

Applications conservant une mesure absolument continue par rapport à dx sur $[0, 1]$

D. Ruelle

Institut des Hautes Etudes Scientifique, F-91440 Bures-sur-Yvette, France

Abstract. Sufficient conditions are given such that a differentiable, non invertible, map $g:[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ leaves invariant a measure absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure. In particular, this is shown to be the case for $g(x) = Rx(1-x)$ when $R = 3,6785735 \dots$.

Nous nous intéressons dans cette note à des applications différentiables non invertibles de l'intervalle $[0, 1]$ dans lui-même pour lesquelles il existe une mesure invariante absolument continue par rapport à dx . De telles mesures invariantes n'existent pas «en général»: cela résulte d'un théorème de Jakobson [2] qui affirme que les applications Ω -stables de S^1 dans lui-même forment un ensemble dense pour la topologie C^1 . Nous obtiendrons cependant des conditions suffisantes assez générales pour l'existence d'une mesure invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

L'intérêt que présente l'existence d'une telle mesure est qu'elle est ici liée à une «dépendance sensitive par rapport à la condition initiale» pour l'évolution à temps discret définie par $g:[0, 1] \rightarrow [0, 1]$. La sensibilité par rapport à la condition initiale joue un rôle important dans divers problèmes de physique et d'écologie (voir Lorenz [4], Ruelle-Takens [7], May [5]).

Nous discuterons surtout des applications du type indiqué sur la Figure 1: croissant de 0 à 1 sur un intervalle $[0, c]$, puis décroissant de 1 à 0 sur $[c, 1]$. Nous commençons par rappeler un cas classique (voir Ulam-von Neumann [8]), celui de l'application $x \mapsto 4x(1-x)$.

Soient f, φ les applications continues de $[0, 1]$ sur lui-même définies par

$$f(x) = 4x(1-x)$$

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}.$$

Alors φ est un homéomorphisme et

$$\varphi^{-1}(x) = \sin^2 \frac{\pi x}{2} = \frac{1 - \cos \pi x}{2}.$$

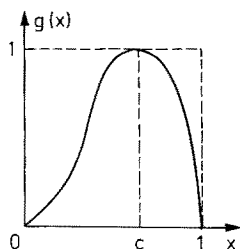


Fig. 1

En outre

$$\tilde{f} = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$$

est donnée, comme on le vérifie immédiatement, par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2(1-x) & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

La mesure de Lebesgue m est invariante pour $\tilde{f}$, donc f laisse invariante $\varphi^{-1}m$, c'est-à-dire la mesure donnée par

$$(\varphi^{-1}m)(dx) = \frac{d\varphi(x)}{dx} dx = \frac{1}{\pi} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

Lemme 1. Soit h une fonction croissante sur $[0, 1]$ avec $h(0)=0$, $h(1)=1$. Supposons que la dérivée h' est Hölder continue d'exposant γ , et satisfait $0 < \alpha \leq h' \leq \beta$. Alors la dérivée $\tilde{h}'$ de $\tilde{h} = \varphi \circ h \circ \varphi^{-1}$ est Hölder continue d'exposant γ et satisfait

$$\frac{\alpha}{\beta} \leq \tilde{h}' \leq \frac{\beta}{\alpha}.$$

On a l'identité

$$\begin{aligned} \tilde{h}'(x) &= \frac{d}{dx} \varphi \circ h \circ \varphi^{-1}(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{(h \circ \varphi^{-1}(x))(1 - h \circ \varphi^{-1}(x))}} (h' \circ \varphi^{-1}(x)) \cdot \sin \frac{\pi x}{2} \cdot \cos \frac{\pi x}{2} \\ &= \left(\frac{\varphi^{-1}(x)}{h \circ \varphi^{-1}(x)} \cdot \frac{1 - \varphi^{-1}(x)}{1 - h \circ \varphi^{-1}(x)} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot (h' \circ \varphi^{-1}(x)). \end{aligned}$$

Si l'on utilise les inégalités

$$\alpha x \leq h(x) \leq \beta x; \quad \alpha(1-x) \leq 1-h(x) \leq \beta(1-x)$$

il vient immédiatement $\alpha/\beta \leq \tilde{h}' \leq \beta/\alpha$. Comme φ^{-1} est de classe C^1 , la continuité de Hölder de $\tilde{h}'$ résulte de celle des fonctions

$$x \mapsto \frac{h(x)}{x}, \frac{1-h(x)}{1-x}, h'.$$

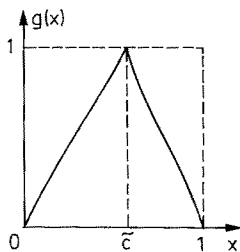


Fig. 2

On a par exemple, en utilisant la formule de Taylor

$$th'(t) - h(t) = t(h'(t) - h'(\theta t)) \leq tC|t - \theta t|^\gamma \leq Ct^{\gamma+1}.$$

Donc, si $x < y$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{h(y)}{y} - \frac{h(x)}{x} \right| &= \int_x^y \frac{th'(t) - h(t)}{t^2} dt \leq \int_x^y Ct^{\gamma-1} dt \\ &= \frac{C}{\gamma} (y^\gamma - x^\gamma) \leq \frac{C}{\gamma} |y - x|^\gamma. \end{aligned}$$

Lemme 2. Soit $\tilde{g}$ une fonction continue sur $[0, 1]$, croissant de 0 à 1 sur un intervalle $[0, \tilde{c}]$, puis décroissant de 1 à 0 sur $[\tilde{c}, 1]$ (voir Fig. 2). On suppose que $\tilde{g}$ a une dérivée $\tilde{g}'$ Hölder continue d'exposant γ sur $[0, \tilde{c}]$ et sur $[\tilde{c}, 1]$, avec $|\tilde{g}'| > 1$. Il existe alors k Hölder continue d'exposant γ sur $[0, 1]$ telle que $e^{k(x)} dx$ est une mesure de probabilité $\tilde{g}$ -invariante sur $[0, 1]$.

Pour la démonstration, voir Ruelle [6], Section 7.31. Si $\tilde{g}$ est de classe C^2 par morceaux, l'existence d'une mesure $\tilde{g}$ -invariante équivalente à dx résulte aussi d'un théorème de Lasota et Yorke [3].

Proposition. Soient h_1, h_2 des fonctions croissantes sur $[0, 1]$ avec $h_i(0) = 0, h_i(1) = 1$. On suppose que les dérivées h'_i sont Hölder continues et satisfont aux inégalités $0 < \alpha_i \leq h'_i \leq \beta_i$. Alors, si $2\alpha_1\alpha_2/\beta_1\beta_2 > 1$, il existe une mesure de probabilité équivalente à dx sur $[0, 1]$, et invariante pour $h_2 \circ f \circ h_1$ (où $f(x) = 4x(1-x)$).

Soit $g = h_2 \circ f \circ h_1$. On peut écrire $\tilde{g} = \tilde{h}_2 \circ \tilde{f} \circ \tilde{h}_1$, avec $\tilde{g} = \varphi \circ g \circ \varphi^{-1}, \dots$, et $|\tilde{f}'| = 2$. Il résulte donc du Lemme 1 que la dérivée $\tilde{g}'$ est Hölder continue et satisfait

$$|\tilde{g}'| \geq 2 \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\beta_1 \beta_2} > 1.$$

Par le Lemme 2, il existe alors une mesure de probabilité $\tilde{g}$ -invariante de la forme $e^{k(x)} dx$ sur $[0, 1]$. L'image de cette mesure par φ^{-1} est

$$\frac{e^{k \circ \varphi(x)} dx}{\pi \sqrt{x(1-x)}}.$$

C'est une mesure g -invariante équivalente à la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$.

Corollaire 1. Soit g une fonction concave sur $[0, 1]$ telle que $g(0)=g(1)=0$ et $\max g(x)=1$. Si g est de classe $C^{2+\gamma}$ et si

$$u < -\frac{1}{8}g'' < v \quad \text{avec} \quad v^3 < 4u^3$$

alors il existe une mesure de probabilité g -invariante équivalente à dx sur $[0, 1]$.

Posons $h_1(x) = \int_0^x \frac{|g'(t)|dt}{4\sqrt{1-g(t)}}$, alors $f \circ h_1 = g$ parce que $h_1(x) = \frac{1}{2}(1 - (\operatorname{sgn} g'(x)) \cdot \sqrt{1-g(x)})$. La dérivée h'_1 est Hölder continue d'exposant γ . En effet si c est tel que $g(c)=1$ et si $x < y$, on a

$$\begin{aligned} |h'_1(y) - h'_1(x)| &\leq \int_x^y \frac{dt}{4\sqrt{1-g(t)}} \left| g''(t) + \frac{g'(t)^2}{2(1-g(t))} \right| \\ &\leq \int_x^y C|t-c|^{\gamma-1} dt \leq \frac{2C}{\gamma} |y-x|^\gamma. \end{aligned}$$

En outre, on voit aisément que

$$\frac{\min |g''(x)|}{\sqrt{\max |g''(x)|}} \leq 2\sqrt{2}h'_1(x) \leq \frac{\max |g''(x)|}{\sqrt{\min |g''(x)|}}.$$

Par conséquent

$$\alpha_1 = \frac{u}{\sqrt{v}} \leq h'_1(x) \leq \frac{v}{\sqrt{u}} = \beta_1$$

et $2\alpha_1/\beta_1 > 1$.

Corollaire 2. Soit I un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Il existe une variété Σ de codimension 1 dans $C^{2+\gamma}(I, I)$ telle que toute $g \in \Sigma$ possède une mesure de probabilité invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur I .

On peut prendre $I = [-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ avec $\varepsilon > 0$. Posons alors

$$S = \left\{ g \in C^{2+\gamma}(I, I) : g\left(\max_x g(x)\right) = g^2\left(\max_x g(x)\right) \right\}$$

et soit $g_0 \in S$ telle que $g_0(x) = 4x(1-x)$ pour $x \in [0, 1]$ et $g_0(x) < 0$ pour $x \notin [0, 1]$. Si Σ est un voisinage ouvert assez petit de g_0 dans S , alors Σ est une sous-variété de codimension 1 dans $C^{2+\gamma}(I, I)$. En outre toute fonction $g \in \Sigma$, restreinte à $[Hg(\max g), \max g]$, satisfait, après un changement linéaire de variables, aux conditions du Corollaire 1.

Exemple. Soit $R = 3,6785735\dots$ la seule racine réelle de l'équation $(R-2)^2(R+2) = 16$, et posons $g(x) = (R-2)^2 x(1-x)[1 + (R-2)x(1-x)]$. Alors g applique $[0, 1]$ sur lui-même. Si l'on définit h_1 comme dans la démonstration du Corollaire 1, on a encore $g = f \circ h_1$. Le Corollaire 1 ne s'applique pas (g n'est pas concave), mais un calcul élémentaire montre que

$$\alpha = \frac{R-2}{\sqrt{R+2}} \leq h'_1 \leq \frac{(R-2)\sqrt{R}}{2\sqrt{2}} = \beta.$$

Comme $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{R(R+2)}} = 0,6188503\dots > \frac{1}{2}$, la Proposition montre que g a une mesure invariante équivalente à la mesure de Lebesgue.

Pour $0 \leq r \leq 4$, soit $f_r(x) = rx(1-x)$. Alors f_r applique $[0, 1]$ dans lui-même. En particulier f_R permute les intervalles $[1/R, 1-1/R]$ et $[1-1/R, R/4]$. Si l'on pose $\Psi(x) = (R-1-Rx)/(R-2)$, il vient $\Psi\left[\frac{1}{R}, 1-\frac{1}{R}\right] = [0, 1]$ et $\Psi \circ f_R \circ \Psi^{-1}(x) = (R-2)x(x-1)$, donc $\Psi \circ f_R \circ \Psi^{-1}(x) = g(x)$. Du résultat obtenu plus haut pour g , on déduit que $f_R \circ f_R$ a une mesure invariante équivalente à la mesure de Lebesgue sur $\left[\frac{1}{R}, 1-\frac{1}{R}\right]$, donc que f_R a une mesure invariante équivalente à la mesure de Lebesgue sur $\left[\frac{1}{R}, \frac{R}{4}\right]$. Ceci confirme une conjecture de Dunet, Sakowitsch et Taranco [1].

En général, on peut conjecturer que f_r a une mesure invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue quand l'image du point critique $\frac{1}{2}$ par une itérée de f_r tombe sur une orbite périodique répulsive.

Bibliographie

1. Dunet, H., Sakowitsch, M., Taranco, A.: Etude de mesures invariantes par une famille de transformations liées à la biologie. Thèse 3ème cycle, Paris VII (1975)
2. Jakobson, M.V.: On smooth mappings of the circle into itself. *Mat. Sbornik* **85**, 163—188 (1971)
3. Lasota, A., Yorke, J.A.: On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations. *Trans. Amer. Math. Soc.* **186**, 481—488 (1973)
4. Lorenz, E.N.: Deterministic nonperiodic flow. *J. atmos. Sci.* **20**, 130—141 (1963)
5. May, R.M.: Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature* **261**, 459—467 (1976)
6. Ruelle, D.: *Thermodynamic formalism*. Reading, Mass.: Addison-Wesley (to appear)
7. Ruelle, D., Takens, F.: On the nature of turbulence. *Commun. math. Phys.* **20**, 167—192 (1971); **23**, 343—344 (1971)
8. Ulam, S.M., Neumann, J. von: On combination of stochastic and deterministic processes. Preliminary report. *Bull. Amer. Math. Soc.* **53**, 1120 (1947)

Transmis par J. L. Lebowitz

Reçu le 16 mars 1977