МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 3, № 5 (1968), 511—522

УДК 513.83

О ЧИСЛЕ СИМПЛЕКСОВ ПОДРАЗДЕЛЕНИЙ КОНЕЧНЫХ КОМПЛЕКСОВ

М. Л. Громов

Рассматриваются комбинаторные инварианты конечного симплициального комплекса K, являющиеся функциями от чисел $\alpha_i(K)$ симплексов размерности i этого комплекса. Основным результатом является теорема 2, содержащая необходимое и достаточное условие для того, чтобы у двух комплексов K и L существовали такие подразделения K' и L', что $\alpha_i(K') = \alpha_i(L')$ при $0 \leqslant i < \infty$. Из теоремы выводится следствие: если полиэдры $|K|$ и $|L|$ гомеоморфны, то существуют такие подразделения K' и L', что $\alpha_i(K') = \alpha_i(L')$ при $i \geqslant 0$. Библ. 3 назв.

Введение. Пусть K — конечный симплициальный комплекс, и пусть $\alpha_i(K)$ — число i-мерных симплексов комплекса K. Спрашивается, какие функции от чисел α_i являются комбинаторными инвариантами комплекса K. Хорошо известно, что такими функциями являются эйлерова характеристика $\chi(K)$ и размерность $\dim K$.

Вопрос об инвариантности функций от чисел $\alpha_i(K)$ относительно подразделений имеет два аспекта. Во-первых, можно для индивидуального комплекса K изучать функции от чисел $\alpha_i(K)$, инвариантные относительно подразделений комплекса K. Во-вторых, интересно выяснить, когда с помощью функций такого рода можно установить, что некоторые два комплекса K и L комбинаторно не эквивалентны. Последний вопрос может быть сформулирован следующим образом: когда у двух комплексов K и L существуют подразделения K' и L' такие, что $\alpha_i(K) = \alpha_i(L)$ при всех $i \geqslant 0$?

Первому аспекту посвящена работа [2], в которой для каждого комплекса K указаны все линейные функции от чисел $\alpha_i(K)$, инвариантные относительно подразделений комплекса K.

Ко второму аспекту относится следующий результат Р. Бинга [1]: *у любых двух замкнутых протриангулированных трехмерных многообразий* M_1 *и* M_2 *существуют подразделения* M_1' *и* M_2' *такие, что* $\alpha_i(M_1') = \alpha_i(M_2')$ *при* $i \geqslant 0$.

В настоящей работе получено необходимое и достаточное условие для того, чтобы у двух комплексов K и L существовали подразделения K' и L' такие, что $\alpha_i(K') = \alpha_i(L')$ при всех $i \geqslant 0$.

В дополнении 1 аналогичный результат сформулирован для случая более чем двух комплексов.

В дополнении 2 показано, как можно нашими методами получить основную теорему работы [2].

§ 1. Обозначения и формулировка результатов. Пусть K — конечный симплициальный комплекс и $|K|$ — соответствующий полиэдр. Через s_i мы будем обозначать как i-мерные симплексы комплекса K, так и соответствующие открытые симплексы полиэдра $|K|$. Обозначим через $C(K)$ пространство функций, аргументы которых суть симплексы комплекса K, а принимаемые значения принадлежат группе Z целых чисел. В дальнейшем эти функции мы будем называть *коцепями*. *Носителем* $\operatorname{supp}(c)$ коцепи $c \in C(K)$ мы будем называть минимальный подкомплекс комплекса K такой, что если $s \overline{\in} \operatorname{supp}(c)$, то $c(s) = 0$. *Размерностью* $\dim(c)$ коцепи c мы будем называть размерность ее носителя.

Пусть K' — подразделение комплекса K. Определим естественный гомоморфизм $\rho: C(K) \to C(K')$ следующим образом: если $s \in K$, а $s' \in K'$ и в полиэдре $|K|$ выполнено включение $s' \subset s$, то полагаем $\rho c(s') = c(s)$.

Если A — некоторое подмножество симплексов комплекса K, то через ψ_A мы будем обозначать характеристическую функцию множества A.

Для каждого целого числа i определим гомоморфизм $\Delta_i: C(K) \to C(K)$ следующими условиями: $\operatorname{supp}(\Delta_i(c)) \subset \subset \operatorname{supp}(c)$, а если $s \prec s_p$, то

$$\Delta_i \psi_{s_p}(s) = (-1)^{p+i+1} + \psi_{s_p}(s).$$

З а м е ч а н и е 1. Рассмотрим границу $\operatorname{Bd}(s_q)$ дополнения симплекса s_q в комплексе K (см. [3]). Из определения гомоморфизма Δ_i тривиальным вычислением получается формула

$$\Delta_i \psi_K (s_q) = 1 + (-1)^{i+q+1} + (-1)^{i+q} \chi (\mathrm{Bd}\,(s_q)). \qquad (1)$$

В частности, если M есть n-мерное замкнутое h-многообразие, то $\Delta_n \psi_M = 0$.

Замечание 2. Каждую коцепь $c \in C(K)$ можно трактовать как функцию $f(k)$ на пространстве $|K|$, полагая $f_2(k) = c(s)$, если $k \in s \subset K$. Если даны две триангуляции K^1 и K^2 пространства $|K|$, то коцепи $\Delta_i \psi_{K^1}$ и $\Delta_i \psi_{K^2}$ совпадают как функции на пространстве $|K|$.

Для доказательства нужно воспользоваться формулой (1) и инвариантностью локальных групп гомологий.

Определим гомоморфизм χ: $C(K) \to Z$ условием $\chi(\psi_{s_q}) = (-1)^q$. Ясно, что $\chi(\psi_K) = \chi(K)$. Обозначим через P пространство полиномов вида $\frac{1}{2} a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$, где a_i — целые числа, и определим гомоморфизм χ_0: $C(K) \to P$ условием $\chi_0(\psi_{s_q}; x) = x^{q+1}$. Ясно, что

$$\chi_0(c; -1) = -\chi(c) \text{ и } \chi_0(\psi_K; x) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (K) \cdot x^{i+1}.$$

Определим в группе $C(K)$ подмножество $C^*(K)$ следующим образом: нулевая коцепь принадлежит $C^*(K)$, а коцепь c размерности $n \geqslant 0$ принадлежит множеству $C^*(K)$ тогда и только тогда, когда найдутся симплексы $s_n^1, s_n^2 \in K$ такие, что $c(s_n^1) > 0$, а $c(s_n^2) < 0$.

Замечание 3. Пусть даны две триангуляции K^1 и K^2 пространства $|K|$ и две коцепи $c^1 \in C(K^1)$ и $c^2 \in C(K^2)$, совпадающие как функции на пространстве $|K|$, и пусть $c^1 \in C^*(K^1)$. Тогда $c^2 \in C^*(K^2)$.

Для доказательства нужно воспользоваться топологической инвариантностью размерности.

Основным результатом настоящей работы является

ТЕОРЕМА 1. *Пусть K — конечный комплекс и $c \in C(K)$. Для того чтобы у комплекса K существовало подразделение K' такое, что $\chi_0(\rho(c)) = 0$, где ρ: $C(K) \to C(K')$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий*:

$$\left.\begin{array}{c} c \in C^*(K),\ \chi(c) = 0 \\ \text{и если } n = \dim c, \text{ то } \Delta_n(c) \in C^*(K). \end{array}\right\} \qquad (*)$$

Из теоремы 1 следует

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы у двух конечных комплексов K и L существовали подразделения K' и L' такие, что $\alpha_i(K') = \alpha_i(L')$ при всех i, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

$$\left.\begin{array}{c} \dim K = \dim L = n,\ \chi(K) = \chi(L) \\ \text{и в пространстве } C\ (K \cup L) \text{ выполнено включение} \\ (\Delta_n\psi_K - \Delta_n\psi_L) \in C^*(K \cup L) \end{array}\right\} (**)$$

Доказательство. Применим теорему 1 к полиэдру $K \cup L$ и коцепи $c = (\psi_K - \psi_L) \in C(K \cup L)$. Применительно к коцепи c условия $(**)$ эквивалентны условиям $(*)$. С другой стороны,

$$\chi_0(c) = \sum_{i=0}^{\infty} x^{i+1}(\alpha_i(K) - \alpha_i(L))$$

и теорема 2 доказана.

Следствие 1. *Пусть даны комплексы K, L и K_1, L_1 такие, что полиэдр $|K|$ гомеоморфен полиэдру $|K_1|$, а полиэдр $|L|$ гомеоморфен полиэдру $|L_1|$, и пусть $\alpha_i(K) = \alpha_i(L)$ при всех $i \geqslant 0$. Тогда у комплексов K_1 и L_1 существуют подразделения K_1' и L_1' такие, что $\alpha_i(K_1') = \alpha_i(L_1')$ при всех $i \geqslant 0$.*

Для доказательства нужно воспользоваться замечаниями 2 и 3.

Следствие 2. *Пусть даны два n-мерных замкнутых h-многообразия M_1 и M_2 такие, что $\chi(M_1) = \chi(M_2)$. Тогда у них существуют подразделения M_1' и M_2' такие, что $\alpha_i(M_1') = \alpha_i(M_2')$ при всех $i \geqslant 0$.*

Для доказательства достаточно сослаться на замечание 1.

Следствие 3. *Пусть дан комплекс K размерности n такой, что $\Delta_n(\psi_K) \in C^*(K)$, и пусть L такой комплекс, что $\dim L = \dim K$ и $\chi(L) = \chi(K)$. Тогда существуют подразделения K' и L' такие, что $\alpha_i(K') = \alpha_i(L')$ при всех $i \geqslant 0$.*

Доказательство очевидно.

Замечание. *Для любых целых чисел q и n таких, что $n \geqslant 0$, и если $n = 0$, то $q > 0$, существует комплекс K такой, что $\chi(K) = q$, $\dim K = n$ и $\Delta_n(\psi_K) \in C^*(K)$.*

Доказательство. Если $n=0$, то в качестве комплекса K нужно взять комплекс, состоящий из q вершин. Пусть $n>0$. Обозначим через K_n комплекс, состоящий из трех n-мерных (замкнутых) симплексов, склеенных по $(n-1)$-мерной грани. Пусть L_q — одномерный комплекс такой, что $\chi(L_q)=q-1$. В качестве комплекса K возьмем комплекс $K_n \cup L_q$. Проверка того, что комплекс $K=K_n \cup L_q$ обладает нужным свойством, тривиальна.

Последнее замечание и следствие 3 показывают, что, в некотором смысле, не существует комбинаторных инвариантов, кроме размерности и эйлеровой характеристики, которые бы являлись функциями от чисел $\alpha_i(K)$.

§ 2. Леммы о подразделениях. Для каждого целого k определим гомоморфизм $d_k: P \to P$ по формуле

$$d_k p(x)=p(x)+(-1)^k p(-1-x).$$

Непосредственно проверяется, что

$$d_{k+1}\cdot d_k=0, \quad d_{k+2}=d_k. \qquad (2)$$

В группе P определим подгруппу P^n следующим условием: $p(x)\in P^n$ тогда и только тогда, когда $\deg p(x)\leqslant \boldsymbol{n}$, $d_{n+1}p(x)=0$ и значение $p(0)$ есть целое число.

ЛЕММА 1. *Если* $p(x)\in P^n$ *и* $p(0)=0$, *то* $p(x)=x(x+1)\cdot q(x)$, *где* $q(x)\in P^{n-2}$.

Доказательство. Так как $d_{n+1}p(x)=0$, то $p(-1)=p(0)=0$, и поэтому $(x(x+1))^{-1}p(x)\in P$. При этом

$$d_{n-1}((x(x+1))^{-1}p(x))=(x(x+1))^{-1}p(x)+(-1)^{n+1}(x(x+1))^{-1}p(-1-x)=(x(x+1))^{-1}d_{n+1}p(x)=0.$$

Лемма доказана.

Пусть K — конечный комплекс. Обозначим через $\chi_1(K)$ многочлен $1+\sum_{i=0}^{\infty}x^{i+1}\alpha_i(K)$. Заметим, что $\chi_1(K;x)=1+\chi_0(\psi_K;x)$. Рассмотрим соединение $K\circ L$ двух комплексов. Непосредственным вычислением проверяется формула

$$\chi_1(K\circ L)=\chi_1(K)\cdot\chi_1(L). \qquad (3)$$

ЛЕММА 2. *Пусть даны комплекс* K, *симплекс* $s_1\in K$, *коцепь* $c\in C(K)$ *и число* a, *так что для любого симплекса* $s\in \mathrm{st}(s_1)$ *мы имеем* $c(s)=a$. *Пусть* K' — *элементарное подразделение* (см. [3]) *комплекса* K *относительно симплекса* s_1, *и пусть симплекс* $s_1'\in K'$ *лежит в симплексе* s_1.

Пусть ρ: $C(K) \to C(K')$. *Тогда*

$$\mathrm{Bd}(s_1) = \mathrm{Bd}(s_1')$$

и

$$\chi_0(\rho(c);\ x) = \chi_0(c;\ x) + ax(x+1)\,\chi_1(\mathrm{Bd}(s_1);\ x).$$

Доказательство. Первая из приведенных формул очевидна, а вторая следует из формулы (3).

Определим гомоморфизм $\chi^*: C(K) \to P$ по формуле $\chi^*(c;\ x) = \chi^0(c;\ x) + \frac{1}{2}\chi(c)$.

ЛЕММА 3. *Пусть K' — некоторое подразделение комплекса K, пусть ρ: $C(K) \to C(K')$ и пусть $c \in C(K)$. Тогда*:

а) $d_k\chi^*(c) = \chi^*\Delta_k(c)$;

б) $\Delta_{k+1}\Delta_k(c) = 0,\ \Delta_k(c) = \Delta_{k+2}(c)$;

в) $\chi(c) = \chi(\rho(c))$;

г) $\Delta_k\rho(c) = \rho\Delta_k(c)$;

д) *если* $\rho(c) \in C^*(K')$, *то и* $c \in C^*(K)$.

Доказательство. Формулы а), б), в), г) достаточно проверять для коцепей $c \in C(K)$ вида $c = \psi_s$, где $s \in K$. Очевидно, что

$$\chi_0(\Delta_k(\psi_{s_n});\ x) = (-1)^{n+k+1}\sum_{i=0}^{n} c_{n+1}^{i+1}x^{i+1} + x^{n+1} =$$
$$= (-1)^{n+k+1}(1+x)^{n+1} + x^{n+1} + (-1)^{k+n}.$$

Следовательно,

$$\chi^*(\Delta_k(\psi_{s_n});\ x) = x^{n+1} + \frac{(-1)^n}{2} + (-1)^{k+n+1}(1+x)^{n+1} +$$
$$+ \frac{(-1)^{k+n}}{2} = d_k\left(x^{n+1} + \frac{(-1)^n}{2}\right) = d_k\chi^*(\psi_{s_n};\ x)$$

и п. а) доказан.

Из п. а) и формулы (2) следует, что $\chi^*\Delta_{k+1}\Delta_k(\psi_s) = 0$, но, с другой стороны, если $s_i^1 \prec s$ и $s_i^2 \prec s$, то $\Delta_{k+1}\Delta_k\psi_s(s_i^1) = \Delta_{k+1}\Delta_k\psi_s(s_i^2)$, поэтому для любого $s_i \in K$ получаем $\Delta_{k+1}\Delta_k\psi_s(s_i) = 0$. Поскольку формула $\Delta_k = \Delta_{k+2}$ очевидна, то п. б) доказан.

Формула в) является следствием инвариантности эйлеровой характеристики комплексов относительно подразделений.

Обозначим через $|D_n|$ замыкание симплекса s_n в полиэдре $|K|$, и пусть D_n' — некоторое подразделение комплекса D_n. Обозначим через $\beta_i(s)$ число симплексов $s_i \in D_n'$ таких, что $s_i \succ s \in D_n'$ и $s_i \overline{\in} \partial(D_n')$. Поскольку полиэдр $|D_n'|$ есть n-мерное многообразие с краем $|\partial(D_n')|$, имеем

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \beta_i(s) = (-1)^n.$$

Применяя эту формулу к случаю, когда подразделение D_n' индуцировано подразделением K' комплекса K, получаем

$$\Delta_k \rho\psi_{s_n}(s) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{k+i+1} \beta_i(s) + \rho\psi_{s_n}(s) =$$
$$= (-1)^{n+k+1} + \rho\psi_{s_n}(s) = \rho\Delta_k\psi_{s_n}(s),$$

и п. г) доказан. Для доказательства п. д) достаточно сослаться на замечание 3.

Замечание. Из п. а) леммы 3 и замечания 1 следует, что если M есть замкнутое n-мерное h-многообразие, то $2\chi^*(\psi_M; x) \in P^{n+1}$, а если через S^n обозначена n-мерная сфера и $\chi(M) = \chi(S^n)$, то $\chi_1(M) \in P^{n+1}$.

ЛЕММА 4. *Пусть K_n — некоторая триангуляция сферы S^n. Тогда у комплекса K_n существуют подразделения $K_n^1, \ldots, K_n^l$, где $l = \left[\frac{n+3}{2}\right]$, такие, что многочлены $\chi_1(K_n^i)$ при $1 \leqslant i \leqslant l$ порождают группу P^{n+1}.*

Доказательство. При $n = 0$, 1 утверждение леммы тривиально. Пусть теперь $n \geqslant 2$ и $K_{n-2}^1, \ldots, K_{n-2}^l$ — подразделения сферы S^{n-2} такие, что полиномы $\chi_1(K_{n-2}^i)$ порождают группу P^{n-1}. Очевидно, что у комплекса K существует подразделение K_n' со следующими свойствами: найдутся одномерные симплексы $s_1^2, s_1^3, \ldots, s_1^{l+1} \in K_n'$ такие, что для любого $i = 1, 2, \ldots, l$ комплекс $\mathrm{Bd}(s_1^{i+1})$ изоморфен комплексу K_{n-2}^i и, кроме того, $\mathrm{st}(s_1^i) \cap \mathrm{st}(s_1^j) = \phi$ при $i \neq j$. В качестве комплекса K_n^i при $i > 1$ мы возьмем элементарное подразделение комплекса K_n' относительно симплекса s_1^i. В силу леммы 2 при $i > 1$ получаем

$$\chi_1(K_n^i; x) = \chi_1(K_n'; x) + x(x+1)\chi_1(K_{n-2}^{i-1}; x).$$

Поскольку $\chi_1(K_n'; 0) = 1$ и в силу леммы 1 полиномы $\chi_1(K_n^i; x)$ при $1 \leqslant i \leqslant l+1$ порождают группу P^{n+1}, лемма 4 доказана.

ЛЕММА 5. *Пусть K — конечный комплекс и $c \in C(K)$, причем* $\dim c = n$. *Пусть*

$$\chi(c) = 0, \quad d_n \chi^*(c) = 0. \tag{4}$$

Предположим, кроме того, что существуют симплексы $s_n^\varepsilon \in K$, где $\varepsilon = 1, 2$, такие, что $c(s_n^1) = v_1 > 0$ и $c(s_n^2) = v_2 < 0$, и все коэффициенты многочлена $\chi_0(c; x)$ делятся на наибольший общий делитель v чисел v_1 и v_2. Тогда существует такое подразделение K' комплекса K, что $\chi_0(\rho(c); x) = \chi^*(\rho(c); x) = 0$, где $\rho: C(K) \to C(K')$.

Доказательство. Из леммы 4 следует, что существует подразделение K^0 комплекса K со следующими свойствами:

все «новые» симплексы комплекса $\operatorname{supp} \rho_0(c)$, где $\rho_0: C(K) \to C(K^0)$, лежат в объединении $s_n^1 \cup s_n^2$;

найдутся такие одномерные симплексы $s_1^{i,\varepsilon} \in K^0$, где $1 \leqslant i \leqslant l$ и $\varepsilon = 1, 2$, что $s_1^{i,\varepsilon} \subset \varepsilon_h^\varepsilon$, причем $\operatorname{st}(s_1^{i,\varepsilon}) \cap \operatorname{st}(s_2^{j,\varepsilon}) = \phi$ при $i \neq j$;

если через $\mathrm{B^c d}(s)$ обозначить границу дополнения симплекса s в комплексе $\operatorname{supp}(\rho^0(c))$, то $\chi_1(\mathrm{B^c d}(s_1^{i,1}); x) = \chi_1(\mathrm{B^c d}(s_1^{i,2}); x)$ и многочлены $\chi_1(\mathrm{Bd}(s_1^{i,1}); x)$ при $1 \leqslant i \leqslant l$ порождают группу P^{n-1}.

Ясно, что $\Delta_n c(s_n^1) = \Delta_n c(s_n^2) = 0$, и поэтому

$$\chi_0(\rho_0 \Delta_n(c); x) = \chi_0(\Delta_n(c); x). \tag{5}$$

Тривиальное вычисление с использованием формул (4), (5) и пп. а), в) и г) леммы 3 приводит нас к формуле

$$d_n \chi_0(\rho_0(c); x) = 0. \tag{6}$$

Ясно также, что все коэффициенты многочлена $\chi_0(\rho_0(c); x)$ делятся на v. В силу (6) получаем

$$v^{-1}\chi_0(\rho_0(c); x) \in P^{n+1}. \tag{7}$$

Заметим, что $\chi_0(\rho_0(c); 0) = 0$ и обозначим $p_i(x) = \chi_1(\mathrm{B^c d}(s_1^{i,1}); x) = \chi_1(\mathrm{B^c d}(s_1^{i,2}); x)$. Из (7) и леммы 1 следует, что существуют такие целые неотрицательные числа a_i и b_i, где $1 \leqslant i \leqslant l$, что

$$\chi_0(\rho_0(c); x) = -\sum_{i=1}^{l} (a_i v_1 + b_i v_2)\, x\,(x+1)\, p_i(x). \tag{8}$$

Если L — конечный комплекс и если $s^1, s^2, \ldots, s^k$ — одномерные симплексы комплекса L такие, что $\operatorname{st}(s^i) \cap \cap \operatorname{st}(s^j) = \varnothing$ при $i \neq j$, и если $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — неотрицательные целые числа, то через $L(s^1, p_1; s^2, p_2; \ldots; s^k, p_k)$ обозначим подразделение комплекса L, определенное следующими условиями: $L(s^1, 0; s^2, 0; \ldots; s^k, 0) = L$, а комплекс $L(s^1, q_1; \ldots; s^i, q_i; \ldots; s^k, q_k)$ получается элементарным подразделением комплекса $L(s^1, q_1; \ldots \ldots; s^i, q_i; \ldots; s^k, q^k)$ относительно какого-нибудь одномерного симплекса, содержащегося в симплексе s^i.

Положим теперь

$$K' = K^0(s_1^{1,1}, a_1; \ldots; s_1^{l,1}, a_l; s_1^{1,2}, b_1; \ldots; s_1^{l,2}, b_l).$$

Из леммы 2 следует

$$\chi_0(\rho(c); x) = \\ = \chi_0(\rho_0(c); x) + \sum_{i=1}^{l} (a_i v_1 + b_i v_2)\, x(x+1)\, p_i(x), \qquad (9)$$

где $\rho\colon C(K) \to C(K')$. Из формул (8) и (9) следует, что $\chi_0(\rho(c); x) = 0$, но $\chi(\rho(c)) = \chi(c) = 0$, и поэтому $\chi_0(\rho(c); x) = \chi^*(\rho(c); x)$. Лемма 5 доказана.

ЛЕММА 6. *Для любого натурального числа v существует гомоморфизм $r_v\colon P \to P$ со следующими свойствами:*

а) $d_i r_v = r_v d_i$; $\deg r_v p(x) = \deg p(x)$ *и если* $\deg p(x) > 1$, *то коэффициент при старшем члене многочлена* $r_v p(x)$ *делится на* v;

б) *для любого конечного комплекса K существует подразделение $K(v)$ с гомоморфизмом $\rho_v\colon C(K) \to C(K(v))$, так что $\chi_0 \rho_v = r_v \chi_0$.*

Доказательство. Определим гомоморфизм r_v следующими формулами:

$$r_v(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_0 + (a_1 + (v-1)a_2)x + v a_2 x^2,$$

и если $n > 2$, то $r_v(x^n) = x r_v((x+1)^n - x^n)$.

Если $\dim K = 0$, то положим $K(v) = K$. Пусть $\dim K > 0$. Возьмем одномерный остов комплекса K и разобьем каждый его одномерный симплекс на v частей. Продолжим теперь это подразделение на весь комплекс K индукцией по остовам следующим образом: в качестве подразделения l-мерного симплекса s_l мы возьмем конус над подразделением границы симплекса s_l с вершиной в центре этого симплекса (заметим, что $K(1) = K$ и $K(2)$ есть барицентрическое подразделение).

Проверка того, что построенные гомоморфизм r_v и подразделение $K(v)$ обладают требуемыми свойствами, проводится автоматически.

Следствие. *Для любого натурального числа v и комплекса K существует такое подразделение K_v комплекса K, что гомоморфизм $\rho\colon C(K) \to C(K_v)$ обладает следующими свойствами: для любой коцепи $c \in C(K)$ такой, что $\chi(c) = 0$ и $d_i\chi^*(c) = 0$ при некотором i, все коэффициенты многочлена $\chi_0(\rho(c); x)$ делятся на v и $d_i\chi^*(\rho(c); x) = 0$.*

Доказательство. Построим последовательность подразделений: $K^1 = K(v)$, а $K^{i+1} = K^i(v)$. В качестве K_v возьмем подразделение K^n, где $n = \dim K$. Если $\rho\colon C(K) \to C(K_v)$, то из п. б) леммы 6 следует, что $\chi_0\rho = (r_v)^n \chi_0$, но поскольку $\deg \chi_0(\rho(c); x) \leqslant n$ и $\chi_0(\rho(c); -1) = \chi\rho(c) = \chi(c) = 0$, то требуемое свойство многочлена $\chi_0(\rho(c); x) = (r_v)^n \chi_0(c; x)$ тривиально следует из п. а) леммы 6.

§ 3. Доказательство теоремы 1. Если $\chi_0(\rho(c); x) = 0$, то $\rho(c) \in C^*(K')$ и $\chi(\rho(c)) = 0$, так что необходимость условий (*) следует из пп. в), г) и д) леммы 3.

Пусть коцепь c, принадлежащая группе $C(K)$, удовлетворяет условиям (*), и пусть $\dim c = n$ и $\dim \Delta_n(c) = m$. Полагая $b = \Delta_n(c)$ и учитывая, что

$$\chi^*(c;\ 0) = -\chi^*(c; -1) = \frac{1}{2}\chi(c) = 0,$$

имеем

$$\chi(b) = 2\chi^*(b;\ 0) = 2d_n\chi^*(c;\ 0) = 0. \tag{10}$$

Из формулы (2) и пп. а) и б) леммы 3 следует, что

$$d_m\chi^*(b) = 0. \tag{11}$$

Поскольку $b \in C^*(K)$, найдутся симплексы s_m^1 и s_m^2 такие, что $b(s_m^1) = v_1 > 0$ и $b(s_m^2) = v_2 < 0$. Обозначим через v наибольший общий делитель чисел v_1 и v_2. К комплексу K и числу v применим следствие леммы 6 и получим подразделение $K_1 = K_v$ с гомоморфизмом $\rho_1\colon C(K) \to C(K_1)$. В силу формул (10) и (11) к комплексу K_1 и коцепи $\rho_1(b)$ применима лемма 5, поэтому существует подразделение K_2 с гомоморфизмом $\rho_2\colon C(K) \to C(K_2)$, так что

$$\chi^*\rho_2(b) = 0. \tag{12}$$

Из пп. а) и г) леммы 3 и из формулы (12) мы получаем

$$d_n \chi^* \rho_2 (c) = 0.$$

Проводя для коцепи $\rho_2 (c)$ те же рассуждения, которые приведены выше применительно к коцепи b, мы получим подразделение K' с требуемым свойством.

Дополнение 1. ТЕОРЕМА 2а. *Пусть $K_1, K_2, \ldots, K_p$ — конечные комплексы. Пусть $L = K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_p$, и пусть для каждой из коцепей вида $\psi_{K_i} - \psi_{K_j} \in L$ выполнено условие $(*)$. Тогда существуют подразделения K'_j комплексов K_j такие, что $\alpha_i (K'_{j_1}) = \alpha_i (K'_{j_2})$ при всех i и $1 \leqslant j_1, j_2 \leqslant p$.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

Дополнение 2. Рассмотрим подгруппу $P^{n, m} \subset P$, состоящую из таких многочленов $p(x)$, что $\deg p(x) \leqslant n$, а $\deg d_{n+1} p(x) \leqslant m$ и $p(0) = p(-1) = 0$. Пусть K — конечный комплекс и $c \in C(K)$. Рассмотрим всевозможные подразделения K^i комплекса K и гомоморфизмы ρ_i: $C(K) \to C(K^i)$; определим подмножество $P(c) \subset P$ как множество всех многочленов вида $\chi_0 (\rho_i (c); x)$.

ТЕОРЕМА 1а. *Пусть K — конечный комплекс и коцепь $c \in C(K)$ удовлетворяет условиям $(*)$, причем $\dim c = n$ и $\dim \Delta_n (c) = m$. Тогда $P(c) \subset P^{n+1, m+1}$ и в группе $P^{n+1, m+1}$ существует подгруппа $P_c^{n+1, m+1}$ конечного индекса такая, что $P_c^{n+1, m+1} \subset P(c)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы выводится простыми рассуждениями из теоремы 1 и леммы 4.

Обозначим через Π линейное пространство многочленов с вещественными коэффициентами и с нулевым свободным членом. Пусть K — конечный комплекс. Все линейные функции от чисел $\alpha_i (K)$, инвариантные относительно подразделений комплекса K, образуют подпространство $\Pi^* (K)$ пространства Π^*, где Π^* — пространство, сопряженное с Π. Пространство $\Pi^* (K)$ является аннулятором подпространства $\Pi (K) \subset \Pi$, порожденного многочленами вида $p_1 (x) - p_2 (x)$, где $p_1 (x), p_2 (x) \in P(\psi_K)$.

В наших терминах основной результат работы [2] выглядит следующим образом.

Пусть K — конечный комплекс размерности, n и пусть $\dim \Delta_n \psi_K = m$. Тогда пространство $\Pi (K)$ совпадает с *линейной оболочкой, натянутой на многочлены $p(x)$, принадлежащие группе $P^{n+1, m+1}$.*

Для доказательства этой теоремы нужно применить теорему 1а к комплексу, являющемуся объединением двух экземпляров комплекса K, и к коцепи, равной 1 на симплексах одного экземпляра комплекса и равной -1 на симплексах второго экземпляра.

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Поступило 11.IX.1967

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Bing R. H., Some aspects of the topology of 3-manifolds related to the Poincare conjecture, Lectures on modern mathematics, ed. by T. L. Saaty, v. II (1964).

[2] Wall C. T. C., Arithmetic invariants of subdivision of complexes, Canad. J. Math., 18, № 1 (1966), 92—96.

[3] Стинрод Н., Эйленберг С., Основания алгебраической топологии, М., 1958.