMPLE EXAMPLE

As an illustration of the preceding concepts let us consider the solution describing the insertion of a rotating black hole in a linear current flowing along the z axis (the axis of rotation of the hole) from $+\infty$ to $-\infty$. In fact, because of the idealization of infinitely thin electrodes the hole will oppose an infinite resistance to the current, therefore we are going to consider the case of a total current I flowing from spatial infinity along the conical surface $\theta = \theta_1$ to the "northern" polar circle $\theta = \theta_1$ of the hole and then flowing out to spatial infinity along the "southern" conical surface $\theta = \theta_2$. In the limit $\theta_1 \rightarrow 0$ and $\theta_2 \rightarrow \pi$ we get the linear current alluded to above. Anyway the solution here presented is valid whatever the values of θ_1 and θ_2 are. Evidently we mean by positive current flowing out of the hole a stream of negative charges physically flowing into the hole. Such currents are needed to get a stationary solution without any charge accumulation onto the hole.

Mathematically the solution is a Robinson null field¹⁵ which can be written as

$$F_{ab} + i^* F_{ab} = \varphi_2 (\bar{l}_a \bar{m}_b - \bar{l}_b \bar{m}_a), \quad (7.1)$$

where \bar{l} is the ingoing principal null congruence,

$$\bar{l}^a \partial_a = \partial_r, \quad (7.2)$$

and where

$$\begin{aligned} \bar{m}^a \partial_a &= 2^{-1/2} (r + ia \cos\theta)^{-1} \left[\partial_\theta + i(\sin\theta)^{-1} \partial_\varphi + ia \sin\theta \partial_\nu \right] \\ &\times [\partial_\theta + i(\sin\theta)^{-1} \partial_\varphi + ia \sin\theta \partial_\nu]. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Following Fackerell and Ipser¹⁶ we define

$$\Phi_2 = -(\gamma - ia \cos\theta) \sin\theta \varphi_2. \quad (7.4)$$

An evident solution to the equations obtained in Ref. 16 is

$$\Phi_2 = \text{const} = 2^{3/2} I, \quad (7.5)$$

which yields our solution for a total current I flowing along the z axis. Using the covariant components of \bar{l} and \bar{m} (easily obtained from the expressions of the forms α) we get explicitly

$$\begin{aligned} F &= 2I (\sin\theta)^{-1} d\theta \wedge (dv - a \sin^2\theta d\bar{\varphi}), \\ *F &= 2I d\bar{\varphi} \wedge dv. \end{aligned} \quad (7.6)$$

This solution is singular when $\sin\theta = 0$ but we get a regular solution if we define the four potential,

$$\begin{aligned} A &= 2I [(\ln \tan \frac{1}{2} \theta_1) dv + a \cos\theta_1 d\bar{\varphi}], \quad \text{if } 0 \leq \theta \leq \theta_1 \\ A &= 2I [(\ln \tan \frac{1}{2} \theta) dv + a \cos\theta d\bar{\varphi}], \quad \text{if } \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \\ A &= 2I [(\ln \tan \frac{1}{2} \theta_2) dv + a \cos\theta_2 d\bar{\varphi}], \quad \text{if } \theta_2 \leq \theta \leq \pi. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Hence the field $F = dA$ will be given by Eq. (7.6)

when $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ and will be zero otherwise. As announced this solution describes the insertion of a rotating black hole between two conical electrodes through which a total current I is flowing. It is very easy to work out in detail the tangential fields and the current flowing on the hole and we shall content ourselves by noticing that the total potential decrease between θ_1 and θ_2 is

$$A_v(\theta_2) - A_v(\theta_1) = RI, \quad (7.8)$$

where the total resistance R of the hole is given by

$$R = 2 \ln[(\tan \frac{1}{2} \theta_2) / (\tan \frac{1}{2} \theta_1)] \quad (7.9)$$

in units of 30 ohms.

The energy delivered to the black hole is easily computed as

$$\dot{M} = RI^2. \quad (7.10)$$

This energy differs from the heat generated because of the presence of a positive torque,

$$\dot{S}_z = +2a(\cos \theta_1 - \cos \theta_2)I^2. \quad (7.11)$$

This torque is easily interpreted as coming from the impulsion which is delivered when one dissipates some energy in a moving system, and in fact although $\dot{S}_z > 0$ one finds $\dot{a} < 0$ and $\dot{\Omega} < 0$.

Finally it is curious to note that the current distribution and the resistance given in Eq. (7.9) would have been the same if the black hole had been replaced by a metallic shell endowed with a surface resistivity equal to 4π . This condition on the surface resistivity is well known in engineering electromagnetism¹⁷ as ensuring perfect absorption (because it realizes a perfect impedance matching with the vacuum).

VIII. EDDY CURRENTS

After having discussed the dissipative effects associated with the insertion of a black hole in an external electric circuit (internal resistance) we shall describe the dissipative effects that arise when a black hole is moving in an external magnetic field (eddy currents). Let us consider the surface eddy currents generated by the rotation of a black hole in an oblique uniform magnetic field. The exact test solution has been given by King and Lasota⁸ using the components of the electromagnetic field on the outgoing Kinnersley tetrad which is linked to our initial tetrad by

$$\begin{aligned} l_K &= 2(\gamma^2 + a^2)\Delta^{-1}b_{\bar{0}}, \\ n_K &= -\frac{1}{2}\Delta(\gamma^2 + a^2)^{-1}b_{\bar{1}}, \\ m_K + (2\Sigma)^{-1/2}(\gamma - ia \cos \theta)(b_{\bar{2}} + ib_{\bar{3}}), \end{aligned} \quad (8.1)$$

so that we can write the φ_0^K component as

$$\begin{aligned} \varphi_0^K &= F_{\alpha\beta} l_K^\alpha m_K^\beta \\ &= 2^{1/2}\Sigma^{-1/2}\Delta^{-1}(\gamma^2 + a^2)(\gamma - ia \cos \theta)(F_{\bar{0}\bar{2}} + iF_{\bar{0}\bar{3}}). \end{aligned} \quad (8.2)$$

Hence the "dragged along" tangential field \bar{E}^* $= 4\pi\bar{C}$ is computed from φ_0^K as

$$E_{(\theta)}^* + iE_{(\varphi)}^* = -2^{-1/2}(\gamma^2 + a^2)^{-1}\Sigma^{-1/2}(\gamma + ia \cos \theta)\Delta\varphi_0^K, \quad (8.3)$$

in the limit $r \rightarrow r_+$, and the heat generated is given very simply by

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \int_H (4\pi)^{-1}(\bar{E}^*)^2 dA \\ &= (8\pi)^{-1} \int_H |(\gamma^2 + a^2)^{-1}\Delta\varphi_0^K|^2 dA. \end{aligned} \quad (8.4)$$

In our problem φ_0^K is given by⁸

$$\varphi_0^K = -i(\frac{2}{3}\pi)B2^{1/2} \sum_{m=-1}^{+1} Y_{1m}^*(\gamma, 0)R_{1m}(\gamma)[\partial_\theta + i(\sin \theta)^{-1}\partial_\varphi] Y_{1m}(\theta, \varphi), \quad (8.5)$$

where B is the strength of the field at infinity, γ is the tilt angle of the field with the rotation axis (z axis), the Y_{1m} are the usual spherical harmonics, R_{1m} is a hypergeometric function whose behavior near $r = r_+$ is very simple, and where

$$\varphi = \bar{\varphi} - \frac{1}{2}a(M^2 - a^2)^{-1/2} \ln[(r - r_+) / (r - r_-)]. \quad (8.6)$$

Hence, we get without computational effort,

$$E_{(\theta)}^* + iE_{(\varphi)}^* = (r_+^2 + a^2)^{-1}BaM \sin \gamma [\Sigma_+^{-1/2}(\gamma + ia \cos \theta)] [\cos(\bar{\varphi} + \alpha) - i \cos \theta \sin(\bar{\varphi} + \alpha)], \quad (8.7)$$

where α is defined by $\sin \alpha = a/M$.

Now it is trivial to compute the heat:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= [(r_+^2 + a^2)^{-1}BaM \sin \gamma]^2 \int [\cos^2(\bar{\varphi} + \alpha) + \cos^2 \theta \sin^2(\bar{\varphi} + \alpha)] (r_+^2 + a^2) \sin \theta d\theta d\bar{\varphi} / 4\pi, \\ \dot{Q} &= \frac{2}{3}(BaM \sin \gamma)^2 / (r_+^2 + a^2). \end{aligned} \quad (8.8)$$

Here the dissipation is entirely due to the braking torque \dot{S}_z because the energy flux in absence of external currents is given by

$$\begin{aligned}\dot{M} &= \int \vec{E} \cdot \vec{K} dA = \int (\vec{\nabla} A_\nu) \cdot \vec{K} dA \\ &= \int -A_\nu (\vec{\nabla} \cdot \vec{K}) dA = 0.\end{aligned}$$

Therefore,

$$\dot{Q} = -\Omega \dot{S}_z,$$

which means that the z component of the torque is

$$\dot{S}_z = -\frac{2}{3} M (B \sin \gamma)^2 (aM). \quad (8.9)$$

From this result we can recover the complete vectorial torque. Indeed, following Press,¹⁸ we know that \dot{S}_y is zero by symmetry arguments (the y direction being defined as normal to the plane defined by $\vec{\Omega}$ and \vec{B}). Finally the last component \dot{S}_x is obtained by noting that we can create a uniform magnetic field near the hole by putting a magnetic charge $-Br^2$ at the point $r, \theta = \gamma, \varphi = 0$ and letting $r \rightarrow \infty$.¹⁹ The torque on the hole will be opposite to the torque exerted on the magnetic charge in the limit $r \rightarrow \infty$.¹⁸ But the latter torque can have no components along the direction $\theta = \gamma$, hence

$$\sin \gamma \dot{S}_x + \cos \gamma \dot{S}_z = 0,$$

which implies from Eq. (8.9),

$$\dot{S}_x = +\frac{2}{3} M (B^2 \sin \gamma \cos \gamma) (aM) \quad (8.10)$$

so that we recover the result,²⁰

$$\dot{\vec{S}} = \frac{2}{3} M (\vec{S} \times \vec{B}) \times \vec{B}. \quad (8.11)$$

Moreover in the limit of small a/M we can give a very simple heuristic interpretation of the vectorial torque (8.11). Indeed the eddy currents are given by

$$4\pi(C_{(\theta)} + iC_{(\varphi)}) = r^{-2} aBM \sin \gamma (\cos \varphi - i \cos \theta \sin \varphi)$$

which can be written as

$$4\pi \vec{C} = \frac{1}{2} (\vec{\Omega} \times \vec{B}) \times \vec{r}, \quad (8.12)$$

if we formally consider the horizon $r = 2M$ as a sphere embedded in a Euclidean three-space $\vec{r} = (x, y, z)$ where r, θ, φ are polar coordinates. The expression (8.12) describes precisely, as one can easily check, the current that would flow on a metallic shell (of surface resistivity 4π) slowly rotating in an oblique uniform magnetic field.

Then, not only can the vectorial torque (8.11) be interpreted as due to the Laplace force on the eddy currents \vec{C} , but it can be simply calculated by introducing the "magnetic moment" \vec{D} owing to the currents \vec{C} ,

$$\vec{D} = \int \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{C} dA. \quad (8.13)$$

As the currents \vec{C} are making loops around the vector $\vec{\Omega} \times \vec{B}$, we find easily

$$\vec{D} = \frac{1}{6} r^4 \vec{\Omega} \times \vec{B}. \quad (8.14)$$

Thus we recover the well-known expression for the vectorial torque,

$$\dot{\vec{S}} = \vec{D} \times \vec{B}. \quad (8.15)$$

Finally we can note that the magnetic moment (8.14) leaves an imprint at infinity. This can be explicitly seen using Pollock's solution²⁰: The magnetic field at infinity contains a curl ($r^{-3} \vec{D} \times \vec{r}$) contribution which is not plagued with the same ambiguity as the dipolar fields directed along the preexistent uniform field because \vec{D} is orthogonal to \vec{B} .

We can conclude that we have shown the heuristic value of considering the horizon of a black hole as analogous to a thin shell of a good electric conductor having a finite surface resistivity equal to $4\pi \approx 377$ ohms.

It is a pleasure to thank B. Carter for useful discussions and help with the manuscript.

¹R. Ruffini and J. R. Wilson, Phys. Rev. D **12**, 2959 (1975). See also the contribution by R. Ruffini and by J. R. Wilson, in *Proceedings of the Marcel Grossman Meeting*, edited by R. Ruffini (North-Holland, Amsterdam, 1977).

²T. Damour, Ann. N. Y. Acad. Sci. **262**, 113 (1975).

³T. Damour and R. Ruffini, Phys. Rev. Lett. **35**, 463 (1975).

⁴R. D. Blandford and R. L. Znajek, Not. R. Astron. Soc. **179**, 433 (1977).

⁵D. Christodoulou and R. Ruffini, Phys. Rev. D **4**, 3552 (1971).

⁶T. Damour, R. S. Hanni, R. Ruffini, and J. R. Wilson, Phys. Rev. D **17**, 1518 (1978).

⁷R. L. Znajek, Ph.D. dissertation (Institute of Astronomy, Cambridge 1976) (unpublished).

⁸A. R. King and J. P. Lasota, Astron. Astrophys. **58**, 175 (1977).

⁹D. Christodoulou and R. Ruffini, in *Black Holes*, edited by B. DeWitt and C. DeWitt (Gordon and Breach, New York, 1973).

¹⁰B. Carter, in *Black Holes*, edited by B. DeWitt and C. DeWitt (Gordon and Breach, New York, 1973).

¹¹S. W. Hawking and J. B. Hartle, Commun. Math. Phys. **27**, 283 (1972).

¹²As this paper was being prepared for publication our attention was drawn to a work of Znajek [Cambridge report, 1977 (unpublished)] where some of the results

here discussed were obtained using a different approach.

¹³J. D. Bekenstein, Phys. Rev. D 7, 2333 (1973).

¹⁴S. W. Hawking, in *Black Holes*, edited by B. DeWitt and C. DeWitt (Gordon and Breach, New York, 1973).

¹⁵I. Robinson, J. Math. Phys. 2, 290 (1961).

¹⁶E. D. Fackerell and J. R. Ipser, Phys. Rev. D 5, 2455 (1972).

¹⁷See, e.g., G. Bruhat, *Electricité*, 7th edition revised

by G. Goudet (Masson, Paris, 1959), pp. 702–705.

¹⁸W. H. Press, Astrophys. J. 175, 243 (1972).

¹⁹This has been explicitly checked when $\gamma=0$ by R. M. Misra, Prog. Theor. Phys. 57, 694 (1977).

²⁰This result was obtained in Ref. 8 and, independently, in the slow-rotation limit, by M. D. Pollock, Proc. R. Soc. London A350, 239 (1976).

APPENDICE B

Comme dans l'appendice A dont nous gardons les notations, nous allons donner une démonstration de nos résultats en employant les notations de Newman et Penrose (1962) (et la signature $+---$).

Considérons l'équation de Maxwell:

$$(NPA1) \quad (D - 2\rho) \varphi_1 - (\bar{\delta} + \pi - 2\alpha) \varphi_0 + \kappa \varphi_2 = -2\pi J_a \ell^a$$

où

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= F_{ab} \ell^a m^b \\ \varphi_1 &= \frac{1}{2} F_{ab} (\ell^a m^b + \bar{m}^a m^b) \end{aligned}$$

où m^a est un vecteur isotrope (complexe) tangent à la section S et où n^a est un vecteur isotrope réel orthogonal à S et normalisé comme ci-dessus par

$$(B1) \quad n_a \ell^a = +1$$

alors que $m_a \bar{m}^a = -1$

Comme la signature utilisée par Newman et Penrose est opposée à la notre mais que la normalisation pour $n_a \ell^a$ est identique (B1) on peut identifier F_{ab} , ℓ^a , n_a et $m^a = (e_{(2)}^a - i e_{(3)}^a) / \sqrt{2}$

(où $e_{(2)}$ et $e_{(3)}$ est une base orthonormée tangente à S) alors que l'apparition de ℓ_a , n^a et m_a implique un changement de signe, d'où

$$(B2a) \quad \varphi_0 = -E_A^* m^A = -4\pi C_A m^A$$

où

$$(B2b) \quad E_A^* \equiv E_A + F_{AB} v^B$$

et

$$(B3) \quad \varphi_1 = \frac{1}{2} (4\pi \sigma_H - i B_L)$$

Comme ci-dessus on aura $\kappa = \pi - \alpha - \bar{\beta} = 0$ et $\theta = -2\rho$
ainsi il apparait

$$[\bar{\delta} - (\alpha - \bar{\beta})] \varphi_0 = \bar{\delta} \varphi_0$$

d'où

$$(B4) \quad (D + \theta) \varphi_1 - \bar{\delta} \varphi_0 = -2\pi J_a \ell^a$$

où φ_1 est de spin 0 et φ_0 de spin 1 or on sait que (cf. I (A11))
et (A21))

$$(B5) \quad -\bar{\delta} \varphi_0 = + E_{A||B}^* m^A \bar{m}^B = \frac{1}{2} E_{A||B}^* (\gamma^{AB} + i\epsilon^{AB}) = 2\pi C_{A||B} (\gamma^{AB} + i\epsilon^{AB})$$

En séparant l'eq(B4) en parties réelles et imaginaires, on obtient:

$$(B6) \quad (D + \theta) \sigma_H + C^A_{||A} = -J^a \ell_a$$

et

$$(B7) \quad -(D + \theta) B_{\perp} + E_{A||B}^* \epsilon^{AB} = 0$$

L'équation (B6) s'identifie directement à l'équation (21) exprimant
la conservation de l'électricité (en effet on a bien $D \equiv \ell^a \partial_a \equiv d_o$).
Quant à l'équation (B7) il est aisé de voir que ce n'est autre que la
loi de Faraday(29) dans un repère comouvant. Celà se vérifie soit en
applicand (29) dans un repère comouvant (où $V^A = 0$ et $E_A = E_A^*$)
soit en remplaçant dans (B7) le champ électrique entraîné par son expression
(B2b) et D par $\partial_o + V^A \partial_A$ ce qui permet de retrouver directement
(29) (car $\theta = \partial_o \sqrt{\delta} / \sqrt{\delta} + V^A \parallel_A$).

- Application à l'état d'équilibre électrique d'un trou noir.

Dans lecasid'un état d'équilibre exact du champ électromagnétique et
gravitationnel du trou noir (Carter 1973) nous devons vérifier, comme
nous l'avons déjà indiqué au chapitre I, la relation (I60a) soit dans
notre cas

$$(B8) \quad R_{\ell\ell} = 8\pi T_{\ell\ell}^{e.m.} = 0$$

D'après l'équation (36), (B8) implique que le courant de conduction doit être nul à l'équilibre:

$$(B9) \quad C^A = 0$$

Alors la loi d'Ohm devient en introduisant le quadripotentiell A_a et l'expression (I61) pour V^A :

$$(B10) \quad 0 = E_A + F_{AB} v^B = \partial_A A_0 + \Omega_H (\partial_A A_\varphi - \partial_\varphi A_A)$$

On peut montrer, comme pour la discussion de l'équation (64) du chapitre I, que l'on peut choisir une jauge pour A_a telle que $\partial_\varphi A_A$ est nul (jauge axisymétrique).

Alors on déduit de (B10) que la quantité

$$(B11) \quad \tilde{\phi}_H = - (A_0 + \Omega_H A_\varphi)$$

est uniforme sur l'horizon. Cette quantité est le potentiel comouvant de Carter (1973) et apparaîtra constamment dans le chapitre V.

CHAPITRE III

THERMODYNAMIQUE IRREVERSIBLE

DES TROUS NOIRS

III. THERMODYNAMIQUE IRREVERSIBLE DES TROUS NOIRS

1. Introduction.

Nous allons maintenant nous intéresser à l'équation de Raychaudhuri généralisée I (30a) donnant $R_{ab}l^a l^b$ et montrer comment tous ses termes admettent une interprétation thermodynamique cohérente avec les chapitres précédents, ce qui n'avait jamais été fait complètement.

Rappelons que l'introduction de notions thermodynamiques dans la physique des trous noirs est due à Christodoulou (1970, Hawking (1971) et Bekenstein, (1973).

Christodoulou et Ruffini (1971) ont appliqué le concept de transformations réversibles et irréversibles au trou noir de Kerr-Newmann et ont montré que les transformations réversibles n'étaient atteintes que comme limite des transformations irréversibles. Ils ont alors montré l'existence d'une grandeur d'état du trou noir : la masse irréductible M_{ir} qui augmente dans toute transformation irréversible et reste constante à la limite d'une transformation réversible. Cette quantité ainsi définie, se trouve liée à la surface de l'horizon $S = \oint dS$ par la formule

$$(1) \quad S = 16\pi M_{ir}^2$$

Cette équation permet de relier l'approche de Christodoulou et Ruffini, au résultat général de Hawking (cf. Hawking, 1973), selon lequel la surface d'une section de l'horizon ne peut qu'augmenter au cours du temps.

Bekenstein (1973) reprenant ces résultats donne des arguments tendant à montrer qu'un certain multiple de la surface du trou noir : αS (α étant de l'ordre de grandeur de l'inverse de la constante de Planck) pouvait être considéré comme l'entropie du trou noir. Cette entropie devant satisfaire

avec l'entropie extérieure de la matière, la deuxième loi de la thermodynamique. Remarquons tout de suite que les résultats précédents semblent à priori plus restrictifs que nécessaire car ils semblent impliquer que l'entropie d'un trou noir ne peut qu'augmenter alors que l'entropie d'un corps ordinaire peut diminuer (par exemple par rayonnement) à condition de compenser cette diminution par un accroissement plus important de l'entropie extérieure. Les hypothèses du théorème de Hawking éliminaient à priori cette possibilité (essentiellement en supposant que rien ne pouvait "sortir" du trou noir) mais depuis Hawking lui-même (1975) a montré que des phénomènes quantiques, (voir le chap. IV) impliquaient l'existence d'un rayonnement de corps noir émis par le trou noir en plein accord avec la deuxième loi de la thermodynamique généralisée par Bekenstein (cf. Bekenstein, 1975) et permettant de fixer le coefficient de conversion entropie/surface à la valeur $\alpha = 1/(4\hbar)$.

Christodoulou et Ruffini (1971) avaient obtenu la formule de masse d'un trou noir de Kerr-Newman exprimant la masse totale d'un tel trou noir M en fonction de son moment angulaire total J , de sa charge électrique totale e et de sa masse irréductible M_{ir} :

$$(2) \quad M^2 = \left(M_{ir} + \frac{e^2}{4M_{ir}} \right)^2 + \frac{J^2}{4M_{ir}^2}$$

Bekenstein (1973), différentiant cette équation, obtint la formulation différentielle de la thermodynamique des trous noirs de Kerr-Newman sous la forme :

$$(3) \quad dM = \Omega_H dJ + \tilde{\phi}_H de + (g/8\pi) dS$$

où Ω_H est la vitesse angulaire de rotation du trou noir (cf. I(61)), $\tilde{\phi}_H$ le potentiel électrique comouvant du trou noir (cf. II (B11)) et g sa gravité de surface (cf. I (15c)). L'équation (3) est analogue à la décomposition thermodynamique habituelle de la variation d'énergie en travail (δW) et chaleur (δQ) :

$$(4a) \quad dM = \delta W + \delta Q$$

où δW rassemble les contributions réversibles à la variation d'énergie soit ici

$$(4b) \quad \delta W = \Omega_H dJ + \tilde{\phi}_H de$$

alors que δQ , contribution non réversible, peut s'écrire en accord avec la deuxième loi de la thermodynamique :

$$(4c) \quad \delta Q = (\text{température}) \times d(\text{entropie}) = [g/(8\pi\alpha)] d(\alpha S)$$

Donc α étant le coefficient de conversion entropie/surface, la quantité $g/(8\pi\alpha)$ apparaît comme température du trou noir.

Bardeen, Carter et Hawking (1973) ont montré la validité de la formule (3) pour un trou noir général. Toutes les quantités intensives de (3) : Ω_H , $\tilde{\phi}_H$ et g sont, à l'équilibre, uniformes sur la surface du trou noir (cf. chap. I et II). Ces résultats suggèrent qu'un trou noir est analogue à un corps ordinaire possédant une viscosité et des conductivités électriques et thermiques finies (Carter, 1973).

2. Dissipation et création d'entropie par un trou noir.

Nos travaux montrent en fait qu'un trou noir est analogue à un corps didimensionnel compact (une "bulle") possédant une viscosité de cisaillement de $(16\pi)^{-1}$, une viscosité de dilatation de $-(16\pi)^{-1}$ (chap. I), une conductivité électrique de $(4\pi)^{-1}$ (chap. II) et un temps de réponse négatif $-g^{-1}$ (ce chapitre).

Il n'apparaît pas de conductivité thermique dans cette approche. Ceci ne doit pas trop nous étonner puisque nous avons vu au chapitre I que l'uniformité de g se déduit d'une condition d'équilibre mécanique (car $g/8\pi$ apparaît comme une pression superficielle) et non de l'annulation d'une dissipation liée au gradient de g (voir plus bas).

Pour vérifier ces affirmations réécrivons l'équation de Raychaudhuri généralisée I(30a) :

$$(5) \quad 8\pi T_{\ell\ell} = 8\pi T_{ab} \ell^a \ell^b = R_{\ell\ell} = -d_o \theta + g\theta - \sigma_{AB} \sigma^{AB} - \frac{1}{2} \theta^2$$

ou d_o est la dérivée le long du vecteur ℓ .

Si nous considérons un élément dS de la surface du trou noir on a lors d'un transport de Lie le long de ℓ :

$$(6) \quad d_o(dS) = \theta dS$$

Remarquons que l'intégration de l'équation (6) sur la surface du trou noir ne donne la variation de surface totale S que si l'on suppose que le nombre de générateurs de l'horizon est conservé. S'il n'en est pas ainsi, comme ce nombre ne peut qu'augmenter (Hawking, 1973) on aurait une production d'"entropie" (de surface) en excès de celle que nous allons étudier (Carter, 1978).

Gardant à l'esprit cette possibilité nous allons détailler la production d'entropie due aux autres sources de dissipations. Différentiant (6) on trouve :

$$(7) \quad d_o^2(dS) = (d_o \theta + \theta^2) dS$$

de sorte qu'on peut écrire au lieu de (5)

$$(8) \quad d_o(dS) - \frac{1}{g} d_o^2(dS) = \frac{8\pi}{g} \left[T_{\ell\ell} + 2 \frac{1}{16\pi} \sigma_{AB} \sigma^{AB} - \frac{1}{16\pi} \theta^2 \right] dS$$

Or, la variation d'entropie d'un élément de fluide visqueux (de volume dV) que l'on suit dans son mouvement (Landau et Lifshitz, 1959) vaut:

$$(9) \quad d_o(ds) = \frac{1}{T} \left[r + \partial_i (\kappa \partial_i T) + 2\eta \sigma_{ik} \sigma^{ik} + \zeta \theta^2 \right] dV$$

où ds est l'entropie de l'élément de fluide considéré, r le taux de chaleur apportée par unité de volume et de temps (dû par exemple à une réaction chimique interne), T la température locale du fluide, κ le coefficient de conductibilité thermique, σ_{ik} le taux de glissement, θ celui de dilatation (I(48)), η la viscosité de cisaillement et ζ la viscosité de dilatation.

Il est donc tentant d'interpréter le second membre de (8) (multiplié par le coefficient de conversion $\alpha = \text{entropie/surface}$) en disant que le fluide des générateurs de l'horizon :

- . a une température locale égale à $g/(8\pi\alpha)$
- . est le siège de dissipations visqueuses surfaciques en plein accord avec l'équation dynamique du chapitre précédent ($\eta = (16\pi)^{-1}$, $\zeta = -(16\pi)^{-1}$, cf I(55))
- . ne possède pas de conductibilité thermique.
- . et est le siège d'un dégagement de chaleur $T_{\ell\ell} = T_{ab} \ell^a \ell^b$ dû à la matière ou aux champs.

Par exemple, le "dégagement de chaleur" $T_{\ell\ell}^{e.m.}$ associé à la présence d'un champ électromagnétique sur l'horizon s'écrit d'après l'équation (36) du chapitre II

$$(10) \quad T_{\ell\ell}^{e.m.} = 4\pi \delta_{AB} C^A C^B$$

et peut donc bien s'interpréter comme un effet Joule causé par le courant de conduction C^A avec une résistivité électrique de 4π en parfait accord avec la loi d'Ohm (II (31)). (cf. aussi Znajek 1977.)

En somme, on peut définir la "chaleur totale dissipée" dans l'élément de surface dS , par unité de temps x^0 (avec $\ell = \partial/\partial x^0$) comme :

$$(11) \quad \dot{Q} = \left(T_{\ell\ell} + \frac{1}{8\pi} \sigma_{AB} \sigma^{AB} - \frac{1}{16\pi} \theta^2 \right) dS$$

Quant au premier membre de l'équation (8) nous pouvons l'interpréter en le comparant à l'équation de Lorentz-Dirac (Dirac, 1938) décrivant le mouvement d'un électron soumis à une force extérieure et en tenant compte de la réaction de rayonnement. Si F désigne la force extérieure cette équation remplace l'équation habituelle de Newton, dans le cas non relativiste à une dimension d'espace, (ce qui suffira à notre propos) :

$$(12) \quad \gamma(t) = \frac{1}{m} F(t)$$

par l'équation différentielle :

$$(13a) \quad \gamma(t) - \frac{2e^2}{3mc^3} \dot{\gamma}(t) = \frac{1}{m} F(t)$$

complétée par une condition finale sur l'accélération $\gamma(t) = \ddot{x}(t)$

$$(13b) \quad \gamma(t) \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad t \longrightarrow +\infty$$

(Il faut que $F(t)$ tende vers 0 assez vite quand $t \longrightarrow +\infty$ pour que cette condition ait un sens et élimine les "runaway").

Cette modification de la loi de Newton s'interprète en disant que l'électron répond à la force excitatrice avec un temps de réponse négatif

("préaccélération") $-\tau = -2e^2/(3mc^3)$. En effet, dans le cas où le temps de variation de la force extérieure est bien plus grand que le temps caractéristique associé à l'électron ($\tau = \frac{2e^2}{3m\epsilon^3}$) on peut écrire (13a) sous la forme :

$$(13c) \quad \gamma(t-\tau) \neq \frac{1}{m} F(t)$$

C'est-à-dire une équation de Newton avec un décalage négatif entre la cause et l'effet. Et plus généralement on peut écrire en incorporant la condition finale (13b) dans l'équation de Lorentz-Dirac (13a):

$$(13d) \quad \gamma(t) = \frac{1}{m\tau} \int_t^\infty e^{-\frac{t-t'}{\tau}} F(t') dt'$$

qui montre comment l'électron répond de façon non instantanée à la force extérieure $F(t)$.

La situation présentée par le premier membre de l'équation (8) est très similaire, puisqu'effectivement cette équation doit être complétée par la condition finale (Hawking et Hartle, 1972).

$$(14) \quad d_0(ds)/ds \equiv \theta \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad x^0 \longrightarrow +\infty$$

(Condition nécessaire si l'horizon atteint asymptotiquement un état stationnaire).

Par conséquent, nous pouvons dire à bon droit que chaque élément du fluide des générateurs possède une entropie αds qui augmente en fonction de la chaleur dissipée \dot{Q} (donnée par l'équation (11) selon le schéma connu (chaleur/température) modifié par un temps de réponse négatif (anticipation) $-\tau = -1/g$:

$$(15) \quad d_0(\alpha dS) - \tau d_0^2(\alpha dS) = \left(\frac{g}{8\pi\alpha}\right)^{-1} \dot{Q}$$

(On ne peut pas écrire explicitement l'augmentation d'entropie en fonction de la dissipation selon le schéma de l'équation (13d) car $\tau = g^{-2}$ n'est pas en général constant le long des générateurs).

L'apparition d'une telle a-causalité dans le comportement d'un trou noir avec un temps caractéristique $\tau = 1/g$ ne doit pas nous surprendre car l'horizon d'un trou noir est défini de façon globale (et a-causale) et de plus l'existence de telles anticipations dans le temps ont déjà été explicitement étudiées dans la littérature. En particulier Hartle (1974) attribue la réponse anticipée d'un trou noir à des forces de marées extérieures essentiellement à ce décalage $-\tau = -1/g$ dans les équations différentielles régissant l'évolution du cisaillement σ .

Nous allons maintenant étudier plus précisément la dissipation causée par la viscosité et l'effet Joule dans les cas où l'on peut décrire le trou noir dans une approximation quasi-stationnaire. Une telle description est analogue à l'approximation adiabatique des systèmes (thermodynamiques) usuels. Elle est définie en général par la condition que l'échelle temporelle d'évolution du système considéré, sous influences extérieures, doit être infiniment plus grande que le temps de relaxation du système (c'est-à-dire le temps de retour spontané à l'équilibre).

Dans le cas d'un trou noir, le temps de relaxation est $\tau = 1/g$ (DeWitt et DeWitt, 1973) alors la condition d'adiabaticité peut s'écrire :

$$(16) \quad \tau \frac{d_0(dS)}{dS} = \frac{\theta}{g} \ll 1.$$

On vérifie aisément que l'on peut alors négliger dans l'équation (8) à la fois le terme a-causal et la dissipation due à la viscosité de dilatation. Donc, dans cette limite (16), seuls restent les dissipations dues à T_{pp} (comme la chaleur de Joule) et la viscosité de cisaillement et ces dissipations causent une augmentation d'entropie selon le schéma habituel.

3. Etats dissipatifs quasi stationnaires.

La thermodynamique classique ne considère habituellement que l'état d'équilibre final du système étudié. Cet état est caractérisé, pour un système isolé, par une valeur maximum de l'entropie totale. Ces états d'équilibre thermostatique ont des analogies directes dans la physique des trous noirs ; nous les avons rencontrés dans les chapitres I et II et nous en étudierons d'autres dans le chapitre V.

Cependant, Prigogine (1968) a insisté sur l'importance de la thermodynamique irréversible. Si un système est soumis à des "forces" thermodynamiques extérieures X_i (par exemple un gradient de température, de potentiel électrique, de vitesse...) il ne peut atteindre un état d'équilibre thermostatique. En effet, ces "forces" X_i entraînent l'écoulement de "flux" thermodynamiques associés J^i (par exemple un flux de chaleur, un courant électrique, des tensions visqueuses...)

Alors le système ainsi contraint est le siège d'une production continue d'entropie $\mathcal{S} = d(\text{entropie})/d(\text{temps})$:

$$(17) \quad \mathcal{S} = \sum_i X_i J^i > 0$$

Mais Prigogine (1968) a montré le résultat remarquable suivant :

supposant qu'il existe des relations linéaires à la Onsager entre les "flux" et les "forces"

$$(18) \quad J^i = \sum_k L^{ik} X_k$$

et qu'une partie des "forces" X_i^i est imposée par l'extérieur, alors le système aura tendance à atteindre un état final (de déséquilibre) stationnaire caractérisé par une valeur minimum de la production d'entropie en fonction des "forces" libres X_k^i pour des valeurs fixées des "forces" imposées X_i^i . D'où :

$$(19) \quad \left[\frac{\delta}{\delta X_k^i} \mathcal{P} \right]_{X_i^i = X_i^{ext}} = 0 \quad \text{dans l'état stationnaire final.}$$

Ce résultat est valable pour des systèmes discrets (comme le suggère nos notations) ou continus (voir plus bas) et il peut même se généraliser au régime non linéaire, c'est-à-dire en l'absence de relations du type (18). Cependant il est limité par la nécessité de n'imposer que des "forces" extérieures et non des "flux" extérieurs.

Dans la suite de ce chapitre nous allons étudier les analogues de ces états dans la physique des trous noirs : ce seront des états dissipatifs quasi-stationnaires. Nous vérifierons également la validité du principe de production minimum d'entropie sous les conditions indiquées plus haut.

Mais commençons par préciser ce que nous entendons par états quasi-stationnaires d'un trou noir.

A États quasi-stationnaires d'un trou noir.

Nous avons considéré à la fin du chapitre I l'état d'équilibre final d'un trou noir. Il était décrit par une métrique $g_{ab}^{(0)}$ (nous supposons l'absence de champs extérieurs, par exemple de champ électromagnétique, à

l'ordre zéro $F_{ab}^{(0)} = 0$) qui admettait un vecteur de Killing k temporel à l'infini. L'horizon d'une telle géométrie était également stationnaire ce qui impliquait, comme nous l'avons rappelé, que l'expansion de l'horizon son cisaillement et le flux de chaleur à travers l'horizon, calculés pour la configuration $g_{ab}^{(0)}$, $F_{ab}^{(0)} = 0$, étaient nuls :

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta^{(0)} = 0 \\ \sigma_{AB}^{(0)} = 0 \\ R_{\ell\ell}^{(0)} = 8\pi T_{\ell\ell}^{(0)} = 0 \end{array} \right.$$

Maintenant nous allons nous intéresser à une perturbation (gravitationnelle, électromagnétique, etc...) d'un tel état d'équilibre. Une telle configuration perturbée sera décrite par exemple par une métrique :

$$(21a) \quad g_{ab}^{tot} = g_{ab}^{(0)} + \lambda g_{ab}^{(1)} + \lambda^2 g_{ab}^{(2)} + \dots$$

et par un champ électromagnétique :

$$(21b) \quad F_{ab}^{tot} = \lambda F_{ab}^{(1)} + \lambda^2 F_{ab}^{(2)} + \dots$$

Dans ces expressions λ est un paramètre mesurant l'intensité de la perturbation.

Alors nous appellerons état quasi-stationnaire toute configuration perturbée qui est stationnaire au premier ordre c'est-à-dire telle que le vecteur de Killing k de la configuration de fond $g_{ab}^{(0)}$ soit encore vecteur de Killing pour la configuration perturbée au premier ordre :

$$(22a) \quad g_{ab}^{(1)} = g_{ab}^{(0)} + \lambda g_{ab}^{(1)}$$

$$(22b) \quad F_{ab}^{[1]} = \lambda F_{ab}^{(1)} .$$

Physiquement celà implique que les sources (gravitationnelles et électromagnétiques) de la perturbation sont stationnaires : par exemple Hawking et Hartle (1972) ont étudié les marées stationnaires induites sur un trou noir par un satellite lointain fixe par rapport au vecteur k .

D'après le théorème de rigidité forte de Hawking (cf. Hawking-Ellis (1973)) les états stationnaires des trous noirs tournants sont forcément axisymétriques (cf. la fin du chapitre I pour le début de la démonstration de ce théorème). Donc si un trou noir tournant est soumis à des perturbations non axisymétriques la configuration résultante ne saurait être exactement stationnaire. Cependant comme l'ont indiqué Hawking et Hartle (1972) cette non stationnarité ne se fait sentir qu'au deuxième ordre (termes en λ^2) quand les sources de la perturbation sont stationnaires au premier ordre. Et si l'on considère l'expansion de l'horizon :

$$(23) \quad \theta = \theta^{(0)} + \lambda \theta^{(1)} + \lambda^2 \theta^{(2)} + \dots$$

Hawking et Hartle (1972) ont montré que non seulement $\theta^{(0)}$ était nul mais que $\theta^{(1)}$ l'était aussi et $\theta^{(2)}$ était stationnaire. Soit :

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta^{(1)} = \theta^{(0)} + \lambda \theta^{(1)} = 0 \\ \theta^{(2)} \text{ stationnaire} \end{array} \right.$$

Or nous pouvons écrire l'équation de Raychaudhuri généralisée :

(cf. I (30b))

$$(25a) \quad g\theta - (\ell^a \partial_a + \theta)\theta = R_{\ell\ell} + \sigma_{AB}\sigma^{AB} - \frac{1}{2}\theta^2$$

qui donne par intégration sur la surface du trou noir :

$$(25b) \quad \oint g\theta ds - \mathcal{L}_\ell(\oint \theta ds) = \\ = 8\pi \oint \left(T_{ab}\ell^a\ell^b + \frac{1}{8\pi}\sigma_{AB}\sigma^{AB} - \frac{1}{16\pi}\theta^2 \right) ds$$

Nous pouvons comme d'habitude normaliser la normale ℓ à l'horizon en fonction du vecteur de Killing du fond k et des sections S de l'horizon par :

$$(26) \quad \ell = k + v \quad \text{où } v \text{ est tangent à } S.$$

De plus les sections sont choisies de sorte que la gravité de surface de la métrique de fond $g^{(0)}$ soit uniforme (cf. chapitre I). Alors, travaillant au deuxième ordre, l'équation (25b) se simplifie car :

$$\mathcal{L}_\ell(\oint \theta ds) = \lambda^2 \mathcal{L}_k(\oint \theta^{(2)} ds) = 0 \quad (\text{stationarité de l'expansion})$$

et car l'on peut négliger le terme en θ^2 (viscosité de dilatation) dans le deuxième membre. Cela permet d'écrire la "production de surface" par unité de temps à l'infini ou mieux, après multiplication par $g^{(0)}/8\pi$, la "production de chaleur" totale sous la forme :

$$(27a) \quad \dot{Q}^{\text{tot}} = \frac{g^{(0)}}{8\pi} \mathcal{L}_k(\oint ds) = \frac{g^{(0)}}{8\pi} \oint \theta ds = \lambda^2 D$$

avec

$$(27b) \quad D \equiv \oint \left(T_{ab}^{(2)} l^a l^b + \frac{1}{8\pi} \sigma_{AB}^{(1)} \sigma^{(1)AB} \right) dS$$

où $T_{ab}^{(2)}$ est calculé en fonction des champs extérieurs au premier ordre.

Par exemple, dans le cas électromagnétique on aura :

$$(27c) \quad T_{ab}^{(2)} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{ac}^{(1)} F_{bd}^{(1)} g^{cd} - \frac{1}{4} F_{cd}^{(1)} F_{eh}^{(1)} g^{ce} g^{dh} g_{ab} \right)$$

où l'on peut remplacer g_{ab} par $g_{ab}^{(1)}$ ou même $g_{ab}^{(0)}$.

D est l'analogue dans la physique des trous noirs de la fonction de dissipation de la thermodynamique irréversible, définie par :

$$D = (\text{température}) \times (\text{production d'entropie}).$$

La dissipation D est la seule quantité du deuxième ordre en λ que nous considérerons. Par conséquent, afin d'alléger les notations nous supprimerons l'indice [1] dans la suite, de plus, nous poserons formellement $\lambda = 1$. En d'autres termes nous travaillerons désormais avec une métrique stationnaire.

$$(28a) \quad g_{ab} = g_{ab}^{(0)} + g_{ab}^{(1)}$$

et un champ électromagnétique stationnaire :

$$(28b) \quad F_{ab} = F_{ab}^{(1)}$$

Nous pouvons alors utiliser les résultats des chapitre I et II en utilisant un système de coordonnées x^0, x^1, x^A tel que (coordonnées non comouvantes) :

$$\cdot k = \frac{\partial}{\partial x^0}$$

• $x^1 = 0$ dénote la position de l'horizon.

• x^A ($A = 2, 3$) sont des coordonnées sur les sections S_{x^0} munies de la métrique induite γ_{AB} (et de la 2-forme élément de surface $\epsilon_{AB} = \sqrt{\gamma} \epsilon_{AB}^{23}$).

Alors g_{ab} et F_{ab} ne dépendent pas de la coordonnée x^0 d'où les relations :

$$(29a) \quad v_A = \gamma_{AB} v^B = -g_{0A} \quad \text{I (50a)}$$

$$(29b) \quad \theta = v^A{}_{||A} = 0 \quad \text{I (52c)}$$

$$(29c) \quad \sigma_{AB} = \frac{1}{2} (\mathcal{L}_v \gamma)_{AB} - \frac{1}{2} \theta \gamma_{AB} = \frac{1}{2} (v_{A||B} + v_{B||A}) \quad \text{I (52 b et d)}$$

$$(29d) \quad v^B \Omega_{A||B} + v^B{}_{||A} \Omega_B + \sigma_A{}^B{}_{||B} - g_{,A} = -8\pi (\sigma_H E_A + \epsilon_{AB} B_{\perp} v^B) \quad \text{I (54)}$$

$$(29e) \quad T_{pp} = 4\pi C_A C^A \quad \text{II (36)}$$

$$(29f) \quad C^A = K^A - \sigma_H v^A \quad \text{II (25)}$$

$$(29g) \quad K^A{}_{||A} = -J^q l_q \quad \text{II (26)}$$

$$(29h) \quad E_A + \epsilon_{AB} B_{\perp} v^B = 4\pi C_A \quad \text{II (31)}$$

$$(29i) \quad E_A \equiv F_{A0} = \partial_A \Phi \quad \text{II (30)}$$

où $\Phi = A_0$ est le potentiel électrique non comouvant (changé de signe).

Dans toutes ces équations on utilise la métrique Riemannienne γ_{AB} pour abaisser les indices et pour calculer les dérivées covariantes.

Ces notations et résultats étant précisés la dissipation peut s'écrire en fonction de Φ , B_{\perp} , v^A et γ_{BC} comme :

$$(30) \quad D[\Phi, B_{\perp}, v^A, \gamma_{BC}] = \oint dS \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} (\Phi_{||A} + \epsilon_{AB} B_{\perp} v^B) (\Phi_{||A'} + \epsilon_{A'B'} B_{\perp} v^{B'}) \gamma^{AA'} \\ & + \frac{1}{32\pi} (v_{A||B} + v_{B||A}) (v_{A' || B'} + v_{B' || A'}) \gamma^{AA'} \gamma^{BB'} \end{aligned} \right\}$$

Notre but est maintenant d'étudier les conditions de validité d'un principe de dissipation minimum pour un trou noir par analogie avec le principe de production minimum d'entropie de Prigogine (1968). Remarquons tout de suite qu'il est possible de considérer la dissipation de chaleur, au lieu de la production d'entropie puisque D ne contient pas de terme de conductivité thermique, il est donc bien équivalent de minimiser $D = \dot{Q}$ ou $S = \dot{Q}/T$.

Afin de simplifier notre analyse nous considérerons séparément les perturbations électromagnétiques (effet Joule) et gravitationnelles (viscosité). Il sera aisé au lecteur d'étudier le couplage entre les deux, c'est-à-dire comment apparaît le terme de force électromagnétique dans l'équation de Navier-Stokès (29d) lorsqu'on minimise D par rapport à la vitesse.

B- Minimum de la chaleur de Joule. Courants de Foucault.

La dissipation entraînée par la présence de champs électromagnétiques au voisinage de l'horizon en supposant l'absence de tout courant électrique extérieur à travers l'horizon ($J^a{}_{;a} = 0$) s'écrit :

$$(31) \quad D[\Phi, B_{\perp}] = \frac{1}{4\pi} \oint (\Phi_{||A} + \epsilon_{AB} B_{\perp} v^B) (\Phi_{||A'} + \epsilon_{A'B'} B_{\perp} v^{B'}) \gamma^{AA'} dS$$

D'où l'on déduit la dérivée variationnelle de D (ou plutôt de sa

densité) par rapport au potentiel électrique $\bar{\Phi}$ avec B_{\perp} , v^A et γ_{BC} fixés :

$$(32) \quad \frac{\delta D}{\delta \bar{\Phi}} = -\frac{1}{2\pi} \left(\bar{\Phi}_{\parallel A} + \epsilon_{AB} B_{\perp} v^B \right)^{\parallel A} ,$$

Donc la dissipation est minimum quand :

$$(33) \quad \left(\bar{\Phi}_{\parallel A} + \epsilon_{AB} B_{\perp} v^B \right)^{\parallel A} = 0 .$$

Or, quand un état électromagnétique stationnaire est atteint, on a en fait d'après (29f-i) et l'hypothèse d'absence de courant électrique à travers l'horizon :

$$(34) \quad 0 = K^A_{\parallel A} = \left[\frac{1}{4\pi} \left(\bar{\Phi}^{\parallel A} + \epsilon^A_B B_{\perp} v^B \right) + \sigma_H v^A \right]_{\parallel A} .$$

Comparant (33) et (34) on voit que l'état quasi-stationnaire représente un minimum de dissipation quand on peut négliger le courant de convection

$\sigma_H v^A$ devant le courant de conduction. Cela correspond tout à fait aux restrictions générales pour la validité du principe de Prigogine. En effet, raisonnant par analogie, on peut dire que lorsqu'on fait tourner un trou noir dans un champ électromagnétique les "forces thermodynamiques" présentes sont :

. un champ électrique d'induction $\epsilon_{AB} B_{\perp} v^B$ ($\vec{v} \times \vec{B}_{\perp}$)

dû au mouvement forcé dans un champ magnétique extérieur B_{\perp} ;

. un champ électrique interne non fixé $E_A = \bar{\Phi}_{\parallel A}$,

alors que les "flux" sont :

. un courant de convection $\sigma_H v^A$ imposé par le mouvement et la charge superficielle,

. un courant de conduction C^A (courant de Foucault) déterminé par la loi d'Ohm.

On a donc bien vérifié que lorsqu'on ne fixe pas de "flux" de l'extérieur ($J^a = 0$, $\sigma_H v^A$ négligeable) mais que l'on fixe une "force" $\epsilon_{AB} B_L v^B$ alors l'état quasistationnaire réalise un minimum de la dissipation par rapport aux "forces" libres : $\bar{\Phi}$.

Toutes ces restrictions sont satisfaites dans le cas d'intérêt astrophysique, où l'on étudie un trou noir, de Kerr, en rotation lente dans un champ magnétique extérieur donné (non axisymétrique). En effet, on part alors d'un champ magnétique (et non électrique) autour d'une solution de Schwarzschild (de masse M) (cf. par exemple Hanni et Ruffini, 1976) ce qui fixe B_L et $\sigma_H = 0$ au zéroième ordre en la vitesse de rotation, donc, au premier ordre en v^A on connaît $\epsilon_{AB} B_L v^B$ et $\sigma_H v^A = 0$. Alors au même ordre d'approximation les courants de Foucault stationnaires sont donnés par la solution de l'équation en $\bar{\Phi}$:

$$(35a) \quad (\bar{\Phi}_{;A} + \epsilon_{AB} B_L v^B)^{;A} = 0$$

avec

$$(35b) \quad \gamma_{AB} dx^A dx^B = (2M)^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

et

$$(35c) \quad v^A \partial_A = \Omega_H \partial_\varphi$$

D'après les théorèmes généraux sur l'équation de Poisson dans les espaces Riemanniens compacts (Hodge, 1952) il est aisé de voir que l'équation en $\bar{\Phi}$ (35a) admet une solution unique (modulo une constante additive).

Dans le cas où γ_{AB} est donné par (35b) il est même possible d'écrire explicitement cette solution. En effet, (35a) s'écrit alors :

$$(36) \quad \Delta^{sph.} \Phi = - \frac{a}{\sin \theta} \partial_{\theta} (\sin^2 \theta B_{\perp})$$

où $\Delta^{sph.} = \frac{1}{\sin \theta} \partial_{\theta} \sin \theta \partial_{\theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_{\varphi}^2$ est le Laplacien sur la sphère unité et où $a = \Omega_H (2M)^2$ est le paramètre habituel de Kerr.

Alors si l'on développe la "source" B_{\perp} en harmoniques sphériques :

$$(37) \quad B_{\perp} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} B_{\perp l}^m(\theta, \varphi)$$

où $B_{\perp l}^m \propto Y_l^m(\theta, \varphi)$

on trouve :

$$(38) \quad \Phi = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{a}{l(l+1)} \sin \theta \partial_{\theta} B_{\perp l}^m + const.$$

En particulier prenant pour B_{\perp} la composante radiale d'un champ magnétique uniforme incliné d'un angle γ sur l'axe de rotation (par exemple Hanni et Ruffini, 1976).

$$(39) \quad B_{\perp} = B_0 (\cos \gamma \cos \theta + \sin \gamma \sin \theta \cos \varphi)$$

On reconnaît que B_{\perp} est un harmonique d'ordre $l = 1$ d'où

$$(40) \quad \Phi = \frac{1}{2} a B_0 \sin \theta [-\cos \gamma \sin \theta + \sin \gamma \cos \theta \cos \varphi]$$

qui est précisément le potentiel d'où dérivent les champs et les courants étudiés à la fin de l'article "Black hole eddy currents (Damour, 1977c) (Article reproduit au chapitre II).

Avant de passer au cas gravitationnel signalons que dans le cas électromagnétique il est facile de trouver une quantité positive qui sera minimisée à l'état stationnaire comme fonction de Φ même quand $\sigma_H v^A$ n'est pas négligeable. Il suffit en effet de prendre :

$$(41) \quad \tilde{D}[\Phi, B_\perp, \sigma_H] \equiv \oint \frac{dS}{4\pi} (\Phi_{||A} + \epsilon_{AB} B_\perp v^B + 4\pi \sigma_H v^A)^2 = \oint 4\pi K_A K^A dS$$

c- Minimum de dissipation visqueuse - Marées.

La dissipation entraînée par la présence d'une perturbation gravitationnelle stationnaire au voisinage de l'horizon s'écrit :

$$(42) \quad D[v^A, \gamma_{BC}] = \frac{1}{32\pi} \oint (v_{A||B} + v_{B||A})(v_{C||D} + v_{D||C}) \gamma^{AC} \gamma^{BD} dS$$

La double barre dénotant la dérivée covariante associée à la métrique γ_{AB} . De plus, on rappelle qu'au premier ordre de perturbation le fluide des générateurs de l'horizon est incompressible (cf.(24)).

$$(43a) \quad \theta = 0$$

ce qui donne comme contrainte sur v^A dans le cas stationnaire (29b):

$$(43b) \quad v^A_{||A} = 0$$

La dérivée variationnelle de D (ou de sa densité) par rapport à v^A avec γ_{BC} fixé est :

$$(44) \quad \frac{\delta D}{\delta v^A} = -\frac{1}{8\pi} (v_{A||B} + v_{B||A})^{||B} = -\frac{1}{4\pi} \sigma_A^B_{||B}$$

Nous pouvons tenir compte de la contrainte (43b) sur V^A en utilisant un facteur de Lagrange. On en déduit facilement que le minimum de D par rapport à V^A contraint par (43b) a lieu quand :

$$(45) \quad \sigma_A^B \parallel_B = \lambda_{,A}$$

où λ (le facteur de Lagrange) est un champ scalaire sur la section S de l'horizon. On peut d'ailleurs éliminer λ et écrire comme condition sur V^A pour un minimum :

$$(46) \quad \epsilon^{AC} \sigma_A^B \parallel_{BC} = 0$$

Or, quand un état gravitationnel perturbé quasistationnaire est atteint l'équation fondamentale de la dynamique de surface du trou noir I(55) donne (cf. (29d) ci-dessus avec $F_{ab} = 0$) :

$$(47) \quad V^B \Omega_{A \parallel B} + V^B \parallel_A \Omega_B + \sigma_A^B \parallel_B - g_{,A} = 0$$

où g est la gravité de surface.

Comparant ce résultat avec l'équation (45) on voit que l'état stationnaire réalise un minimum de dissipation quand on peut négliger des termes du type $\Omega_A V^B$ devant σ_A^B . Nous retrouvons là le même type de restrictions que dans le cas électromagnétique. En effet, l'analogie avec la loi classique de Navier Stokes conduit à considérer V^A comme une "force" généralisée (car c'est son gradient qui entraîne une dissipation). Alors $-\sigma_A^B / 8\pi$ est le "flux" interne d'impulsion (pressions visqueuses).

ses) qui est une fonction linéaire du gradient de V^A . Comme $\pi_A = -\frac{\Omega_A}{8\pi}$ est la densité d'impulsion, $\pi_A V^B = -\frac{\Omega_A V^B}{8\pi}$ peut à bon droit être appelé flux convectif d'impulsion. Donc on a vérifié que la dissipation était minimum en fonction des "forces" quand les "flux" imposés étaient négligeables.

Nous allons préciser ce résultat en étudiant en détail un cas d'intérêt astrophysique où les "flux" imposés seront négligeables et où la "force" imposée apparaîtra clairement. Il s'agit de la dissipation causée par les marées induites sur un trou noir en rotation lente par des satellites stationnaires lointains. Ce système a été étudié par Hartle (1973) et nous allons pouvoir retrouver certains de ses résultats mais d'une manière beaucoup plus rapide.

Au zéroième ordre, en la vitesse de rotation du trou noir, on suppose connue la "marée" induite par la perturbation stationnaire c'est-à-dire la métrique déformée d'un horizon de Schwarzschild. Nous pouvons, après Regge et Wheeler (1957) et Hartle (1973) prendre une métrique conformément sphérique :

$$(48) \quad \gamma_{AB} = (1-K) \gamma_{AB}^{(0)}$$

où $\gamma_{AB}^{(0)}$ est la métrique d'une section de l'horizon de Schwarzschild pour une masse M :

$$(49) \quad \gamma_{AB}^{(0)} dx^A dx^B = (2M)^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

Le champ scalaire K mesure la marée induite sur l'horizon. De plus, nous imposons maintenant une faible rotation au trou noir. En l'absence de marées la vitesse de surface du trou noir serait :

$$(50) \quad V_{(0)}^A \partial_A = \Omega_H \partial_\varphi = \frac{a}{(2M)^2} \partial_\varphi$$

après perturbation le champ des vitesses s'écrira (on identifie les horizons avant et après perturbation) :

$$(51) \quad V^A = V_{(0)}^A + W^A$$

Nous devons tenir compte de la restriction d'incompressibilité :

$$(52) \quad 0 = V^A{}_{;A} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} (\sqrt{\gamma} V^A)_{,A} .$$

Or au premier ordre dans la perturbation gravitationnelle on a

$$(53) \quad \sqrt{\gamma} = (1 - K) \sqrt{\gamma^{(0)}} ,$$

et comme $(\sqrt{\gamma^{(0)}} V_{(0)}^A)_{,A} = 0$ on trouve comme restriction sur W^A :

$$(54) \quad \left[\sqrt{\gamma^{(0)}} (W^A - K V_{(0)}^A) \right]_{,A} = 0$$

Il est commode de faire intervenir dorénavant uniquement la métrique non perturbée $\gamma_{AB}^{(0)}$ avec sa forme de surface $E_{AB}^{(0)} = \sqrt{\gamma^{(0)}} \epsilon_{AB}^{\theta\varphi}$ et sa dérivée covariante notée avec une seule barre. Alors la contrainte (54) peut s'intégrer et permet d'exprimer W^A en fonction d'un potentiel des vitesses perturbées N par

$$(55) \quad W^A = K V_{(0)}^A - \epsilon_{(0)}^{AB} N_{;B}$$

Notons que K et N désignent ici les mêmes quantités que chez Regge et Wheeler (1957) bien que l'interprétation en soit différente .

Il nous faut maintenant évaluer le glissement de l'horizon (29c) :

$$(56) \quad \sigma_{AB} = \frac{1}{2} (\mathcal{L}_V \gamma)_{AB} - \frac{1}{2} \gamma^{CD} (\mathcal{L}_V \gamma)_{CD} \gamma_{AB}$$

Or, au premier ordre en K ($V_{(0)}$ (et W) on a :

$$\mathcal{L}_V(\gamma) = \mathcal{L}_{V_{(0)}+W}(\gamma^{(0)} - K \gamma^{(0)}) = (1-K) \mathcal{L}_{V_{(0)}} \gamma^{(0)} + \mathcal{L}_W \gamma^{(0)} - (\mathcal{L}_{V_{(0)}} K) \gamma^{(0)}$$

Mais le premier terme est nul car $\mathcal{L}_{V_{(0)}} \gamma^{(0)}$ l'est (20) et le dernier terme disparaît quand on enlève la trace il reste donc :

$$(57a) \quad \sigma_{AB} = \frac{1}{2} (\mathcal{L}_W \gamma^{(0)})_{AB} - \frac{1}{2} \gamma^{(0)CD} (\mathcal{L}_W \gamma^{(0)})_{CD} \gamma_{AB}^{(0)}$$

soit

$$(57b) \quad \sigma_{AB} = \frac{1}{2} (W_{A|B} + W_{B|A} - W^C{}_{|C} \gamma_{AB}^{(0)})$$

où nous employons $\gamma_{AB}^{(0)}$ pour abaisser les indices et former la dérivée covariante.

D'après (55) on peut encore écrire :

$$(58) \quad \sigma_{AB} = \frac{1}{2} \left[(K V_A^{(0)})_{|B} + (K V_B^{(0)})_{|A} - (K V_C^{(0)})_{|C} - \epsilon_A^{(0)C} N_{|CB} - \epsilon_B^{(0)C} N_{|CA} \right]$$

Alors la dissipation s'écrit :

$$(59) \quad D[N, K] = \frac{1}{8\pi} \oint \sigma_{AB} \sigma_{CD} \gamma^{(0)AC} \gamma^{(0)BD} dS^{(0)}$$

Cette expression est comparable à l'équation (31) donnant $D[\Phi, B_\perp]$. On voit alors que la "force" imposée de l'extérieur est $K V_{(0)}^A$ (ce qui d'ailleurs est bien classiquement l'excès de vitesse imposé par le renflement des marées) et que la "force" libre est le potentiel des vitesses perturbé N .

Alors variant N pour une marée donnée K on trouve aisément la condition de minimum :

$$(60) \quad \epsilon_{(0)}^{AC} \sigma_{AB|BC} = 0$$

qui est d'après (58) une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre pour N . C'est un bon exercice de manipulation d'indices que de développer cette équation et de la réduire en employant la courbure Riemannienne des sections S . Il faut utiliser l'identité de Ricci.

$$(61) \quad \xi_{A|BC} - \xi_{A|CB} = \xi^D R_{DABC}^{(0)}$$

avec

$$(62) \quad R_{DABC}^{(0)} = G^{(0)} \epsilon_{DA}^{(0)} \epsilon_{BC}^{(0)}$$

où $G^{(0)}$ est la courbure de Gauss de S qui ici est constant et vaut $(2M)^{-2}$. D'où l'équation simplifiée pour N .

$$(63) \quad 0 = \left[\Delta^{(0)} + \frac{2}{(2M)^2} \right] \left\{ \left[N_{,A} + \epsilon_{AB}^{(0)} K V_{(0)}^B \right]^{,A} \right\}$$

où $\Delta^{(0)}$ est le Laplacien sur S munie de la métrique sphérique (49).

Remarquons en passant que nous aurions pu introduire un potentiel des vitesses total pour intégrer la contrainte $v^A{}_{||A} = 0$ en général. Alors on aurait obtenu (46) analogue de (60) par variation sur $N^{tot.}$. Quant à l'équation finale pour $N^{tot.}$ elle s'écrirait :

$$(64) \quad \Delta \Delta N^{tot.} + 2 (G N^{tot.}{}_{||A}){}^{||A} = 0$$

où tout est exprimé en fonction de la métrique totale γ_{AB} .

Revenant à l'équation perturbée (63) on remarque que les solutions γ de :

$$(65) \quad \left(\Delta^{(0)} + \frac{2}{(2M)^2} \right) \gamma = 0$$

sont les harmoniques sphériques d'ordre 1 ($l(l+1)=2$) : $Y_1^m(\theta, \varphi)$

Ceci permet d'écrire une équation du deuxième ordre pour N.

$$(66) \quad \left(N_{||A} + \epsilon_{AB}^{(0)} K v_{(0)}^B \right)'{}^A = 0 \text{ modulo } Y_1^m(\theta, \varphi)$$

Il est remarquable que l'on retrouve exactement l'équation obtenue dans le cas électromagnétique (cf. équations (35)) :

$$(67) \quad \left(\Phi_{||A} + \epsilon_{AB}^{(0)} B_L v_{(0)}^B \right)'{}^A = 0$$

La seule différence entre (66) et (67) s'explique par la différence de "spin" entre l'électromagnétisme et la gravitation. En effet, le spin du champ électromagnétique est 1, ce qui implique qu'un potentiel harmonique d'ordre $l \gg 1$ conduit à une dissipation alors que pour la gravitation il faut $l \gg 2$, les harmoniques d'ordres inférieurs pouvant être éliminés par une transformation de jauge (cf. Zerilli, 1970).

Cette analogie remarquable permet donc, comme ci-dessus, de calculer explicitement N en fonction du développement en harmoniques sphériques de la marée perturbatrice K ($K = \sum_{l,m} K_l^m(\theta, \varphi)$) :

$$(68) \quad N = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{a}{l(l+1)} \sin^{\theta} K_l^m \text{ modulo } Y_0 \text{ et } Y_1$$

Tel est le résultat de Hartle (1973) qu'il a obtenu d'une manière très différente.

Enfin, comme notre étude se limitait en premier ordre en K et en $V_{(0)}$ (en gardant bien sûr l'ordre mixte $K V_{(0)}$) on peut bien négliger le flux convectif d'impulsion $\pi_A V^B \sim V_{(0)}^2$ et remplacer

$\sigma_{A^B|B}$ par $\sigma_{A^B|B}$ dans (45). On a donc bien vérifié que l'état quasi-stationnaire réalise un minimum de la dissipation en fonction des "forces" libres (N) lorsqu'on fixe la "force" $K V_{(0)}^A$ (vitesse imposée par le renflement des marées).

Signalons enfin, que contrairement au cas électromagnétique pur (cf. (41)), nous n'avons pu trouver de principe variationnel exact, incorporant les termes convectifs en $\pi_A V^B$, qu'en utilisant des palliatifs du genre de ceux utilisés par Glansdorf et Prigogine (1964): c'est-à-dire en variant une fonctionnelle $\tilde{D}[V^A, \tilde{V}^A]$ par rapport à V^A en imposant (après variation) $V^A = \tilde{V}^A$.