# GROUPES DE PAVAGES DE $\mathrm{SL}_2$

*par*

Fanny Kassel

***Résumé.*** — Soit $\mathbf{k} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{Q}_p$. Considérant le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbf{k})$ comme un espace homogène sous l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{k}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbf{k})$ par multiplication à gauche et à droite, nous décrivons ses groupes de pavages et étudions leur déformation. Pour $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ nos résultats se traduisent en termes de géométrie lorentzienne ; pour $\mathbf{k} = \mathbb{Q}_p$ ils permettent de décrire les quotients des quadriques $p$-adiques de dimension 3.

## 1. Introduction

Soit $G'/G$ un espace homogène, où $G'$ est un groupe de Lie et $G$ un sous-groupe fermé de $G'$. Un pavage (périodique, à brique fondamentale compacte) de $G'/G$ est donné par son groupe de symétries, ou *groupe du pavage*, qui est un sous-groupe discret de $G'$ agissant proprement et cocompactement sur $G'/G$. La propreté de l'action traduit le fait que le pavage est supposé localement fini. À titre d'exemple, rappelons qu'il existe 17 groupes de pavages du plan affine euclidien $\mathbb{R}^2 = (\mathbb{R}^2 \rtimes \mathrm{O}(2))/\mathrm{O}(2)$ à conjugaison près (on parle ici de *groupes cristallographiques*) : ceci comprend les groupes des pavages réguliers par des triangles équilatéraux, par des carrés ou par des hexagones réguliers. Au contraire, il existe une infinité de classes de conjugaison de groupes de pavages du plan hyperbolique $\mathbb{H}^2 = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$ : Poincaré a montré que pour tout polygone géodésique convexe de $\mathbb{H}^2$ dont les angles sont des sous-multiples de $\pi$, les réflexions orthogonales par rapport aux côtés engendrent un pavage de $\mathbb{H}^2$ dont le polygone est une brique fondamentale.

Lorsque $G$ est compact, tout sous-groupe discret de $G'$ agit proprement sur $G'/G$. Ce n'est pas le cas en général : par exemple, si $G' = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et si $G$ est le sous-groupe (non compact) des matrices unipotentes triangulaires supérieures, tout sous-groupe discret de $G'$ agissant proprement sur $G'/G$ est fini. Autrement dit, si un groupe discret infini agit linéairement sur $\mathbb{R}^2$, de manière fidèle, la restriction de son action à $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ n'est jamais propre. Ceci illustre les fortes restrictions sur le groupe discret qu'impose la condition de propreté lorsque $G$ n'est pas compact. Les questions d'existence, de description et de déformation de groupes de pavages d'espaces homogènes ont suscité de nombreux travaux et le développement de méthodes variées, relevant à la fois de la théorie structurelle des groupes de Lie, de la théorie des représentations, de la géométrie et de la dynamique. Cependant, de nombreuses questions restent ouvertes à ce jour, comme celle de l'absence de pavages de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_m(\mathbb{R})$ pour $n > m > 1$.

Soit $\mathbf{k} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}_p$, ou plus généralement un *corps local*, c'est-à-dire un corps localement compact et non discret pour la topologie définie par une valeur absolue. Nous nous intéressons ici aux pavages de $G = \mathrm{SL}_2(\mathbf{k})$ par des sous-groupes discrets de $G \times G$ agissant par multiplication à gauche et à droite : $(g_1, g_2) \cdot g = g_1 g g_2^{-1}$. Autrement dit, nous considérons les pavages de l'espace homogène $(G \times G)/G$ où $G$ est plongé diagonalement dans $G \times G$. L'essentiel de ce qui suit est valable dans le cadre général où $G$ est un groupe de Lie réel semi-simple connexe linéaire de rang réel un ou l'ensemble des $\mathbf{k}$-points d'un $\mathbf{k}$-groupe algébrique semi-simple connexe de $\mathbf{k}$-rang un.

Pour $\mathbf{k} = \mathbb{R}$, nos motivations viennent de la géométrie lorentzienne. En effet, $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ vu comme espace homogène sous $G \times G$ s'identifie à l'*espace anti-de Sitter*

$$\mathrm{AdS}^3 = \big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4,\ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 1\big\}.$$

Celui-ci est une variété lorentzienne (la restriction de la forme quadratique $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$ aux espaces tangents à $\mathrm{AdS}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ est de signature $(1, 2)$), de courbure constante $< 0$ (pour la notion de courbure sectionnelle associée à l'équivalent lorentzien de la connexion de Levi-Cività). Il est en quelque sorte le pendant lorentzien de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3$. Les variétés lorentziennes compactes de dimension 3 de courbure constante $< 0$, ou *variétés anti-de Sitter* compactes de dimension 3, sont les quotients de $G$ par des sous-groupes discrets de $G \times G$ agissant proprement et cocompactement sur $G$ (à revêtement fini, isométrie et renormalisation de la métrique près) [**7**], [**10**]. Pour $\mathbf{k} = \mathbb{C}$, nos motivations viennent de la géométrie riemannienne holomorphe, qui est l'analogue dans le monde des variétés complexes de la géométrie pseudo-riemannienne (par exemple lorentzienne). En effet, $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ vu comme espace homogène sous $G \times G$ s'identifie à la sphère complexe de dimension 3, sur laquelle sont localement modelées les variétés complexes riemanniennes holomorphes de dimension 3 de courbure constante non nulle. Mais il est également naturel de vouloir faire de la géométrie $p$-adique au vu des bonnes propriétés du corps topologique $\mathbb{Q}_p$. Dans ce cadre nos motivations viennent de l'étude des quadriques $p$-adiques, qui sont des objets géométriques intéressants au même titre que les quadriques réelles ou complexes : $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ vu comme espace homogène sous $G \times G$ s'identifie à la quadrique de $\mathbb{Q}_p^4$ d'équation $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 1$. Il s'agit de la seule quadrique $p$-adique de dimension 3 dont la description des pavages n'était pas connue.

## 2. Description des groupes de pavages de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{k})$

Soit $G = \mathrm{SL}_2(\mathbf{k})$ où $\mathbf{k} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{Q}_p$. Commençons par remarquer que $G$ admet bien des pavages par des sous-groupes discrets de $G \times G$. En effet, on sait construire (de manière arithmétique par exemple) des *réseaux cocompacts* de $G$, c'est-à-dire des sous-groupes discrets $\Gamma_0$ tels que le quotient $\Gamma_0 \backslash G$ soit compact ; le groupe $\Gamma = \Gamma_0 \times \{1\}$ agit alors proprement et cocompactement sur $G$. Pour $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, d'autres exemples de groupes de pavages de $G$ ont été construits par W. M. Goldman [**3**], É. Ghys [**2**] et F. Salein [**11**]. Pour les décrire tous, nous aurons besoin de la notion de *projection de Cartan* de $G$.

Pour $\mathbf{k} = \mathbb{R}$, rappelons la *décomposition polaire* de $G$ : toute matrice $g \in G$ s'écrit $g = k_g s_g$ où $k_g \in G$ est orthogonale et $s_g \in G$ symétrique définie positive. La matrice $s_g$ est diagonalisable en base orthonormée, donc s'écrit

$$s_g = k'_g \begin{pmatrix} a_g & 0 \\ 0 & a_g^{-1} \end{pmatrix} {k'_g}^{-1}$$

où $k'_g \in \mathrm{SO}(2)$ et où $a_g, a_g^{-1} > 0$ sont les racines carrées des valeurs propres de ${}^t gg$. On obtient ainsi la *décomposition de Cartan* $G = KAK$, où $K = \mathrm{SO}(2)$ et où $A$ est le groupe des matrices diagonales de $G$. La *projection de Cartan* $\mu : G \to \mathbb{R}^+$ qui à $g \in G$ associe $|\log(a_g/a_g^{-1})|$ est bien définie, continue et propre. On définit de même une projection de Cartan $\mu : G \to \mathbb{R}^+$ pour $\mathbf{k} = \mathbb{C}$ : il suffit de remplacer $\mathrm{SO}(2)$ par $\mathrm{SU}(2)$ et les matrices symétriques par les matrices hermitiennes. Enfin, pour $\mathbf{k} = \mathbb{Q}_p$, le théorème de la base adaptée induit la décomposition de Cartan $G = KAK$ où $A$ est encore le groupe des matrices diagonales de $G$ mais où $K = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)$. On peut là aussi définir une projection de Cartan $\mu : G \to \mathbb{R}^+$ comme "le logarithme de la projection sur $A$" : pour $g \in G$, on choisit $n \in \mathbb{N}$ tel que la matrice $p^n g$ soit à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$ et l'on pose $\mu(g) = |v_p(a_g/a'_g)|$ où $a_g$ et $a'_g$ sont les facteurs invariants de $p^n g$ et où $v_p : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Z}$ est la valuation $p$-adique (ceci ne dépend pas du choix de $n$).

Décrivons, en termes de la projection de Cartan $\mu : G \to \mathbb{R}^+$, les groupes de pavages de $G$ vu comme espace homogène sous $G \times G$.

***Théorème 2.1.*** — *À la permutation près des deux facteurs de $G \times G$, les groupes de pavages de $G$ de type fini sans torsion sont les graphes de la forme*

$$\Gamma_0^\rho = \big\{(\gamma, \rho(\gamma)),\ \gamma \in \Gamma_0\big\}$$

*où $\Gamma_0$ est un réseau cocompact de $G$ et $\rho : \Gamma_0 \to G$ un morphisme de groupes* admissible*, au sens où pour tout $R > 0$ on a $\mu(\rho(\gamma)) \leq \mu(\gamma) - R$ pour tout $\gamma \in \Gamma_0$ en dehors d'un ensemble fini.*

Pour $\mathbf{k} = \mathbb{R}$, cette description résulte des travaux [**10**] et [**11**] sur les variétés anti-de Sitter de dimension 3 et d'un argument cohomologique [**8**]. Pour $\mathbf{k} = \mathbb{Q}_p$ et dans un cadre plus général, elle résulte de [**4**] et d'un argument géométrique sur l'*arbre de Bruhat-Tits* de $G$ donné dans [**5**]. Mentionnons également [**9**] qui s'applique à $\mathbf{k} = \mathbb{C}$.

La condition d'admissibilité signifie que l'ensemble $(\mu \times \mu)(\Gamma_0^\rho)$ est essentiellement situé sous la diagonale de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ (à un nombre fini de points près) et qu'il "s'éloigne de la diagonale à l'infini". Notons que de manière générale la propreté d'une action sur un espace homogène réductif peut toujours se lire sur une projection de Cartan : c'est le sens du *critère de propreté* d'Y. Benoist [**1**].

## 3. Déformation des groupes de pavages de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{k})$

Étant donné un groupe de pavage $\Gamma \subset G \times G$ de $G$, il est naturel de chercher à déformer $\Gamma$ dans $G \times G$ pour obtenir de nouveaux pavages de $G$. On peut toujours déformer $\Gamma$ en le conjuguant par un élément de $G \times G$ proche de l'élément neutre :

dans ce cas le nouveau groupe est encore un groupe de pavage de $G$, associé à un pavage que l'on peut dire équivalent à celui de départ. Pour $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$, il existe d'autres types de déformations de $\Gamma$ dans $G\times G$. Le théorème suivant affirme que les groupes obtenus sont encore des groupes de pavages de $G$ ; les pavages associés ne sont plus alors équivalents au pavage d'origine.

***Théorème 3.1***. — *Soit $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Pour tout groupe de pavage $\Gamma$ de $G$, de type fini, il existe un voisinage $\mathcal{U} \subset \mathrm{Hom}(\Gamma, G \times G)$ de l'inclusion naturelle tel que $\varphi(\Gamma)$ soit un groupe de pavage de $G$ pour tout $\varphi \in \mathcal{U}$.*

On note ici $\mathrm{Hom}(\Gamma, G\times G)$ l'ensemble des morphismes de groupes de $\Gamma$ dans $G\times G$, muni de la topologie compacte ouverte.

Pour $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ le théorème 3.1 résulte de la complétude des variétés anti-de Sitter compactes [**7**] et d'un principe, dû à Ehresmann, de déformation des holonomies de $(G, X)$-structures sur les variétés compactes. Pour $\mathbf{k} = \mathbb{Q}_p$ il s'agit d'un résultat nouveau, démontré dans [**5**]. Dans [**6**] on a adapté les idées de [**5**] pour obtenir une nouvelle démonstration du théorème 3.1 pour $\mathbf{k} = \mathbb{R}$, démonstration qui a l'avantage de ne pas utiliser la complétude et nourrit donc l'espoir de s'adapter à des groupes plus généraux. Nous allons donner un bref aperçu de cette démonstration. Pour cela, commençons par donner une interprétation géométrique de la projection de Cartan $\mu$.

**3.1. Interprétation géométrique de $\mu$.** — Pour $\mathbf{k} = \mathbb{R}$, rappelons que $G$ agit sur le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}^2$ par homographies. Cette action préserve la distance hyperbolique $d_{\mathbb{H}^2}$ sur $\mathbb{H}^2$, et le stabilisateur du point $i$ est le groupe $K = \mathrm{SO}(2)$. Pour tous $k_1, k_2 \in K$ et $a > 0$ on a donc

$$d_{\mathbb{H}^2}\Big(i, k_1 \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} k_2 \cdot i\Big) = d_{\mathbb{H}^2}\Big(k_1^{-1} \cdot i, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} k_2 \cdot i\Big) = d_{\mathbb{H}^2}(i, a^2 \cdot i) = 2\,|\log a|,$$

d'où $\mu(g) = d_{\mathbb{H}^2}(i, g\cdot i)$ pour tout $g \in G$. Pour $\mathbf{k} = \mathbb{Q}_p$ aussi, on a une interprétation de $\mu$ comme une distance, le demi-plan de Poincaré étant remplacé par un arbre simplicial. En effet, le groupe $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ agit naturellement par isométries sur son *arbre de Bruhat-Tits* $X$, qui est un arbre régulier de valence $p+1$ dont toutes les arêtes sont de longueur 1. Cette action peut se voir en identifiant les sommets de $X$ aux classes d'homothétie (*modulo* $\mathbb{Q}_p^*$) de sous-$\mathbb{Z}_p$-modules libres de rang 2 de $\mathbb{Q}_p^2$, deux sommets étant adjacents s'ils représentent des $\mathbb{Z}_p$-modules $\Lambda$ et $\Lambda'$ tels que $\Lambda$ soit un sous-module d'indice $p$ de $\Lambda'$. L'action de $G$ sur $X$ est alors induite par l'action naturelle de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $\mathbb{Q}_p^2$. Le stabilisateur de la classe $x_0$ de $\mathbb{Z}_p^2$ étant le groupe $K = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)$, on obtient, comme ci-dessus, $\mu(g) = d_X(x_0, g\cdot x_0)$ pour tout $g \in G$, où $d_X$ désigne la distance de $X$.

**3.2. Idée de la démonstration du théorème 3.1.** — Pour démontrer le théorème 3.1, partons d'un groupe de pavage

$$\Gamma_0^\rho = \{(\gamma, \rho(\gamma)),\ \gamma \in \Gamma_0\}$$

de $G$, où $\Gamma_0$ est un réseau cocompact de $G$ et $\rho : \Gamma_0 \to G$ un morphisme de groupes admissible, et déformons légèrement $\Gamma_0^\rho$ dans $G\times G$. Il n'est pas difficile de voir que le nouveau groupe est encore un graphe $(\Gamma_0')^{\rho'} = \{(\gamma', \rho'(\gamma')),\ \gamma' \in \Gamma_0'\}$ où $\Gamma_0'$ est un réseau cocompact de $G$ et $\rho' : \Gamma'_0 \to G$ un morphisme de groupes. Toute la difficulté consiste à montrer que $\rho'$ est admissible. L'interprétation géométrique de $\mu$ montre qu'il s'agit en fait d'un problème de distances dans le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}^2$ ou dans l'arbre de Bruhat-Tits de $G$. La clé de la démonstration est le résultat suivant sur les applications lipschitziennes, établi dans [**5**] et [**6**].

***Théorème 3.2***. — *Soient $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ (resp. $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$) et $X$ le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}^2$ (resp. l'arbre de Bruhat-Tits de $G$). Soient $\Gamma_0$ un réseau cocompact de $G$, $\rho : \Gamma_0 \to G$ un morphisme de groupes et $f : X \to X$ une application $\rho$-équivariante et lipschitzienne de constante de Lipschitz $C$ minimale. Si $C \geq 1$, il existe une droite géodésique de $X$ sur laquelle $f$ est affine de constante $C$.*

On dit ici que $f : X \to X$ est *$\rho$-équivariante* si $f(\gamma \cdot x) = \rho(\gamma) \cdot f(x)$ pour tout $\gamma \in \Gamma_0$ et tout $x \in X$. Une application $f$ comme dans le théorème 3.2 existe toujours d'après le théorème d'Ascoli, sauf dans un cas dégénéré que l'on traite séparément.

Lorsque $\Gamma_0$ est sans torsion, le théorème 3.2 pour $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ (resp. pour $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$) permet de retrouver un résultat de W. P. Thurston [**12**] (resp. de M. Bestvina et T. White) sur l'équivalence entre deux définitions d'une même *distance asymétrique* sur l'espace de Teichmüller de la surface $\Gamma_0\backslash\mathbb{H}^2$ (resp. sur l'outre-espace $\mathrm{CV}_n$ où $n$ est le rang du groupe libre $\Gamma_0$).

## Références

[1] Y. Benoist, *Actions propres sur les espaces homogènes réductifs*, Ann. Math. 144 (1996).
[2] É. Ghys, *Déformations des structures complexes sur les espaces homogènes de* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, J. Reine Angew. Math. 468 (1995).
[3] W. M. Goldman, *Nonstandard Lorentz space forms*, J. Differ. Geom. 21 (1985).
[4] F. Kassel, *Proper actions on corank-one reductive homogeneous spaces*, J. Lie Theory 18 (2008).
[5] F. Kassel, *Quotients compacts des groupes ultramétriques de rang un*, arXiv 0904.4657, à paraître aux Annales de l'Institut Fourier.
[6] F. Kassel, *Quotients compacts d'espaces homogènes réels ou p-adiques*, thèse de doctorat, Université Paris-Sud 11, novembre 2009.
[7] B. Klingler, *Complétude des variétés lorentziennes à courbure constante*, Math. Ann. 306 (1996).
[8] T. Kobayashi, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann. 285 (1989).
[9] T. Kobayashi, *On discontinuous groups acting on homogeneous spaces with noncompact isotropy subgroups*, J. Geom. Phys. 12 (1993).
[10] R. S. Kulkarni, F. Raymond, *3-dimensional Lorentz space-forms and Seifert fiber spaces*, J. Differential Geom. 21 (1985).
[11] F. Salein, *Variétés anti-de Sitter de dimension 3 exotiques*, Ann. Inst. Fourier 50 (2000).
[12] W. P. Thurston, *Minimal stretch maps between hyperbolic surfaces* (1986), arXiv 9801039.

Fanny Kassel, Département de mathématiques, Bâtiment 425, Faculté des Sciences d'Orsay, Université Paris-Sud 11, 91405 Orsay Cedex • *E-mail :* `fanny.kassel@math.u-psud.fr`