Traité du triangle arithmétique

(1665)

1

1 1

1 2 1

1 ?

1

1 1

1 2 1

+

1

1

1 1

1 2 1

1 3 ?

1

1 1

1 2 1

1 3

+

			1			
		1		1		
	1		2		1	
1		3		3		1

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

+

1

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

+

1 4

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1

1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1

1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1

1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1

1 15 105 455 1365 3003 5005 6435 6435 5005 3003 1365 455 105 15 1

1 16 120 560 1820 4368 8008 11440 12870 11440 8008 4368 1820 560 120 16 1

1 17 136 680 2380 6188 12376 19448 24310 24310 19448 12376 6188 2380 680 136 17 1

1 18 153 816 3060 8568 18564 31824 43758 48620 43758 31824 18564 8568 3060 816 153 18 1

1 19 171 969 3876 11628 27132 50388 75582 92378 92378 75582 50388 27132 11628 3876 969 171 19 1

1 20 190 1140 4845 15504 38760 77520 125970 167960 184756 167960 125970 77520 38760 15504 4845 1140 190 20 1

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 20 15 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 $\boxed{120}$ 210 252 210 120 45 10 1

120

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1

1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1

1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1

1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1

1 15 105 455 1365 3003 5005 6435 6435 5005 3003 1365 455 105 15 1

1 16 120 560 1820 4368 8008 11440 12870 11440 8008 4368 1820 560 120 16 1

1 17 136 680 2380 6188 12376 19448 24310 24310 19448 12376 6188 2380 680 136 17 1

1 18 153 816 3060 8568 18564 31824 43758 48620 43758 31824 18564 8568 3060 816 153 18 1

1 19 171 969 3876 11628 27132 50388 75582 92378 92378 75582 50388 27132 11628 3876 969 171 19 1

1 20 190 $\boxed{1140}$ 4845 15504 38760 77520 125970 167960 184756 167960 125970 77520 38760 15504 4845 1140 190 20 1

1140

1	
1 1	2
1 2 1	4
1 3 3 1	8
1 4 6 4 1	16

La somme des entrées
de la n-ième ligne est 2^n.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 $\boxed{120}$ 210 252 210 120 45 10 1

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots 2.1$$

$$0! = 1$$

C_p^n = p-ième entrée

de la n-ième ligne

$$C_p^n = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

$$C_p^n = C_{n-p}^n$$

Formule du binôme

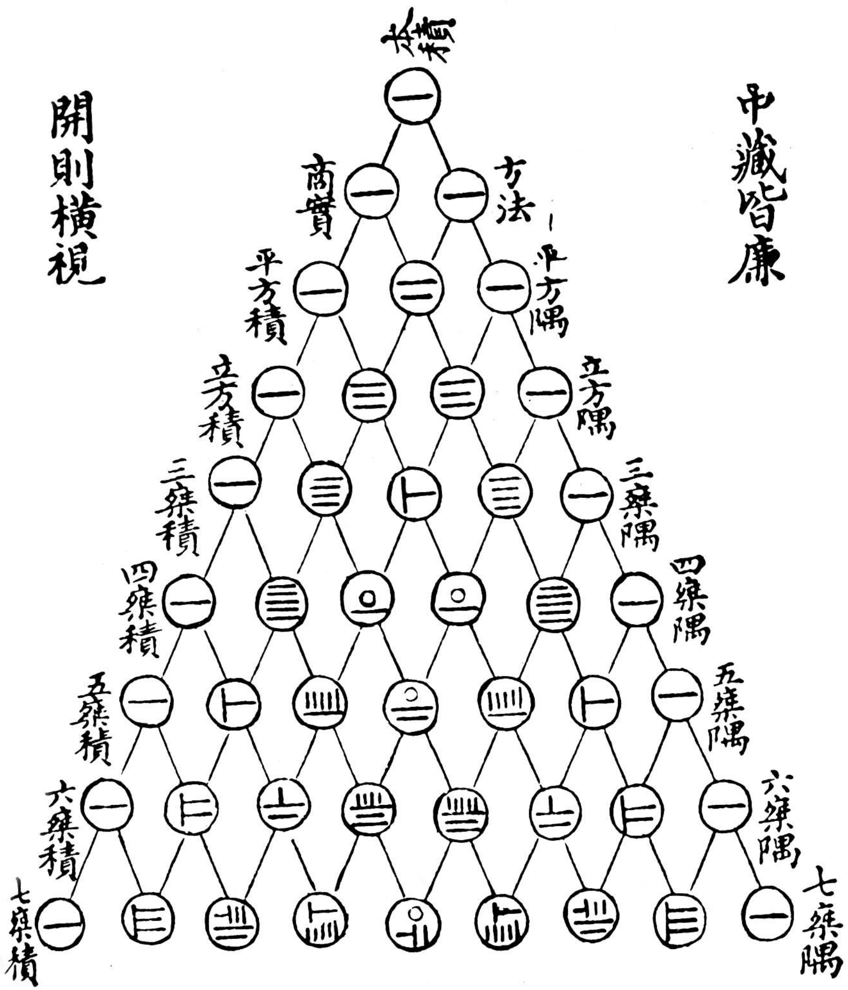
$$(1+x)^n = \sum_{p=0}^{n} C_p^n x^p$$

Exemple : $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$

Niccolò Tartaglia (1499-1557)

中藏皆廉

開則橫視



本積	方法	上廉	二廉	三廉	四廉	五廉	六廉	七廉

« Avertissement

On peut tirer de là d'autres proportions que je supprime, parce chacun les peut facilement conclure, et que ceux qui s'y voudront attacher en trouveront peut-être de plus belles que celles que je pourrais donner. »

La somme des carrés des entrées
de la n-ième ligne
est égale à la n-ième entrée
de la ligne $2n$.

$$\sum_{p=0}^{n} \left(C_p^n \right)^2 = C_n^{2n}$$

Preuve

C_n^{2n} = coefficient de x^n dans $(1+x)^{2n}$

Preuve

$$C_n^{2n} = \text{coefficient de } x^n \text{ dans } (1+x)^{2n}$$
$$= \text{coefficient de } x^n \text{ dans } (1+x)^n(1+x)^n$$

Preuve

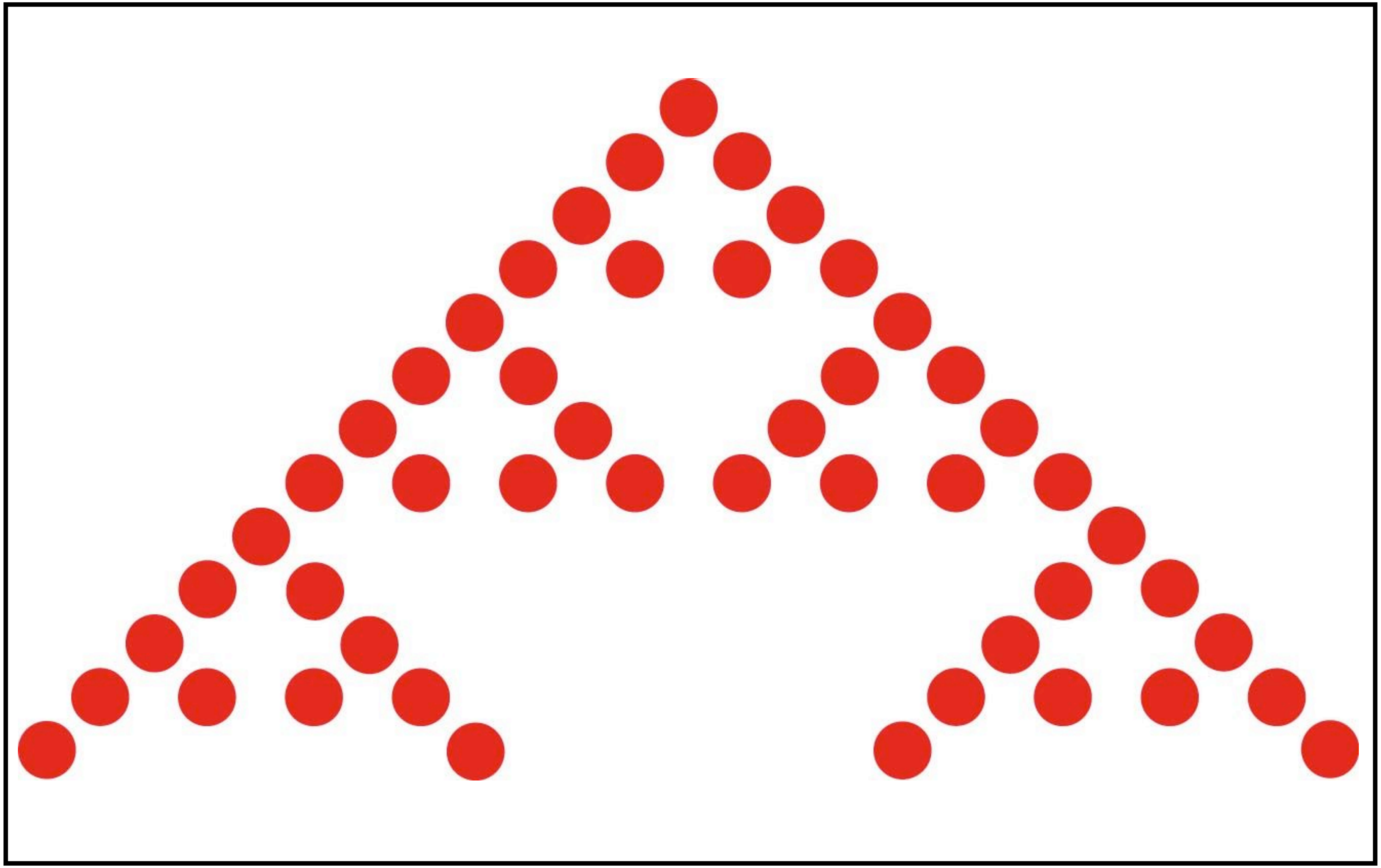
$$C_n^{2n} = \text{coefficient de } x^n \text{ dans } (1+x)^{2n}$$
$$= \text{coefficient de } x^n \text{ dans } (1+x)^n(1+x)^n$$
$$= \text{coefficient de } x^n \text{ dans } \left(\sum_{p=0}^{n} C_p^n x^p\right) \cdot \left(\sum_{q=0}^{n} C_q^n x^q\right)$$

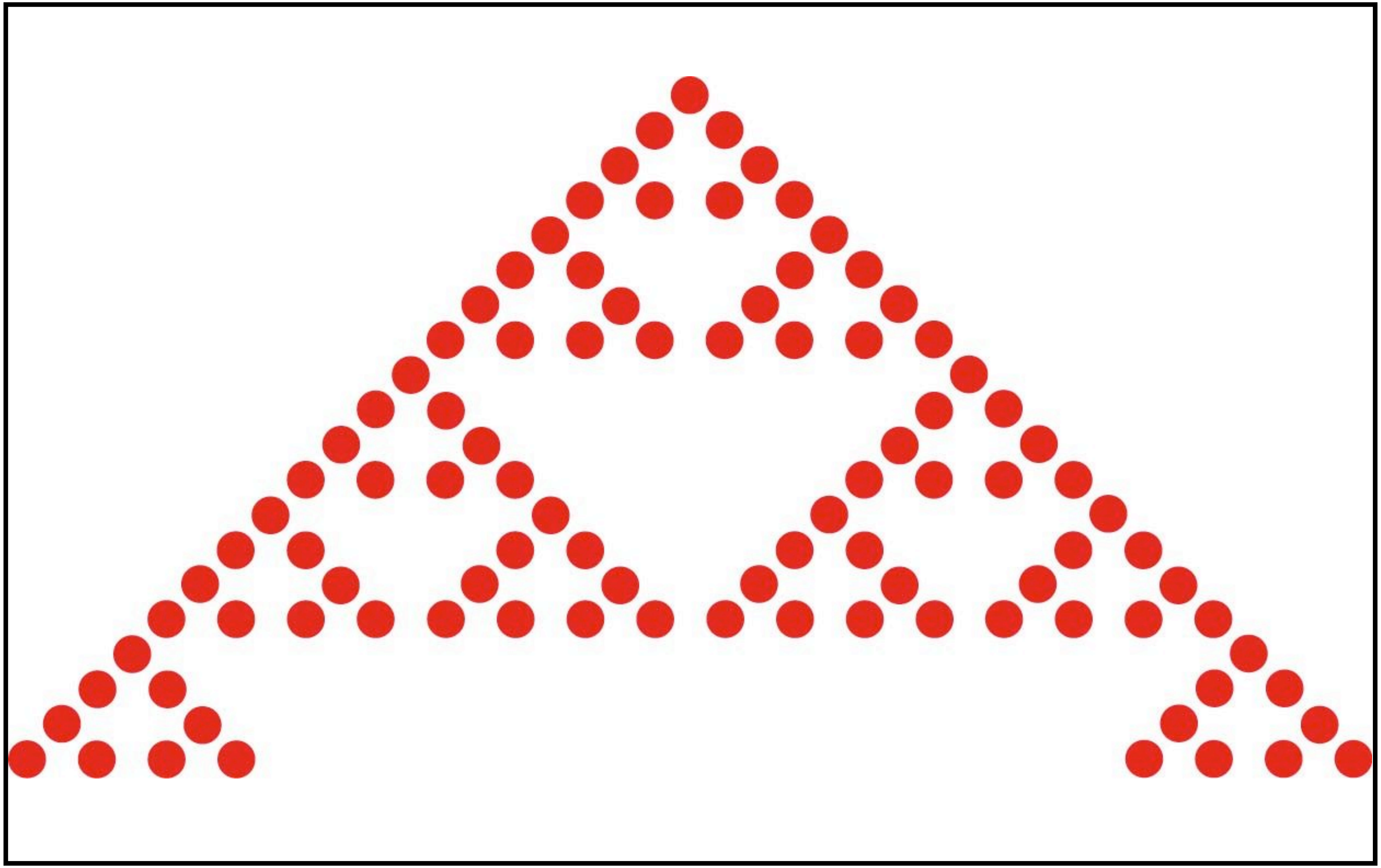
Preuve

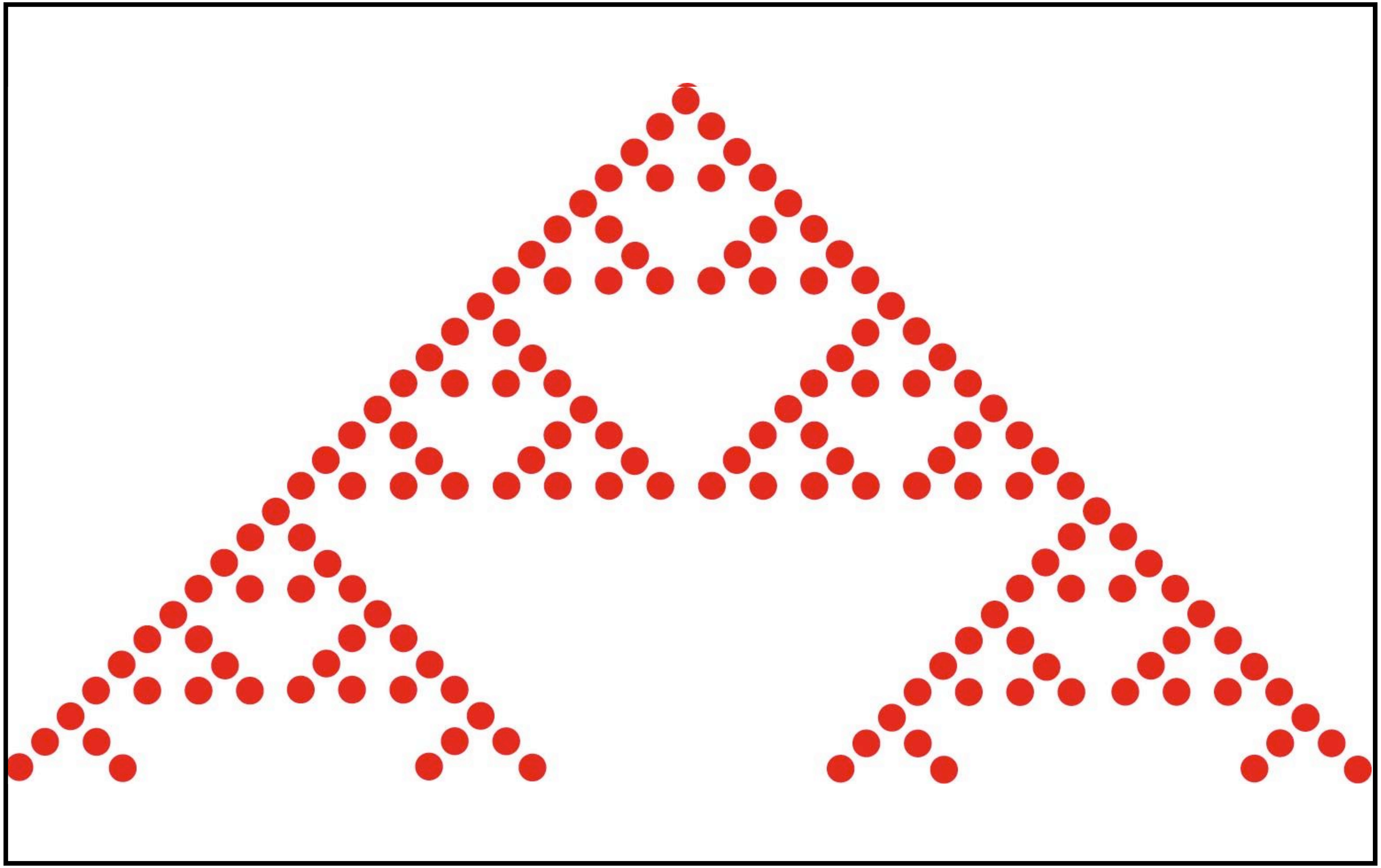
$$C_n^{2n} = \text{coefficient de } x^n \text{ dans } (1+x)^{2n}$$
$$= \text{coefficient de } x^n \text{ dans } (1+x)^n(1+x)^n$$
$$= \text{coefficient de } x^n \text{ dans } \left(\sum_{p=0}^{n} C_p^n x^p\right) \cdot \left(\sum_{q=0}^{n} C_q^n x^q\right)$$
$$= \sum_{p=0}^{n} C_p^n \cdot C_{n-p}^n$$

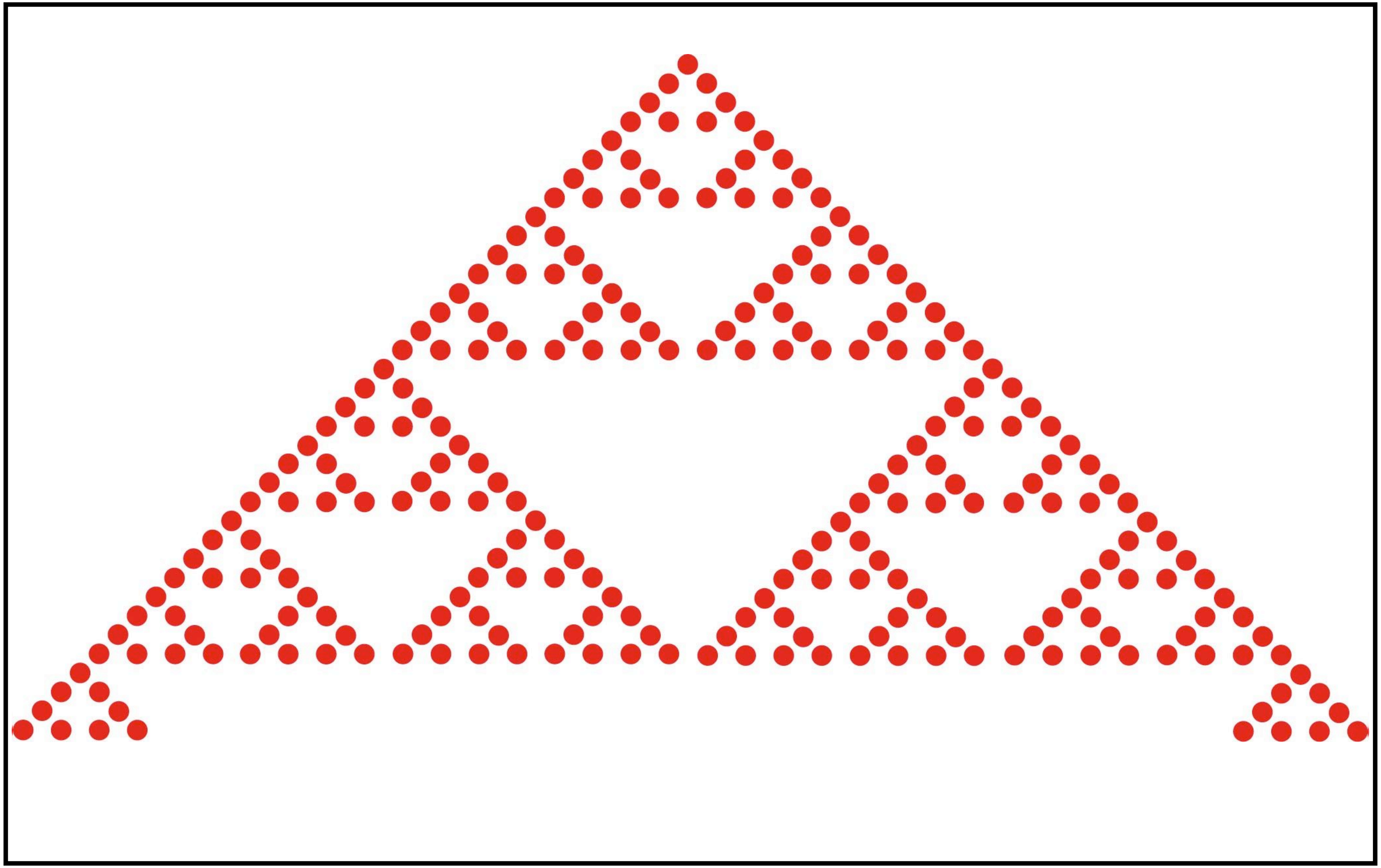
Preuve

$$
\begin{aligned}
C_n^{2n} &= \text{coefficient de } x^n \text{ dans } (1+x)^{2n} \\
&= \text{coefficient de } x^n \text{ dans } (1+x)^n(1+x)^n \\
&= \text{coefficient de } x^n \text{ dans } \left(\sum_{p=0}^{n} C_p^n x^p\right) \cdot \left(\sum_{q=0}^{n} C_q^n x^q\right) \\
&= \sum_{p=0}^{n} C_p^n \cdot C_{n-p}^n \\
&= \sum_{p=0}^{n} C_p^n \cdot C_p^n
\end{aligned}
$$

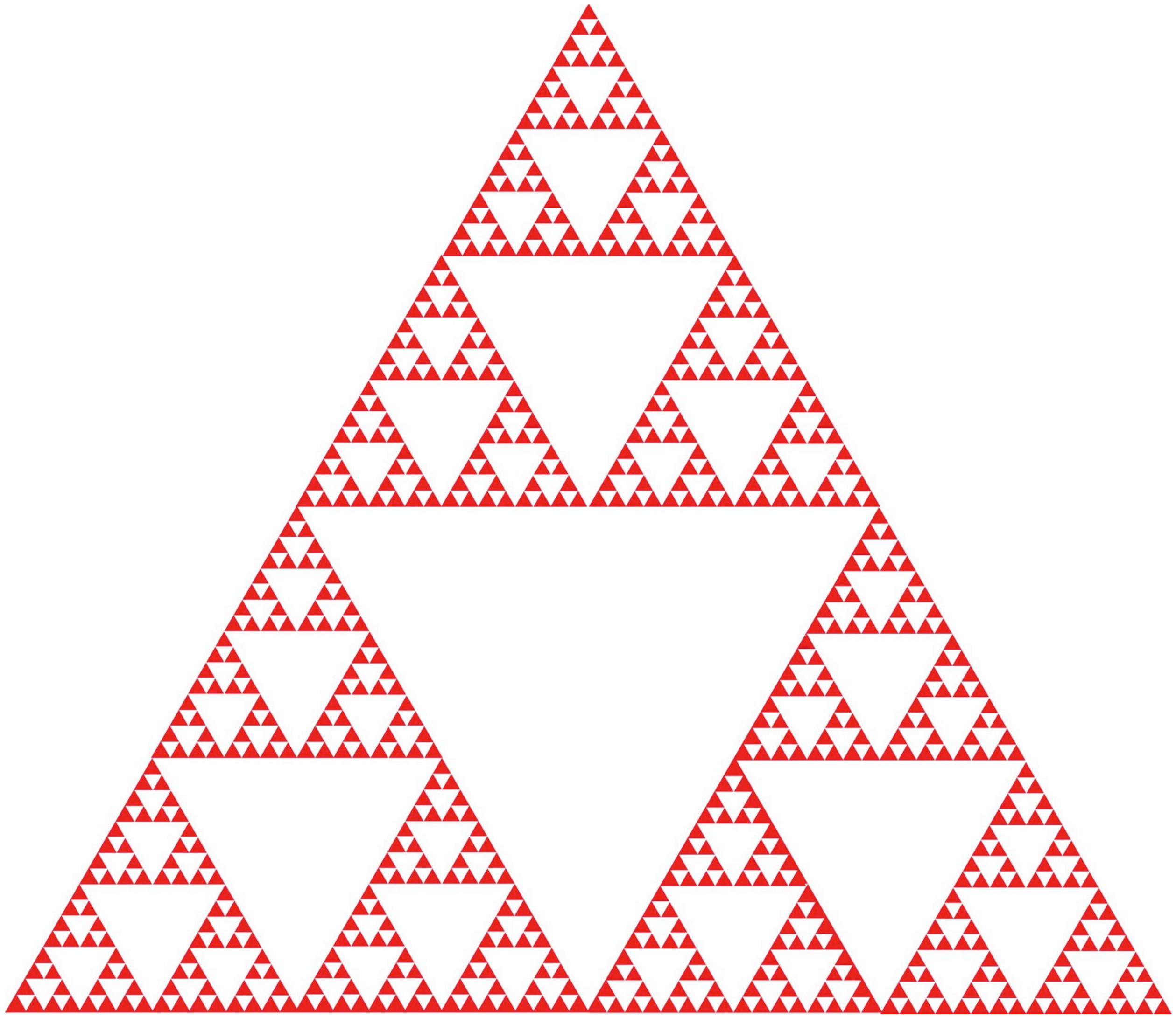








Fractal de Sierpinski



Théorème (A. Granville, O. Ramaré)

Si $n \geq 5$ le nombre C_n^{2n} est divisible par un carré.

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

$b(n) :=$ plus petit entier b
tel que les nombres C_p^n,

$$b < p < n - b,$$

ont un diviseur commun.

Problème :

Montrer que $b(n)$ est petit

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$b(n)$	1	1	2	1	1	1	2	1	2	1	2	3

n	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
$b(n)$	1	1	2	1	2	3	4	1	2	1	2	1

Un nombre entier
est dit premier
s'il n'est divisible
que par 1
et par lui-même.

Exemples :

2, 3, 5, 7, 11, 13

sont des nombres premiers

4, 6, 8, 10, 12

ne sont pas premiers

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$b(n)$	1	1	2	1	1	1	2	1	2	1	2	3

n	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
$b(n)$	1	1	2	1	2	3	4	1	2	1	2	1

Théorème (A. Granville) :

$b(n) = 1$ si et seulement si n est une puissance d'un nombre premier : $n = p^k$.

$b(n) - 1$

est le plus petit entier de la forme

$n - p \times p \times p \times \ldots \times p$,

où p est un nombre premier

(A. Granville)

Théorème (R. Barker, G. Harman, J. Pintz)

Il existe une constante $C > 0$ telle que, quel que soit $x > 1$, il existe un nombre premier entre x et $x - C\,x^{0{,}525}$.

Corollaire :

$$b(n) \leqslant C' \sqrt{n}\; n^{0,025}$$

Fonction zêta de Riemann

Unique fonction méromorphe $\zeta(s)$,

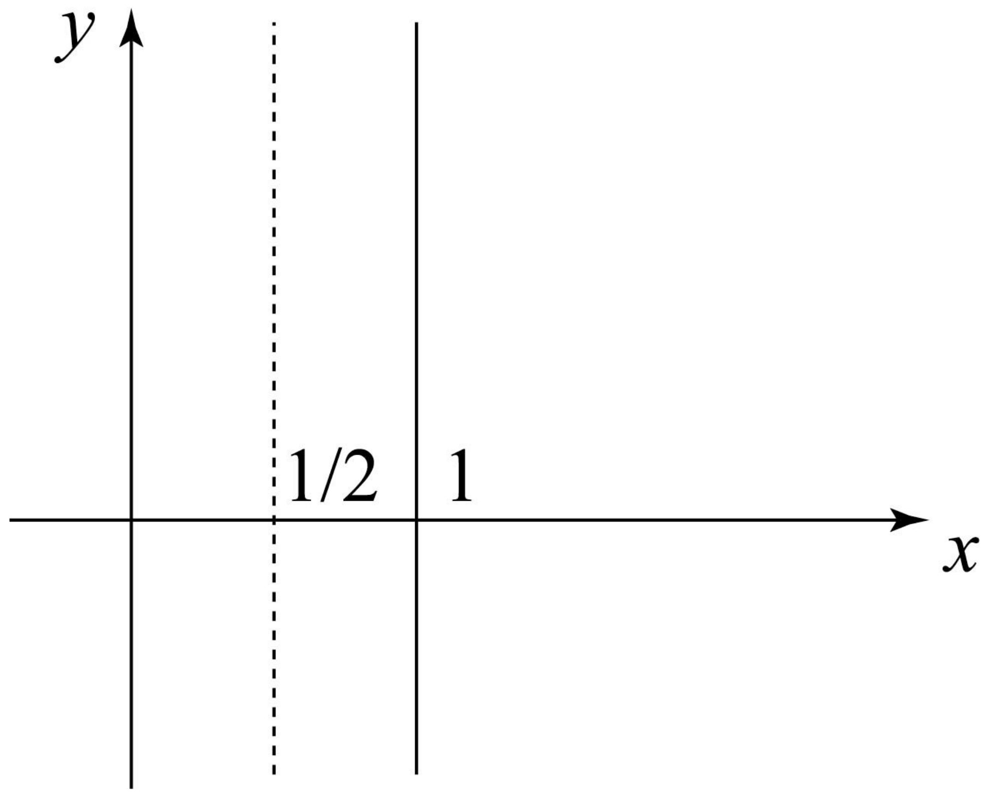
$s = x + iy \in \mathbb{C}$, telle que, si $x > 1$,

$$\zeta(x) = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{5^x} + \cdots$$

Hypothèse de Riemann

Si $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $\zeta(s) = 0$

on a $x = \dfrac{1}{2}$.



y
1/2
1
x

Si l'hypothèse de Riemann
est vraie :

quel que soit $\epsilon > 0$

il existe une constante $C(\epsilon) > 0$

telle que

$$b(n) \leqslant C(\epsilon)\sqrt{n}\, n^{\epsilon}.$$

$$b(n) \leqslant C' \sqrt{n}\, n^{0,025}$$

$$\sup\{b(m), m \leqslant n\} \geqslant C'' \log(n)$$

(Erdös)