

# Les variétés sur le corps à un élément

Christophe Soulé

December 12, 2003

**A Pierre Cartier**

Une fantaisie récurrente de plusieurs mathématiciens ([23], [15], [20], [12], ...) est l'existence d'un "corps à un élément", noté  $\mathbb{F}_1$ , et d'une géométrie algébrique sur ce corps. On pense par exemple que le groupe des points de  $SL_N$  dans  $\mathbb{F}_1$  est le groupe symétrique des permutations de  $N$  lettres, et que ces  $N$  lettres sont les points dans  $\mathbb{F}_1$  de l'espace projectif  $\mathbb{P}^{N-1}$ . Et l'on s'est aperçu depuis longtemps que des formules connues pour les points d'un groupe de Chevalley dans le corps fini  $\mathbb{F}_q$ ,  $q > 1$ , donnent par la spécialisation  $q = 1$  des formules vraies pour le groupe de Weyl correspondant. Par ailleurs, l'analogie entre corps de nombres et corps de fonctions incite à chercher un corps de base pour la courbe affine  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ . Enfin, il y a un intérêt croissant en géométrie arithmétique pour les variétés algébriques sur  $\mathbb{Z}$  issues de constructions combinatoires sur les ensembles finis.

Le but de cet article est de proposer une définition des variétés sur  $\mathbb{F}_1$ . Pour ce faire, on part de l'idée qu'une variété  $X$  (de type fini) sur  $\mathbb{F}_1$  doit avoir une extension des scalaires à  $\mathbb{Z}$ , qui sera un schéma  $X_{\mathbb{Z}}$  de type fini sur  $\mathbb{Z}$ . Les points de  $X$  (dans un anneau ad hoc) sont alors une partie, qu'on supposera finie, de l'ensemble des points de  $X_{\mathbb{Z}}$ . Par exemple, l'ensemble des points du groupe multiplicatif  $\mathbb{G}_m$  sur  $\mathbb{F}_1$  dans un tel anneau  $R$  est l'ensemble des racines de l'unité de  $R$ .

La variété  $X_{\mathbb{Z}}$  doit être entièrement déterminée par  $X$  (à isomorphisme unique près). Autrement dit, les variétés sur  $\mathbb{Z}$  obtenues par extension des scalaires de  $\mathbb{F}_1$  à  $\mathbb{Z}$  possèdent une description "combinatoire finie". Notre résultat principal (Théorème 1) est que les variétés toriques lisses peuvent être définies sur  $\mathbb{F}_1$ . Un autre exemple, inspiré de la théorie d'Arakelov, consiste à associer à tout réseau  $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^d$  muni d'une norme hermitienne sur  $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$  une variété affine sur le corps  $\mathbb{F}_1$ . Cependant, nous n'avons pas su, à ce stade, définir sur  $\mathbb{F}_1$  les groupes de Chevalley et les variétés de drapeaux.

Pour en revenir à la définition d'une variété  $X$  sur  $\mathbb{F}_1$ , il se trouve que la donnée des points de  $X$  ne suffit pas à déterminer la variété algébrique  $X_{\mathbb{Z}}$  sur  $\mathbb{Z}$ . C'est pourquoi nous sommes conduits à adjoindre à la donnée des points celle de fonctions, à savoir une  $\mathbb{C}$ -algèbre  $\mathcal{A}_X$ , qui sera dans nos exemples une

algèbre de Banach commutative. La définition de  $X$  permet aussi d'évaluer les fonctions de  $\mathcal{A}_X$  aux points de  $X$ . Dans le cas de  $\mathbb{G}_m$  par exemple, l'algèbre  $\mathcal{A}_{\mathbb{G}_m}$  est celle des fonctions continues sur le cercle unité.

Une variété  $V$  sur  $\mathbb{Z}$  définit un "objet sur  $\mathbb{F}_1$ ", constitué du foncteur des points de  $V$  et de l'algèbre des fonctions algébriques sur  $V(\mathbb{C})$ . Si  $X$  est une variété sur  $\mathbb{F}_1$ , son extension  $X_{\mathbb{Z}}$  à  $\mathbb{Z}$  est un objet initial parmi toutes les variétés  $V$  sur  $\mathbb{Z}$  telles qu'il existe un morphisme d'objets sur  $\mathbb{F}_1$  de  $X$  vers  $V$  (Définitions 3 et 5). L'existence de  $X_{\mathbb{Z}}$  est une propriété non triviale de l'objet  $X$ .

Ce texte est organisé comme suit. Le premier paragraphe est un bref historique du corps  $\mathbb{F}_1$  et des spéculations auxquelles il a donné lieu. Le second explique quels raisonnements ont conduit aux définitions présentées ici, qui font l'objet du troisième paragraphe. La section 4 donne quelques propriétés des variétés sur  $\mathbb{F}_1$ , qui indiquent une certaine cohérence de la théorie envisagée. On peut par exemple définir des variétés sur  $\mathbb{F}_1$  par recollement (Proposition 5). La section suivante montre que les variétés toriques lisses et les réseaux hermitiens sont des exemples de variétés sur  $\mathbb{F}_1$ .

Dans le paragraphe 6 nous définissons, dans certains cas, la fonction zêta  $\zeta_X(s)$  d'une variété  $X$  sur  $\mathbb{F}_1$ , à partir du nombre de points de  $X$  dans les extensions finies de  $\mathbb{F}_1$ . Cette fonction  $\zeta_X(s)$  est un polynôme de la variable  $s$ , qui est bien celui prévu par Manin dans son article [15] sur le sujet.

Le dernier paragraphe propose des spéculations sur l'image de la  $K$ -théorie algébrique de  $\mathbb{F}_1$  dans celle de  $\mathbb{Z}$ . Il est naturel de penser que ce groupe est l'image de l'homomorphisme  $J$  d'Adams, qui prend ses valeurs dans les groupes d'homotopie stable des sphères. Un résultat de Totaro sur les variétés toriques [24] se révèle tout à fait cohérent avec une interprétation de cette image de  $J$  en termes d'extensions de motifs de Tate mixtes sur  $\mathbb{F}_1$ .

Ce travail n'est bien sûr qu'une tentative. Il serait intéressant de trouver d'autres exemples de variétés sur  $\mathbb{F}_1$  et démontrer davantage de propriétés, quitte à modifier les définitions. Par exemple, on aimerait disposer de produits fibrés dans la catégorie des schémas sur  $\mathbb{F}_1$ . On signalera au cours du texte quelques variantes possibles des définitions présentées.

Une version préliminaire de cet article est la courte prépublication [21]. J'ai bénéficié durant ce travail de très nombreuses discussions, avec notamment J.-B. Bost, M. Broué, P. Cartier, A. Connes, I. Gelfand, H. Gillet, M. Kapranov, M. Kontsevich, L. Lafforgue, Y. Manin, J.-P. Serre et B. Totaro, que je tiens à remercier, ainsi que le rapporteur.

## 1 Un historique

### 1.1

J. Tits parle dans [23] § 13 du "corps de caractéristique un". Si  $G$  est un groupe de Chevalley, simple et simplement connexe, le groupe des points de  $G$  dans  $\mathbb{F}_1$  n'est autre que le groupe de Weyl  $W$  de  $G$  :

$$W = G(\mathbb{F}_1). \tag{1}$$

Tits montre qu'on peut associer à  $G$  une "géométrie" finie, dont  $W$  est le groupe d'automorphismes et dont les propriétés sont comparables à celles du groupe fini  $G(\mathbb{F}_q)$  pour tout corps fini  $\mathbb{F}_q$ ,  $q > 1$ . Par exemple, la géométrie associée à  $G_2(\mathbb{F}_1)$  est l'hexagone.

La théorie des représentations fournit aussi de nombreux exemples justifiant la formule (1). R. Steinberg avait déjà construit dans [22] des représentations irréductibles de  $GL_N(\mathbb{F}_q)$  de façon parallèle à celle des représentations du groupe symétrique de  $N$  lettres  $\Sigma_N$ . Leurs caractères sont des  $q$ -analogues des formules connues pour le groupe symétrique. Par exemple, si  $N = N_1 + \dots + N_r$ ,  $N_i \geq 1$ , est une partition de l'entier  $N$  et si  $P \subset SL_N$  est le sous-groupe parabolique standard associé à cette partition, le cardinal de l'ensemble fini  $SL_N(\mathbb{F}_q)/P(\mathbb{F}_q)$  est

$$\#(SL_N(\mathbb{F}_q)/P(\mathbb{F}_q)) = \{N\}/\{N_1\}\{N_2\} \dots \{N_r\},$$

avec

$$\{n\} = \prod_{i=1}^n [i]$$

et

$$[n] = q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + 1.$$

Une telle formule, vraie si  $q > 1$ , demeure valable quand  $q = 1$  si l'on pose

$$\Sigma_N = SL_N(\mathbb{F}_1)$$

(cf. (1)) et

$$P(\mathbb{F}_1) = \prod_{i=1}^r \Sigma_{N_i}.$$

Si  $G$  est un groupe de Chevalley quelconque, les représentations "unipotentes" de  $G(\mathbb{F}_q)$  sont des  $q$ -analogues des représentations de  $W$ . Les travaux plus récents de M. Broué, G. Malle et J. Michel [4], [5], [6] montrent qu'il est possible d'étendre cette analogie en faisant de  $q$  une variable abstraite.

## 1.2

Y. Manin aborde d'un autre point de vue la discussion du corps à un élément  $\mathbb{F}_1$  [15]. L'analogie entre corps de nombres et corps de fonctions  $[W]$ , dont est issue la théorie d'Arakelov, fait du schéma  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$  l'analogie d'une courbe affine sur un corps. On peut voir dans  $\mathbb{F}_1$  le corps de définition de la courbe  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ . Manin demande alors quel sens donner au produit fibré

$$\text{Spec}(\mathbb{Z}) \times_{\text{Spec}(\mathbb{F}_1)} \text{Spec}(\mathbb{Z}). \quad (2)$$

Une telle question est naturelle si l'on se souvient du rôle joué par la surface  $C \times_{\mathbb{F}_q} C$  dans la preuve par Weil de l'hypothèse de Riemann pour une courbe projective et lisse  $C$  sur le corps fini  $\mathbb{F}_q$ .

Manin propose aussi de développer une géométrie algébrique sur le corps  $\mathbb{F}_1$  ([15], 1.7), ainsi qu'une théorie des motifs et des fonctions zêtas associées. Par exemple, l'espace projectif  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_1}^d$  de dimension  $d$  sur  $\mathbb{F}_1$  devrait avoir pour fonction zêta le polynôme

$$\zeta_{\mathbb{P}_{\mathbb{F}_1}^d}(s) = s(s-1)(s-2)\dots(s-d). \quad (3)$$

### 1.3

Ces spéculations ont été poursuivies par Smirnov [20] et Kapranov-Smirnov [12] [11] (non publiés). Ceux-ci proposent une algèbre linéaire sur  $\mathbb{F}_1$  (un espace vectoriel linéaire sur  $\mathbb{F}_1$  est un ensemble fini pointé) et expliquent en ces termes la loi de réciprocité de Gauss (voir [1] pour le cas géométrique). Ils proposent aussi que, si  $n \geq 1$ , le corps  $\mathbb{F}_1$  a une extension finie de degré  $n$ , dont les éléments inversibles sont les racines de l'unité d'ordre  $n$ .

## 2 Préliminaires

### 2.1

Notre objectif est de définir les variétés algébriques sur le corps à un élément.

Notons d'abord que l'on ne s'attend pas à voir figurer  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$  parmi ces variétés. En effet sa fonction zêta, la fonction zêta de Riemann, a un nombre infini de zéros, ce qui indique que  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$  n'est pas de type fini sur  $\text{Spec}(\mathbb{F}_1)$ . Et nous ne chercherons pas à donner un sens au produit fibré (2).

Par contre, si  $X$  est une variété (de type fini) sur  $\mathbb{F}_1$ , on s'attend à ce que  $X \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z}$  soit une variété algébrique (de type fini) sur  $\mathbb{Z}$ . Si de plus  $X$  est lisse sur  $\mathbb{F}_1$ , la variété  $X \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z}$  aura bonne réduction partout, de réduction en  $p$  la variété algébrique  $X \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{F}_p$ , lisse que  $\mathbb{F}_p$ . Ceci nous conduit à la question suivante :

**Question 1.** *Quelles sont les variétés sur  $\mathbb{Z}$  obtenues par extension des scalaires de  $\mathbb{F}_1$  à  $\mathbb{Z}$  ?*

On aimerait par exemple que les variétés toriques ou les variétés de drapeaux d'un groupe de Chevalley puissent être définies sur  $\mathbb{F}_1$ .

### 2.2

Un point de départ pour nos définitions est cette définition très économique des schémas : un schéma est un foncteur covariant de la catégorie des anneaux vers celle des ensembles qui est localement représentable par un anneau. On trouvera dans [8] la preuve que cette définition est équivalente à la définition usuelle. Ceci suggère de définir les variétés sur  $\mathbb{F}_1$  comme foncteurs d'une catégorie d'anneaux vers celle des ensembles finis.

### 2.3

Puisqu'à une variété  $X$  sur  $\mathbb{F}_1$  on souhaite associer une variété algébrique  $X \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z}$  sur les entiers, il convient de comprendre quel est le foncteur associé à l'extension des scalaires d'une variété algébrique.

Soit  $k$  un corps,  $\mathcal{A}_k$  la catégorie des  $k$ -algèbres unitaires commutatives, et  $\Omega$  un objet de  $\mathcal{A}_k$ . Si  $R$  est un objet de  $\mathcal{A}_k$ , on note  $R_\Omega = R \otimes_k \Omega$  son extension des scalaires de  $k$  à  $\Omega$ . De même, si  $X$  est un schéma sur  $k$ , on pose  $X_\Omega = X \otimes_k \Omega$ .

Notons  $\mathcal{E}ns$  la catégorie des ensembles. Si  $X$  est un schéma sur  $k$ , on désigne par

$$\underline{X} : \mathcal{A}_k \rightarrow \mathcal{E}ns$$

le foncteur covariant qui à  $R$  associe  $X(R)$ . De même, si  $S$  est un schéma sur  $\Omega$ , on désigne par

$$\underline{S} : \mathcal{A}_k \rightarrow \mathcal{E}ns$$

le foncteur covariant qui à  $R$  associe  $S(R_\Omega)$ . La proposition suivante montre que le foncteur  $\underline{X}_\Omega$  vérifie une propriété universelle.

**Proposition 1.** i) Pour tout objet  $R$  de  $\mathcal{A}_k$  et tout schéma  $X$  sur  $k$  il existe une inclusion canonique naturelle

$$X(R) \subset X_\Omega(R_\Omega).$$

On note  $i : \underline{X} \rightarrow \underline{X}_\Omega$  la transformation naturelle ainsi définie.

ii) Si  $S$  est un schéma sur  $\Omega$  et si

$$\varphi : \underline{X} \rightarrow \underline{S}$$

est une transformation naturelle, il existe un unique morphisme algébrique sur  $\Omega$

$$\varphi_\Omega : X_\Omega \rightarrow S$$

tel que la transformation composée

$$\underline{X} \xrightarrow{i} \underline{X}_\Omega \xrightarrow{\varphi_\Omega} \underline{S}$$

de  $i$  avec la transformation induite par  $\varphi_\Omega$  coïncide avec  $\varphi$ , i.e.  $\varphi = \varphi_\Omega \circ i$ .

**Preuve.** Puisque  $k$  est contenu dans  $\Omega$  et que  $X_\Omega(R_\Omega)$  coïncide avec l'ensemble des points de  $X$  dans la  $k$ -algèbre  $R_\Omega$ , l'énoncé i) est clair. Pour montrer ii) supposons d'abord que  $X$  est affine et soit  $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$  la  $k$ -algèbre des fonctions globales sur  $X$ . L'identité de  $A$  définit un point  $\text{id}_A \in X(A)$ , dont l'image par  $\varphi$  est un morphisme algébrique sur  $\Omega$  :

$$\varphi_\Omega \in \text{Hom}_\Omega(X_\Omega, S) = X_\Omega(A_\Omega).$$

Si  $R$  est une  $k$ -algèbre et  $f \in X(R)$  un morphisme de  $A$  vers  $R$ , on a, par functorialité de  $\varphi$ ,

$$\varphi(f) = f^*(\varphi(\text{id}_A)) = f^*(\varphi_\Omega) = \varphi_\Omega \circ f_\Omega.$$

Cela montre que  $\varphi = \varphi_\Omega \circ i$ .

Dans le cas général, soit  $X = \bigcup_{j \in J} X_j$  un recouvrement ouvert de  $X$  par des variétés affines et

$$\varphi : \underline{X} \rightarrow \underline{S}$$

une transformation naturelle. La restriction de  $\varphi$  à  $\underline{X}_j$  (resp.  $\underline{X}_j \cap \underline{X}_{j'}$ ) est induite par un morphisme algébrique  $\varphi_{j\Omega} : X_{j\Omega} \rightarrow S$  (resp.  $\varphi_{jj'\Omega} : (X_j \cap X_{j'})_\Omega \rightarrow S$ ) et, par functorialité et unicité, la restriction de  $\varphi_{j\Omega}$  à  $(X_j \cap X_{j'})_\Omega$  coïncide avec  $\varphi_{jj'\Omega}$  quels que soient les indices  $j$  et  $j'$  dans  $J$ . Par conséquent, les morphismes  $\varphi_{j\Omega}$ ,  $j \in J$ , se recollent pour donner un morphisme

$$\varphi_\Omega : X \rightarrow S$$

algébrique sur  $\Omega$ . Si  $R$  est une  $k$ -algèbre et  $f : \text{Spec}(R) \rightarrow X$  un point de  $X(R)$ , considérons les  $k$ -schémas affines  $U_j = f^{-1}(X_j)$ ,  $j \in J$ . La restriction de  $(\varphi_\Omega \circ i)(f)$  à  $U_{j\Omega}$  coïncide par définition avec celle de  $\varphi_{j\Omega} \circ f$ , c'est-à-dire avec la restriction de  $\varphi(f)$ . Comme les  $U_{j\Omega}$ ,  $j \in J$ , forment un recouvrement ouvert de  $U_\Omega$ , on en conclut que  $\varphi_\Omega \circ i = \varphi$ . q.e.d.

## 2.4

On voudrait qu'un énoncé tel que la Proposition 1 soit vrai quand  $k = \mathbb{F}_1$  et  $\Omega = \mathbb{Z}$ . Mais cela suppose qu'on sache d'abord répondre à la question suivante :

**Question 2.** *Quels sont les anneaux obtenus par extension des scalaires de  $\mathbb{F}_1$  à  $\mathbb{Z}$  ?*

Or, d'après Kapranov et Smirnov, pour tout entier  $n \geq 1$ , le corps  $\mathbb{F}_1$  possède une extension  $\mathbb{F}_{1^n}$  de degré  $n$ , obtenue par l'adjonction des racines  $n$ -ièmes de l'unité. La  $\mathbb{Z}$ -algèbre  $\mathbb{F}_{1^n} \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z}$  est alors de rang  $n$  sur  $\mathbb{Z}$ . Cela conduit à poser

$$\mathbb{F}_{1^n} \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}[T]/(T^n - 1). \quad (4)$$

Cet anneau  $R_n$  est donc une des réponses à la Question 2, et d'après la Proposition 1, si  $X$  est une variété sur  $\mathbb{F}_1$ , il existe une inclusion naturelle

$$X(\mathbb{F}_{1^n}) \subset (X \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z})(R_n).$$

Plus généralement, nous noterons  $\mathcal{R}$  la sous-catégorie pleine des anneaux engendrée par les anneaux  $R_n$ ,  $n \geq 1$ , et leurs produits tensoriels, et nous admettrons que l'extension des scalaires de  $\mathbb{F}_1$  à  $\mathbb{Z}$  induit une équivalence de catégorie entre une catégorie de  $\mathbb{F}_1$ -algèbres et la catégorie  $\mathcal{R}$ . Une variété  $X$  sur  $\mathbb{F}_1$  doit donc définir un foncteur covariant  $\underline{X}$  de la catégorie  $\mathcal{R}$  dans celle des ensembles, contenu dans le foncteur qui à  $R$  associe l'ensemble  $(X \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z})(R)$ .

Pour définir les variétés sur  $\mathbb{F}_1$  nous procéderons en deux temps. La catégorie  $\mathcal{A}$  des variétés affines sur  $\mathbb{F}_1$  sera définie par une propriété universelle inspirée de la Proposition 1 pour des foncteurs de  $\mathcal{R}$  vers  $\mathcal{E}ns$ . Celle des variétés sur  $\mathbb{F}_1$  sera alors obtenue en considérant une propriété universelle pour des foncteurs de  $\mathcal{A}$  vers  $\mathcal{E}ns$ .

### 3 Définitions

#### 3.1 Définition 1.

Un *truc* sur  $\mathbb{F}_1$  est le couple  $X = (\underline{X}, \mathcal{A}_X)$  d'un foncteur covariant

$$\underline{X} : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{E}ns$$

et d'une  $\mathbb{C}$ -algèbre  $\mathcal{A}_X$ . Pour tout morphisme d'anneaux unitaires  $\sigma : R \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $R \in \text{Ob}(\mathcal{R})$ , et pour tout élément  $x \in \underline{X}(R)$  on suppose de plus donné un morphisme d'algèbres (dit "d'évaluation")

$$e_{x,\sigma} : \mathcal{A}_X \rightarrow \mathbb{C}.$$

Si  $f : R' \rightarrow R$  est un morphisme de  $\mathcal{R}$  et si  $y \in \underline{X}(R')$ , l'égalité suivante doit être satisfaite :

$$e_{f(y),\sigma} = e_{y,\sigma \circ f} \quad (5)$$

pour tout morphisme  $\sigma : R \rightarrow \mathbb{C}$ .

**Remarques** i) Comme l'a remarqué D.Grayson, les objets de  $\mathcal{R}$  sont les algèbres sur  $\mathbb{Z}$  des groupes abéliens finis. On pourrait imposer aux morphismes de  $\mathcal{R}$  d'être ceux induits par les morphismes entre groupes abéliens finis.

ii) L'idée d'ajouter à  $\underline{X}$  une "donnée topologique à l'infini" est due à J.-B. Bost. Il n'y a pas lieu de supposer que  $\mathcal{A}_X$  est commutative. Un objectif est de faire le lien avec la théorie d'A. Connes (voir par exemple [7]), un truc  $X$  sur  $\mathbb{F}_1$  disposant d'une extension au point à l'infini de  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ , essentiellement donnée par l'algèbre  $\mathcal{A}_X$ . Par ignorance, nous resterons très évasifs sur les propriétés requises sur cette  $\mathbb{C}$ -algèbre.

#### 3.2 Définition 2.

i) Un truc  $X = (\underline{X}, \mathcal{A}_X)$  sur  $\mathbb{F}_1$  est *fini* quand tous les ensembles  $\underline{X}(R)$ ,  $R \in \text{Ob}(\mathcal{R})$ , sont finis.

ii) Un *morphisme*  $\varphi : X \rightarrow Y$  entre deux trucs sur  $\mathbb{F}_1$  est la donnée d'une transformation naturelle

$$\underline{\varphi} : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$$

et d'un morphisme d'algèbres

$$\varphi^* : \mathcal{A}_Y \rightarrow \mathcal{A}_X$$

tels que, si  $R \in \text{Ob}(\mathcal{R})$ , si  $\sigma : R \rightarrow \mathbb{C}$  est un morphisme d'anneaux unitaires, et si  $x \in \underline{X}(R)$ , on a

$$e_{\sigma, \underline{\varphi}(x)}(\alpha) = e_{\sigma, x}(\varphi^*(\alpha)) \quad (6)$$

pour toute fonction  $\alpha \in \mathcal{A}_Y$ .

iii) Un morphisme

$$\varphi = (\underline{\varphi}, \varphi^*) : X \rightarrow Y$$

est une *injection* si  $\varphi^*$  est injectif et si l'application

$$\underline{\varphi} : \underline{X}(R) \rightarrow \underline{Y}(R)$$

est injective quel que soit l'anneau  $R \in \text{Ob}(\mathcal{R})$ .

Si  $\varphi = (\underline{\varphi}, \varphi^*) : X \rightarrow Y$  et  $\psi = (\underline{\psi}, \psi^*) : Y \rightarrow Z$  sont deux morphismes, leur composé est le couple

$$\psi \circ \varphi = (\underline{\psi} \circ \underline{\varphi}, \varphi^* \circ \psi^*) : X \rightarrow Z.$$

On note  $\mathcal{T}$  la catégorie des trucs sur  $\mathbb{F}_1$ .

### 3.3

Soit  $\mathcal{V}_{\mathbb{Z}}$  la catégorie des variétés sur  $\mathbb{Z}$ , c'est-à-dire les schémas de type fini sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ . Si  $V$  et  $W$  sont deux objets de  $\mathcal{V}_{\mathbb{Z}}$ , on désigne par  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(V, W)$  l'ensemble des morphismes de  $V$  vers  $W$ .

Si  $V$  est un objet de  $\mathcal{V}_{\mathbb{Z}}$ , on lui associe un truc  $V = (\underline{V}, \mathcal{O}(V_{\mathbb{C}}))$  sur  $\mathbb{F}_1$  de la façon suivante. Si  $R \in \text{Ob}(\mathcal{R})$  on pose

$$\underline{V}(R) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Spec}(R), V)$$

et si  $f : R' \rightarrow R$  est une flèche de  $\mathcal{R}$ , l'application

$$\underline{V}(f) : \underline{V}(R') \rightarrow \underline{V}(R)$$

est la composition avec  $f$ . La  $\mathbb{C}$ -algèbre  $\mathcal{O}(V_{\mathbb{C}})$  est celle des fonctions globales (i.e. les sections du faisceau canonique) sur la variété  $V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ . Si  $\sigma : R \rightarrow \mathbb{C}$  est un morphisme d'anneaux unitaires et si  $x \in \underline{V}(R)$ , l'image de  $x$  par  $\sigma$  est un point complexe  $\sigma(x)$  de  $V_{\mathbb{C}}$ . On note

$$e_{x, \sigma} : \mathcal{O}(V_{\mathbb{C}}) \rightarrow \mathbb{C}$$

l'évaluation au point  $\sigma(x)$  des fonctions sur  $V_{\mathbb{C}}$ . La formule (5) est évidemment vérifiée. Tout morphisme algébrique  $f : V \rightarrow W$  induit un morphisme dans  $\mathcal{T}$ , également noté  $f$ .

### 3.4 Définition 3.

Une *variété affine sur  $\mathbb{F}_1$*  est un truc fini  $X$  sur  $\mathbb{F}_1$  tel qu'il existe une variété algébrique affine  $X_{\mathbb{Z}}$  sur  $\mathbb{Z}$  et une injection  $i : X \rightarrow X_{\mathbb{Z}}$  dans  $\mathcal{T}$  vérifiant la propriété suivante.

Quels que soient la variété affine  $V \in \text{Ob}(\mathcal{V}_{\mathbb{Z}})$  et le morphisme de  $\mathcal{T}$

$$\varphi : X \rightarrow V,$$



il existe un unique morphisme algébrique

$$\varphi_{\mathbb{Z}} : X_{\mathbb{Z}} \rightarrow V$$

tel que  $\varphi = \varphi_{\mathbb{Z}} \circ i$ .

On voit que la variété  $X_{\mathbb{Z}}$  dans  $\mathcal{V}_{\mathbb{Z}}$  est uniquement déterminée par  $X$ . On la note aussi  $X \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z}$ . Par ailleurs, si  $X$  et  $Y$  sont deux variétés affines sur  $\mathbb{F}_1$  et si  $f : X \rightarrow Y$  est un morphisme de  $\mathcal{T}$ , il existe un unique morphisme  $f_{\mathbb{Z}} \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_{\mathbb{Z}}, Y_{\mathbb{Z}})$  qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{f_{\mathbb{Z}}} & Y_{\mathbb{Z}} \\ \uparrow & & \uparrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

On notera  $\mathcal{A}$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{T}$  dont les objets sont les variétés affines.

### 3.5 Définition 4.

i) Un *objet sur*  $\mathbb{F}_1$  est la donnée  $X = (\underline{X}, \mathcal{A}_X)$  d'un foncteur contravariant

$$\underline{X} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{E}ns$$

et d'une  $\mathbb{C}$ -algèbre  $\mathcal{A}_X$  ainsi que d'un morphisme d'algèbres

$$e_x : \mathcal{A}_X \rightarrow \mathcal{A}_A$$

pour objet  $A$  de  $\mathcal{A}$  et tout élément  $x$  de  $\underline{X}(A)$ . Si  $f : A \rightarrow B$  est un morphisme de  $\mathcal{A}$  et  $x \in \underline{X}(A)$ , on suppose de plus que l'égalité

$$e_{f^*(x)} = f^* \circ e_x \tag{7}$$

est vérifiée, avec  $f^*(x) = \underline{X}(f)(x) \in \underline{X}(B)$ .

ii) Un objet  $X$  sur  $\mathbb{F}_1$  est *fini* si  $\underline{X}(\text{Spec } R)$  est fini quel que soit  $R \in \text{Ob}(\mathcal{R})$  (d'après la Proposition 2 ii) ci-dessous, la catégorie  $\mathcal{R}^{\text{opp}}$  est contenue dans  $\mathcal{A}$ ).

iii) Un *morphisme*  $\varphi : X \rightarrow Y$  entre objets sur  $\mathbb{F}_1$  est la donnée d'une transformation naturelle

$$\underline{\varphi} : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$$

et d'un morphisme d'algèbres  $\varphi^* : \mathcal{A}_Y \rightarrow \mathcal{A}_X$  tels que, si  $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$  et  $x \in \underline{X}(A)$ , on ait

$$e_{\underline{\varphi}(x)} = e_x \circ \varphi^*. \tag{8}$$

iv) On dit que le morphisme  $\varphi$  est une *injection* si  $\underline{\varphi}$  et  $\varphi^*$  sont injectifs.

Le composé de deux morphismes est défini de la façon évidente, et l'on note  $\mathcal{OB}$  la catégorie des objets sur  $\mathbb{F}_1$ .

### 3.6

Si  $V \in \text{Ob}(\mathcal{V}_{\mathbb{Z}})$ , on lui associe comme suit un objet  $V = (\underline{V}, \mathcal{O}(V_{\mathbb{C}}))$  sur  $\mathbb{F}_1$ .  
Si  $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$  on pose

$$\underline{V}(A) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A_{\mathbb{Z}}, V)$$

et si  $f : A \rightarrow B$  est une flèche de  $\mathcal{A}$  on désigne par  $\underline{V}(f)$  la composition avec  $f_{\mathbb{Z}}$ . Si  $x \in \underline{V}(A)$ , l'évaluation  $e_x$  est le morphisme composé

$$\mathcal{O}(V_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{x^*} \mathcal{O}(A_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{i^*} \mathcal{A}_A,$$

où  $i : A \rightarrow A_{\mathbb{Z}}$  est l'injection associée à  $A$ .

En associant à  $f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(V, W)$  le morphisme de composition avec  $f$  et celui d'image inverse  $f^* : \mathcal{O}(W_{\mathbb{C}}) \rightarrow \mathcal{O}(V_{\mathbb{C}})$ , on obtient ainsi un foncteur

$$\mathcal{V}_{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{OB}.$$

### 3.7 Définition 5

Une *variété sur  $\mathbb{F}_1$*  est la donnée d'un objet  $X$  sur  $\mathbb{F}_1$  tel qu'il existe une variété algébrique  $X_{\mathbb{Z}}$  sur  $\mathbb{Z}$  et une injection  $i : X \rightarrow X_{\mathbb{Z}}$  de  $\mathcal{OB}$  ayant la propriété suivante. Pour toute variété  $V \in \text{Ob}(\mathcal{V}_{\mathbb{Z}})$  et tout morphisme

$$\varphi : X \rightarrow V$$

dans  $\mathcal{OB}$ , il existe un unique morphisme algébrique

$$\varphi_{\mathbb{Z}} : X_{\mathbb{Z}} \rightarrow V$$

tel que  $\varphi = \varphi_{\mathbb{Z}} \circ i$ .

La variété  $X_{\mathbb{Z}} \in \text{Ob}(\mathcal{V}_{\mathbb{Z}})$  est uniquement déterminée (à isomorphisme unique près) par la variété  $X$  sur  $\mathbb{F}_1$ . On la note aussi  $X \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z}$  et on l'appelle *extension des scalaires de  $X$  de  $\mathbb{F}_1$  à  $\mathbb{Z}$* . Si  $X$  et  $Y$  sont deux variétés sur  $\mathbb{F}_1$  et  $f : X \rightarrow Y$  est un morphisme de  $\mathcal{OB}$ , il existe un unique morphisme algébrique  $f_{\mathbb{Z}} \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_{\mathbb{Z}}, Y_{\mathbb{Z}})$  qui induit  $f$  sur  $X$  (cf. 3.4). Autrement dit, si  $\mathcal{V}$  est la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{OB}$  dont les objets sont les variétés sur  $\mathbb{F}_1$ , l'extension des scalaires de  $\mathbb{F}_1$  à  $\mathbb{Z}$  est un foncteur fidèle de  $\mathcal{V}$  vers  $\mathcal{V}_{\mathbb{Z}}$ .

### 3.8 Variantes

#### 3.8.1

Pour éviter le choix trop trivial  $\mathcal{A}_X = \mathcal{O}(X_{\mathbb{C}})$  (où  $X_{\mathbb{C}} = X_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ ) dans la définition d'une variété  $X$  sur  $\mathbb{F}_1$  (cf. Proposition 4 ci-dessous) on pourrait par exemple imposer (dans les définitions 3 et 5) que l'algèbre  $\mathcal{A}_X$  est une algèbre de Banach commutative. Ce sera le cas pour les exemples discutés dans la section 5 ([19], 18.11).

### 3.8.2

Comme l'a suggéré R. Pink, pour tout entier  $n \geq 1$ , on peut aussi définir les variétés sur  $\mathbb{F}_{1^n}$  en remplaçant dans les définitions précédentes la catégorie  $\mathcal{R}$  (resp.  $\mathcal{V}_{\mathbb{Z}}$ ) par la sous-catégorie pleine des anneaux  $R_m$  tels que  $n$  divise  $m$  et de leurs produits tensoriels (resp. par la catégorie des schémas de type fini sur  $\text{Spec}(R_n)$ ).

## 4 Quelques propriétés

### 4.1

La catégorie opposée à  $\mathcal{R}$  est contenue dans  $\mathcal{A}$  :

**Proposition 2.** i) Si  $R \in \text{Ob}(\mathcal{R})$  et  $X \in \text{Ob}(\mathcal{T})$ , l'ensemble  $\underline{X}(R)$  est canoniquement isomorphe à  $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(\text{Spec}(R), X)$ .

ii) Si  $R \in \text{Ob}(\mathcal{R})$ , le truc sur  $\mathbb{F}_1$  associé à  $\text{Spec}(R)$  est une variété affine sur  $\mathbb{F}_1$  dont l'extension à  $\mathbb{Z}$  coïncide avec  $\text{Spec}(R)$ . On obtient ainsi un foncteur contravariant pleinement fidèle de  $\mathcal{R}$  dans  $\mathcal{A}$ .

**Preuve.** i) Soient  $R \in \text{Ob}(\mathcal{R})$  un anneau fini et plat sur  $\mathbb{Z}$  et  $\text{Spec}(R)$  le schéma associé. Si  $X \in \text{Ob}(\mathcal{T})$  et si

$$\varphi : \text{Spec}(R) \rightarrow X$$

est un morphisme de  $\mathcal{T}$ , l'image par  $\underline{\varphi}$  de l'application identique

$$\text{id}_R \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Spec}(R), \text{Spec}(R))$$

est un élément  $\underline{\varphi}(\text{id}_R) \in \underline{X}(R)$ .

Inversement, étant donné  $x \in \underline{X}(R)$ , pour tout morphisme de  $\mathcal{R}$

$$f \in \text{Hom}_{\mathcal{R}}(R, R') = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Spec}(R'), \text{Spec}(R)),$$

l'image de  $x$  par l'application

$$\underline{X}(f) : \underline{X}(R) \rightarrow \underline{X}(R')$$

définit un élément  $f(x) \in \underline{X}(R')$  et l'on obtient ainsi une transformation naturelle

$$\underline{x} : \underline{\text{Spec}}(R) \rightarrow \underline{X}.$$

Par ailleurs, si  $\Sigma$  est l'ensemble (fini) des morphismes unitaires  $\sigma : R \rightarrow \mathbb{C}$ , on dispose d'isomorphismes canoniques

$$\mathcal{O}(\text{Spec}(R)_{\mathbb{C}}) = R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = \mathbb{C}^{\Sigma}.$$

La collection des morphismes d'évaluation en  $x$

$$e_{x,\sigma} : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathbb{C}, \quad \sigma \in \Sigma,$$

définit donc un morphisme d'algèbres

$$x^* : \mathcal{A}_X \rightarrow R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$$

qui vérifie la condition (6) avec  $\underline{x}$ . On obtient ainsi un morphisme  $(\underline{x}, x^*)$  de  $\text{Spec}(R)$  vers  $X$  dans  $\mathcal{T}$ .

On vérifie que les applications  $\varphi \mapsto \varphi(\text{id}_R)$  et  $x \mapsto (\underline{x}, x^*)$  sont des bijections inverses entre  $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(\text{Spec}(R), X)$  et  $\underline{X}(R)$ .

ii) Si  $R$  et  $R'$  sont des anneaux de  $\mathcal{R}$ , l'ensemble  $\text{Spec}(R)(R')$  des morphismes d'anneaux de  $R$  vers  $R'$  est fini. En effet, comme  $R$  est engendré sur  $\mathbb{Z}$  par un nombre fini de racines de l'unité, il suffit de remarquer que l'ensemble des racines de l'unité de  $R'$  est fini. Mais cela résulte de la remarque 3.1. i) et du théorème de Higman [10] selon lequel les racines de l'unité dans l'algèbre (sur  $\mathbb{Z}$ ) d'un groupe abélien fini  $G$  sont les éléments de la forme  $\pm g, g \in G$ .

Par ailleurs, si  $V$  est un objet de  $\mathcal{V}_{\mathbb{Z}}$  et  $R$  un objet de  $\mathcal{R}$  on sait, d'après i), que

$$\underline{V}(R) = \text{Hom}_{\mathcal{T}}(\text{Spec}(R), V).$$

Comme  $\underline{V}(R) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Spec}(R), V)$  par définition de  $V$ , on voit que tout morphisme de  $\text{Spec}(R)$  vers  $V$  dans  $\mathcal{T}$  est algébrique. Cela montre que  $\text{Spec}(R)$  est une variété affine sur  $\mathbb{F}_1$  dont l'extension à  $\mathbb{Z}$  est  $\text{Spec}(R)$ .

En choisissant  $V = \text{Spec}(R')$ ,  $R' \in \text{Ob}(\mathcal{R})$ , dans l'argument précédent on voit aussi que tout morphisme

$$\text{Spec}(R) \rightarrow \text{Spec}(R')$$

dans  $\mathcal{T}$  provient d'un unique morphisme  $R' \rightarrow R$  dans  $\mathcal{R}$ . Par conséquent le foncteur  $R \mapsto \text{Spec}(R)$  de  $\mathcal{R}$  dans  $\mathcal{A}$  est pleinement fidèle.

**Exemple:** On note  $\text{Spec}(\mathbb{F}_{1^n})$  la variété affine sur  $\mathbb{F}_1$  associée à  $R_n$ . Pour tout truc  $X$  sur  $\mathbb{F}_1$  on a alors la formule

$$X(\mathbb{F}_{1^n}) = \underline{X}(R_n), \tag{9}$$

où le terme de gauche désigne les morphismes dans  $\mathcal{T}$  de  $\text{Spec}(\mathbb{F}_{1^n})$  vers  $X$ .

## 4.2

On définit un foncteur

$$\varepsilon : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{OB}$$

en associant à un truc  $X = (\underline{X}, \mathcal{A}_X)$  le couple  $(\underline{X}, \mathcal{A}_X)$  où  $\underline{X}$  est le foncteur sur  $\mathcal{A}$  représenté par  $X$ :

$$\underline{X}(A) = \text{Hom}_{\mathcal{T}}(A, X).$$

Si  $u \in \underline{X}(A)$  l'évaluation en  $u$  est l'image inverse  $u^*$ :

$$e_u = u^* : \mathcal{A}_X \rightarrow \mathcal{A}_A.$$

Ce foncteur  $\varepsilon$  va nous permettre de considérer les variétés affines sur  $\mathbb{F}_1$  comme des variétés sur  $\mathbb{F}_1$  :

**Proposition 3.** i) *Le foncteur  $\varepsilon : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{OB}$  est pleinement fidèle.*

ii) *L'image essentielle de  $\mathcal{A}$  par  $\varepsilon$  est la catégorie des variétés sur  $\mathbb{F}_1$  dont l'extension des scalaires à  $\mathbb{Z}$  est affine.*

**Preuve.** i) Considérons le foncteur

$$\rho : \mathcal{OB} \rightarrow \mathcal{T}$$

qui à l'objet  $(\underline{X}, \mathcal{A}_X)$  sur  $\mathbb{F}_1$  associe le truc  $(\underline{X}, \mathcal{A}_X)$ , où  $\underline{X}$  est la restriction à  $\mathcal{R}$  du foncteur  $\underline{X}$  (cf. Proposition 2 ii)).

Si  $X$  est dans  $\mathcal{T}$ , le truc  $\rho \circ \varepsilon(X)$  vérifie

$$\underline{\rho \circ \varepsilon(X)}(R) = \text{Hom}_{\mathcal{T}}(\text{Spec}(R), X) = \underline{X}(R)$$

(Proposition 2 i)). Par conséquent

$$\rho \circ \varepsilon = \text{id}_{\mathcal{T}}. \quad (10)$$

De plus  $\rho$  est l'adjoint à gauche de  $\varepsilon$  : si  $Y$  est un truc sur  $\mathbb{F}_1$  et  $X$  un objet sur  $\mathbb{F}_1$  il existe un isomorphisme canonique et naturel

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}}(\rho(X), Y) = \text{Hom}_{\mathcal{OB}}(X, \varepsilon(Y)). \quad (11)$$

En effet, si

$$\psi : X \rightarrow \varepsilon(Y)$$

est un morphisme de  $\mathcal{OB}$ , le morphisme

$$\rho(\psi) : \rho(X) \rightarrow \rho \circ \varepsilon(Y) = Y$$

est un morphisme de  $\mathcal{T}$ .

Inversement, étant donné un morphisme

$$\varphi : \rho(X) \rightarrow Y$$

de  $\mathcal{T}$ , pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{A}$  et tout  $x \in \underline{X}(A)$ , si  $R \in \text{Ob}(\mathcal{R})$  et

$$f \in \underline{A}(R) = \text{Hom}_{\mathcal{T}}(\text{Spec}(R), A)$$

(Prop. 2 i)), puisque  $\underline{X}$  est un foncteur contravariant, on obtient un élément  $\underline{X}(f)(x) \in \underline{X}(R) = \underline{\rho(\underline{X})}(R)$ , et donc un élément

$$\varphi(\underline{X}(f)(x)) \in \underline{Y}(R).$$

L'application  $f \mapsto \varphi(\underline{X}(f)(x))$  définit une transformation naturelle de  $\underline{A}$  vers  $\underline{Y}$  qui, jointe au morphisme d'algèbres

$$x^* \circ \varphi^* : \mathcal{A}_Y \rightarrow \mathcal{A}_A,$$

définit un élément de

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(A, Y) = \underline{\underline{\varepsilon(Y)}}(A)$$

qui dépend fonctoriellement de  $x \in \underline{\underline{X}}(A)$ . D'où une transformation naturelle

$$\underline{\underline{X}} \rightarrow \underline{\underline{\varepsilon(Y)}}$$

qui, jointe au morphisme d'algèbres

$$\varphi^* : \mathcal{A}_Y \rightarrow \mathcal{A}_X,$$

fournit un morphisme  $\alpha(\varphi)$  de  $X$  vers  $\varepsilon(Y)$ . On vérifie que les applications  $\varphi \mapsto \alpha(\varphi)$  et  $\psi \mapsto \rho(\psi)$  sont des bijections inverses naturelles entre  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\rho(X), Y)$  et  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{OB}}(X, \varepsilon(Y))$ . Cela démontre (11).

Il résulte de (10) et (11) que  $\varepsilon : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{OB}$  est pleinement fidèle.

ii) Considérons une variété affine  $X$  sur  $\mathbb{F}_1$ ,  $V \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V}_{\mathbb{Z}})$  et

$$\varphi : \varepsilon(X) \rightarrow V$$

un morphisme de  $\mathcal{OB}$ . L'image par  $\underline{\underline{\varphi}}$  du morphisme identique

$$\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, X) = \underline{\underline{\varepsilon(X)}}(X)$$

est un morphisme algébrique  $\varphi_{\mathbb{Z}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_{\mathbb{Z}}, V)$ . Si  $A$  est une variété affine sur  $\mathbb{F}_1$  et

$$f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(A, X) = \underline{\underline{X}}(A),$$

on sait que  $f$  est par un morphisme algébrique  $f_{\mathbb{Z}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A_{\mathbb{Z}}, X_{\mathbb{Z}})$  (Définition 3) et donc

$$\underline{\underline{\varphi}}(f) = \underline{\underline{\varphi}}(f^*(\mathrm{id}_X)) = f_{\mathbb{Z}}^*(\underline{\underline{\varphi}}(\mathrm{id}_X)) = f_{\mathbb{Z}}^*(\varphi_{\mathbb{Z}}) = \varphi_{\mathbb{Z}} \circ f_{\mathbb{Z}}$$

dans  $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A_{\mathbb{Z}}, V)$ . Il en résulte que  $\varphi$  est le morphisme induit par  $\varphi_{\mathbb{Z}}$  sur  $\varepsilon(X)$ , et donc  $\varepsilon(X)$  est une variété sur  $\mathbb{F}_1$  dont  $X_{\mathbb{Z}}$  est l'extension des scalaires à  $\mathbb{Z}$ .

Inversement, supposons que  $X$  soit une variété sur  $\mathbb{F}_1$  telle que  $X_{\mathbb{Z}}$  soit affine. Soient  $V \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V}_{\mathbb{Z}})$  une variété algébrique affine et

$$\varphi : \rho(X) \rightarrow V$$

un morphisme de  $\mathcal{T}$ . Puisque  $V$  est affine on a

$$\varepsilon(\underline{\underline{V}}, \mathcal{O}(V_{\mathbb{C}})) = (\underline{\underline{V}}, \mathcal{O}(V_{\mathbb{C}})).$$

Donc  $\varphi$  induit un morphisme

$$\varepsilon(\varphi) : \varepsilon \circ \rho(X) \rightarrow V$$

dans  $\mathcal{OB}$ . L'isomorphisme d'adjonction

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\rho(X), \rho(X)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{OB}}(X, \varepsilon \circ \rho(X))$$

associe à l'identité de  $\rho(X)$  un morphisme canonique

$$X \rightarrow \varepsilon \circ \rho(X).$$

Puisque  $X$  est une variété sur  $\mathbb{F}_1$ , le composé du morphisme précédent avec  $\varepsilon(\varphi)$  dans  $\mathcal{OB}$  est induit par un morphisme algébrique

$$\varphi_{\mathbb{Z}} : X_{\mathbb{Z}} \rightarrow V.$$

En appliquant le foncteur  $\rho$ , on voit que  $\varphi_{\mathbb{Z}} \circ i$  coïncide avec le morphisme

$$\varphi : \rho(X) \rightarrow V$$

dans  $\mathcal{T}$ . Par conséquent  $\rho(X)$  est une variété affine dont  $X_{\mathbb{Z}}$  est l'extension des scalaires à  $\mathbb{Z}$ . Cela démontre ii).

### 4.3

En général une variété sur  $\mathbb{Z}$  peut être l'extension des scalaires à  $\mathbb{Z}$  de plusieurs variétés sur  $\mathbb{F}_1$ .

**Proposition 4.** *Soit  $X$  une variété sur  $\mathbb{F}_1$ . Supposons que l'injection  $i : X \rightarrow X_{\mathbb{Z}}$  soit la composée dans  $\mathcal{OB}$  d'une injection  $u : X \rightarrow Y$  et d'une injection  $j : Y \rightarrow X_{\mathbb{Z}}$ .*

*Supposons de plus que  $X$  est affine ou que  $\underline{u}$  est une équivalence. Alors  $Y$  est une variété sur  $\mathbb{F}_1$  telle que*

$$Y \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z} = X_{\mathbb{Z}}.$$

**Preuve.** Soient  $V \in \text{Ob}(\mathcal{V}_{\mathbb{Z}})$  et

$$\varphi : Y \rightarrow V$$

un morphisme de  $\mathcal{OB}$ . Puisque  $X$  est une variété sur  $\mathbb{F}_1$ , la restriction de  $\varphi$  à  $X$  est induite par un morphisme algébrique  $\varphi_{\mathbb{Z}} \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_{\mathbb{Z}}, V)$ :  $\varphi_{\mathbb{Z}} \circ i = \varphi \circ u$ . Il s'agit de vérifier que  $\varphi_{\mathbb{Z}} \circ j = \varphi$ .

Or le composé des morphismes d'algèbres

$$\mathcal{O}(V_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\varphi_{\mathbb{Z}}^*} \mathcal{O}(X_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{i^*} \mathcal{A}_X$$

coïncide avec

$$\mathcal{O}(V_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\varphi^*} \mathcal{A}_Y \xrightarrow{u^*} \mathcal{A}_X.$$

Comme  $i^* = u^* \circ j^*$  et comme  $u^*$  est injectif, on en déduit que

$$\varphi^* = j^* \circ \varphi_{\mathbb{Z}}^*. \tag{12}$$

Si le foncteur  $\underline{u} : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$  est une équivalence on a  $\underline{\varphi}_{\mathbb{Z}} \circ \underline{j} = \underline{\varphi}$  donc (12) suffit à montrer que  $\varphi_{\mathbb{Z}} \circ j = \varphi$ .

Dans le cas où  $X$  est affine, on peut supposer que  $V$  est affine (Proposition 3 ii)). Si  $R \in \text{Ob}(\mathcal{R})$ , si  $x \in \underline{Y}(R)$ , si  $\alpha \in \mathcal{O}(V_{\mathbb{C}})$  et si  $\sigma : R \rightarrow \mathbb{C}$  est un morphisme d'anneaux unitaires, on a, d'après (8) et (12)

$$e_{\sigma, \underline{\varphi}(x)}(\alpha) = e_{\sigma, x}(\varphi^*(\alpha)) = e_{\sigma, x}(j^* \circ \varphi_{\mathbb{Z}}^*(\alpha)) = e_{\sigma, \underline{\varphi}_{\mathbb{Z}} \circ \underline{j}(x)}(\alpha). \quad (13)$$

Comme  $R$  est plat sur  $\mathbb{Z}$ , le morphisme canonique

$$R \rightarrow R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = R^{\Sigma}$$

est injectif. Et comme  $V$  est affine les fonctions de  $\mathcal{O}(V_{\mathbb{C}})$  séparent les points de  $V(\mathbb{C})$ . Par conséquent les égalités (13) avec  $\sigma \in \Sigma$  et  $\alpha \in \mathcal{O}(V_{\mathbb{C}})$  montrent que

$$\underline{\varphi}(x) = \underline{\varphi}_{\mathbb{Z}} \circ \underline{j}(x).$$

Par conséquent  $\varphi = \varphi_{\mathbb{Z}} \circ j$ .

q.e.d.

#### 4.4

L'énoncé suivant permet de définir des variétés sur  $\mathbb{F}_1$  par recollement.

**Proposition 5.** *Soient  $V \in \text{Ob}(\mathcal{V}_{\mathbb{Z}})$  et  $V = \bigcup_{i \in I} U_i$  un recouvrement ouvert fini de  $V$ . On suppose données des variétés  $X_i$ ,  $i \in I$ , et  $X_{ij} = X_{ji}$ ,  $i \neq j$ , sur  $\mathbb{F}_1$  et des injections*

$$X_{ij} \rightarrow X_i \quad \text{et} \quad X_i \rightarrow V$$

dans  $\mathcal{OB}$  dont les extensions à  $\mathbb{Z}$  sont les inclusions

$$U_i \cap U_j \rightarrow U_i \quad \text{et} \quad U_i \rightarrow V.$$

On suppose de plus que l'injection composée

$$X_{ij} \rightarrow X_i \rightarrow V$$

coïncide avec

$$X_{ij} \rightarrow X_j \rightarrow V$$

si  $i \neq j$ . Pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{A}$  on pose

$$\underline{X}(A) = \bigcup_i \underline{X}_i(A)$$

(réunion dans  $\underline{V}(A)$ ) et l'on note  $\mathcal{A}_X$  la sous-algèbre du produit des  $\mathcal{A}_{X_i}$ ,  $i \in I$ , formée des familles  $(\alpha_i)_{i \in I}$  telles que, si  $i \neq j$ , les images de  $\alpha_i$  et  $\alpha_j$  dans  $\mathcal{A}_{X_{ij}}$  coïncident.

Alors l'objet  $X = (\underline{X}, \mathcal{A}_X)$  sur  $\mathbb{F}_1$  (avec les morphismes d'évaluation évidents) est une variété sur  $\mathbb{F}_1$  telle que

$$X \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z} = V.$$



**Preuve.** Les composés des morphismes d'algèbres

$$\mathcal{O}(V_{\mathbb{C}}) \rightarrow \mathcal{A}_{X_i} \rightarrow \mathcal{A}_{X_{ij}}$$

et

$$\mathcal{O}(V_{\mathbb{C}}) \rightarrow \mathcal{A}_{X_j} \rightarrow \mathcal{A}_{X_{ij}}$$

coïncident. Il existe donc une injection

$$u : X \rightarrow V$$

dans  $\mathcal{OB}$ . Par ailleurs, si  $W \in \text{Ob}(\mathcal{V}_{\mathbb{Z}})$  et si

$$\varphi : X \rightarrow W$$

est un morphisme de  $\mathcal{OB}$ , la restriction  $\varphi_i$  (resp.  $\varphi_{ij}$ ) de  $\varphi$  à  $X_i$  (resp.  $X_{ij}$ ) est induite par un unique morphisme algébrique  $\varphi_{i\mathbb{Z}}$  (resp.  $\varphi_{ij\mathbb{Z}}$ ) de  $U_i$  (resp.  $U_i \cap U_j$ ) vers  $W$ . Comme la restriction de  $\varphi_{i\mathbb{Z}}$  à  $X_{ij}$  coïncide avec celle de  $\varphi$ , la restriction de  $\varphi_{i\mathbb{Z}}$  à  $U_i \cap U_j$  est égale à  $\varphi_{ij\mathbb{Z}}$  (unicité). C'est donc aussi la restriction de  $\varphi_{j\mathbb{Z}}$  à  $U_i \cap U_j$ . Par conséquent, la collection des morphismes  $\varphi_{i\mathbb{Z}}$ ,  $i \in I$ , définit par recollement un morphisme  $\varphi_{\mathbb{Z}} \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(V, W)$  dont la restriction à  $U_i$  est égale à  $\varphi_{i\mathbb{Z}}$ , quel que soit  $i \in I$ . Par suite, si  $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ , l'application

$$\underline{\varphi}_{\mathbb{Z}} \circ \underline{u} : \underline{X}(A) \rightarrow \underline{W}(A)$$

coïncide avec  $\underline{\varphi}_i$  sur le sous-ensemble  $\underline{X}_i(A)$ . Comme  $\underline{X}(A)$  est, par définition, la réunion des  $\underline{X}_i(A)$ ,  $i \in I$ , on voit que

$$\underline{\varphi} = \underline{\varphi}_{\mathbb{Z}} \circ \underline{u}.$$

Par ailleurs, le morphisme d'algèbres composé

$$\mathcal{O}(W_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\varphi_{\mathbb{Z}}^*} \mathcal{O}(V_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{u^*} \mathcal{A}_X \longrightarrow \mathcal{A}_{X_i}$$

coïncide avec  $\varphi_i^*$  et  $\mathcal{A}_X$  est contenue dans le produit des algèbres  $\mathcal{A}_{X_i}$ , donc

$$\varphi^* = u^* \circ \varphi_{\mathbb{Z}}^*.$$

Par conséquent  $\varphi = \varphi_{\mathbb{Z}} \circ u$ .

q.e.d.

## 5 Exemples

### 5.1

Soient  $N \simeq \mathbb{Z}^d$  un  $\mathbb{Z}$ -module libre de rang  $d \geq 1$ , et  $\Delta$  un éventail de  $N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ . Notons  $\mathbb{P}(\Delta)$  la variété torique associée à  $\Delta$  [9] [14]. Supposons que  $\Delta$  est

régulier et que, par conséquent,  $\mathbb{P}(\Delta)$  est une variété lisse sur  $\mathbb{Z}$ . On se propose de montrer que  $\mathbb{P}(\Delta)$  est l'extension à  $\mathbb{Z}$  d'une variété  $X(\Delta)$  sur  $\mathbb{F}_1$ .

Par définition,  $\Delta$  est une famille finie  $\{\tau\}$  de cônes stricts de  $N_{\mathbb{R}}$ . A chaque cône  $\tau$  est associée une variété torique affine

$$U_{\tau} = \text{Spec}(\mathbb{Z}[\mathcal{S}_{\tau}]),$$

où  $\mathcal{S}_{\tau}$  est le monoïde intersection de  $M = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$  avec le dual  $\tau^* \subset M_{\mathbb{R}}$  du cône  $\tau$ . La variété  $\mathbb{P}(\Delta)$  est obtenue par recollement des variétés  $U_{\tau}$  le long de leurs ouverts  $U_{\tau \cap \tau'}$ .

Si  $m \in \mathcal{S}_{\tau}$  on note

$$\chi^m : U_{\tau} \rightarrow \mathbb{A}^1$$

le morphisme associé à  $m$ . Si  $R \in \text{Ob}(\mathcal{R})$ , on note  $\mu(R)$  l'ensemble des racines de l'unité de  $R$  (il est fini d'après la preuve de la Proposition 2 ii)) et

$$\underline{X}_{\tau}(R) \subset U_{\tau}(R)$$

l'ensemble (fini) des éléments  $x \in U_{\tau}(R)$  tels que

$$\chi^m(x) \in \mu(R) \cup \{0\}$$

quel que soit  $m \in \mathcal{S}_{\tau}$ .

Par ailleurs, suivant Batyrev et Tschinkel [2], on désigne par  $C_{\tau}$  l'ensemble des points  $x \in U_{\tau}(\mathbb{C})$  tels que

$$|\chi^m(x)| \leq 1$$

quel que soit  $m \in \mathcal{S}_{\tau}$ , et

$$C_{\Delta} = \bigcup_{\tau} C_{\tau}$$

dans  $\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})$ . On désigne par  $C_{\tau}^{\text{int}}$  l'ensemble des points  $x \in C_{\tau}$  tels que

$$|\chi^m(x)| < 1$$

quand  $m$  est dans  $\mathcal{S}_{\tau}$  et n'est pas orthogonal à  $\tau$ . Notons  $\mathcal{A}_{\tau}$  l'algèbre des fonctions complexes continues sur  $C_{\tau}$  dont la restriction à  $C_{\tau}^{\text{int}}$  est holomorphe. On note aussi  $\mathcal{A}_{\Delta}$  l'algèbre des fonctions complexes continues sur  $C_{\Delta}$  dont la restriction à chaque  $C_{\tau}^{\text{int}}$ ,  $\tau \in \Delta$ , est holomorphe.

Si  $R \in \text{Ob}(\mathcal{R})$  et si  $\sigma \in R \rightarrow \mathbb{C}$  est un morphisme d'anneaux unitaires, l'application

$$U_{\tau}(R) \rightarrow U_{\tau}(\mathbb{C})$$

induite par  $\sigma$  envoie  $\underline{X}_{\tau}(R)$  dans  $C_{\tau}$ . On peut donc évaluer les fonctions de  $\mathcal{A}_{\tau}$  en chaque point  $x \in \underline{X}_{\tau}(R)$ . On obtient ainsi un truc  $X_{\tau} = (\underline{X}_{\tau}, \mathcal{A}_{\tau})$  sur  $\mathbb{F}_1$ . Si  $A$  est une variété affine sur  $\mathbb{F}_1$  on pose

$$\underline{\underline{X(\Delta)}}(A) = \bigcup_{\tau} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A_{\mathbb{Z}}, U_{\tau})$$

dans  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A_{\mathbb{Z}}, \mathbb{P}(\Delta))$ . Par image inverse et l'énoncé i) ci-dessous, un point  $x \in \underline{X(\Delta)}(A)$  définit une évaluation  $e_x : \mathcal{O}_{\Delta} \rightarrow \mathcal{O}_A$ .

**Théorème 1.** i) *Pour tout cône ouvert  $\tau$  de  $\Delta$ , le truc  $X_{\tau}$  est une variété affine sur  $\mathbb{F}_1$  et*

$$U_{\tau} = X_{\tau} \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z}.$$

ii) *L'objet  $X(\Delta) = (\underline{X(\Delta)}, \mathcal{O}_{\Delta})$  sur  $\mathbb{F}_1$  est une variété sur  $\mathbb{F}_1$  telle que*

$$X(\Delta) \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z} = \mathbb{P}(\Delta).$$

**Preuve.** Montrons d'abord que i) implique ii). Il résulte de i) que, si  $A$  est une variété affine sur  $\mathbb{F}_1$  et  $\tau \in \Delta$ ,

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}}(A, X_{\tau}) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A_{\mathbb{Z}}, U_{\tau}). \quad (14)$$

Par conséquent, la Proposition 5 permet de recoller les variétés  $X_{\tau}$  le long des sous-variétés  $X_{\tau \cap \tau'}$  pour obtenir une variété sur  $\mathbb{F}_1$  dont l'extension des scalaires à  $\mathbb{Z}$  est la variété  $\mathbb{P}(\Delta)$ . Si  $\tau$  et  $\tau'$  sont deux cônes de  $\Delta$ , les morphismes d'algèbres

$$\mathcal{O}_{\Delta} \rightarrow \mathcal{O}_{\tau} \rightarrow \mathcal{O}_{\tau \cap \tau'}$$

et

$$\mathcal{O}_{\Delta} \rightarrow \mathcal{O}_{\tau'} \rightarrow \mathcal{O}_{\tau \cap \tau'}$$

coïncident, donc, d'après la Proposition 4, et la définition de  $\underline{X(\Delta)}$ , l'objet  $X(\Delta) = (\underline{X(\Delta)}, \mathcal{O}_{\Delta})$ , muni des évaluations déduites de (14), est une variété sur  $\mathbb{F}_1$  telle que  $X(\Delta) \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z} = \mathbb{P}(\Delta)$ .

Il reste à démontrer i). Soit donc  $V$  une variété affine sur  $\mathbb{Z}$  et

$$\varphi : X_{\tau} \rightarrow V$$

un morphisme de  $\mathcal{T}$ . Supposons d'abord que  $V$  soit la droite affine  $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 = \text{Spec}(\mathbb{Z}[T])$ . On a  $\mathcal{O}(\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1) = \mathbb{C}[T]$  et l'on peut décrire comme suit la fonction

$$\alpha = \varphi^*(T) \in \mathcal{O}_{\tau}.$$

Puisque  $\Delta$  est régulier, il existe une base  $\{m_1, \dots, m_d\}$  de  $M$  telle que  $\{m_1, \dots, m_r\}$  soit une famille génératrice du semi-groupe  $\mathcal{S}_{\tau}$ , où  $r$  est la dimension de  $\tau$ . Soit  $\tau'$  le cône ouvert  $\mathbb{R}_+ m_1 + \dots + \mathbb{R}_+ m_d$ . La carte affine

$$\chi : U_{\tau'}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^d$$

donnée par

$$\chi(x) = (\chi^{m_1}(x), \dots, \chi^{m_d}(x))$$

identifie  $C_\tau$  (resp.  $C_\tau^{\text{int}}$ ) avec l'ensemble des points  $(x_i)$  de  $\mathbb{C}^d$  tels que

$$|x_1| \leq 1, \dots, |x_{d-r}| \leq 1, |x_{d-r+1}| = \dots = |x_d| = 1$$

(resp.

$$|x_1| < 1, \dots, |x_{d-r}| < 1, |x_{d-r+1}| = \dots = |x_d| = 1).$$

Autrement dit  $C_\tau$  (resp.  $C_\tau^{\text{int}}$ ) est le produit de  $d-r$  disques fermés (resp. ouverts) et de  $r$  cercles (cf. [14], Proposition 3.2.9).

La restriction de  $\alpha(x_1, \dots, x_d)$  au produit des  $d$  cercles  $|x_j| = 1, j = 1, \dots, d$ , admet un développement de Fourier, convergent pour la norme  $L^2$ ,

$$\alpha(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_d}) = \sum_{I \subset \mathbb{Z}^d} a_I e^{iI \cdot \theta},$$

où  $a_I \in \mathbb{C}$  et  $I \cdot \theta = \sum_{j=1}^d i_j \theta_j$  si  $I = (i_1, \dots, i_d)$ . Comme  $\alpha$  est holomorphe dans  $C_\tau^{\text{int}}$ , les coefficients  $a_I$  sont nuls si l'un des indices  $i_1, \dots, i_{d-r}$  est strictement négatif.

Par ailleurs, pour tout entier  $n \geq 1$ , considérons l'anneau

$$R_{d,n} = \mathbb{Z}[T_1, \dots, T_d] / (T_j^n = 1, j = 1, \dots, d),$$

et le point  $x_n \in X_\tau(R_{d,n})$  de coordonnées

$$\chi^{m_j}(x_n) = T_j \in R_{d,n},$$

quel que soit  $j = 1, \dots, d$ . Son image  $\underline{\varphi}(x_n)$  dans  $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1(R_{d,n}) = R_{d,n}$  est la classe d'un polynôme de Laurent

$$P_n(T_1, \dots, T_d) = \sum_{I \in \mathbb{Z}^d} a_I(n) T_1^{i_1} \dots T_d^{i_d},$$

où les coefficients  $a_I(n)$  sont entiers et presque tous nuls.

Tout morphisme  $\sigma : R_{d,n} \rightarrow \mathbb{C}$  est obtenu en envoyant chaque  $T_j, j \in J$ , sur une racine  $n$ -ième  $\zeta_j$  de l'unité. On a donc, d'après la condition (6),

$$P_n(\zeta_1, \dots, \zeta_d) = \alpha(\zeta_1, \dots, \zeta_d)$$

dès que  $\zeta_1^n = \zeta_2^n = \dots = \zeta_d^n = 1$ . Pour tout multi-indice  $I \subset \mathbb{Z}^d$  le coefficient de Fourier  $a_I$  se calcule par la formule

$$a_I = (2\pi)^{-d} \int_{(S^1)^d} \alpha(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_d}) e^{-iI \cdot \theta} d\theta_1 \dots d\theta_d.$$

C'est donc la limite quand  $n$  tend vers l'infini de

$$a_I(n) = n^{-d} \sum_{\zeta_1^n = \dots = \zeta_d^n = 1} P_n(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \prod_{j=1}^d \zeta_j^{-i_j}.$$

Puisque  $a_I(n)$  est un entier quel que soit  $n \geq 1$ ,  $a_I$  doit être un entier, nul pour presque tout  $I$  (puisque la série de Fourier définissant  $\alpha$  converge dans la topologie  $L^2$ ). Il en résulte que la fonction  $\alpha = \varphi^*(T)$  est un polynôme

$$P(T_1, \dots, T_d) \in \mathbb{Z}[T_1, \dots, T_{d-r}, T_{d-r+1}^{\pm 1}, \dots, T_d^{\pm 1}],$$

c'est-à-dire un élément de  $\mathbb{Z}[\mathcal{S}_\tau]$ . Elle définit donc un morphisme

$$\varphi_{\mathbb{Z}} : U_\tau \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1$$

tel que  $\varphi^* : \mathcal{O}(\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1) \rightarrow \mathcal{A}_\tau$  soit le composé de  $\varphi_{\mathbb{Z}}^*$  et de la restriction à  $C_\tau$ . Si  $R \in \text{Ob}(\mathcal{R})$  et si  $\sigma : R \rightarrow \mathbb{C}$  est un morphisme d'anneaux unitaires, il résulte alors de (8) que le morphisme composé

$$\underline{X}_\tau(R) \xrightarrow{\varphi} \underline{\mathbb{A}}_{\mathbb{Z}}^1(R) = R \xrightarrow{\sigma} \mathbb{C}$$

coïncide avec

$$\underline{X}_\tau(R) \longrightarrow U_\tau(R) \xrightarrow{\varphi_{\mathbb{Z}}} R \xrightarrow{\sigma} \mathbb{C}.$$

Comme le produit des morphismes  $\sigma$  est injectif on voit que  $\varphi$  est la restriction de  $\varphi_{\mathbb{Z}}$  à  $X_\tau$ .

Soit maintenant

$$\varphi : X_\tau \rightarrow V$$

un morphisme de  $\mathcal{T}$  où  $V \subset \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n$  est une variété affine arbitraire. Soit  $W$  la réunion des composantes horizontales de  $V$ , c'est à dire le spectre de l'anneau des fonctions de  $V$  modulo torsion, et  $W \rightarrow V$  l'inclusion canonique. Pour tout  $R \in \text{Ob}(\mathcal{R})$ , l'application  $W(R) \rightarrow V(R)$  est bijective. On peut donc supposer que  $V = W$ , c'est à dire que la variété  $V$  est plate sur  $\mathbb{Z}$ . Chacune des coordonnées

$$\pi_j : V \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1,$$

$j = 1, \dots, n$ , définit un morphisme  $\pi_j \circ \varphi$  de  $X_\tau$  vers  $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1$  dans  $\mathcal{T}$ , dont on vient de voir qu'il est induit par un morphisme  $\psi_{j\mathbb{Z}} \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(U_\tau, \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1)$ . Notons

$$\psi_{\mathbb{Z}} : U_\tau \rightarrow \mathbb{A}^n$$

le produit des morphismes  $\psi_{j\mathbb{Z}}$ ,  $j = 1, \dots, n$ . La restriction de  $\psi_{\mathbb{Z}}$  à  $X_\tau$  coïncide avec le morphisme composé

$$X_\tau \xrightarrow{\varphi} V \longrightarrow \mathbb{A}^n.$$

Par ailleurs l'image de  $\psi_{\mathbb{Z}}$  est contenue dans  $V$ , car  $C_\tau$  est Zariski dense dans  $U_\tau(\mathbb{C})$  et donc

$$\psi_{\mathbb{Z}}(U_\tau(\mathbb{C})) \subset \overline{\psi_\tau(C_\tau)} \subset V(\mathbb{C}).$$

La deuxième inclusion ci-dessus est due au fait que si  $\alpha \in \mathcal{O}(\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^d)$ , la restriction de  $\alpha \circ \psi_{\mathbb{Z}}$  à  $C_\tau$  est égale à  $\varphi^*(\alpha|_{V(\mathbb{C})})$ ; elle est donc nulle si  $\alpha$  s'annule sur  $V(\mathbb{C})$ . Puisque  $V$  est plate sur  $\mathbb{Z}$  on en conclut que  $\psi_{\mathbb{Z}}$  se factorise par un morphisme algébrique  $\varphi_{\mathbb{Z}} : U_\tau \rightarrow V$ , dont la restriction à  $X_\tau$  est égale à  $\varphi$ . Cela démontre le théorème.

## 5.2

En prenant pour  $\Delta$  les éventails habituels on obtient les exemples suivants de variétés  $X(\Delta)$  sur  $\mathbb{F}_1$ .

### 5.2.1

La droite affine  $\mathbb{A}^1$  sur  $\mathbb{F}_1$  est la variété affine sur  $\mathbb{F}_1$  définie par

$$\underline{\mathbb{A}}^1(R) = \mu(R) \cup \{0\}, \text{ si } R \in \text{Ob}(\mathcal{R}),$$

(rappelons que  $\mu(R)$  désigne l'ensemble des racines de l'unité de  $R$ ),  $\mathcal{A}_{\mathbb{A}^1}$  étant l'algèbre des fonctions continues sur le disque unité  $D = \{z \in \mathbb{C}/|z| \leq 1\}$  qui sont holomorphes dans l'intérieur de  $D$ , avec les évaluations évidentes. On a

$$\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_1} \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z} = \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}.$$

On notera qu'il n'existe apparemment pas d'addition  $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^1$  définie sur  $\mathbb{F}_1$ .

### 5.2.2

Le groupe multiplicatif  $\mathbb{G}_m$  sur  $\mathbb{F}_1$  est la variété affine sur  $\mathbb{F}_1$  définie par

$$\underline{\mathbb{G}}_m(R) = \mu(R) \quad \text{si } R \in \text{Ob}(\mathcal{R}),$$

l'algèbre  $\mathcal{A}_{\mathbb{G}_m}$  étant celle des fonctions continues sur le cercle unité. Son extension des scalaires

$$\mathbb{G}_m \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z} = \mathbb{G}_{m,\mathbb{Z}}$$

est le schéma en groupe multiplicatif sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ .

### 5.2.3

On définit de même les produits  $\mathbb{A}^a \times \mathbb{G}_m^b$  sur  $\mathbb{F}_1$ ,  $a, b \in \mathbb{N}$ .

### 5.2.4

L'espace projectif  $\mathbb{P}^d$  sur  $\mathbb{F}_1$  est une variété sur  $\mathbb{F}_1$  obtenue par recollement de  $d+1$  espaces affines  $\mathbb{A}^d$  sur  $\mathbb{F}_1$ . Son extension à  $\mathbb{Z}$  est l'espace projectif  $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^d$  de dimension  $d$  sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ . Si  $R \in \text{Ob}(\mathcal{R})$ , l'ensemble fini  $\underline{\mathbb{P}}^d(\text{Spec}(R))$  est formé des points de  $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^d(R)$  dont on peut choisir un système de coordonnées homogènes dans  $(\mu(R) \cup \{0\})^{d+1}$ . On a  $\mathcal{A}_{\mathbb{P}^d} = \mathbb{C}$  et, plus généralement,  $\mathcal{A}_{\Delta} = \mathbb{C}$  quand l'éventail  $\Delta$  est complet.

### 5.3

Soit  $\Lambda$  un  $\mathbb{Z}$ -module libre de type fini et  $\|\cdot\|$  une norme hermitienne sur  $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ .

On pose  $\overline{\Lambda} = (\Lambda, \|\cdot\|)$ .

Soit  $B = \{x \in \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} / \|x\| \leq 1\}$  la boule unité et  $\Phi$  une partie de  $(B \cap \Lambda) - \{0\}$  telle que si  $v \in (B \cap \Lambda) - \{0\}$ , un et un seul des vecteurs  $v$  et  $-v$  est dans  $\Phi$ . Si  $R \in \text{Ob}(\mathcal{R})$  on désigne par  $\underline{X}(R)$  l'ensemble fini des éléments de  $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} R$  qui peuvent s'écrire

$$x = \sum_{v \in \Phi} v \otimes \zeta_v, \quad (15)$$

où  $\zeta_v \in \mu(R) \cup \{0\}$ . L'ensemble fini  $\underline{X}(R)$  ne dépend pas de  $\Phi$  et définit un foncteur

$$\underline{X} : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{E}ns.$$

Par ailleurs, notons  $\Lambda_0 \subset \Lambda$  le réseau engendré par  $\Lambda$  et par  $C$  le sous-ensemble de  $\Lambda_0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$  formé des vecteurs de norme au plus égale à  $t = \text{card}(\Phi)$ . Soit  $\mathcal{A}$  l'algèbre des fonctions complexes continues sur  $C$  qui sont holomorphes dans l'intérieur de  $C$ . Si  $x \in \underline{X}(R)$  et si  $\sigma : R \rightarrow \mathbb{C}$  est un morphisme d'anneaux unitaires, il résulte de (15) que

$$\|\sigma(x)\| = \left\| \sum_{v \in \Phi} v \otimes \sigma(\zeta_v) \right\| \leq t.$$

On peut donc évaluer les fonctions de  $\mathcal{A}$  en  $\sigma(x)$ .

**Proposition 6.** *Le couple  $X(\overline{\Lambda}) = (\underline{X}, \mathcal{A})$ , muni des évaluations précédentes, est une variété affine sur  $\mathbb{F}_1$  dont l'extension des scalaires à  $\mathbb{Z}$  est le spectre  $X_{\mathbb{Z}}$  de l'algèbre symétrique du dual de  $\Lambda_0$ .*

**Preuve.** Considérons le morphisme de groupes abéliens

$$\pi : \mathbb{Z}^{\Phi} \rightarrow \Lambda$$

tel que

$$\pi((n_v)) = \sum_{v \in \Phi} n_v v \in \Lambda.$$

Si  $\mathbb{A}^{\Phi}$  est l'espace affine sur  $\mathbb{F}_1$  de rang  $t$ ,  $\pi$  induit un morphisme de trucs sur  $\mathbb{F}_1$  de  $\mathbb{A}^{\Phi}$  vers  $X(\overline{\Lambda})$ , qu'on note aussi  $\pi$  (on remarquera que si  $(z_v) \in \mathbb{C}^{\Phi}$  et  $|z_v| \leq 1$  quel que soit  $v \in \Phi$ , le vecteur  $\sum_{v \in \Phi} z_v v$  est dans  $C$ ).

Si  $V \in \text{Ob}(\mathcal{V}_{\mathbb{Z}})$  est une variété affine et si

$$\varphi : X(\overline{\Lambda}) \rightarrow V$$

est un morphisme de  $\mathcal{T}$ , le morphisme composé

$$\varphi \circ \pi : \mathbb{A}^{\Phi} \rightarrow V$$

est, d'après le Théorème 1, la restriction d'un morphisme

$$\psi_Z \in \text{Hom}_Z(\mathbb{A}_Z^\Phi, V).$$

Le choix d'une section  $s$  de la projection  $\mathbb{Z}$ -linéaire  $\pi$  de  $\mathbb{Z}^\Phi$  sur  $\Lambda_0$  induit une section algébrique

$$s_Z : X_Z \rightarrow \mathbb{A}_Z^\Phi$$

de la projection  $\pi_Z \in \text{Hom}_Z(\mathbb{A}_Z^\Phi, X_Z)$ . Notons

$$\varphi_Z : X_Z \rightarrow V$$

le morphisme composé  $\psi_Z \circ s_Z$ . Si  $\alpha \in \mathcal{O}(V_{\mathbb{C}})$ , la restriction de  $\varphi_Z^*(\alpha)$  à  $C$  coïncide avec

$$s^* \circ \pi^* \circ \varphi^*(\alpha) = \varphi^*(\alpha).$$

Il en résulte, comme dans la fin de la preuve du Théorème 1, que la restriction de  $\varphi_Z$  à  $X(\bar{\Lambda})$  est égale à  $\varphi$ . q.e.d.

**Remarque.** Du point de vue de la théorie d'Arakelov, le couple  $\bar{\Lambda} = (\Lambda, \|\cdot\|)$  est un fibré vectoriel sur la courbe  $\text{Spec}(\mathbb{Z}) \cup \{\infty\}$  et les éléments de  $B \cap \Lambda$  sont les sections globales de ce fibré. C'est un espace vectoriel sur  $\mathbb{F}_1$  au sens de Kapranov et Smirnov (cf. [12] et 1.3). On peut sans doute voir  $X(\bar{\Lambda})$  comme la variété affine sur  $\mathbb{F}_1$  associé à cet espace vectoriel.

## 5.4

Il faudrait bien sûr trouver d'autres exemples que les précédents. Par exemple, si  $G$  est un schéma en groupes de Chevalley sur  $\mathbb{Z}$ , peut-on le définir sur  $\mathbb{F}_1$  ? Et qu'en est-il des variétés de drapeaux associées ?

Par exemple la variété de Grassmann  $G(2, 4)$  est aussi la conique  $Q$  de  $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^5$  d'équation homogène

$$xy - zt + uv = 0. \tag{16}$$

Si l'on veut que le nombre des points de  $\underline{X}(R_n)$ ,  $n \geq 1$ , vérifie le Théorème 2 iii) ci-dessous, on peut définir comme suit un objet  $X$  sur  $\mathbb{F}_1$  contenu dans celui associé à  $Q$ . Notons  $S_{1,Z}$ ,  $S_{2,Z}$ ,  $S_{3,Z}$  et  $S_{4,Z}$  les sous-variétés localement fermées de  $Q$  suivantes

$$S_{1,Z} = Q \cap \{x \neq 0\} \simeq \mathbb{A}_Z^4$$

(coordonnées  $z/x, t/x, u/x, v/x$ ),

$$S_{2,Z} = Q \cap \{x = 0, z \neq 0\} \simeq \mathbb{A}_Z^3$$

(coordonnées  $y/z, u/z, v/z$ ),

$$S_{3,Z} = Q \cap \{x = z = 0, u \neq 0\} \simeq \mathbb{A}_Z^2$$

(coordonnées  $y/u, t/u$ ), et

$$S_{4,Z} = Q \cap \{x = z = u = 0\} \simeq \mathbb{P}_Z^2$$



(coordonnées homogènes  $(y, t, v)$ ).

Notons  $S_1, S_2, S_3, S_4$  les variétés sur  $\mathbb{F}_1$  correspondantes (cf. 5.2), munies des injections évidentes  $S_\alpha \rightarrow Q$  dans  $\mathcal{OB}$ . Si  $A \in \mathcal{A}$  on pose

$$\underline{X}(A) = \underline{S}_1(A) \cup \underline{S}_2(A) \cup \underline{S}_3(A) \cup \underline{S}_4(A)$$

dans  $\underline{Q}(A)$  et  $\mathcal{A}_X = \mathbb{C}$ .

**Question 3.** *L'objet  $X = (\underline{X}, \mathbb{C})$  sur  $\mathbb{F}_1$  est-il une variété sur  $\mathbb{F}_1$  telle que  $X \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z} = Q$  ?*

## 6 Fonctions zêta

### 6.1

Soit  $X$  une variété sur  $\mathbb{F}_1$ . On cherche à lui associer une fonction  $\zeta_X(s)$ . Si  $n \geq 1$ , rappelons que  $R_n = \mathbb{Z}[T]/(T^n - 1)$  et que l'ensemble fini  $\underline{X}(R_n)$  est aussi celui des morphismes de  $\text{Spec}(\mathbb{F}_{1^n})$  vers  $X$  (cf. (9) si  $X$  est affine ; le cas général se montre de la même façon grâce à la Proposition 3). Puisque la fonction zêta d'une variété algébrique sur le corps  $\mathbb{F}_q$ ,  $q > 1$ , s'obtient à partir du nombre de ses points dans les corps  $\mathbb{F}_{q^n}$ ,  $n \geq 1$ , il est naturel de définir  $\zeta_X(s)$  à l'aide des nombres entiers  $\#\underline{X}(R_n)$ . On fera l'hypothèse simplificatrice suivante :

(Z) Il existe un polynôme  $N(x) \in \mathbb{Z}[x]$  tel que, quel que soit l'entier  $n \geq 1$ ,

$$\#\underline{X}(R_n) = N(2n + 1).$$

En imitant A. Weil, introduisons alors la série formelle des variables  $q$  et  $T$

$$Z(q, T) = \exp \left( \sum_{r \geq 1} N(q^r) T^r / r \right).$$

Pour tout nombre réel  $s$  on considère alors la fonction  $Z(q, q^{-s})$  au voisinage de  $q = 1$ .

**Lemme 1.** i) *Pour tout  $s \in \mathbb{R}$  la fonction  $Z(q, q^{-s})^{-1}$  a un zéro d'ordre  $\chi = N(1)$  en  $q = 1$ . On a de plus*

$$\lim_{q \rightarrow 1} Z(q, q^{-s})^{-1} (q - 1)^{-\chi} = \zeta_X(s),$$

où  $\zeta_X(s)$  est la valeur en  $s$  d'un polynôme à coefficients entiers.

ii) *Si  $N(x) = \sum_{i=0}^d a_i x^i$  on a*

$$\zeta_X(s) = \prod_{i=0}^d (s - i)^{a_i}.$$

**Preuve.** Si  $N(x)$  est la somme de deux polynômes  $N'(x)$  et  $N''(x)$ , les fonctions  $Z(q, T)$  et  $\zeta_X(s)$  associées à  $N$  sont les produits de celles associées à  $N'$  et  $N''$ . Par conséquent il suffit de traiter le cas où  $N(x) = x^d$ . On a alors

$$Z(q, T) = \exp \left( \sum_{r \geq 1} q^{rd} T^r / r \right) = (1 - q^d T)^{-1}$$

et par conséquent

$$Z(q, q^{-s})^{-1} = 1 - q^{d-s}.$$

Quand  $q$  tend vers 1 on trouve

$$Z(q, q^{-s})^{-1} = (s - d)(q - 1) + O((q - 1)^2),$$

ce qui démontre le lemme.

## 6.2 Théorème 2.

i) Si  $\Delta$  est un éventail régulier, la variété  $X(\Delta)$  sur  $\mathbb{F}_1$  qui lui est associée (Théorème 1) vérifie la condition (Z). Le polynôme  $N(x) \in \mathbb{Z}[x]$  tel que

$$\# X(\Delta)(\mathbb{F}_{1^n}) = N(2n + 1), \quad n \geq 1,$$

vérifie aussi

$$\# \mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{F}_q) = N(q)$$

pour tout corps fini  $\mathbb{F}_q$  d'ordre  $q > 1$ . De plus  $N(1)$  est la caractéristique d'Euler-Poincaré de  $\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})$ .

ii) Si  $\bar{\Lambda} = (\Lambda, \|\cdot\|)$  est un réseau hermitien, la variété affine  $X(\bar{\Lambda})$  sur  $\mathbb{F}_1$  qui lui est associée (Proposition 6) vérifie la condition (Z). Le polynôme  $N(x)$  correspondant vérifie  $N(1) = 1$  et  $N(x) - x^t$  est un polynôme de degré au plus  $t - 1$  (où  $t = \text{card}(\Phi)$ , voir 5.3).

iii) Soit  $Q$  la quadrique d'équation (16) sur  $\mathbb{Z}$  et

$$N(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1.$$

On a alors

$$N(2n + 1) = \# \underline{\underline{X}}(R_n)$$

où  $\underline{\underline{X}}$  est le foncteur défini en 5.4, et

$$N(q) = \# Q(\mathbb{F}_q)$$

pour tout corps fini  $\mathbb{F}_q$ ,  $q > 1$ . De plus  $N(1) = 6$  est la caractéristique d'Euler-Poincaré de  $Q(\mathbb{C})$ .

**Preuve.** Pour prouver i) il suffit de traiter le cas d'une variété torique affine de la forme  $U_\tau$ . En effet, il en résultera en général que les nombres  $\# X(\Delta)(\mathbb{F}_{1^n})$

et  $\# \mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{F}_q)$  sont données par les valeurs (en  $2n + 1$  et  $q$ ) du même polynôme, car  $\underline{X}(\Delta)(R_n)$  (resp.  $\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{F}_q)$ ) est la réunion des ensembles  $\underline{X}_\tau(R_n)$  (resp.  $U_\tau(\mathbb{F}_q)$ ), amalgamés le long des sous-ensembles  $\underline{X}_{\tau \cap \tau'}(R_n)$  (resp.  $U_{\tau \cap \tau'}(\mathbb{F}_q)$ ).

Soit donc  $\tau$  un cône ouvert régulier de dimension  $r$  et  $\{m_1, \dots, m_d\}$  une base de  $M$  telle que  $\{m_1, \dots, m_r\}$  soit une famille génératrice de  $\mathcal{S}_\tau$ . Comme dans la preuve du Théorème 1 i), si  $\tau' = \mathbb{R}_+ m_1 + \dots + \mathbb{R}_+ m_d$ , la carte  $U_{\tau'} \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^d$  donnée par la famille des  $\chi^{m_i}$ ,  $1 \leq i \leq d$ , identifie  $\underline{X}_{\tau'}(R)$  à l'ensemble fini  $(\mu(R) \cup \{0\})^{d-r} \times \mu(R)^r$ . Cette même carte identifie  $U_\tau(\mathbb{F}_q)$  à l'ensemble  $\mathbb{F}_q^{d-r} \times (\mathbb{F}_q^*)^r$ . Par conséquent le premier énoncé du théorème est vérifié avec

$$N(x) = x^{d-r}(x-1)^r.$$

Par ailleurs,  $U_\tau(\mathbb{C})$  a le type d'homotopie de  $(S^1)^r$ . Sa caractéristique d'Euler-Poincaré est donc nulle si  $r > 0$  est égale à 1 si  $r = 0$ . On a donc bien  $N(1) = \chi(U_\tau(\mathbb{C}))$ .

Dans le cas ii) l'ensemble  $\underline{X}(R_n)$  est celui des éléments de  $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} R_n$  de la forme

$$x = \sum_{v \in \Phi} v \otimes \zeta_v,$$

où  $\zeta_v \in \mu(R_n) \cup \{0\}$  (voir (15)). D'après [10] (voir la preuve de la Proposition 2 ii)) l'ensemble  $\mu(R_n)$  est formé des polynômes  $\pm T^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , et la famille  $(T^i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  est une base de  $R_n$  sur  $\mathbb{Z}$ , donc tout élément de  $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} R_n$  s'écrit de façon unique sous la forme

$$x = \sum_{i=1}^n x_i \otimes T^i$$

avec  $x_i \in \Lambda$ . Ceci conduit à décrire  $\underline{X}(R_n)$  de la façon suivante. Si  $\Phi' \subset \Phi$  est une partie de  $\Phi$ , appelons  $V(\Phi')$  l'ensemble des vecteurs non nuls de  $\Lambda$  de la forme

$$\sum_{v \in \Phi'} \varepsilon_v v, \quad \text{avec } \varepsilon_v \pm 1.$$

Si  $k \geq 1$  est un entier on note  $V(k)$  l'ensemble des collections  $\{v_1, \dots, v_k\}$  de  $k$  vecteurs de  $\Lambda$  telles qu'il existe une famille finie  $(\Phi_1, \dots, \Phi_k)$  de sous-ensembles disjoints de  $\Phi$  tels que  $v_j \in V(\Phi_j)$ ,  $1 \leq j \leq k$ . On note  $X(k, n)$  l'ensemble des éléments de  $\underline{X}(R_n)$  de la forme

$$x = \sum_{j=1}^k v_j \otimes T^{n_j},$$

où  $\{v_1, \dots, v_k\} \in V(k)$  et  $1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_k \leq n$ . L'ensemble  $\underline{X}(R_n)$  est la réunion disjointe de  $\{0\}$  et des sous-ensembles  $X(k, n)$ . Par ailleurs,

$$\# X(k, n) = (\# V(k))n(n-1)\dots(n-k+1).$$

Si  $v_j \in \Phi_j$  on a  $-v_j \in \Phi_j$ , donc le cardinal de chaque ensemble  $V(k)$  est divisible par  $2^k$ , et  $\# X(k, n)$  est un polynôme entier de la variable  $2n$ , nul à l'origine et de degré  $k$ . Si  $k = t = \text{card}(\Phi)$ , chaque ensemble  $\Phi_j$  comporte un seul vecteur et son opposé, donc  $\# X(t, n)$  est la somme de  $(2n)^t$  et d'un polynôme de degré au plus  $t - 1$  en la variable  $2n$ . Il en résulte que  $\# \underline{X}(R_n) = N(2n + 1)$  où  $N(x) \in \mathbb{Z}[x]$  vérifie les conditions de l'énoncé (on notera que  $N(1) = 1$  est encore la caractéristique d'Euler-Poincaré de  $X_{\mathbb{Z}}(\mathbb{C})$ ).

Pour montrer iii) il suffit de noter que  $\underline{X}(R_n)$  (resp.  $Q(\mathbb{F}_q)$ ) est la réunion disjointe des ensembles  $\underline{S}_{\alpha}(R_n)$  (resp.  $S_{\alpha, \mathbb{Z}}(\mathbb{F}_q)$ ),  $\alpha = 1, 2, 3, 4$ , et d'appliquer le Théorème 2 i).

### 6.3 Exemples.

#### 6.3.1

Le point  $\text{Spec}(\mathbb{F}_1)$  a pour fonction zêta

$$\zeta_{\text{Spec}(\mathbb{F}_1)}(s) = s.$$

#### 6.3.2

La droite affine  $\mathbb{A}^1$  est telle que  $N(q) = q$  et

$$\zeta_{\mathbb{A}^1}(s) = s - 1.$$

#### 6.3.3

Le groupe multiplicatif  $\mathbb{G}_m$  vérifie  $N(q) = q - 1$  et

$$\zeta_{\mathbb{G}_m}(s) = (s - 1)/s.$$

#### 6.3.4

Si  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont deux éventails on a

$$\zeta_{X(\Delta \times \Delta')}(s) = \zeta_{X(\Delta)}(s) \times \zeta_{X(\Delta')}(s).$$

#### 6.3.5

L'espace projectif  $\mathbb{P}^d$  vérifie

$$N(q) = [d]$$

(voir 1.1) et donc

$$\zeta_{\mathbb{P}^d}(s) = s(s - 1) \dots (s - d).$$

Cette formule et les précédentes sont celles prévues par Manin [15] (voir (3)).

### 6.3.6

Soit  $\Lambda = \mathbb{Z}$  et  $\lambda = \|\mathbf{1}\| > 0$  la norme des générateurs de  $\Lambda$ . L'entier  $t \geq 0$  est la partie entière de  $\lambda$  et la fonction zêta de  $X(\overline{\Lambda})$  ne dépend que de  $t$ , i.e.  $\zeta_{X(\overline{\Lambda})}(s) = \zeta_t(s)$ , avec  $\zeta_0(s) = s$ ,  $\zeta_1(s) = s - 1$ ,  $\zeta_2(s) = s(s - 2)/(s - 1), \dots$ . Je ne connais pas de formule générale pour  $\zeta_t(s)$ .

## 6.4 Remarques.

### 6.4.1

La définition du Lemme 1 i) a peut-être un sens dans des situations où (Z) n'est pas vérifiée. On peut aussi se demander si une variété  $X$  lisse sur  $\mathbb{F}_1$  vérifie la condition (Z), si  $N(q)$  est le cardinal de  $(X \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z})(\mathbb{F}_q)$ ,  $q > 1$ , et si  $N(1)$  est la caractéristique d'Euler-Poincaré de  $(X \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z})(\mathbb{C})$ . En termes de motifs :

**Question 4.** *Les motifs des variétés lisses sur  $\mathbb{F}_1$  sont-ils des motifs de Tate mixtes ?*

### 6.4.2

Quand  $X = \text{Spec}(R)$ ,  $R \in \text{Ob}(\mathcal{R})$ , le cardinal de  $\underline{X}(R_n)$  n'a pas un comportement simple et je ne sais pas définir  $\zeta_X(s)$ . Mais on remarquera que  $X$  n'est jamais lisse sur  $\mathbb{F}_1$  (sauf quand  $R = \mathbb{Z}$ ).

### 6.4.3

Soit  $G$  un graphe fini. M. Kontsevich associe à  $G$  des variétés  $Y_G$  et  $X_G$  sur  $\mathbb{Z}$ , qui sont "souvent" des variétés polynomialement dénombrables [3], c'est-à-dire telles que leur nombre de points dans  $\mathbb{F}_q$ ,  $q > 1$ , est la valeur en  $x = q$  d'un polynôme  $N(x)$  à coefficients entiers. Kontsevich a suggéré que ces variétés sont définies sur  $\mathbb{F}_1$ . Lorsqu'elles sont polynomialement dénombrables peut-être vérifient-elles la condition (Z) avec le même polynôme  $N(x)$ . De même, on peut se demander si un matroïde définit une variété sur  $\mathbb{F}_1$ .

## 7 Sur l'image du $J$ -homomorphisme

### 7.1

Comme l'a noté Manin [15], la formule (1) suggère que les groupes de  $K$ -théorie algébrique de  $\mathbb{F}_1$  sont les groupes d'homotopie stable des sphères. En effet, rappelons que, d'après D. Quillen, la  $K$ -théorie d'un anneau  $A$  est

$$K_m(A) = \pi_m \text{BGL}(A)^+, \quad \text{si } m \geq 1, \quad (17)$$

où le CW-complexe  $\text{BGL}(A)^+$  est obtenu en adjoignant au classifiant du groupe linéaire infini  $\text{GL}(A)$  des cellules de dimensions 2 et 3 (voir [13]). Si  $A$  est un

corps et  $m > 1$ , la formule (17) vaut aussi en remplaçant le groupe linéaire par le groupe spécial linéaire.

Par ailleurs, un théorème de Barratt, Priddy et Quillen [17] affirme que si  $\Sigma_\infty = \bigcup_{N \geq 1} \Sigma_N$  est le groupe symétrique infini, on a

$$\pi_m B \Sigma_\infty^+ = \pi_m^s, \quad m \geq 1, \quad (18)$$

où  $\pi_m^s$  est le  $m$ -ième groupe d'homotopie stable des sphères. Il est donc logique d'écrire

$$K_m(\mathbb{F}_1) = \pi_m^s, \quad m \geq 1. \quad (19)$$

**Variante.** Le groupe des unités de  $\mathbb{F}_1$  est  $\mathbb{F}_1^* = \mu(\mathbb{Z}) = \{\pm 1\}$ . On peut donc envisager que  $\mathrm{GL}_N(\mathbb{F}_1)$  est le groupe des matrices monomiales  $N \times N$  dont les entrées sont  $\pm 1$ , c'est-à-dire le produit en couronnes  $\Sigma_N \int (\mathbb{Z}/2)^N$ . Cela conduirait [11] à remplacer (19) par la formule

$$K_m(\mathbb{F}_1) = \pi_m^s(B(\mathbb{Z}/2)),$$

qui n'en diffère que par un groupe fini de 2-torsion.

## 7.2

L'inclusion standard de  $\Sigma_N$  dans  $\mathrm{GL}_N(\mathbb{Z})$  induit un morphisme

$$\alpha_m : \pi_m^s \rightarrow K_m(\mathbb{Z}), \quad m \geq 1,$$

que l'on peut voir comme celui induit en  $K$ -théorie algébrique par le morphisme d'anneaux  $\mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{Z}$ . Ce morphisme  $\alpha_m$  est bien compris.

Adams a introduit un morphisme

$$J : \pi_m O \rightarrow \pi_m^s,$$

dont il montre que l'image est un groupe cyclique. Le groupe  $\mathrm{Im}(J)$  est d'ordre 2 si  $m$  est congru à 0 ou 1 modulo 8. Il est cyclique d'ordre le dénominateur  $w_i$  de  $b_i/2i$  si  $m = 2i - 1$  avec  $i$  pair, où  $b_i$  le  $i$ -ème nombre de Bernoulli. Et il est nul sinon.

Quillen a montré que  $\alpha_m$  est injectif sur l'image de  $J$  [18] et S.A. Mitchell [16] a montré que l'image de  $\alpha_m$  coïncide avec celle de  $\alpha_m \circ J$ .

## 7.3

Par ailleurs, les théories de M. Lévine, M. Hanamura et V. Voevodsky permettent de voir les groupes de  $K$ -théorie algébrique comme des groupes d'extensions dans une catégorie (dérivée) de motifs mixtes. Si par exemple  $m = 2i - 1 > 1$ , on a

$$K_{2i-1}(\mathbb{Z}) = K_{2i-1}(\mathbb{Q}) = \mathrm{Ext}_{\mathrm{DM}(\mathbb{Q})}(\mathbb{Z}(i), \mathbb{Z}). \quad (20)$$

On peut s'attendre à une formule du même type pour le corps à un élément :

$$K_{2i-1}(\mathbb{F}_1) = \text{Ext}_{\text{DM}(\mathbb{F}_1)}(\mathbb{Z}(i), \mathbb{Z}).$$

Les résultats de 7.2 signifieraient alors que la classe d'une extension de motifs de Tate sur  $\mathbb{Q}$  qui provient, par extension des scalaires de  $\mathbb{F}_1$  à  $\mathbb{Z}$  (puis  $\mathbb{Q}$ ), d'une extension de motifs de Tate sur  $\mathbb{F}_1$  est de torsion, et annulée par  $w_i$  s'il s'agit d'une extension de  $\mathbb{Z}$  par  $\mathbb{Z}(i)$  (ou de  $\mathbb{Z}(j)$  par  $\mathbb{Z}(i+j)$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ ).

## 7.4

Un résultat de B. Totaro [24] est cohérent avec les réflexions précédentes. Si  $\mathbb{P}(\Delta)$  est la variété torique associée à un éventail  $\Delta$  de dimension  $d$ , le Théorème 5 de [24] montre que la filtration des poids de la cohomologie singulière à coefficients rationnels de  $\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})$  est canoniquement scindée. La preuve consiste à considérer la filtration canonique

$$\mathbb{P}(\Delta) = Y_0 \supset Y_1 \supset \dots \supset Y_d \supset \emptyset,$$

où  $Y_k$  est la réunion des orbites toriques de dimension au plus  $d-k$ . Chaque strate  $Y_k - Y_{k-1}$  est la réunion disjointe de produits du groupe multiplicatif par la droite affine, et la multiplication par  $n$  dans  $N \simeq \mathbb{Z}^d$  (cf. 5.1) induit le produit par  $n^j$  sur la partie de poids  $j$  de la cohomologie de ces strates.

Autrement dit, la filtration de  $\mathbb{P}(\Delta)$  par  $Y_k$  fournit des extensions de motifs de Tate, et donc des classes dans les groupes  $\text{Ext}_{\text{DM}(\mathbb{Q})}(\mathbb{Z}(i+j), \mathbb{Z}(j))$ , qui sont annulées par le p.g.c.d. des entiers  $n^{i+j} - n^j$ ,  $n > 1$ . Si  $j$  est assez grand, on sait bien que ce p.g.c.d. n'est autre que  $w_i$ . Or le Théorème 1 indique que ces extensions sont sans doute dans l'image du morphisme

$$\text{Ext}_{\text{DM}(\mathbb{F}_1)}(\mathbb{Z}(i+j), \mathbb{Z}(j)) \rightarrow \text{Ext}_{\text{DM}(\mathbb{Q})}(\mathbb{Z}(i+j), \mathbb{Z}(j)),$$

ce qui va dans le sens de la discussion de 7.3.

On peut aussi se demander si le résultat de Totaro est optimal et si le groupe  $\text{Im}(\alpha_{2i-1})$ ,  $i \geq 1$ , est engendré par des extensions de motifs sur  $\mathbb{Q}$  provenant des variétés toriques par le procédé précédent. Ceci conduit au problème suivant, que l'on pourrait aborder en étudiant la structure de Hodge mixte à coefficients entiers de  $\mathbb{P}(\Delta)$  et de sa filtration canonique par les  $Y_k$  :

**Question 5.** *Pour tout entier  $i \geq 1$ , existe-t-il  $j \geq 0$ , une variété torique  $\mathbb{P}(\Delta)$  et une extension de  $\mathbb{Z}(j)$  par  $\mathbb{Z}(i+j)$ , déduite de la filtration canonique de  $\mathbb{P}(\Delta)$ , dont la classe dans  $\text{Ext}_{\text{DM}(\mathbb{Q})}(\mathbb{Z}(j), \mathbb{Z}(i+j))$  soit d'ordre  $w_i$  ?*

## References

- [1] E.ARBARELLO, C. DE CONCINI ET V.C. KAC, The infinite wedge representation and the reciprocity law for algebraic curves, Theta functions, Proc. 35th Summer Res. Inst. Bowdoin Coll., Brunswick/ME 1987, *Proc. Symp. Pure Math.* **49**, Pt. 1, (1989) 171-190.
- [2] V. BATYREV ET YU. TSCHINKEL, Height zeta functions of toric varieties, *J. Math. Sci.*, New York **82**, No.1, (1996) 3220-3239.
- [3] P.BELKALE ET P.BROSNAN, Matroids, motives and a conjecture of Kontsevich, *Duke Math. J.*, **116**, No.1, (2003) 147-188.
- [4] M. BROUÉ, G. MALLE ET J. MICHEL, Théorèmes de Sylow génériques pour les groupes réductifs sur les corps finis, *Math. Ann.* **292**, No.2, (1992) 241-262.
- [5] M. BROUÉ, G. MALLE ET J. MICHEL, Représentations unipotentes génériques et blocs des groupes réductifs finis avec un appendice de George Lusztig, *Astérisque* **212**; Montrouge: *Société Mathématique de France* 203 p. (1993).
- [6] M. BROUÉ, G. MALLE ET J. MICHEL, Towards Spetses I, *Transform. Groups* **4**, No.2-3, (1999) 157-218.
- [7] A. CONNES, Symétries Galoisiennes et Renormalisation, Pré-publication IHES/M/02/79 (2002).
- [8] M. DEMAZURE ET P. GABRIEL, Introduction to algebraic geometry and algebraic groups, *North-Holland Mathematics Studies* **39** Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland Publishing Company. XIV, 358 p. (1980).
- [9] W. FULTON, *Introduction to toric varieties*, Princeton University Press (1993).
- [10] G.HIGMAN, The units of group rings, *Proc. London Math. Soc.*, **46** (1940) 231-248.
- [11] M. KAPRANOV, Some conjectures on the absolute direct image, lettre, 26/05/1995.
- [12] M. KAPRANOV ET A. SMIRNOV, Cohomology determinants and reciprocity laws: number field case, prépublication.
- [13] J.-L. LODAY, K-théorie algébrique et représentations de groupes, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.*, IV. Sér. 9 (1976) 309-377.
- [14] V. MAILLOT, Géométrie d'Arakelov des variétés toriques et fibrés en droites intégrables, *Mém. Soc. Math. Fr.* Nouv. Sér. 80, 129 p. (2000).



- [15] Y. MANIN, Lectures on zeta functions and motives (according to Deninger and Kurokawa), Columbia University Number Theory Seminar (New York, 1992); *Astérisque* **228** (1995), 4, 121–163.
- [16] S.A. MITCHELL, The Morava K-theory of algebraic K-theory spectra, *J. K-Theory* **3**, No.6, (1990) 607-626.
- [17] S.B. PRIDDY, On  $\Omega^\infty S^\infty$  and the infinite symmetric group, *Algebraic Topology, Proc. Sympos. Pure Math.* **22**, (1971) 217-220.
- [18] D. QUILLEN, Letter from Quillen to Milnor on  $\text{Im}(\pi_i 0 \rightarrow \pi_i^s \rightarrow K_i \mathbb{Z})$ , Algebraic K-Theory, Proc. Conf. Evanston 1976, *Lect. Notes Math.* **551**, (1976) 182-188.
- [19] W. RUDIN, Real and complex analysis, 3rd ed. New York, NY McGraw-Hill, xiv, 416 p. (1987).
- [20] A. SMIRNOV, Hurwitz inequalities for number fields, *St. Petersburg Math. J.* **4**, No.2, (1993) 357-375; translation from *Algebra Anal.* **4**, No.2, (1992) 186-209.
- [21] C. SOULÉ, On the field with one element (exposé à l'Arbeitstagung, Bonn, June 1999), Preprint IHES/M/99/55 (1999).
- [22] R. STEINBERG, A geometric approach to the representations of the full linear group over a Galois field, *Trans. Am. Math. Soc.* **71**, 274-282, (1951)
- [23] J. TITS, Sur les analogues algébriques des groupes semi-simples complexes. Colloque d'algèbre supérieure, Bruxelles, 1956, pp. 261-289. Centre Belge de Recherches Mathématiques, Gauthier-Villars (1957).
- [24] B. TOTARO, Chow groups, Chow cohomology, and linear varieties, preprint (1998).
- [25] A. WEIL, Sur l'analogie entre les corps de nombres algébriques et les corps de fonctions algébriques, [1939a] in *Oeuvres Scient.* **I**, 236-240, (1980), Springer-Verlag.