

CHAPITRE V

MAGNETOSPHERE D'UN TROU NOIR

## V. MAGNETOSPHERE D'UN TROU NOIR.

De nombreuses observations astrophysiques, venant surtout de sources binaires de rayons X, indiquent l'existence de très fortes luminosités dûes à la chute de plasma sur un objet gravitationnellement condensé (étoile à neutrons ou trou noir) (pour une revue cf. par exemple Giacconi et Ruffini 1977). Il est donc très important d'étudier les structures magnétosphériques possibles autour d'un trou noir. (Pour une revue cf. par exemple Gursky et Ruffini 1975).

L'étude d'une structure électromagnétique stable autour d'un trou noir peut s'aborder par deux types d'arguments : une approche dynamique ou une approche thermodynamique. (C'est-à-dire en fait thermostatique).

### 1. Approche dynamique.

Par ceci nous entendons l'étude directe de la stabilité d'une configuration électromagnétique en explicitant les forces agissant sur les éléments de cette configuration. En particulier dans une première schématisation d'une magnétosphère on considère des particules chargées d'épreuve dans un champ électromagnétique donné et l'on analyse les conditions de piégeage de ces particules par des forces d'origine magnétique.

Les résultats de cette analyse sont exposés dans l'article "Regions of magnetic support of a plasma around a black hole". (Damour, Hanni, Ruffini et Wilson 1978) reproduit ci-dessous.

Un des concepts nouveaux introduits dans cet article est celui des "lignes d'accélération" sur lequel nous désirons apporter des compléments géométriques :

On considère le mouvement d'une particule chargée de masse  $m$  et de charge  $e$  dans un champ électromagnétique  $F_{ab}$  qui est considéré en une première approximation locale comme uniforme et constant. Utilisant alors un repère Lorentzien local il est facile d'écrire la solution de l'équation du mouvement (Taub 1948)

$$(1) \quad \frac{Du^a}{ds} = \frac{e}{m} F^a_b u^b \quad (\text{où } s \text{ est le temps propre})$$

sous la forme :

$$(2) \quad \frac{dx^a}{ds} \equiv u^a = \begin{cases} \alpha_0 e^{+\frac{eE_0 s}{m}} \ell^a + \beta_0 e^{-\frac{eE_0 s}{m}} n^a + \\ + \gamma_0 e^{+\frac{i e B_0 s}{m}} m^a + \bar{\gamma}_0 e^{-\frac{i e B_0 s}{m}} \bar{m}^a. \end{cases}$$

où  $\ell^a$  et  $n^a$  sont les vecteurs propres (isotropes) réels de  $F^a_b$  et  $m^a$  et  $\bar{m}^a$  ses vecteurs propres (isotropes) complexes, avec comme valeurs propres respectives  $E_0$ ,  $-E_0$ ,  $iB_0$ ,  $-iB_0$ . Les invariants  $E_0$  et  $B_0$  étant les mêmes que dans l'article ci-dessous.

L'équation (2) décrit dans l'espace-temps un mouvement hélicoïdal (dû aux deux derniers termes) autour d'une hyperbole plane d'asymptotes  $\ell^a$  et  $n^a$  (dûe aux deux premiers termes).

Dans l'approximation dite du centre de guidage (valable, si l'énergie de la particule n'est pas trop grande) on ne retient que les deux premiers termes de (2) c'est-à-dire que le mouvement *ainsi* simplifié devient une hyperbole dans le plan engendré par  $\ell$  et  $n$ . Quand on observe ce mouvement dans un repère local donné, caractérisé par une direction temporelle  $e_0$  et son 3-plan orthogonal  $P$ , il apparaît comme combinaison :

- d'un mouvement uniformément accéléré le long de l'intersection du 2-plan engendré par  $\ell$  et  $n$  et du 3-plan spatial  $P$  (ce qui définit la direction d'accélération).

- et d'un mouvement à vitesse constante (dit de dérive) le long d'une direction orthogonale à la direction d'accélération.

Ainsi à la donnée d'un champ de 3-plan spatiaux (ou de directions temporelles dans l'espace-temps correspond, par intersection avec les deux plans  $(\ell, n)$  définis localement à partir de  $F^a_b$ , un champ de directions d'accélération .

On appelle lignes d'accélération ("flow lines" dans le texte ci-dessous) les trajectoires de ce champ de directions. (Remarquons que dans le cas particulier où les 2-plans  $(\ell, n)$  seraient intégrables on pourrait même introduire des 2-surfaces d'accélération).

Dans le cas des métriques de Kerr-Newman on prend comme 3-plan spatiaux les 3-plans (globalement intégrables) à temps constant ( $dt = 0$ ) ce qui fait que les lignes d'accélération sont contenues dans les hypersurfaces  $t = \text{const}$ . De plus dans le cas axisymétrique le mouvement de dérive est toroïdal ce qui permet de l'oublier. On introduit alors la frontière de la région d'où des lignes d'accélération sont piégées par le trou noir, cette frontière sépare les régions où le plasma a tendance à être absorbé par le trou noir et les régions où un piègage par le champ magnétique semble possible. Cette définition est d'ailleurs la plus restrictive comme région de stabilité du plasma et l'article ci-dessous analyse aussi d'autres définitions moins sévères.

Il est bien entendu qu'une telle approche n'est qu'une première approximation ("test-particle approximation") de l'étude d'une magnétosphère réaliste autour d'un trou noir. Nous verrons au chapitre suivant ce qui peut être considéré comme une seconde approximation lorsque nous décrirons un trou noir accrescent par les équations de la magnétohydrodynamique.

- Piégeage magnétique de particules autour d'un trou noir:

PHYSICAL REVIEW D

VOLUME 17, NUMBER 6

15 MARCH 1978

## Regions of magnetic support of a plasma around a black hole

Thibaut Damour\*

*Joseph Henry Laboratories, Princeton University, Princeton, New Jersey 08540*<sup>†</sup>Richard S. Hanni<sup>‡</sup>*Physics Department, Stanford University, Stanford, California 94305*<sup>§</sup>Remo Ruffini<sup>||</sup>*Joseph Henry Laboratories, Princeton University, Princeton, New Jersey 08540*<sup>§</sup>

James R. Wilson

*Lawrence Livermore Laboratory, Livermore, California 94550*

(Received 1 July 1977)

We establish necessary conditions for the trapping of charged particles by an electromagnetic field in the magnetosphere of a black hole. Three regions are defined according to the relative importance of electric and magnetic fields. Idealized models are used to illustrate the application of these criteria.

## I. INTRODUCTION

The observations of binary x-ray sources have given clear evidence that plasma accreting from a normal star into a neutron star or a black hole gives rise to the emission of x rays of up to  $10^5 L_\odot$ .<sup>1</sup> The primary source of this radiated energy is the gravitational binding energy of the material accreting into the deep potential well of the gravitationally collapsed object.<sup>2</sup> Recent observations of x-ray bursts<sup>3</sup> also point to the possibility that processes involving black-hole magnetospheres occur in the cores of globular clusters.<sup>2</sup> Similar mechanisms have also been suggested as the origin of extended radio lobes in extragalactic radio sources.<sup>2</sup>

In order to reach deeper implications from these observations it is therefore relevant to obtain a theoretical understanding of the magnetosphere of a gravitationally collapsed object. Moreover, since the emission processes are expected to occur within a few radii of the surface of the black holes, it is likely that these observations, duly interpreted, will give information about the most novel and strong-field effects of general relativity.<sup>2</sup>

In this paper we introduce basic criteria for establishing the regions of magnetic support for a plasma accreting in the field of a black hole, and we apply these criteria to idealized models of astrophysical systems containing black holes.

## II. THREE CONDITIONS FOR MAGNETIC TRAPPING

The motion of a test particle of mass  $m$  and charge  $q$  in an electromagnetic field  $F_{\mu\nu}$  in a fixed curved background is determined by the well-known relativistic generalization of the Lorentz force law,<sup>4,5</sup>

$$m \frac{D u^\mu}{DS} = q F^{\mu\nu} u_\nu, \quad (1a)$$

where  $u_\nu$  is the four-velocity of the particle and  $D/DS$  denotes the covariant derivative taken along the trajectory of the test particle.

In a local Lorentz frame the electromagnetic tensor  $F_{\mu\nu}$  is related to the components of the electric and magnetic fields<sup>6,7</sup>

$$E_j = F_{j0} \text{ and } B_j = \epsilon_{jki} F^{ki}, \quad (2a)$$

where the careted indices indicate projection onto the orthonormal components of the tetrad defining the local inertial frame. In such a frame Eq. (1a) acquires the familiar form

$$m \frac{d}{dt} \left[ \vec{v} / (1 - v^2)^{1/2} \right] = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (1b)$$

Let us consider the possibility of trapping test charges in a magnetic field. The minimal local condition for magnetic dominance is

$$\frac{\vec{B}^2 - \vec{E}^2}{2} > 0, \quad (3a)$$

which may be expressed from Eq. (2) in covariant form as

$$F = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} > 0. \quad (3b)$$

This local criterion is a necessary condition only when the Lorentz force given in Eq. (1) dominates the motion of the charged particles. In view of the strength of the electromagnetic fields expected near a collapsed object<sup>8</sup> and the large charge-to-mass ratio of the particles under consideration, the direct effect of the gravitational field on the motion of the particles can be neglected expect very near the horizon of a black hole.

The condition of Eq. (3) does not take the relative

direction of the electric and magnetic fields into account. A stronger requirement would be that the magnetic force can balance the electric force in direction as well as modulus. In a local Lorentz frame this is equivalent to the Lorentz force on the charge being orthogonal to the electric field:

$$\vec{E} \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = \vec{E}^2 - \vec{v} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = 0. \quad (4a)$$

Since the magnitude of the velocity is less than one, Eq. (4a) implies that

$$|\vec{E} \times \vec{B}| > \vec{E}^2. \quad (5)$$

The electric and magnetic fields can be expressed in terms of  $\eta^\alpha$ , the four-velocity of an observer at rest in a local inertial frame, as follows:

$$E_\alpha = F_{\alpha\beta} \eta^\beta$$

and

$$B_\alpha = -\sqrt{-g} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} F^{\beta\gamma} \eta^\delta. \quad (2b)$$

Equation (4a) may then be rewritten in covariant form

$$E_\alpha F^{\alpha\beta} u_\beta = V^\beta u_\beta = 0, \quad (4b)$$

where

$$V^\beta = E_\alpha F^{\alpha\beta} = F^{\alpha\beta} F_{\alpha\gamma} \eta^\gamma.$$

Equation (4b) requires that the four-velocity of the test charge,  $u_\beta$ , be orthogonal to the four-vector  $V^\beta$ . Since  $u_\beta$  is timelike,  $V^\beta$  must be spacelike or zero to satisfy condition (4b). If  $V^\beta$  is spacelike, then there exists a timelike four-velocity  $u_\beta$  orthogonal to  $V^\beta$ . Thus the regions in which the magnetic field can balance the electric field are determined by the condition

$$V_\gamma V^\gamma > 0. \quad (4c)$$

The boundary of these regions is called the plasma horizon.

To study the flow of plasma in regions of magnetic dominance, we will use the guiding-center approximation. Consider the local Lorentz frame in which the electric and magnetic fields are parallel and have magnitudes  $E_0$  and  $B_0$ .<sup>8</sup> In this frame the solution of Eq. (1b) consists of a helical motion about the common direction of  $\vec{E}_0$  and  $\vec{B}_0$ . To characterize the global behavior of these particles we average out the gyration and keep only the acceleration along  $\vec{E}_0$ . Such a guiding-center approximation is valid only when the radius of gyration is small compared to the distance over which the magnitude of the magnetic field changes significantly.

The velocity of the boost from an arbitrary local Lorentz frame to the frame in which the electric and magnetic fields are parallel is

$$\vec{v}_D = (\vec{E} \times \vec{B}) / (B^2 + E_0^2). \quad (6)$$

The electric and magnetic fields in the arbitrary local Lorentz frame, Eq. (2b), are

$$\vec{E} = (\vec{E}_0 - \vec{v}_D \times \vec{B}_0) (1 - v_D^2)^{-1/2}, \quad (7a)$$

$$\vec{B} = (\vec{B}_0 + \vec{v}_D \times \vec{E}_0) (1 - v_D^2)^{-1/2}, \quad (7b)$$

The motion of the guiding center is composed of the drift velocity of Eq. (6) and an acceleration parallel to  $\vec{E}_0$ , which can be expressed in terms of these fields as

$$\frac{dx^\alpha}{d\lambda} = E_0 E^\alpha + B_0 B^\alpha, \quad (8)$$

where  $\lambda$  is an appropriately normalized arclength parameter, and

$$E_0^2 = (F^2 + G^2)^{1/2} - F, \quad (9)$$

$$B_0^2 = (F^2 + G^2)^{1/2} + F,$$

and the invariants of the electromagnetic field are

$$F = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{B_0^2 - E_0^2}{2} = \frac{\vec{B}^2 - \vec{E}^2}{2},$$

$$G = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} {}^*F^{\mu\nu} = E_0 B_0 = \vec{E} \cdot \vec{B}.$$

The flow lines determined by Eq. (8) can be divided into two classes, those that intersect the horizon and those that do not. Plasma flowing along a line that intersects the horizon will either accrete to the black hole or be swept away from it, depending on its charge. Plasma flowing along a line that does not intersect the horizon can oscillate back and forth on the flow line. A magnetosphere can form only in this region. The flow line that divides these classes of flow lines from each other is of particular interest. It may have a cusp, unless the electric field is everywhere less than the magnetic field. In either case, the surface of revolution it generates is the boundary of the region in which a magnetosphere is possible.

### III. BLACK HOLES IN EXTERNAL ELECTROMAGNETIC FIELDS

The three criteria developed in the preceding section will be applied to idealized models containing black holes. These general considerations clarify the basic features of the magnetosphere of a collapsed object embedded in a plasma and external electromagnetic fields.

Let us first consider a charged static black hole in an asymptotically uniform magnetic field. The exact solution of the Einstein-Maxwell equations for this system was derived by Ernst.<sup>10</sup> The linearization of that solution for a weak magnetic field near the black hole is

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 + 4BQr \sin^2\theta dt d\varphi, \quad (10)$$

and the nonzero tetrad components of the electromagnetic field are

$$E_{\hat{r}} = Q/r^2, \quad (11a)$$

$$B_{\hat{r}} = B \left(1 - \frac{3Q^2}{r^2}\right) \cos\theta, \quad (11b)$$

$$B_{\hat{\theta}} = -B \sin\theta \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{1/2}. \quad (11c)$$

The basis 1-forms of the tetrad to first order in  $B$  are

$$\omega^{\hat{t}} = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{1/2} dt, \quad \omega^{\hat{\theta}} = r d\theta,$$

$$\omega^{\hat{r}} = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1/2} dr,$$

$$\omega^{\hat{\varphi}} = r \sin\theta \left(d\varphi + \frac{2BQ}{r} dt\right),$$

and the four-velocity used in Eq. (2b) is  $\eta^{\hat{\alpha}} = N(1, 0, 0, -2BQ/r)$ , where  $N$  is the appropriate constant of normalization. In this case the in-

variants of the electromagnetic field are

$$F = \frac{B^2}{2} \left[ 1 + \left(\frac{Q^2}{r^2} - \frac{2M}{r}\right) \sin^2\theta + \left(\frac{9Q^4}{r^4} - \frac{6Q^2}{r^2}\right) \cos^2\theta \right] - \frac{Q^2}{2r^4}, \quad (12a)$$

$$G = \frac{QB}{r^2} \left(1 - \frac{3Q^2}{r^2}\right) \cos\theta. \quad (12b)$$

The separation of the plasma horizon from the axis is

$$r \sin\theta = \frac{Q}{Br} \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1/2}, \quad (13)$$

and the flow lines are determined by

$$\frac{d(r \sin\theta)}{d\theta} = \frac{3Q^2}{r} \cos\theta - \frac{Q}{Br} \left[ \frac{(F^2 + G^2)^{1/2} - F}{(F^2 + G^2)^{1/2} + F} \right]^{1/2}. \quad (14)$$

They are plotted along with the surface  $F=0$  for a specific choice of parameters in Fig. 1.

Let us now consider a slightly charged rotating black hole in an asymptotically uniform weak magnetic field. Since there is no background electromagnetic field, the magnetic field and charge make no first-order corrections to the Kerr metric:

$$ds^2 = \Sigma \Delta^{-1} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \Sigma^{-1} \sin^2\theta [adt - (r^2 + a^2)d\varphi]^2 - \Sigma^{-1} \Delta (dt - a \sin^2\theta d\varphi)^2, \quad (15)$$

where  $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2\theta$  and  $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$ . The tetrad components of the electromagnetic field are the superposition of those of a Kerr-Newman hole and an asymptotically uniform magnetic field:

$$E_{\hat{r}} = F_{\hat{r}\hat{t}} = \Sigma^{-2} A^{-1/2} \{ BaM [2r^2 \sin^2\theta \Sigma - (r^2 + a^2)(r^2 - a^2 \cos^2\theta)(1 + \cos^2\theta)] + Q(r^2 + a^2)(r^2 - a^2 \cos^2\theta) \}, \quad (16a)$$

$$E_{\hat{\theta}} = F_{\hat{\theta}\hat{t}} = \Sigma^{-2} A^{-1/2} \Delta^{1/2} 2ra^2 \sin\theta \cos\theta [BaM(1 + \cos^2\theta) - Q], \quad (16b)$$

$$B_{\hat{r}} = F_{\hat{r}\hat{\varphi}} = \Sigma^{-2} A^{-1/2} \cos\theta [B\{(r^2 + a^2)\Sigma^2 - 2Mr a^2 [2r^2 \cos^2\theta + a^2(1 + \cos^4\theta)]\} + 2Qar(r^2 + a^2)], \quad (16c)$$

$$B_{\hat{\theta}} = F_{\hat{\theta}\hat{\varphi}} = \Sigma^{-2} A^{-1/2} \Delta^{1/2} \sin\theta \{ Qa(r^2 - a^2 \cos^2\theta) - B[Ma^2(r^2 - a^2 \cos^2\theta)(1 + \cos^2\theta) + r\Sigma^2] \}. \quad (16d)$$

where  $A = (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2\theta$ . The basis 1-forms of the tetrad are

$$\omega^{\hat{t}} = (\Sigma \Delta / A)^{1/2} dt, \quad \omega^{\hat{\theta}} = \Sigma^{1/2} d\theta,$$

$$\omega^{\hat{r}} = (\Sigma / \Delta)^{1/2} dr,$$

$$\omega^{\hat{\varphi}} = (A / \Sigma)^{1/2} \sin\theta d\varphi - \frac{2Mra \sin\theta}{(\Sigma A)^{1/2}} dt,$$

and its four-velocity is  $\eta^{\hat{\alpha}} = N(1, 0, 0, 2Mra/A)$ , where  $N$  is the normalization factor.

Figures 2 and 3 show the electric and magnetic lines of force for specific systems with the dipole moment of the black hole parallel and antiparallel to the external magnetic field. The plasma horizons [Eq. (4)] are plotted for the tetrad defined in the preceding paragraph. Figures 4 and 5 show the corresponding flow lines. When the magnetic moment of the black hole is aligned with the ex-

ternal field, the magnetic field is weaker in the equatorial plane. Consequently there is less support for a charged particle in that region and both the plasma horizon and the cusped flow line are farther from the black hole than in the counter-aligned case.

In the limit that the external magnetic field vanishes,  $B=0$ , the flow lines are strictly radial. It is not possible for the magnetic field of an isolated black hole to support a magnetosphere against the electric field of the black hole.

As a final example, consider a slightly charged static black hole at the center of an oppositely charged ring of current. This idealized model is related to Wilson's<sup>9</sup> numerical analysis of the accretion of a magnetic plasma to a black hole. Neglecting second-order perturbations of the background, we have the Schwarzschild metric

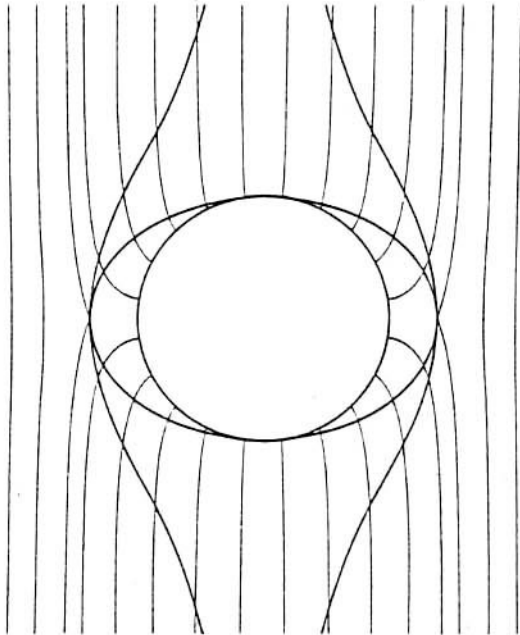


FIG. 1. The circle represents the event horizon of a Reissner-Nordström hole, whose charge is one-tenth of its mass. The ellipse defines the surface of revolution on which the asymptotically uniform magnetic field ( $B = Q/M^2$ ) has the same magnitude as the monopole electric field of the black hole. The other pair of heavy lines are the plasma horizon [Eq. (4)] associated with the tetrad given after Eq. (11). The lighter lines are the flow lines defined in Eq. (14). Plasma spiraling around the flow lines outside the cusped flow line will oscillate through the equatorial plane. Plasma gyrating about flow lines inside the cusped line will be pulled from the magnetosphere by the electric field.

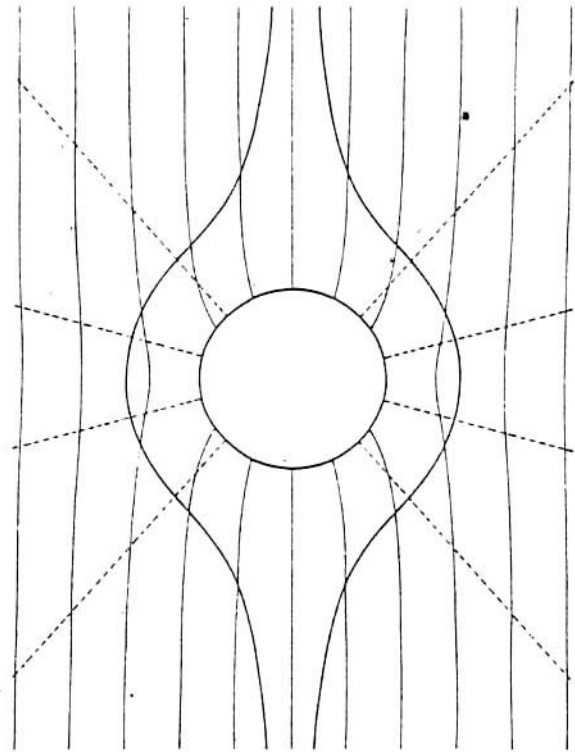


FIG. 2. Magnetic (light continuous) lines of force and electric (dashed) lines of force of a weakly charged black hole ( $a/M = 3/4$ ,  $Q/M = 10^{-2}$ ) embedded in an asymptotically uniform weak magnetic field ( $B = Q/4M^2$ ) are plotted in Boyer-Lindquist coordinates. The magnetic moment of the black hole is aligned with the external magnetic field. The heavy lines represent the plasma horizon [Eq. (4)] for the tetrad of Eq. (16).

$$ds^2 = -(1 - 2M/r) dt^2 + (1 - 2M/r)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (17)$$

The orthonormal tetrad of a static observer has the basis

$$\omega^{\hat{t}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} dt, \quad \omega^{\hat{\theta}} = r d\theta,$$

$$\omega^{\hat{r}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} dr, \quad \omega^{\hat{\varphi}} = r \sin\theta d\varphi.$$

The weak-field solution for a ring of azimuthal current  $J^\varphi$  and radius  $a$  centered about an oppositely charged static black hole follows immediately from the solution of Linet.<sup>11</sup> The nonvanishing tetrad components are

$$F_{\hat{t}\hat{r}} = -\frac{\partial V}{\partial r}, \quad F_{\hat{\theta}\hat{\varphi}} = -\frac{1}{r(1 - 2M/r)^{1/2}} \frac{\partial V}{\partial \theta}, \quad (18a)$$

where

$$V = \frac{Q}{r} \left(1 - \frac{M}{a}\right) - \frac{Q}{2\pi a r} \int_0^{2\pi} d\varphi [(r - M)(a - M) - M^2 \sin\theta \cos\varphi] \times [(r - M)^2 + (a - M)^2 - M^2 - 2(r - M)(a - M) \sin\theta \cos\varphi + M^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi]^{-1/2}$$

and

$$F_{\hat{\theta}\hat{\varphi}} = \frac{\partial \chi}{\partial r}, \quad F_{\hat{r}\hat{\varphi}} = \frac{1}{r(1 - 2M/r)^{1/2}} \frac{\partial \chi}{\partial \theta}, \quad (18b)$$



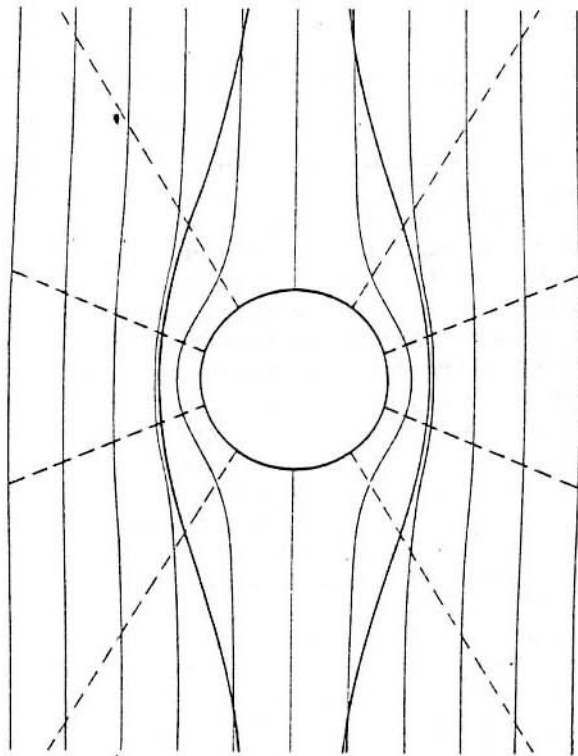


FIG. 3. This figure is identical to Fig. 2, except that the magnetic moment of the black hole is antiparallel to the external magnetic field.

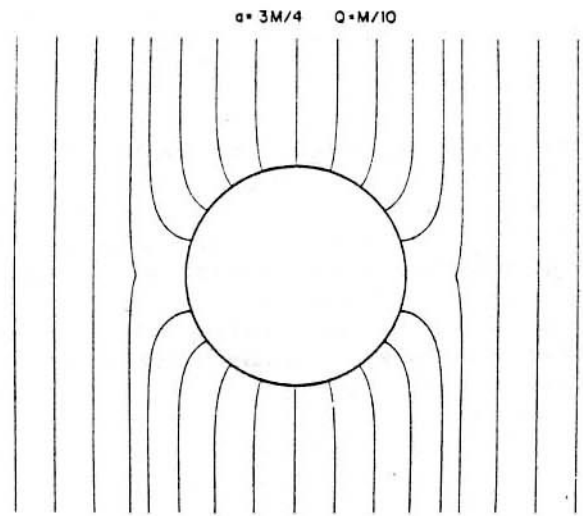


FIG. 5. This figure is identical to Fig. 4, except that the magnetic moment of the black hole is directly opposite to the external magnetic field.

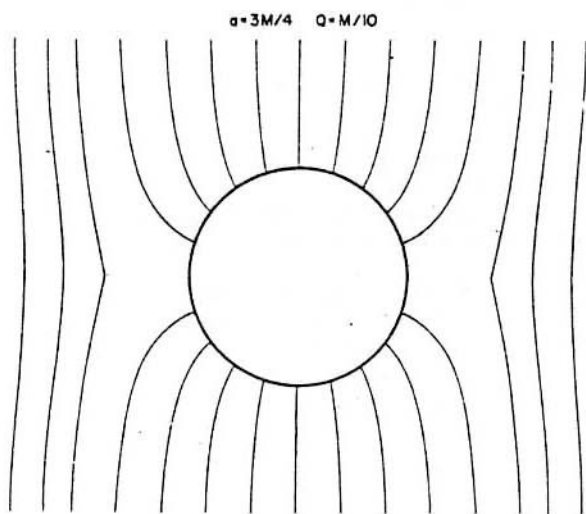


FIG. 4. The integration along the flow of the plasma was started at regular intervals along the circular event horizon. Integrating out in the equatorial plane produced the cusped line, which divides the lines that intersect the horizon from those that do not.

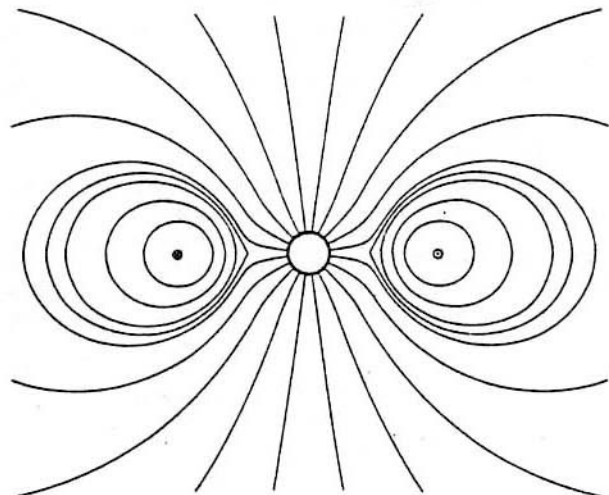


FIG. 6. The heavy circle represents the event horizon of a static black hole, whose charge is one-hundredth of its mass. A ring of current whose charge is opposite that of the black hole is shown at  $r = 10M$  ( $J^\varphi/J^0 = 2$ ). The cusped line encloses a toroidal region in which the lines of flow do not intersect the horizon.

where

$$\chi = J^{\nu} (r - 2M) \cos \theta \int_0^{2\pi} \int_a^{\infty} \rho d\rho d\varphi [(r - M)^2 + (\rho - M)^2 - M^2 - 2(r - M)(\rho - M) \sin \theta \cos \varphi + M^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi]^{-3/2}.$$

The flow of the plasma is determined through Eq. (14) by the invariants of the electromagnetic field. Figure 6 shows the flow lines of this system for a specific choice of parameters. The plasma horizon [Eq. (4)] and lines of force have been published elsewhere.<sup>12</sup> The region surrounded by the cusped flow line is qualitatively different from that of the systems with an asymptotically uniform magnetic field. Not only is the region of flow to the horizon infinite, but it contains the equatorial plane beyond the toroidal magnetosphere. The source of the magnetic field is, however, within the toroidal magnetosphere.

#### IV. CONCLUSIONS

When the possibility of strong electromagnetic fields around an accreting black hole was first proposed,<sup>13</sup> it was thought that the selective accretion of oppositely charged particles would neutralize the charge of the black hole on a short time scale. That argument was based on the dominance of the electric field and did not take into account

the possibility of external magnetic fields.

Figures 1, 2, and 3 delineate the regions in which the electric field of a charged black hole can be balanced by asymptotically uniform weak magnetic fields. While these examples manifest the restrictions of the selective-accretion argument, they are only a first step toward demonstrating the possibility of trapping charged particles in the magnetosphere of a collapsed object.

Ruffini and Wilson<sup>14</sup> gave an explicit example of charge separation and strong electromagnetic fields near the surface of a collapsed object accreting plasma of infinite conductivity. The possibility of charge separation allows for the overall neutrality of the system, which screens it from selective accretion.

The flow lines derived in this paper provide a global criterion for the trapping of charged particles in the magnetosphere of a black hole. The idealized models considered here are indicative of the processes occurring in real astrophysical systems.

\*Work supported in part by the European Space Agency.

†Present address: Groupe d'Astrophysique Relativiste, Meudon, 92 France.

‡Work supported in part by the Dupont Foundation.

§Work supported in part by the Alfred P. Sloan Foundation.

¶Present address: Instituto di Fisica "G. Marconi," Università di Roma, Italy.

<sup>1</sup>For a review of these topics see, e.g., *Neutron Stars, Black Holes and Binary X-Ray Sources*, edited by M. Gursky and R. Ruffini (Reidel, Dordrecht, 1975).

<sup>2</sup>For a review of these topics and their observational consequences see, e.g., *Physics and Astrophysics of Neutron Stars and Black Holes*, edited by R. Giacconi and R. Ruffini (North-Holland, Amsterdam, 1977).

<sup>3</sup>W. Lewin, *Physics and Astrophysics from Spacelab*, edited by P. Bernacca and R. Ruffini (Reidel, Dordrecht, 1977).

<sup>4</sup>L. Landau and E. Lifshitz, *Classical Theory of Fields*, 3rd edition (Pergamon, Oxford, 1971).

<sup>5</sup>Greek indices run from 0 to 3; Latin indices run from 1 to 3;  $G=c=1$ .

<sup>6</sup>See R. Ruffini in Ref. 2.

<sup>7</sup>D. Christodoulou and R. Ruffini, in *Black Holes*, edited by B. DeWitt and C. DeWitt (Gordon and Breach, New York, 1973).

<sup>8</sup>See Ref. 4.

<sup>9</sup>J. R. Wilson, in *Proceedings of the Marcel Grossman Meeting*, edited by R. Ruffini (North-Holland, Amsterdam, 1977); J. R. Wilson in Ref. 2.

<sup>10</sup>F. J. Ernst, *J. Math. Phys.* **17**, 54 (1976).

<sup>11</sup>B. Linet, *J. Phys. A* **9**, 1081 (1976).

<sup>12</sup>R. S. Hanni, in *Proceedings of the Marcel Grossman Meeting*, edited by R. Ruffini (North-Holland, Amsterdam, 1977).

<sup>13</sup>R. Ruffini, in *Black Holes*, edited by B. DeWitt and C. DeWitt (Gordon and Breach, New York, 1975).

<sup>14</sup>R. Ruffini and J. R. Wilson, *Phys. Rev. D* **12**, 2959 (1975).

## 2. Approche thermodynamique.

Par ceci nous entendons une approche de l'étude de la stabilité d'une configuration électromagnétique par des arguments thermodynamiques globaux, c'est-à-dire essentiellement par la minimisation d'une certaine "énergie libre" à préciser (Damour 1976).

Ce type d'approche dans l'étude de la configuration électromagnétique la plus stable (donc la plus probable) autour d'un astre condensé fut inaugurée par Ruffini et Treves (1973). Ces auteurs ont conjecturé que l'état le plus probable pour un astre condensé (étoile à neutrons ou trou noir) tournant et magnétisé impliquait l'existence d'une charge électrique totale non nulle sur l'astre. Ils ont donné l'ordre de grandeur de cette charge qui, tout en ayant en général une influence négligeable sur la géométrie, pourrait être très importante pour l'électrodynamique locale (cf. par exemple chap. II et chap. IV). Ruffini et Treves (1973) ont appuyé leur conjecture sur le modèle classique d'une sphère conductrice magnétisée en rotation. Ils montrèrent que l'énergie électromagnétique totale du champ :

$$(3) \quad U^{e.m.} = \int \frac{1}{8\pi} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) dV$$

était minimisée par la présence sur la sphère d'une charge totale :

$$(4) \quad Q = -\frac{1}{3} \Omega R^3 B_0$$

où  $\Omega$  est la vitesse angulaire de rotation de la sphère,  $R$  son rayon et  $B_0$  l'intensité de l'induction magnétique à l'intérieur de la sphère (on supposera toujours que les permittivités électriques et magnétiques sont partout celles du vide). Appliquant ce genre de considérations au cas d'un trou noir tournant placé dans un champ magnétique uniforme, Wald (1974) partant d'un résultat de Papapetrou (1966) a montré, en utilisant la notion de potentiel

électrique comouvant d'un trou noir (Carter 1973), que ce dernier était nul, donc en équilibre avec l'infini, pour une valeur de la charge totale du trou noir :

$$(5) \quad Q_H = + 2 J B_0$$

où  $J$  est le moment angulaire de trou noir ( $\Omega_H M (r_+^2 + a^2)$ ) et  $B_0$  l'intensité du champ magnétique à l'infini.

Chitre et Vishveshwara (1975), et Petterson (1975) ont étendu cette étude au cas où le trou noir est entouré d'un anneau de courant équatorial. Cependant leur travail est incomplet (et dans le cas de Petterson entaché d'erreurs de calcul). Le résultat correct fut donné par Damour (1976 et 1977) et indépendamment par Znajek (1976). Plus récemment Linet (1977) confirma, par un calcul différent, la valeur de la charge du trou noir à l'équilibre :

$$(6) \quad Q_H = + a I \frac{2M}{r_0 - 2M}$$

(pour les notations voir plus bas).

Comparant ces valeurs au résultat de Ruffini et Treves<sup>(4)</sup> (1973) on voit que bien que ces auteurs aient prévu l'existence et l'ordre de grandeur de la charge induite sur l'astre condensé, en revanche, comme l'ont signalé Heintzmann et Kundt (1976) (cf. aussi Kundt (1977)), le signe de (4) est incorrect. Nous allons voir que la faute en revient à la quantité minimisée (3). En effet à cause des échanges d'énergie entre la matière en rotation et le champ électromagnétique il y a lieu d'être soigneux en ce qui concerne la définition du système considéré. A priori il y a deux approches possibles qui donnent le même résultat :

- a - Prendre comme système le champ électromagnétique en tenant compte du fait que ce système peut échanger de l'énergie et du moment

angulaire avec la matière tournante.

- b - Prendre comme système le champ électromagnétique + la matière, ce qui est alors un système fermé.

Nous allons détailler ces approches dans le cas classique (sans gravitation) et nous montrerons ensuite comment cela se généralise directement au cas des trous noirs.

Remarquons d'abord que la configuration d'équilibre sera nécessairement axisymétrique sinon celà créerait une dissipation constante par courants de Foucault (cf. chapitres II et III).

a - Champ électromagnétique en interaction avec des corps en rotation considérés comme des réservoirs de moment angulaire et d'énergie mécanique.

Le système considéré est donc le champ électromagnétique engendré par  $n$  conducteurs axisymétriques chargés ayant chacun une vitesse angulaire fixe  $\Omega_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) autour de l'axe de rotation  $z$ . Il est bien connu que l'équilibre thermodynamique d'un système advient lorsque :

- dans le cas d'un système fermé, l'entropie est maximum à énergie totale donnée ou l'énergie totale minimum à entropie donnée

- dans le cas d'un système pouvant échanger de l'énergie avec des réservoirs, l'énergie libre généralisée est minimum lorsqu'on garde fixés les paramètres imposés par les réservoirs.

Nous entendons ici par énergie libre généralisée la somme de l'énergie du système et de l'énergie d'interaction avec les réservoirs, laquelle tient compte de l'énergie qu'il faut fournir pour maintenir fixes les caractéristiques des réservoirs .

Par exemple si le système est en contact avec un réservoir à température ( $T_0$ ) et pression ( $p_0$ ) fixées, l'énergie libre  $\tilde{U}$  correspondant à l'énergie totale  $U$  pour le système est :

$$(7) \quad \tilde{U} \equiv U + U^{\text{interaction}} = U + p_0 V - T_0 S$$

$V$  et  $S$  étant le volume et l'entropie du système considéré.

En effet, dans toute transformation réversible ou irréversible où le système échange du volume et de l'entropie avec les réservoirs, ces derniers fournissent un travail  $+ p_0 dV_0$  et une chaleur  $- T_0 dS_0$  ( $V_0$  et  $S_0$  étant respectivement le volume et l'entropie du réservoir) d'où

$$(8) \quad dU = p_0 dV_0 - T_0 dS_0$$

Le volume total étant constant ( $dV_0 = -dV$ ) et l'entropie totale ne pouvant que croître ( $dS + dS_0 \geq 0$ ) on trouve immédiatement :

$$(9a) \quad dU \leq -p_0 dV + T_0 dS$$

soit :

$$(9b) \quad d(U + p_0 V - T_0 S) \leq 0$$

Autrement dit l'énergie libre généralisée  $\tilde{U}$  décroît dans toute transformation irréversible et reste constante dans la limite d'une transformation réversible. Donc l'équilibre thermodynamique correspond à un minimum de  $\tilde{U}$ .

Nous désirons appliquer des considérations similaires au système qui nous intéresse qui est, rappelons le, le champ électromagnétique engendré par la rotation de  $n$  conducteurs axisymétriques, avec des vitesses angulaires  $\Omega_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), autour de leur axe commun de symétrie. Nous supposons que ces conducteurs peuvent recevoir des charges de l'infini, que l'on considérera comme un réservoir de charges au repos, alors que les charges sur chaque corps participent bien sûr à sa rotation.

Un cas particulier d'une telle configuration consiste à placer des charges

fixes sur des anneaux en rotation fixe, les autres conducteurs ne tournant pas. Celà revient donc à placer des conducteurs au repos dans le champ magnétique engendré par des courants fixes. La thermodynamique d'un tel système est bien connue (cf. par exemple Landau et Lifchitz 1969) et nous pouvons l'obtenir comme cas particulier du résultat obtenu ci-dessous. (On trouve  $\tilde{U} = U - \sum (\text{courant}) (\text{flux magnétique})$ ).

Lors d'une transformation de la configuration considérée, le champ électromagnétique variable crée des champs électriques d'induction qui peuvent freiner ou accélérer les corps tournants. Soit  $K_\varphi^i$  le couple instantané exercé par le champ électromagnétique sur les charges tournantes du  $i^{\text{ème}}$  objet. Le travail effectué par ce couple par suite d'une rotation angulaire de  $d\varphi_i$  ( $\varphi$  étant l'angle de rotation autour de l'axe de symétrie) est :

$$(10) \quad K_\varphi^i d\varphi_i = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_i (K_\varphi^i dt)$$

Or  $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_i = \Omega_i$  vitesse angulaire de rotation du  $i^{\text{ème}}$  objet et  $K_\varphi^i dt$  est le moment angulaire mécanique cédé au  $i^{\text{ème}}$  conducteur, notons le  $dJ^i$ .

Donc les sources de moment angulaire qui fixent les rotations doivent fournir le travail  $-\sum_i \Omega_i dJ^i$ .

Il nous faut maintenant exprimer les  $dJ^i$  en fonction de quantités liées au système considéré (le champ électromagnétique). Pour ce faire utilisons la conservation du moment angulaire total du champ et de la matière. On sait que lorsqu'une charge (de charge  $\varepsilon$ , de masse  $\mu$  et de quadrivitesse  $u_a$ ) se déplace dans un champ axisymétrique (de potentiel vecteur  $A_a$ ) la quantité :

$$(11) \quad p_\varphi = \mu u_\varphi + \varepsilon A_\varphi$$

est conservée. Par sommation sur les charges du  $i^{\text{ème}}$  corps on aura :

$$(12) \quad \mathcal{J}^i + \left( \sum_{\varepsilon} \varepsilon A_{\varphi} \right)^i = \text{const.}$$

si le  $i^{\text{ème}}$  corps ne reçoit pas de charges de l'infini. D'où :

$$(13) \quad (\text{travail fourni par les sources}) = + \sum_i \Omega_i d \left( \sum_{\varepsilon} \varepsilon A_{\varphi} \right)^i$$

De plus quand une charge  $d\varepsilon$  arrive de l'infini (où  $u_{\varphi}|_{\infty} = A_{\varphi}|_{\infty} = 0$ ) elle apporte au  $i^{\text{ème}}$  corps un moment angulaire mécanique  $\mu u_{\varphi} = -d\varepsilon A_{\varphi}^i$

d'où encore :

$$(14) \quad d\mathcal{J}^i + d\varepsilon A_{\varphi}^i = 0$$

Donc dans les deux cas on peut considérer que l'énergie fournie par les sources lors d'une transformation du système (à  $\Omega_i$  constants) peut s'écrire sous la forme d'une différentielle (négative) d'une énergie d'interaction (cf. équations (7-9) ) :

$$(15) \quad (\text{travail des sources}) = -dU^{\text{int.}} = d \left[ + \sum_i \Omega_i \left( \sum_{\varepsilon} \varepsilon A_{\varphi} \right)^i \right]$$

Passant à une description continue on peut écrire cette énergie d'interaction sous la forme :

$$(16) \quad U^{\text{int.}} = - \sum_i \Omega_i \left( \int A_{\varphi} d^3Q \right)^i$$

où  $d^3Q = \rho dV$  est la charge de l'élément de volume  $dV$ . Si l'on désigne par  $\vec{V}$  la vitesse d'un élément d'un des corps tournants on peut écrire :

$$(17) \quad \Omega A_{\varphi} = \vec{A} \cdot \vec{V}$$



et d'après les hypothèses faites :

$$(18) \quad \vec{j} = \rho \vec{v}$$

où  $\vec{j}$  est la densité de courant. On peut donc écrire encore :

$$(19) \quad U^{int.} = - \int \vec{A} \cdot \vec{j} dV$$

Ce qui se transforme, en utilisant les équations de Maxwell, en :

$$(20) \quad U^{int.} = - \int \frac{1}{4\pi} \vec{H} \cdot \vec{B} dV.$$

En conclusion, si l'on note  $U^{e.m.}$  l'énergie du champ électromagnétique, l'équilibre du système sera réalisé lorsque l'énergie "libre" :

$$(21) \quad \tilde{U} = U^{e.m.} + U^{int.} = U^{e.m.} - \int \vec{A} \cdot \vec{j} dV = U^{e.m.} - \int \frac{1}{4\pi} \vec{H} \cdot \vec{B} dV$$

sera minimum (Damour 1976).

Dans le cas où les relations entre champs et inductions sont linéaires on sait que :

$$(22) \quad U^{e.m.} = \int \frac{1}{8\pi} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) dV.$$

Alors la quantité à minimiser sera :

$$(23) \quad \tilde{U} = \int \frac{1}{8\pi} (\vec{E} \cdot \vec{D} - \vec{H} \cdot \vec{B}) dV.$$

C'est cette conclusion qui explique la différence de signe entre le résultat de Ruffini et Treves (1973) et ceux de Wald (1974), Chitre et Vishveshwara (1975), Petterson (1975), Damour (1976 et 1977b), Znajek (1976) et Linet (1977).

Reprenant les calculs de Ruffini et Treves (1973) (cf. équation (4)) et minimisant  $\tilde{U}$  et non  $U^{em}$  on trouve (Damour 1976) pour l'état le plus probable :

$$(24) \quad Q = + \frac{1}{3} \Omega R^3 B_0$$

dont le signe est maintenant en accord avec les autres résultats cités.

Terminons cette étude thermodynamique en exhibant le potentiel chimique associé à l'addition d'une charge électrique unité :  $\delta \tilde{U} / \delta \varepsilon$ .

On tire de (21) :

$$(25) \quad \delta \tilde{U} = \delta U^{e.m.} - \int \delta (\vec{A} \cdot \vec{j}) dV$$

Mais on a (Landau et Lifchitz 1969) :

$$(26) \quad \delta U^{e.m.} = \int (\phi \delta \rho + \vec{j} \delta \vec{A}) dV$$

où  $\phi$  est le potentiel électrique usuel,  $\rho$  étant la densité de charge. D'où :

$$(27) \quad \delta \tilde{U} = \int (\phi \delta \rho - \vec{A} \delta \vec{j}) dV.$$

Lors de l'addition d'une charge  $\delta \varepsilon$  en un point du  $i^{\text{ème}}$  conducteur on a en ce point :

$$\delta \rho dV = \delta \varepsilon \quad \text{et} \quad \delta \vec{j} dV = \delta \varepsilon \vec{v} \quad (\text{cf. (18)}) \quad \text{d'où} :$$

$$(28) \quad \left( \frac{\delta \tilde{U}}{\delta \varepsilon} \right)_i = (\phi - \vec{A} \cdot \vec{v})_i = (\phi - \Omega A_\varphi)_i$$

On retrouve ainsi le potentiel électrique comouvant  $\tilde{\phi} = \phi - \Omega A_\varphi$  introduit par Carter (1973). Cela démontre donc qu'à l'équilibre ce potentiel  $\tilde{\phi}$  doit être uniforme à la surface d'un corps conducteur (car les charges

peuvent s'échanger à la surface d'un tel corps) et que si ce conducteur peut échanger des charges avec l'infini (où  $\tilde{\phi}/\infty = 0$ ) alors  $\tilde{\phi}$  doit être nul.

Il est souvent plus simple d'écrire cette condition au lieu de minimiser  $\tilde{U}$ , cela permet par exemple d'obtenir rapidement le résultat (24).

#### b - Corps en rotation et leur champ électromagnétique.

Nous considérons maintenant b système fermé constitué du champ et de la matière. Alors la variation d'énergie du champ s'écrit toujours :

$$(29) \quad \delta U^{e.m.} = \int (\phi \delta \rho + \vec{j} \delta \vec{A}) dV ,$$

la variation d'énergie matérielle des corps tournants étant :

$$(30) \quad \delta U^{matière} = \sum_i \Omega_i \delta J^i + \sum_i T_i \delta S^i$$

$J^i$  étant le moment angulaire mécanique du  $i^{\text{ème}}$  corps,  $T_i$  étant sa température (supposée pour simplifier uniforme) et  $S^i$  son entropie.

Il est commode de transformer la partie électromagnétique de la variation d'énergie (29) en introduisant le moment angulaire du champ électromagnétique.

Si  $T'_{ab}$  est le tenseur d'énergie impulsion du champ, le moment angulaire total du champ  $J'$ , associé au vecteur de Killing des rotations :

$$(31) \quad m_\phi^a \partial_a = \partial_\phi$$

s'écrit :

$$(32) \quad J' = \int m_\phi^b T_b'^a d\Sigma_a$$

où  $d\Sigma_a$  est un élément de 3-surface spatiale que nous prendrons comme ayant

pour seule composante :

$$(33) \quad d\Sigma_t = \sqrt{g} d^3x = dV.$$

Prenant pour tenseur d'énergie le tenseur de Maxwell du vide (pour simplifier)

on a :

$$(34) \quad T_{\varphi}^{\prime t} = \frac{1}{4\pi} F_{b\varphi} F^{bt} = \frac{1}{4\pi} \partial_b A_{\varphi} F^{bt}$$

où l'on a tenu compte de l'axisymétrie de  $A_b$  ( $\partial_{\varphi} A_b = 0$ ). D'où :

$$(35) \quad \sqrt{g} T_{\varphi}^{\prime t} = A_{\varphi} \left( \frac{1}{4\pi} \sqrt{g} F^{tb} \right)_{,b} + \left( \frac{1}{4\pi} A_{\varphi} \sqrt{g} F^{bt} \right)_{,b}.$$

Le deuxième terme du second membre de (35) est une divergence qui contribue au moment angulaire total du champ par un terme de surface (nul à l'infini).

De sorte que le moment angulaire total du champ s'écrit (utilisant  $(\sqrt{g} F^{tb})_{,b} = 4\pi \sqrt{g} \rho$ ) :

$$(36) \quad J' = \int T_{\varphi}^{\prime t} \sqrt{g} d^3x = \int A_{\varphi} \rho \sqrt{g} d^3x = \int A_{\varphi} d^3Q.$$

On voit alors, qu'après cette transformation par une divergence, on peut considérer que le moment angulaire du champ est localisé sur les charges et on peut écrire

$$(37) \quad J' = \sum_i J'^i \quad \text{où par définition}$$

$$J'^i = \left( \int A_{\varphi} d^3Q \right)^i = \left( \int A_{\varphi} \rho dV \right)^i \quad \text{pour le } i^{\text{ème}} \text{ corps}$$

Considérons alors l'expression qui apparaît dans  $\delta U^{\text{em}}$  (29) :

$$\int \vec{j} \delta \vec{A} dV = \int \rho \vec{v} \delta \vec{A} dV = \int \rho \Omega \delta A_\varphi dV$$

où  $\Omega$  est la vitesse angulaire locale de la matière, elle peut s'écrire :

$$\sum_i \left( \int \Omega (\delta A_\varphi \rho dV) \right)^i = \sum_i \left( \int \Omega [ \delta(A_\varphi \rho) - A_\varphi \delta \rho ] dV \right)^i$$

ce qui,  $\Omega$  prenant la valeur constante  $\Omega_i$  sur le  $i^{\text{ème}}$  corps, s'écrit en utilisant la définition de  $J'^i$  (37) :

$$\int \vec{j} \delta \vec{A} dV = \sum_i \Omega_i \delta J'^i - \sum_i \left( \int \Omega A_\varphi \delta \rho dV \right)^i$$

d'où enfin :

$$(38) \quad \delta U^{e.m.} = \sum_i \left( \int (\phi - \Omega A_\varphi) \delta \rho dV \right)^i + \sum_i \Omega_i \delta J'^i.$$

On a fait ainsi apparaître dans la variation de l'énergie du champ, d'une part le potentiel électrique comouvant de Carter (1973) (cf. (28)) :

$$\tilde{\phi} = \phi - \Omega A_\varphi = \phi - \vec{A} \cdot \vec{v} = -A_a v^a$$

et la partie du moment angulaire total du champ que l'on peut attribuer à chaque corps tournant  $J'^i$  en vertu de la localisation de la densité  $\rho A_\varphi$  apparaissant dans (36).

Combinant les deux variations obtenues (30) et (38) on a :

$$(39) \quad \delta (U^{matière} + U^{e.m.}) = \sum_i \left( \int \tilde{\phi} \delta(d^3Q) \right)^i + \sum_i \Omega_i \delta(J + J')^i + \sum_i T_i \delta S^i.$$

qui fait intervenir le moment angulaire conservé (voir équation (11) )

$$(40) \quad d^3 J^{\text{conservé}} = d^3 J + d^3 J' = u_{\varphi} d^3 \mu + A_{\varphi} d^3 Q$$

$d^3 \mu$  étant la masse propre du volume  $dV$ .

A l'équilibre l'énergie totale doit être stable lors de l'échange de charge, de moment angulaire ou de chaleur entre les parties du systèmes qui admettent de tels échanges donc :

- en cas de possibilité d'échange de charge à la surface d'un corps (conducteur) on aura à l'équilibre:  $\tilde{\phi}_i = \text{const}$  à la surface de ce corps (le  $i^{\text{ème}}$  par exemple).

- en cas de possibilité d'échange de charge entre ce corps et l'infini on aura à l'équilibre  $\tilde{\phi}_i = 0$  sur ce corps.

- en cas de possibilité d'échange de charge entre le  $i^{\text{ème}}$  et le  $j^{\text{ème}}$  corps  $\tilde{\phi}_i = \tilde{\phi}_j$  à l'équilibre.

- en cas de possibilité d'échange de moment angulaire conservé ( $J + J'$ ) entre le  $i^{\text{ème}}$  et le  $j^{\text{ème}}$  corps  $\Omega_i = \Omega_j$ .

- en cas de possibilité d'échange de chaleur entre le  $i^{\text{ème}}$  et le  $j^{\text{ème}}$  corps  $T_i = T_j$ .

Donc'il existe une possibilité d'échange de particules (chargées et massiques) entre deux corps, à la fois leur potentiel  $\tilde{\phi}$  et leur vitesse angulaire  $\Omega$  doivent s'égaliser.

Cependant on peut concevoir des situations astrophysiques où par suite de la présence de charges ambiantes la résistivité du "vide" (entre les corps tournants) soit en fait faible alors que l'inertie mécanique des corps reste grande. Alors les potentiels électriques  $\tilde{\phi}$  s'équilibreront beaucoup plus vite que les vitesses angulaires  $\Omega$ . C'est à ce genre de situation que nous pensions dans le paragraphe a - où les corps tournants étaient considérés comme des réservoirs (pratiquement infinis) de moment angulaire mécanique.

c - Equilibre entre une étoile à neutrons tournante et une coque de plasma.

Avant de considérer des solutions électromagnétiques exactes dans le champ gravitationnel d'un trou noir, il est instructif de présenter un modèle simple d'une étoile à neutrons tournante séparée de l'infini par une enveloppe sphérique conductrice de plasma. Pour simplifier encore les choses nous supposons que cette enveloppe de plasma est mince (mais on pourrait sans grandes difficultés lui attribuer une épaisseur quelconque) et que des courants électriques fixes dans cette coque de plasma créent un champ magnétique qui a une valeur uniforme  $B_0$  près de l'étoile à neutrons.

Utilisant des coordonnées polaires  $r, \theta, \varphi$  centrées sur l'étoile à neutrons on obtient facilement la composante  $A_\varphi$  du potentiel vecteur axisymétrique en appliquant le théorème de Stokes à un cercle centré sur l'axe  $z$  :

$$2\pi A_\varphi = \oint A_\varphi d\varphi = \int \vec{B} d\vec{S} = B_0 \pi r^2 \sin^2\theta$$

d'où :

$$(41) \quad A_\varphi = \frac{1}{2} B_0 r^2 \sin^2\theta$$

La croûte de l'étoile à neutrons étant bonne conductrice on a la condition d'équilibre :

$$\tilde{\phi} = \phi - \Omega A_\varphi = \text{const.} = \phi_0$$

pour  $r = R =$  rayon de l'étoile.

D'où :

$$(42) \quad \phi(R, \theta) = \phi_0 + \frac{1}{2} \Omega B_0 r^2 \sin^2\theta .$$

D'autre part, dans le vide entre la surface de l'étoile et la coque de plasma, le potentiel axisymétrique  $\phi(r, \theta)$  peut se développer en polynômes de Legendre :

$$(43) \quad \phi(r, \theta) = \sum_{\ell} P_{\ell}(\cos \theta) [a_{\ell} r^{-(\ell+1)} + b_{\ell} r^{\ell}].$$

Les conditions aux limites sont (42) à la surface de l'étoile ( $r = R$ ) et

$$(44) \quad \phi(r_0, \theta) = \text{const.} = \phi_1$$

à la surface ( $r = r_0$ ) de la coque de plasma qui est supposée conductrice et sans rotation. On voit alors facilement que  $\phi(r, \theta)$  ( $R \leq r \leq r_0$ ) ne peut contenir qu'un terme constant, un terme monopolaire (en  $Q^*/r$  où  $Q^*$  est la charge totale de l'étoile) et des termes quadrupolaires. Comme

$$P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) = 1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta \quad \text{on trouve facilement :}$$

$$a_0 = Q^*, \quad b_2 = -\frac{a_2}{r_0^5}, \quad \frac{a_2}{R^3} + b_2 R^2 = -\frac{1}{3} \Omega B_0 R^2.$$

D'où

$$(45) \quad \phi_0 - \phi_1 = Q^* \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r_0} \right) - \frac{1}{3} \Omega B_0 R^2.$$

La condition d'équilibre  $\phi_0 = \phi_1$  entre l'étoile à neutrons et sa magnétosphère schématisée comme coque de plasma implique donc une valeur non nulle pour la charge totale de l'étoile à neutrons égale à :

$$(46) \quad Q^* = +\frac{1}{3} \frac{\Omega B_0 R^3}{1 - R/r_0}$$

Dans la limite  $r_0 \rightarrow \infty$  c'est-à-dire d'une étoile à neutrons tournante placée dans un champ magnétique uniforme on retrouve bien le résultat (24) de Ruffini et Treves (1973) après la correction de signe dont la nécessité a été montrée par Damour (1976). Remarquons à ce propos que cette valeur prédit le bon ordre



de grandeur pour un trou noir tournant dans un champ magnétique uniforme.

En effet le résultat de R. Wald (5)  $Q_H = 2JB_0$  s'écrit encore, comme  $\Omega_H =$   
 $= \frac{a}{r_+^2 + a^2} = \frac{J}{M(r_+^2 + a^2)}$  :

$$Q_H = 2M(r_+^2 + a^2) \Omega_H B_0 ,$$

d'où  $Q_H \sim R^3 \Omega_H B_0$  avec un rayon du trou noir  $R \sim r_+ \sim 2M$ .

Enfin il est intéressant de remarquer que la présence d'une magnétosphère (c'est-à-dire une valeur finie de  $r_0$ ) a un double effet :

- d'une part elle augmente la valeur de la charge totale de l'étoile à neutrons d'un facteur  $(1 - R/r_0)^{-1}$  ("condensation" de l'électricité).

- d'autre part elle va faire écran à cette charge. En effet nous avons écrit plus haut la condition d'équilibre électrique entre l'étoile tournante et sa magnétosphère. Nous devons aussi imposer l'équilibre électrique avec l'infini afin d'avoir une situation stable par rapport à la chute de charges de l'infini. Techniquement cela veut dire :

$$\phi_0 = \phi_1 = \phi_\infty = 0$$

Par le même raisonnement que ci-dessus on obtient :

$$(47) \quad \phi_1 - \phi_\infty = \frac{q + Q^*}{r_0}$$

où  $q$  est la charge de la coque de plasma. D'où la condition d'équilibre entre la magnétosphère et l'infini :

$$(48) \quad q + Q^* = 0$$

ce qui exprime bien l'effet d'écran annoncé.

Nous allons d'ailleurs retrouver ces traits en remplaçant l'étoile à neutrons par un trou noir tournant.

Signalons aussi que la prédiction faite par ces modèles simplifiés : c'est-à-dire celle d'un système globalement neutre mais avec séparation de charge entre le trou noir et la magnétosphère se retrouvera intégralement au chapitre suivant où nous exhiberons des modèles analytiquement solubles de trous noirs accrescents. Et cette fois la magnétosphère sera décrite à partir des équations de la magnétohydrodynamique.

#### d - Equilibre électrique des trous noirs.

Pour comparer le cas d'un trou noir avec l'approche précédente nous allons transformer la formule de variation de masse de Carter (1973) sous une forme exactement similaire à l'équation (39).

Carter (1973) a montré que la variation entre deux états d'équilibre de la masse totale du système : champ gravifique du trou noir + matière extérieure + champ électromagnétique extérieur, pouvait s'écrire : (avec nos conventions de signe) :

$$(49) \quad \delta M = \begin{cases} \Omega_H (\delta J_H + \delta J') + \tilde{\phi}_H \delta Q_H + (g/8\pi) \delta S_H + \\ + \int \Omega \delta(d^3J) - \int \ell^c A_c \delta(d^3Q) + \int \bar{T} \delta(d^3S) + \int \bar{\mu} \delta(d^3N) + \\ + \int (j^c \ell^a - j^a \ell^c) \delta A_c d\Sigma_a . \end{cases}$$

nos notations sont cohérentes avec toutes les définitions introduites dans les chapitres précédents, rappelons les :  $\ell^a$  est la normale à l'horizon étendue à tout l'espace-temps par la formule :  $\ell = k + \Omega_H m_\varphi$  , où  $k = \partial/\partial t$  est le vecteur de Killing stationnaire,  $m_\varphi = \partial/\partial \varphi$  le vecteur de Killing axisymétrique et  $\Omega_H$  la vitesse angulaire du trou noir. Alors  $J_H$  est le moment angulaire "mécanique" du trou noir (cf. I (46) ) ,  $Q_H$  est la charge électrique totale du trou noir ( II (14) ) et  $\tilde{\phi}_H$  le potentiel électrique comouvant du trou noir ( II B (11) )  $\tilde{\phi}_H = - \ell^a A_a|_H \cdot g$  est la gravité de surface du trou noir ( I (15c) ),  $S_H = \oint_H dS$  étant la surface

totale du trou noir (notée  $S$  dans I-III).

De plus la matière est décrite comme un fluide parfait en mouvement circulaire autour du trou noir, le champ électromagnétique étant un champ de Maxwell du vide (de quadripotential  $A_a$ ) engendré par le courant circulaire

$j^a \cdot \Omega$  est la vitesse angulaire locale de la matière et

$$d^3J = m_\varphi^a T_a^{(matière)b} d\Sigma_b \quad \text{l'élément de moment angulaire de la matière.}$$

$d^3Q = j^a d\Sigma_a$  est l'élément de charge de la matière,  $J'$  étant comme ci-dessus, (32-37), le moment angulaire total (c'est-à-dire intégré dans tout l'espace extérieur) du champ électromagnétique extérieur au trou noir :

$$(50) \quad J' = \int m_\varphi^a T_a'^b d\Sigma_b \quad \text{où } T_a'^b \text{ est le tenseur de Maxwell.}$$

$\bar{T}$  est la température effective de la matière (c'est-à-dire  $(-(k + \Omega m_\varphi)^2)^{1/2}$  fois la température locale),  $\bar{\mu}$  étant de façon correspondante le potentiel chimique effectif pour l'échange d'un type de particule (on a omis un indice de sommation correspondant aux divers types de particules).  $d^3S$  est l'élément d'entropie de la matière et  $d^3N$  l'élément de nombre de particules.

$\delta$  dénote une variation entre deux états stationnaires et axisymétriques qui laisse invariant les vecteurs de Killing et l'horizon. Enfin les intégrales dans (49) sont effectuées sur une 3-surface spatiale s'étendant de l'horizon à l'infini avec la convention de signe (différente de celle de Carter) :

$$n^a d\Sigma_a > 0 \quad \text{quand } n^a \text{ pointe vers le futur.}$$

L'expression (49) est similaire à la formule (39) ci-dessus étendue au cas où l'on traite le trou noir comme une surface matérielle tournante caractérisée par : une vitesse angulaire  $\Omega_H$ , un potentiel comouvant  $\bar{\Phi}_H$ , une charge électrique totale  $Q_H$ , une température effective  $g/8\pi\alpha$ , une entropie  $\propto S_H$  et un potentiel chimique effectif nul. Cependant il y a trois diffé-

rences : la présence d'un terme supplémentaire inexpliqué (la dernière ligne de (49) ), le fait que le facteur de  $\Omega_H$  contient non seulement la variation du moment angulaire "mécanique" du trou noir  $J_H$  mais encore la variation du moment angulaire total (c'est-à-dire localisé dans tout l'espace)  $J'$  du champ électromagnétique, et, la présence du potentiel  $-l^c A_c$  qui est en corotation avec le trou noir au lieu d'être comouvant avec la matière.

Nous allons montrer maintenant qu'en relocalisant le moment angulaire total du champ  $J'$  sur ses sources (et non dans l'espace) on peut le séparer en une contribution attribuée au trou noir et en d'autres contributions attribuées aux charges extérieures. Alors la variation de masse pourra s'écrire exactement comme la formule (39) ci-dessus où le facteur de chaque vitesse angulaire est de la forme

$$\delta (d^3 J) \quad + \quad \delta (A_\varphi d^3 Q)$$

moment angulaire mécanique moment angulaire "effectif"  
de la charge  $d^3 Q$

En effet utilisant par exemple pour  $\Sigma$  une 3-surface  $x^0 = t = \text{const.}$  on a comme (33) ci-dessus :

$$d\Sigma_t = \sqrt{g} d^3 x$$

comme seule composante non nulle. Or on a (cf. (34-35) ) :

$$\sqrt{g} T_\varphi'^t = A_\varphi \left( \frac{1}{4\pi} \sqrt{g} F^{tb} \right)_{,b} + \left( A_\varphi \frac{1}{4\pi} \sqrt{g} F^{bt} \right)_{,b}$$

Le premier terme de cette expression s'écrit  $A_\varphi \sqrt{g} j^t$  et est donc localisé sur la distribution de charge  $d^3 Q = j^t d\Sigma_t$ . Quant au second terme il contribue à :

$$J' = \int T_\varphi'^t \sqrt{g} d^3 x$$

par deux termes de surface. Le terme de surface à l'infini est nul mais le terme de surface sur l'horizon (pris par exemple comme la surface  $x^1 = r = \text{const.}$ ) s'écrit :

$$\int_H A_\varphi \frac{1}{4\pi} \sqrt{g} F^{t\tau} dx^2 \wedge dx^3$$

Or on a précisément défini au chapitre II (équation II (19)) une densité de charge sur l'horizon par :

$$(51) \quad d^2 Q_H = \sigma_H dS_H = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{g}{\gamma}} F^{t\tau} (\sqrt{\gamma} dx^2 \wedge dx^3)$$

D'où le résultat annoncé :

$$(52) \quad J' = \oint_H A_\varphi d^2 Q_H + \int A_\varphi d^3 Q$$

qui répartit le moment angulaire total du champ sur les charges extérieures et sur les charges effectives du trou noir :  $d^2 Q_H = \sigma_H dS_H$ .

Il nous suffit maintenant de réécrire le dernier terme de la variation de masse de Carter en utilisant la condition de circularité

$$j^a \propto k^a + \Omega m^a$$

où  $\Omega$  est la vitesse angulaire locale de la matière. On peut donc écrire :

$$j^c \ell^a - j^a \ell^c = (\Omega_H - \Omega) (j^c m_\varphi^a - j^a m_\varphi^c)$$

d'où :

$$(j^c \ell^a - j^a \ell^c) \delta A_c d\Sigma_a = (\Omega - \Omega_H) (j^a d\Sigma_a) (\delta A_c m_\varphi^c)$$

Rassemblant nos résultats on voit que dans l'expression (49) le 1<sup>er</sup> terme s'écrit :

le terme  $-\int \rho^c A_c \delta(d^3Q)$  s'écrit :  $\Omega_H \left[ \delta \int_H A_\varphi d^2Q_H + \delta \int A_\varphi d^3Q \right]$   
 s'écrit :  $-\int (A_t + \Omega A_\varphi) \delta(d^3Q) + \int (\Omega - \Omega_H) A_\varphi \delta(d^3Q)$

le dernier terme s'écrit :  $\int (\Omega - \Omega_H) \delta A_\varphi d^3Q$

D'où la réécriture finale de la variation de masse :

$$(53) \quad \delta M = \Omega_H \delta(J_H + \int A_\varphi d^2Q_H) + \tilde{\phi}_H \delta Q_H + (g/8\pi) \delta S_H + \\ + \int \Omega \delta(d^3J + A_\varphi d^3Q) + \int \tilde{\phi} \delta(d^3Q) + \int \bar{T} \delta(d^3S) + \int \bar{\mu} \delta(d^3N)$$

où n'apparaît que le potentiel comouvant  $\tilde{\phi} = -(A_t + \Omega A_\varphi)$  et l'élément de moment angulaire conservé :  $dJ + A_\varphi dQ$ . (Cette forme de la variation de masse a été obtenue simultanément par Carter (1978b) comme cas particulier d'une forme plus générale).

Si le trou noir est entouré de plusieurs anneaux de vitesses angulaires  $\Omega_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) on retrouve exactement la formule (39) (quand  $\bar{\mu} = 0$ ) plus des termes qui, cette fois, s'interprètent facilement en disant que la surface du trou noir est analogue à un corps conducteur de vitesse angulaire  $\Omega_H$ , de moment angulaire mécanique  $J_H$ , de potentiel comouvant uniforme  $\tilde{\phi}_H$ , de distribution surfacique de charge  $\sigma_H$ , de température  $g/8\pi\alpha$ , d'entropie  $\alpha S_H$  et de potentiel chimique nul pour toute particule. ( $\alpha$  désignant ici comme dans les chapitres précédents le rapport entropie/surface fixé à la valeur  $1/4\hbar$  au chapitre IV).

Alors si l'on admet le second principe de la thermodynamique généralisé par Bekenstein, c'est-à-dire que  $S + \alpha S_H$  ne peut qu'augmenter, on trouve que l'équilibre sous l'échange de quantités conservées implique l'égalisation des grandeurs intensives associées.

Donc on retrouve les conditions du paragraphe b- ci-dessus, avec cependant l'apparition de la température effective  $\bar{T}$  au lieu de la température

locale  $T$ , et, avec de plus :  $\bar{T} = g/8\pi\alpha$  si le trou noir peut échanger de l'entropie avec la matière et  $\bar{\mu} = 0$  en cas d'échange de particules.

On admettra cependant comme intuitif que les temps de relaxation associés à ces équilibres ont des valeurs très différentes et qu'il est possible de concevoir des situations d'intérêt astrophysique où l'égalisation des potentiels comouvants est réalisée bien avant les autres. C'est à ce type d'équilibre partiel que nous allons nous intéresser dans la dernière partie de ce chapitre.

#### e - Equilibre électrique entre un trou noir tournant et une spire de courant chargée.

Ce problème a été considéré par Chitre et Vishveshwara (1975) (spire non chargée) et par Petterson (1975). Malheureusement plusieurs formules de Petterson sont erronées et le premier résultat correct a été trouvé par Damour (1976) et (1977b) et indépendamment par Znajek (1976). Le même résultat fut ensuite obtenu par Linet (1977) à partir d'expressions analytiques au lieu de développements multipolaires. Nous verrons cependant ci-dessous comment, même en utilisant des développements multipolaires, le résultat peut être obtenu de manière très aisée.

Le système considéré consiste en :

- un trou noir tournant décrit par la métrique de Kerr
- une spire équatoriale de courant possédant une charge électrique  $q$  et centrée sur le trou noir.

Le champ électromagnétique est traité comme un champ d'épreuve dans la métrique de Kerr. On utilise les coordonnées de Boyer Lindquist  $t, r, \theta, \varphi$  (voir par exemple De Witt et De Witt 1973).

La densité de charge de la spire ( $r = r_0, \theta = \pi/2$ ) est prise égale à :

$$(54) \quad j^t = \frac{q}{2\pi r_0^2} \delta(\cos\theta) \delta(r-r_0)$$

De sorte que la charge totale de la spire sera bien :

$$\int j^t \sqrt{g} \, dr \, d\theta \, d\varphi = \int j^t (r^2 + a^2 \cos^2\theta) \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi = q$$

La densité de courant est écrite sous la forme suivante (afin de simplifier les formules ci-dessus) :

$$(55) \quad j^\varphi = \frac{I}{2\pi r_0^2} \delta(\cos\theta) \delta(r-r_0)$$

De sorte que quand  $r_0 \gg 2M$ ,  $I$  mesure le courant circulant dans la spire.

Nous dirons plus bas un mot sur ce qui se passe quand  $r_0 \sim M$ .

Le but du calcul est d'obtenir le potentiel comouvant  $\mathcal{A}_H$  du trou noir. Pour ce faire nous utiliserons certains des résultats de Petterson (1975) qui emploie les notations de Newman et Penrose (1962).

Nous avons déjà vu ces notations dans les appendices des chapitres I et II.

Nous aurons besoin ici de :

$$(56) \quad \varphi_0 = F_{ab} l^a m^b$$

$$(57a) \quad (\delta - 2\tau) \varphi_1 - (\Delta' + \rho - 2\gamma) \varphi_0 = -2\pi j_m = -2\pi j_a m^a,$$

on prend pour  $l, n, m, \bar{m}$  la tétrade de Kinnersley (1969) de sorte que

$$(57b) \quad n^a \partial_a \equiv \Delta' = -\frac{\Delta}{2\Sigma} \frac{\partial}{\partial r} \quad \text{où } \Delta = r^2 - 2Mr + a^2 \quad \text{et } \Sigma = r^2 + a^2 \cos^2\theta.$$

Petterson (1975) a obtenu des développements multipolaires pour  $\varphi_0 / \sqrt{2}$  :



$$(58) \quad \begin{cases} r \leq r_0 & \varphi_0/\sqrt{2} = \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_l \frac{dP_l(u)}{dz} \frac{dP_l(\cos\theta)}{d\theta} \\ r \geq r_0 & \varphi_0/\sqrt{2} = \sum_{l=1}^{\infty} \beta_l \frac{dQ_l(u)}{dz} \frac{dP_l(\cos\theta)}{d\theta} \end{cases}$$

où la variable  $u$  égale  $(r - M)/\sqrt{M^2 - a^2}$  et où  $P_l(x)$  et  $Q_l(x)$  sont les fonctions de Legendre. Alors, corrigeant d'un facteur 2, certains coefficients de Petterson (1975) (et le terme monopolaire) on peut écrire le potentiel scalaire  $\phi = -A_t$  sous la forme :

$$(59) \quad \begin{cases} r \leq r_0 & -A_t = \alpha_t + \frac{rQ^{int}}{\Sigma} + \frac{2}{\Sigma} \text{Réel} \left\{ (r+ia\cos\theta) \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_l \left[ \Delta \frac{dP_l(u)}{dz} P_l(\cos\theta) - ia\sin\theta P_l(u) \frac{dP_l(\cos\theta)}{d\theta} \right] \right\} \\ r \geq r_0 & -A_t = \beta_t + \frac{rQ^{ext}}{\Sigma} + \frac{2}{\Sigma} \text{Réel} \left\{ (r+ia\cos\theta) \sum_{l=1}^{\infty} \beta_l \left[ \Delta \frac{dQ_l(u)}{dz} P_l(\cos\theta) - ia\sin\theta Q_l(u) \frac{dP_l(\cos\theta)}{d\theta} \right] \right\} \end{cases}$$

"Réel" dénotant la partie réelle et où  $Q^{int}$  est la charge à l'intérieur de la "sphère"  $r < r_0$  donc la charge totale du trou noir :  $Q_H$

$$Q^{int.} = Q_H$$

et où  $Q^{ext}$  est la charge à l'intérieur de la "sphère"  $r > r_0$  donc la charge totale du système :  $Q_H + q$  où  $q$  est la charge de la spire :

$$Q^{ext.} = Q_H + q$$

$\alpha_t$  et  $\beta_t$  sont des constantes choisies de sorte que  $A_t$  soit continu à la traversée de  $r = r_0$  et nul à l'infini. Cette dernière condition implique :

$$\beta_t = 0$$

Alors le potentiel  $\tilde{\phi}_H$  du trou noir est égal à la valeur de  $-A_t$  aux pôles

(Nord et Sud) du trou noir c'est-à-dire qu'on prend  $\theta = 0$  et  $r = M + \sqrt{M^2 - a^2} = r_+$

"rayon de l'horizon" d'où  $\Delta = 0$  et

$$(60) \quad \tilde{\phi}_H = \alpha_t + Q_H \frac{r_+}{r_+^2 + a^2} = \alpha_t + \frac{Q_H}{2M}$$

Ecrivons maintenant que  $-A_t$  est continu sur l'axe  $\theta = 0$  à la traversée de  $r = r_0$ . Dénotant par  $a_l$  la discontinuité des multipôles radiaux de  $\varphi_0/\sqrt{2}$  à la traversée de  $r = r_0$  soit :

$$(61) \quad a_l = \left[ \beta_l \frac{dQ_l(u)}{dz} - \alpha_l \frac{dP_l(u)}{dz} \right]_{r_0}$$

on obtient :

$$(62) \quad \alpha_t = q \frac{r_0}{r_0^2 + a^2} + \frac{2}{r_0^2 + a^2} \operatorname{Réel} \left[ (r_0 + ia) \Delta_0 \sum_{l=1}^{\infty} a_l \right]$$

Or les  $a_l$  c'est-à-dire la discontinuité de  $\varphi_0/\sqrt{2}$  va s'obtenir directement en intégrant radialement l'équation (57a) à travers  $r = r_0$ . Comme

$\Delta' = m^a \partial_a$  (57b) est le seul opérateur radial dans cette équation on obtient :

$$(63) \quad [\varphi_0/\sqrt{2}] = \sum_l a_l \frac{dP_l(\cos\theta)}{d\theta} = -i \frac{I(r_0^2 + a^2) - aq}{r_0 \Delta_0} \delta(\cos\theta)$$

où les crochets désignent la discontinuité et où on a calculé  $j_a m^a$  à partir des équations de définitions de  $j^a$  (54) (55) et de

$$m^a \partial_a = \frac{1}{\sqrt{2} (r + ia \cos\theta)} \left[ ia \sin\theta \partial_\theta + \partial_\theta + \frac{i}{\sin\theta} \partial_\varphi \right]$$

Il est alors facile de trouver  $\sum_l a_l$  soit en intégrant formellement l'équation de discontinuité de  $\varphi_0/\sqrt{2}$  sur  $\theta$  soit en décomposant la distribution de Dirac  $\delta(\cos\theta)$  sur la base des  $P_l^1(\cos\theta) = dP_l(\cos\theta)/d\theta$  :

$$(64) \quad \delta(\cos\theta) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l+1/2}{l(l+1)} P_l^1(0) P_l^1(\cos\theta)$$

d'où :

$$(65) \quad a_l = -i \frac{I(r_0^2 + a^2) - aq}{r_0 \Delta_0} \frac{l+1/2}{l(l+1)} P_l^1(0)$$

Le résultat cherché est donc obtenu à partir de la série  $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{l+1/2}{2(l+1)} P_l^1(0) = -1/2$   
(Chitre et Vishveshwara (1975) )

$$(66) \quad \sum_{l=1}^{\infty} a_l = i \frac{I(r_0^2 + a^2) - aq}{2r_0 \Delta_0}$$

D'où :

$$(67) \quad \tilde{\phi}_H = \frac{Q_H}{2M} + \frac{q r_0}{r_0^2 + a^2} - a \frac{I(r_0^2 + a^2) - aq}{r_0(r_0^2 + a^2)}$$

Soit le résultat final :

$$(68) \quad \tilde{\phi}_H = \frac{Q_H}{2M} + \frac{q}{r_0} - \frac{aI}{r_0} .$$

Ce résultat est très similaire au potentiel comouvant d'une étoile à neutrons tournante placée dans le champ magnétique d'une coque de plasma située au rayon  $r_0$  . En effet ajoutant les équations (45) et (47) ci-dessus on a :

$$(69) \quad \tilde{\phi}_{\text{étoile à neutrons}} = \frac{Q^*}{R} + \frac{q}{r_0} - \frac{1}{3} \Omega B_0 R^2 .$$

Cependant comme la spire a une capacité électrique infinie on ne peut plus ici, comme dans le cas de l'étoile à neutrons et de la coque de plasma, démontrer la nécessité de la condition :

$$(70) \quad Q_H + q = 0$$

à partir d'une minimisation de l'énergie libre. Nous continuerons tout de même à imposer cette condition (70) afin que le système soit globalement neutre.

En effet une telle neutralité électrique est indispensable pour la stabilité du système par rapport à la chute de charges en provenance de l'infini.

Alors on en déduit la charge sur le trou noir à l'équilibre (Damour 1977b)

$$(71) \quad Q_H = a \bar{I} \frac{2M}{r_0 - 2M} .$$

La singularité de  $Q_H$  en  $r_0 = 2M$  est apparente et vient du fait que  $r_0 = 2M$  est le rayon équatorial de l'ergosphère. Quand  $r_0 \leq 2M$  et  $\theta = \frac{\pi}{2}$  aucun objet ne peut rester fixe par rapport à l'infini. Or le courant  $I$  a été défini par rapport à une spire fixe par rapport à l'infini. Pour éliminer cette singularité apparente il suffit de prendre des observateurs tournants. Par exemple le plus simple est d'utiliser la tétrade de Carter dont les observateurs tournent avec la vitesse angulaire  $d\varphi/dt = a/(r^2 + a^2)$ . (voir par exemple l'article : Damour et Ruffini (1975), reproduit au chapitre IV, pour l'emploi de cette tétrade dans une autre situation). Alors le courant mesuré par les observateurs est :

$$(72) \quad I^c = \sqrt{\frac{r_0^2}{\Delta_0}} \frac{I(r_0^2 + a^2) - aq}{2\pi r_0^2}$$

En reportant dans (67) on voit qu'on a ainsi éliminé la singularité en  $r_0 = 2M$  si l'on exprime  $Q_H$  en fonction de  $I^c$  (avec  $Q_H + q = 0$ ).