

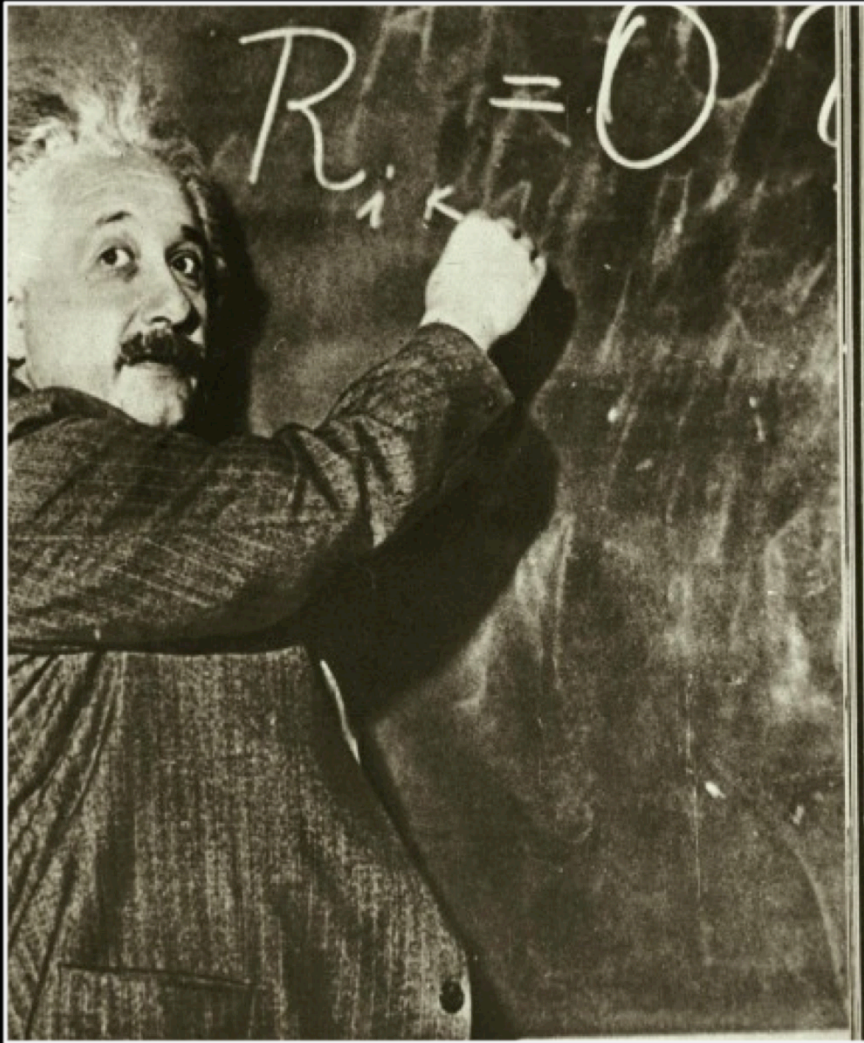
# Einstein's path to General Relativity

IHES Paris, 07 March 2013

Jürgen Renn

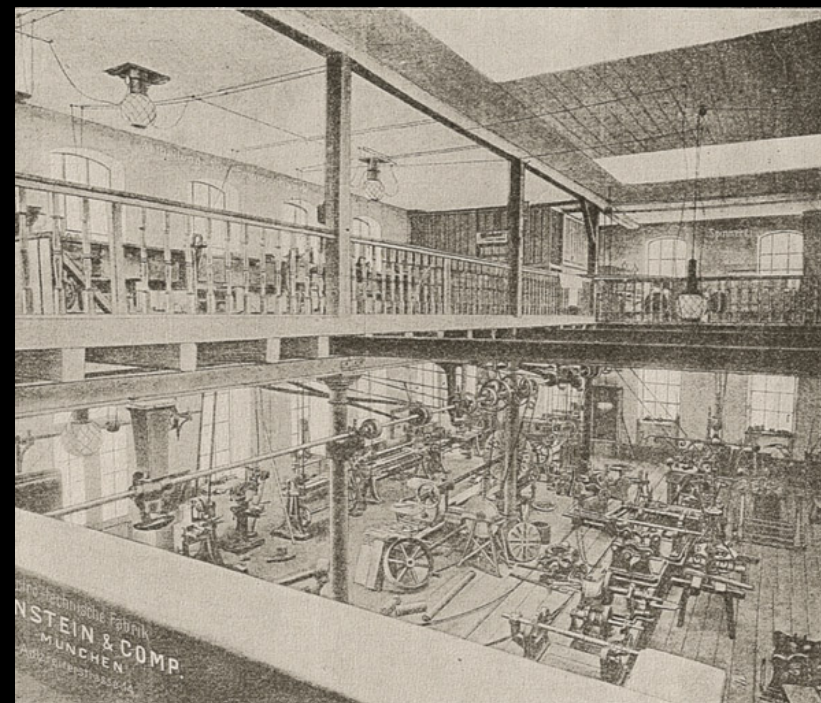


# Einsteins short CV



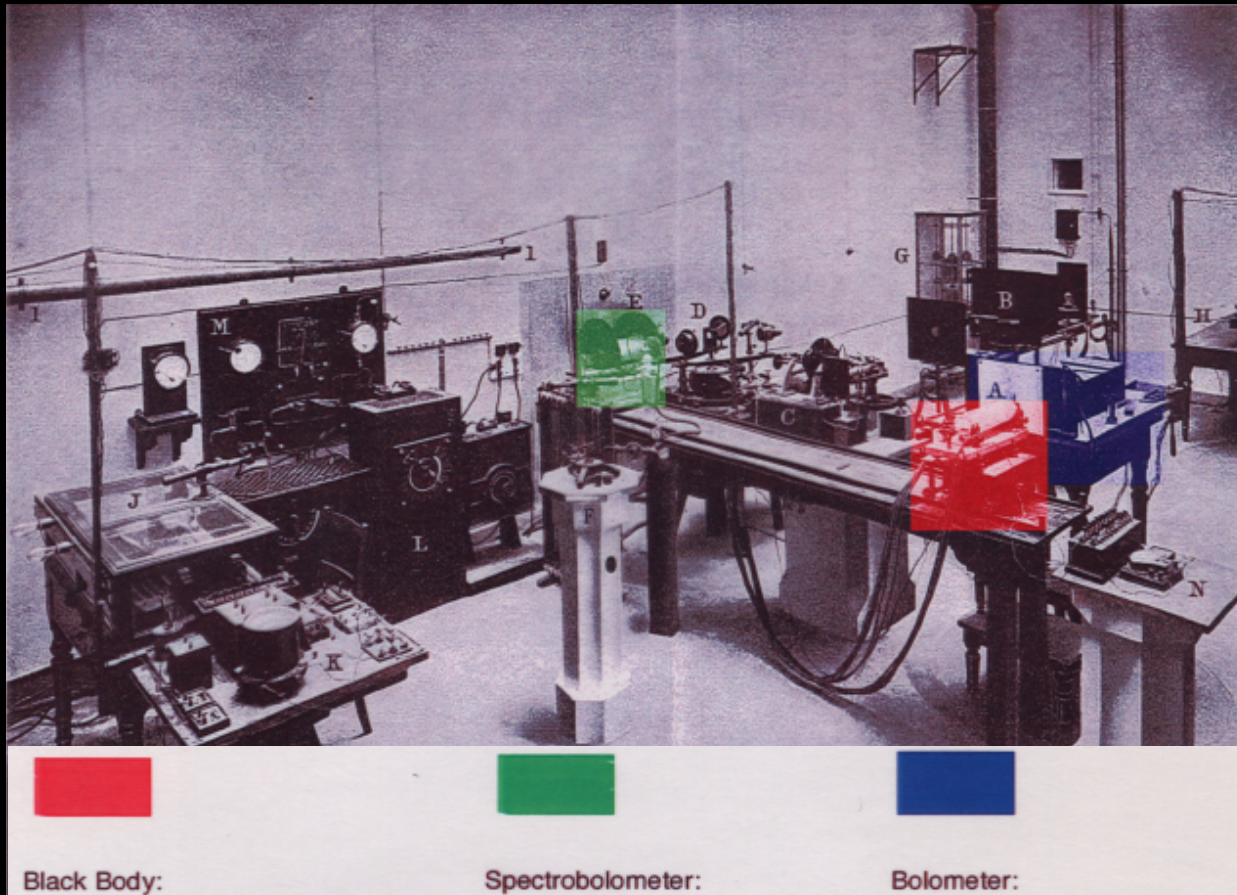
- 1879 born in Ulm
- 1880 - 1894 Munich period
- 1896 - 1900 studies physics at ETH Zurich
- 1904 - 1909 patent officer in Bern
- 1905 - annus mirabilis / PhD
- 1908 - Habilitation Univ. Bern
- 1909 - Assoc. Prof. Univ. Zurich
- 1911 - 1912 Ord. Prof. German Univ. Prague
- 1912 - 1914 Ord. Prof. ETH Zurich
- 1914 - 1933 Berlin
- 1915 - Final paper on General Relativity
- 1921 - Nobel Prize (photo effect)
- 1933 - 1955 Princeton

## Electrotechnology as a motor of industrialization and new scientific knowledge



## Electrotechnical enterprise of the Einstein family

# From the light bulb to quantum theory



Black body radiation in the laboratory of the Physical-Technical Reichsanstalt in Berlin around 1900



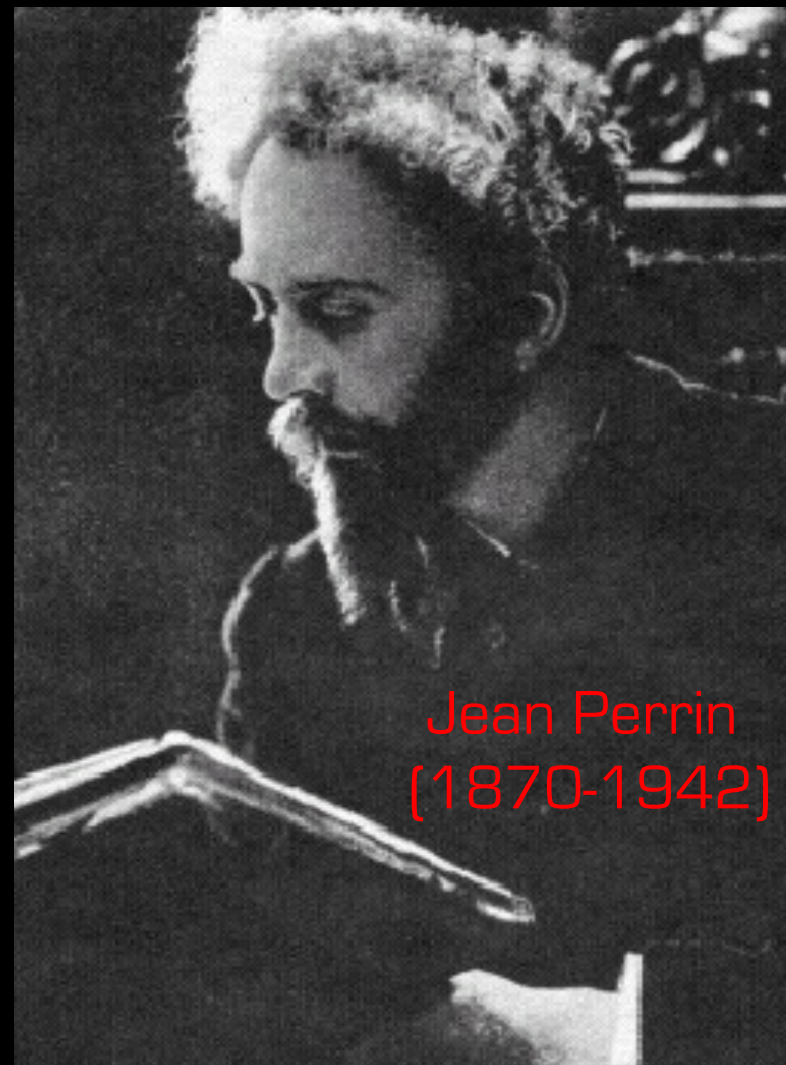
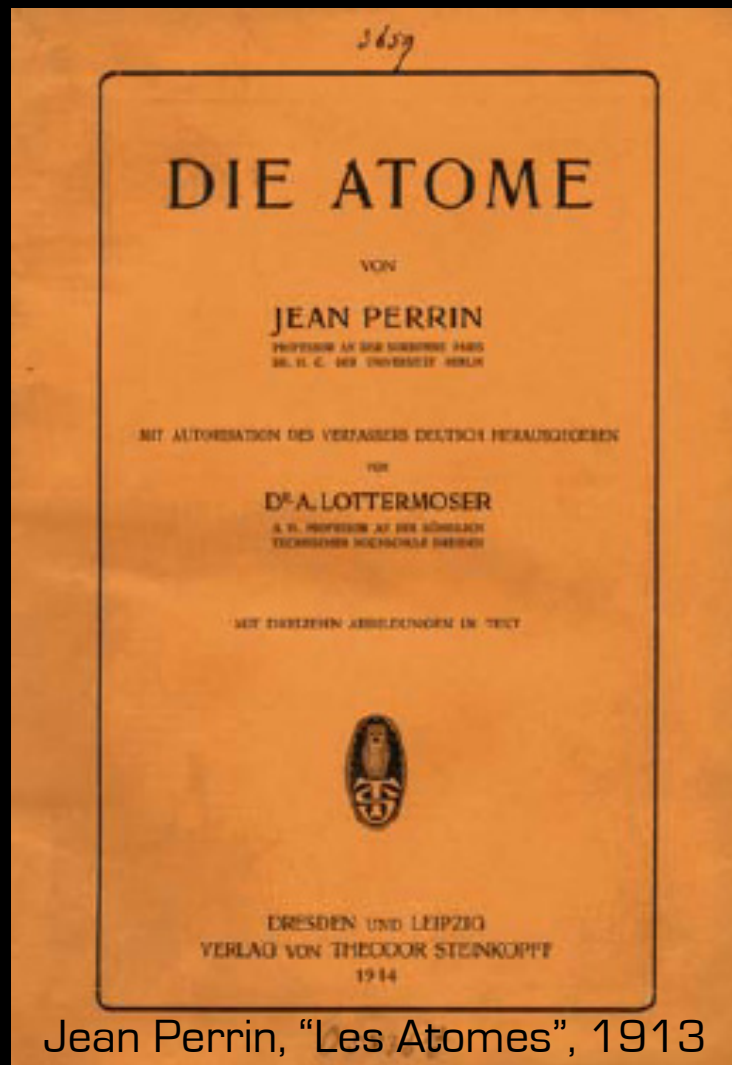
Hendrik Antoon Lorentz  
(1853 - 1928)



Max Planck  
(1858 - 1947)



Ludwig Boltzmann  
(1844 - 1906)



## Is non-Euclidean geometry relevant to astronomy?



Due to disciplinary isolation  
only few cared.

A forerunner: the  
astronomer and  
astrophysicist

Karl Schwarzschild  
(1873 - 1916)

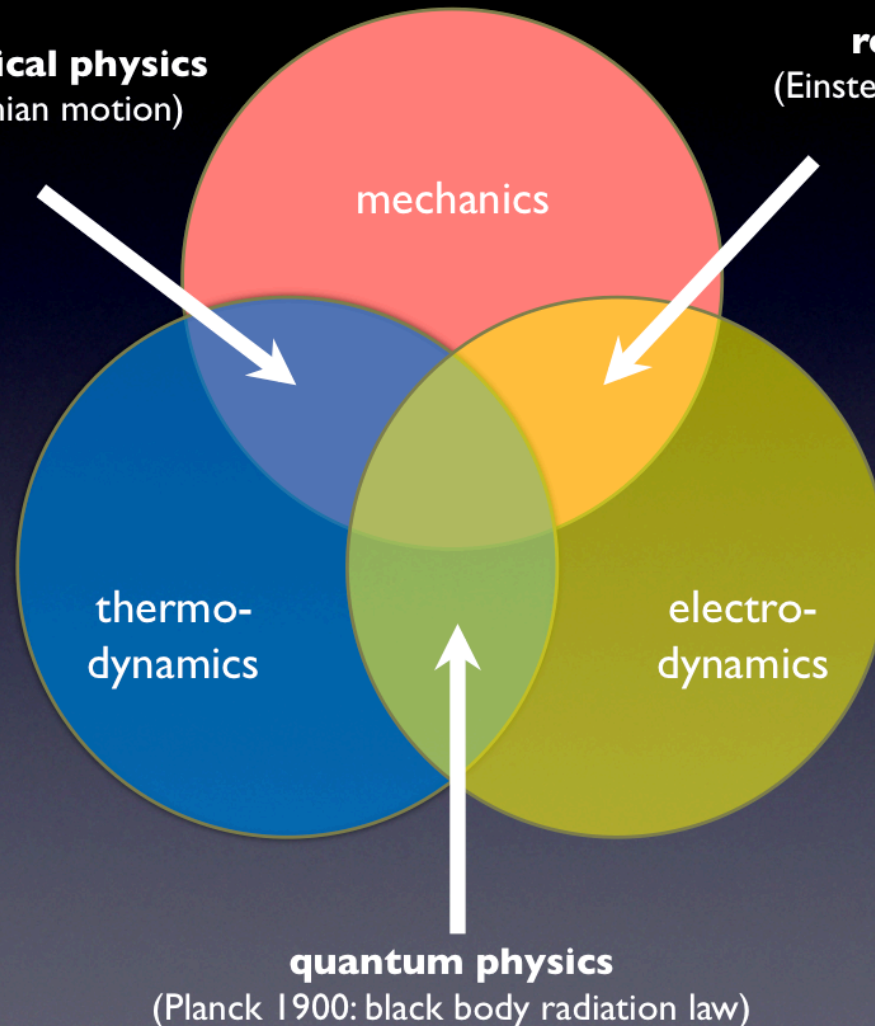




# Borderline Problems of Classical Physics

**atomism & statistical physics**  
(Einstein 1905: Brownian motion)

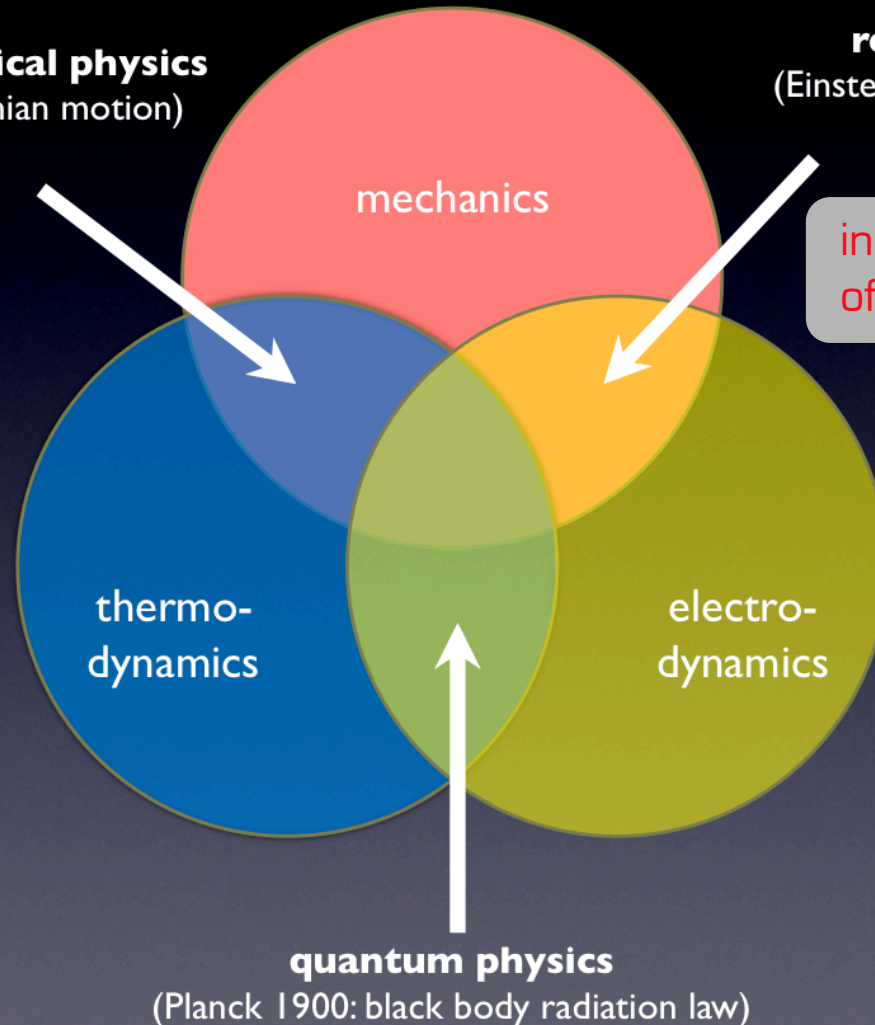
**relativity physics**  
(Einstein 1905: electrodynamics  
of moving bodies)



# Borderline Problems of Classical Physics

**atomism & statistical physics**  
(Einstein 1905: Brownian motion)

**relativity physics**  
(Einstein 1905: electrodynamics  
of moving bodies)





6. Über einen  
die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes  
betreffenden heuristischen Gesichtspunkt;  
von A. Einstein.

theoretischen Vorstellungen, welche sich die  
Gase und andere ponderable Körper ge-  
Maxwellschen Theorie der elektro-  
sogenannten leeren Raume besteht  
Unterschied. Während wir uns  
vers durch die Lagen und Ge-  
maßen, jedoch endlichem An-  
der vollkommen bestimm-  
ung des elektro-  
rtlicher räum-  
ahl von  
an F

5. Über die von der molekularkinetisch  
der Wärme geforderte Bewegung von in  
Flüssigkeiten suspendierten Teilchen  
von A. Einstein.

In dieser Arbeit soll gezeigt werden, daß nach der n  
kinetischen Theorie der Wärme in Flüssigkeiten sus  
Körper von mikroskopisch sichtbarer Größe infolge de  
kularbewegung der Wärme Bewegungen von solcher  
ausführen müssen, daß diese Bewegungen von solcher  
Mikroskop nachgewiesen werden können. Es ist mög  
die hier zu behandelnden Bewegungen mit den sogena  
„Brown'schen Molekularbewegungen“ identisch sind; die  
erreichbaren Angaben über letztere sind jedoch so unge  
daß ich mir hierüber kein Urteil bilden konnte.  
Wenn sich die hier zu behandelnde Bewegung sam  
für sie zu erwartenden Gesetzmäßigkeiten Bewegung sam  
läßt, so ist die klassische Thermodynamik schon theore  
kopisch unterscheidbare Räume nicht mehr als genau gülti  
anzusehen und es ist dann eine exakte Bestimmung der wahren  
Atomgröße möglich. Erweise sich umgekehrt die Voraussage  
dieser Bewegung als unzutreffend, so wäre damit ein schwer-  
wiegendes Argument gegen die molekularkinetische Auffassung  
der Wärme gegeben.

§ 1. Über den suspendierten Teilchen zuzuschreibenden  
osmotischen Druck.

Im Teilvolumen  $V^*$  einer Flüssigkeit vom Gesamtvolumen  $V$   
sien  $z$ -Gramm-Moleküle eines Nichtelektrolyten gelöst. Ist  
das Volumen  $V^*$  durch eine für das Lösungsmittel, nicht aber  
für die gelöste Substanz durchlässige Wand vom reinen Lösungs-

3. Zur Elektrodynamik bewegter Körper;  
von A. Einstein.

Daß die Elektrodynamik Maxwells — wie dieselbe ge  
wärtig aufgefaßt zu werden pflegt — in ihren  
bewegte Körper zu Asymmetrien füh  
nicht anzuhaften scheint

die elektrodyna  
neten und einem  
hier nur ab von  
während nach der  
der eine oder der  
voneinander zu tren  
und ruht der Leiter,  
ein elektrisches Feld  
den Orten, wo sich  
erzeugt. Ruht aber  
so entsteht in der Um  
Feld, dagegen in Leite  
an sich keine Energie  
Relativbewegung bei de  
voraussetzung — zu elek  
und des selben erlaufe  
den beiden Kräfte.

Beispiele ähnlicher Ar  
eine Bewegung der Erde re  
statieren, führen zu der V  
absoluten Ruhe nicht nur in  
der Elektrodynamik keine Ein  
sche, sondern auch die  
für welche die mechanischen  
gleichen elektrodynamischen un  
dies für die Größen erster Ordn  
wollen diese Vermutung (deren  
der Relativität“ genannt werden  
heben und außerdem die mit ihm

13. Ist die Trägheit eines Körpers von seinem  
Energieinhalt abhängig?  
von A. Einstein.

Die Resultate einer jüngst in diesen Annalen von mir  
publizierten elektrodynamischen Untersuchung<sup>1)</sup> führen zu einer  
sehr interessanten Folgerung, die hier abgeleitet werden soll.  
Ich legte dort die Maxwell-Hertz'schen Gleichungen für  
den leeren Raum nebst dem Maxwellschen Ausdruck für die  
elektromagnetische Energie des Raumes zugrunde und außer-

dem das Prinzip:  
Die Resultate einer jüngst in diesen Annalen von mir  
publizierten elektrodynamischen Untersuchung<sup>1)</sup> führen zu einer  
sehr interessanten Folgerung, die hier abgeleitet werden soll.  
Ich legte dort die Maxwell-Hertz'schen Gleichungen für  
den leeren Raum nebst dem Maxwellschen Ausdruck für die  
elektromagnetische Energie des Raumes zugrunde und außer-

den das Prinzip:  
Die Resultate einer jüngst in diesen Annalen von mir  
publizierten elektrodynamischen Untersuchung<sup>1)</sup> führen zu einer  
sehr interessanten Folgerung, die hier abgeleitet werden soll.  
Ich legte dort die Maxwell-Hertz'schen Gleichungen für  
den leeren Raum nebst dem Maxwellschen Ausdruck für die  
elektromagnetische Energie des Raumes zugrunde und außer-

den das Prinzip:  
Die Resultate einer jüngst in diesen Annalen von mir  
publizierten elektrodynamischen Untersuchung<sup>1)</sup> führen zu einer  
sehr interessanten Folgerung, die hier abgeleitet werden soll.  
Ich legte dort die Maxwell-Hertz'schen Gleichungen für  
den leeren Raum nebst dem Maxwellschen Ausdruck für die  
elektromagnetische Energie des Raumes zugrunde und außer-

den das Prinzip:  
Die Resultate einer jüngst in diesen Annalen von mir  
publizierten elektrodynamischen Untersuchung<sup>1)</sup> führen zu einer  
sehr interessanten Folgerung, die hier abgeleitet werden soll.  
Ich legte dort die Maxwell-Hertz'schen Gleichungen für  
den leeren Raum nebst dem Maxwellschen Ausdruck für die  
elektromagnetische Energie des Raumes zugrunde und außer-

den das Prinzip:  
Die Resultate einer jüngst in diesen Annalen von mir  
publizierten elektrodynamischen Untersuchung<sup>1)</sup> führen zu einer  
sehr interessanten Folgerung, die hier abgeleitet werden soll.  
Ich legte dort die Maxwell-Hertz'schen Gleichungen für  
den leeren Raum nebst dem Maxwellschen Ausdruck für die  
elektromagnetische Energie des Raumes zugrunde und außer-

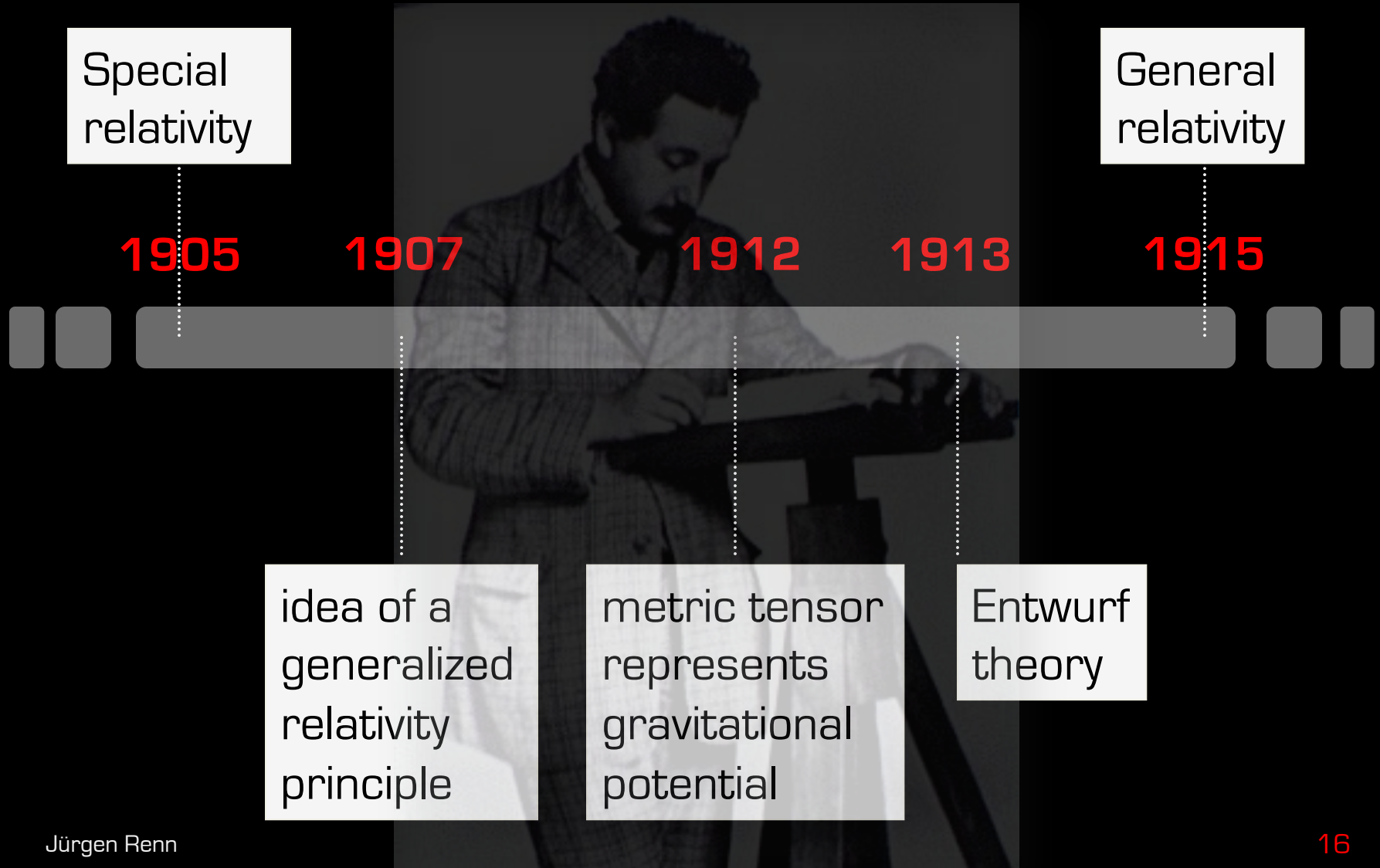
$$l^* = l \frac{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}$$

wobei  $V$  die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Von diesem Re-  
sultat machen wir im folgenden Gebrauch.

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. 17. p. 891. 1905.  
2) Das dort benutzte Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindig-  
keit ist natürlich in den Maxwellschen Gleichungen enthalten.

1905: Einstein's  
annus mirabilis

# Important steps in the development of relativity



## The concept of space in special relativity: roots in electromagnetism

- ★ In classical physics, deviations from the homogeneity and isotropy of space, as witnessed by matter and its motion, are explained by forces.
- ★ As long as forces can be interpreted as acting along the direct line between two bodies they do not affect the concept of space.
- ★ Electromagnetism introduced forces not acting along the line between bodies that hence do affect the quality of space.
- ★ Optics and electromagnetism require a space-filling medium for the propagation of waves.
- ★ The ensuing physical qualities of space are represented by a virtual medium, the ether.

## The concept of space in special relativity: the Figaro problem

- ★ The concept of field originally represents the physical properties of space as the properties of a virtual medium, the ether.
- ★ Such a virtual medium is not directly accessible other than through its explanatory function.
- ★ As those explanatory functions multiply, it becomes ever more difficult to interpret the virtual medium as a body in the sense of mechanics and the field becomes an entity in its own right:

“Man kann hinzufügen, daß die ganz Änderung der Ätherauffassung, welche die spezielle Relativitätstheorie brachte, darin bestand, daß sie dem Äther seine letzte mechanische Qualität, nämlich die Unbeweglichkeit, wegnahm.”

(Albert Einstein: Äther und Relativitätstheorie, 1920.)

THE LUMINIFEROUS ÆTHER.

BY

SIR GEORGE G. STOKES.

5,328

Eine neue und einfache  
Deutung der Schwerkraft

Von

Dr. phil. H. Fricke

Max Abraham

Zur Theorie der Gravitation. Das Elementargesetz der Gravitation.

DIE THEORIE

VOM

MASSENDRUCK

AUS DER FERNE

IN

IHREN UMRISSEN DARGESTELLT

VON

AUREL ANDERSSOHN.

*Lenard  
1912*

*Gebrock*

Über Äther und Materie

Vortrag, gehalten in der Gesamtsitzung der Heidelberger  
Akademie der Wissenschaften am 4. Juni 1910

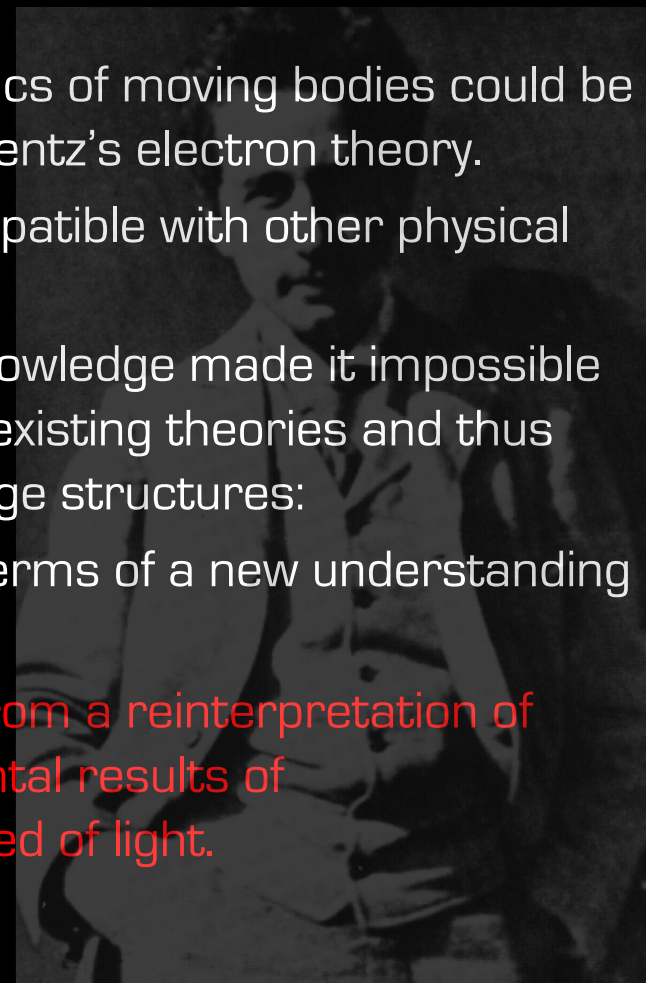
von

P. Lenard

Zweite, ausführlichere und mit Zusätzen versehene Auflage

## The concept of space in special relativity: the measurement problem

- ★ The borderline problem of the electrodynamics of moving bodies could be successfully treated in the framework of Lorentz's electron theory.
- ★ But the underlying ether model was not compatible with other physical knowledge.
- ★ The encompassing integration of physical knowledge made it impossible to cope with this difficulty on the level of the existing theories and thus necessitated a reflection on deeper knowledge structures:
- ★ Can the existing knowledge be explained in terms of a new understanding of space and time?
- ★ The new understanding of space emerged from a reinterpretation of practical geometry in the light of a fundamental results of electromagnetism, the constancy of the speed of light.



## The concept of space in GENERAL RELATIVITY

- ★ Special relativity established a new practical geometry allowing to assess the spatio-temporal aspects of physical theories.
- ★ The anisotropies of space-time such as gravitation could be interpreted either as fields or as indications of a further modification of space.
- ★ Problems with the field approach and the universality of gravitation including matter and radiation suggested the latter.
- ★ In hindsight, the problem was to reconcile a metric with an affine structure of space-time.
- ★ Its relation to acceleration (Equivalence Principle) suggested a generalization of the relativity principle, conceiving both gravitation and inertia as an effect of masses (Mach's Principle).

# Three Paradoxes

- (1) The paradox of missing knowledge
- (2) The paradox of deceitful heuristics
- (3) The paradox of discontinuous progress

## The problem of dynamic gravitational fields as an example for the Paradox of Missing Knowledge

- Newton's theory only deals with static fields.
- The analogy of a field theory of gravitation with electrodynamics requires the existence of dynamic gravitational fields.
- The problem: nothing is known about such fields.

## The problem of dynamic gravitational fields as an example for the Paradox of Missing Knowledge

- Newton's theory only deals with static fields.
- The analogy of a field theory of gravitation with electrodynamics requires the existence of dynamic gravitational fields.
- **The problem: nothing is known about such fields.**
- **Einstein's solution:** Take inertia into account and create a theory for the gravito-inertial field in terms of a curved spacetime! (Mach's followers did not use field theory!)

## The problem of dynamic gravitational fields as an example for the Paradox of Missing Knowledge

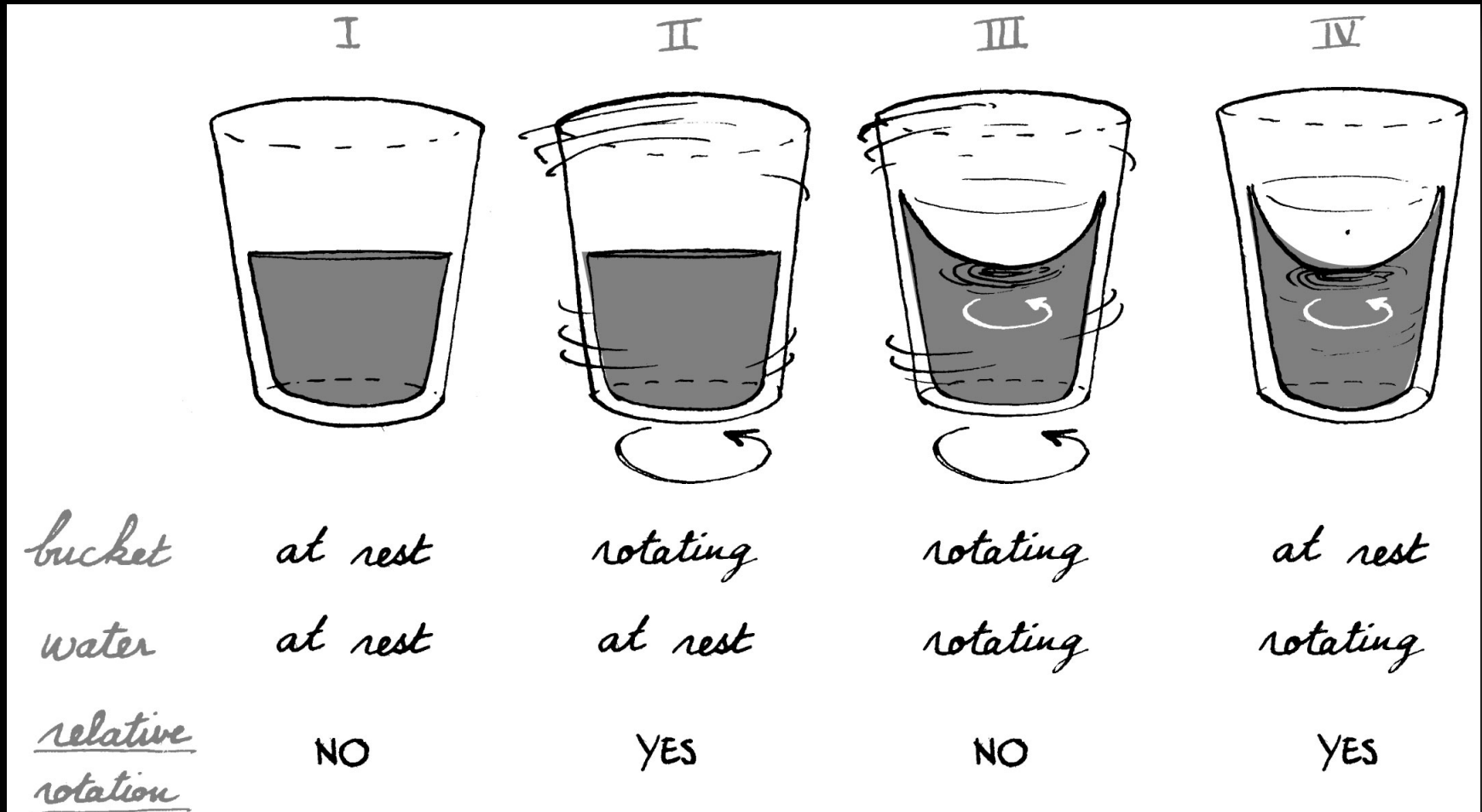
- Newton's theory only deals with static fields.
- The analogy of a field theory of gravitation with electrodynamics requires the existence of dynamic gravitational fields.
- **The problem: nothing is known about such fields.**
- **Another problem:** a special relativistic theory of gravitation did not seem to do justice to Galileo's principle that all bodies fall with the same acceleration.

# The Equivalence Principle

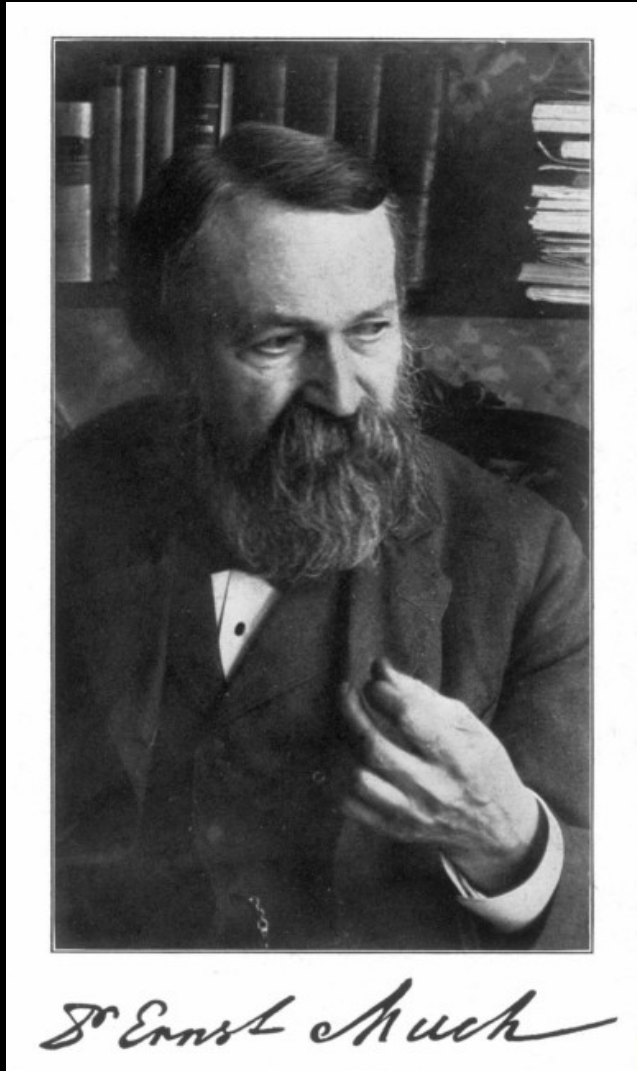


Simulating gravity  
by acceleration  
Einstein could  
preserve Galileo's  
insight that all  
bodies fall with the  
same acceleration.

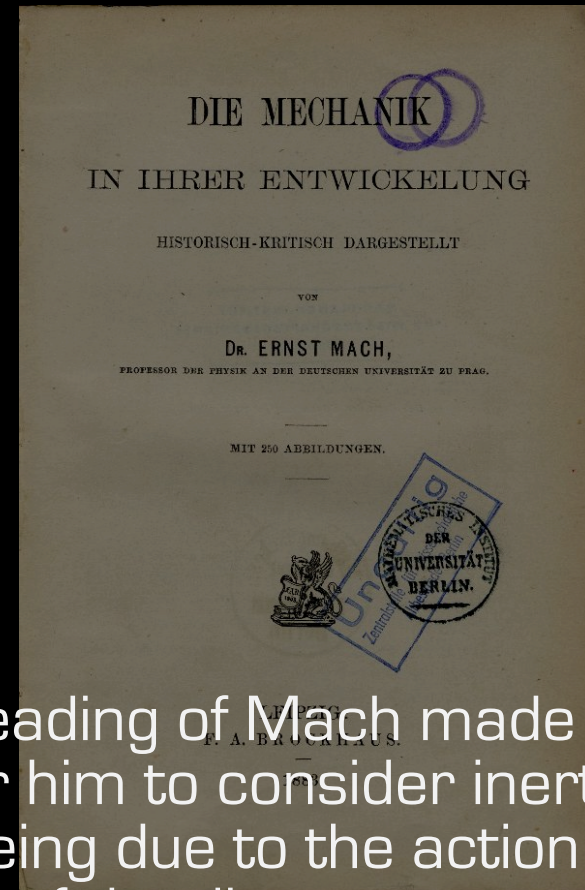
# Inertial forces in a rotating system as a dynamic gravitational field (1911-12)



## Einstein and Mach



Jürgen Renn



Einstein's reading of Mach made it plausible for him to consider inertial forces as being due to the action of the masses of the distant stars.

# Gravitational light bending

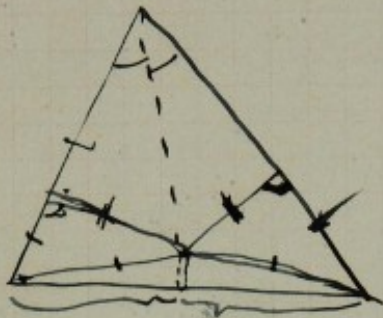
*Dyson and others.*

*Phil. Trans., A, vol. 220, Plate 1.*

In 1911 Einstein predicted the gravitational light bending effect, which was famously confirmed in 1919 by an English expedition under the leadership of Sir Arthur Eddington.



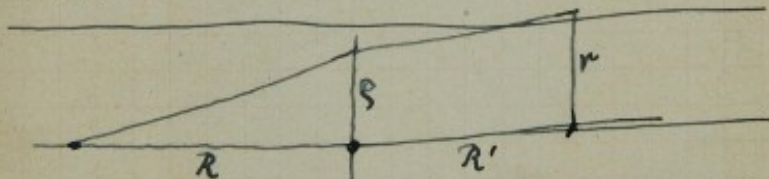
Alle Dreiecke sind gleichschenkelig.



Heßelberg

Berlin-Hulensee,

Jochim Friedrichsh. 33.



$$r = s \frac{R+R'}{R} - \frac{R\alpha}{s}$$

$s^{ur}$  nach unten negativ. Dann soll auch für stark abgelenkte Strahl.

$$r_0 = s_0 - \frac{1}{s_0} \dots (1)$$

$$s_0^2 = s^2 \frac{R+R'}{R R' \alpha}$$

Erste Gl.

$$r = \dots - \frac{R\alpha}{s} = \dots - \frac{R\alpha}{s_0} \sqrt{\frac{R+R'}{R R' \alpha}}$$

$$= \dots - \frac{1}{s_0} \sqrt{\frac{R}{R'} (R+R') \alpha}$$

≠

Simulating gravity by acceleration one can infer that light rays must be deflected by a gravitational field.

There should hence be gravitational lensing!

Can the appearances of Novae be thus explained?

Albert Einstein: **Prague Notebook, 1912**

23. Apr. 36

In 1936 an amateur scientist rediscovers Einstein's reasoning and speculates:

Sehr geehrter Herr Mandl!

Es bleibt bei der ersten Formel. Die zweite beruht auf einer falschen Überlegung. Ich habe mir überlegt, dass das fragliche Phänomen doch nicht beobachtbar sein wird, sodass ich nicht mehr darauf bin, etwas darüber zu publizieren.

Der Radius für die Auslöschung des Hintergrundes dürfte auch im dem jetzigen System Füllen kaum  $\frac{1}{10}$  Bogensekunde betragen, sodass das Phänomen durch die Beugungsvorgänge des ablenkenden (belegten) Sternes zugedeckt wird. Ich habe Ihnen schon gesagt, dass die Erklärung der Ringnebel als Refraktionserscheinung nicht in Frage kommt, schon wegen der singulären Ausdehnung dieser Gebilde.

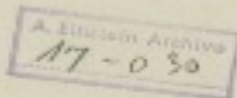
Bedauern Sie es nicht zu viel. In der Wissenschaft muss man viele hoffnungsvoll erscheinende Ideen begraben, bis man einmal auf eine verfällt, die standhält!

Fremdliche grüßt Sie Ihr

A. E.

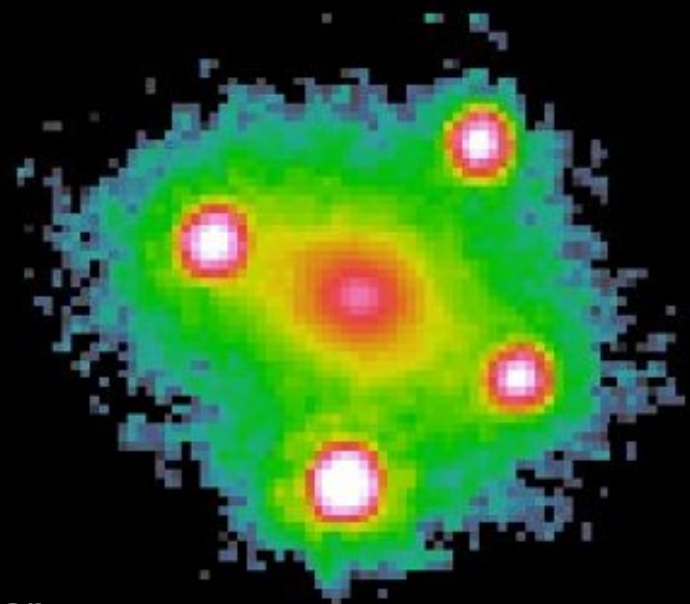
Did gravitational lenses focus cosmic radiation in such a way that dinosaurs became extinct?

(Einstein an Rudi Mandl, 1936)



# Einstein Cross

# I



QSO 2237+0305  
Einstein cross of a quasar  
(1985)

1''

# A drama in three acts

- (1) 1907: Equivalence principle
- (2) 1912: Metric tensor
- (3) 1915: Field equations



Nikolay Nikolajevič Ryzkov  
1 1073

Mikulasska Troda.

Trag Eger Nürnberg  
2.13 1.13 3.31.

Böhmische Staatsrealschule  
Kleinseite.

1912:  
Towards the  
metric tensor

Gravitation

$$\xi = x + \frac{a}{2} ct^2 \quad \text{relativ.$$

$$\tau = ct \quad c = c_0 + ax$$

---

$$\Delta c = 4\pi h e g \quad | \text{unhaltbar}$$

---

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{x}}{c^2} \right) = - \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial x}$$

---

$$c_0 = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}}$$

---

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{m \dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}} \right\} = - \frac{m \frac{\partial c}{\partial x}}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}} + \mathcal{E}_x$$

---

$$\operatorname{div} \mathcal{E} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \operatorname{curl} c \mathcal{H}$$

$$0 = \operatorname{div} \mathcal{H}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\operatorname{curl} c \mathcal{F}$$

$$\mathcal{E} = \operatorname{div} \mathcal{F}.$$

---

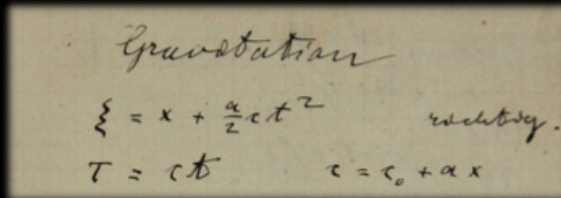
$$\frac{c}{2} (\mathcal{F}^2 + \mathcal{H}^2) = \text{Energie}$$

# Towards the metric tensor

Einstein's Transformation to rigidly accelerated reference frame

$$(\xi, \tau) \xrightarrow{\text{acceleration } a} (x, t)$$

$$\xi = x + \frac{ac(x)}{2}t^2 \quad \tau = c(x)t \quad c(x) := c_0 + ax$$



Speed of light varies in space

# Towards the metric tensor

World lines of accelerated objects

$$\begin{array}{l} \tau(\lambda) = \frac{1}{a} \sinh(a\lambda) \\ \xi(\lambda) = \frac{1}{a} \cosh(a\lambda) \end{array} \xrightarrow[\text{in Rindler coordinates}]{\text{simplification}} \begin{array}{l} T(\lambda) = \lambda \\ X(\lambda) = \frac{1}{a} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \xi = X \cosh(aT) \\ \tau = X \sinh(aT) \end{array}$$

# Towards the metric tensor

World lines of accelerated objects

$$\begin{array}{ccc}
 \boxed{\begin{array}{l} \tau(\lambda) = \frac{1}{a} \sinh(a\lambda) \\ \xi(\lambda) = \frac{1}{a} \cosh(a\lambda) \end{array}} & \xrightarrow[\text{in Rindler coordinates}]{\text{simplification}} & \boxed{\begin{array}{l} T(\lambda) = \lambda \\ X(\lambda) = \frac{1}{a} \end{array}}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \boxed{\begin{array}{l} \xi \approx X(1 + \frac{1}{2}a^2T^2) \\ \tau \approx XaT \end{array}} & \xrightarrow[t = T]{x = X - \frac{c_0}{a}} & \text{Gravitation} \\
 & & \xi = x + \frac{a}{2}ct^2 \quad \text{relativ.} \\
 & & \tau = ct \quad c = c_0 + ax
 \end{array}$$

Einstein transformations give approximate **Rindler coordinates**  
 simplest framework for investigating quantum field theory in  
 curved space-time

# Towards the metric tensor

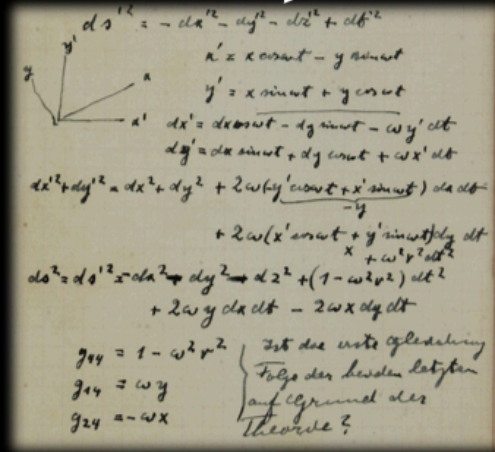
Equations of motion also follow from action

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{m \dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right\} = - \frac{m \frac{\partial c}{\partial x}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \bar{Q}_x$$



$$S = \int \sqrt{c(x, y, z) dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$$

Metric Theory



$ds'^2 = -dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 + dt'^2$   
 $x' = x \cos \omega t - y \sin \omega t$   
 $y' = x \sin \omega t + y \cos \omega t$   
 $dx' = dx \cos \omega t - dy \sin \omega t - \omega y' dt$   
 $dy' = dx \sin \omega t + dy \cos \omega t + \omega x' dt$   
 $dx'^2 + dy'^2 = dx^2 + dy^2 + 2\omega y' (x \cos \omega t + x' \sin \omega t) dx dt - 2\omega x' (y \sin \omega t + y' \cos \omega t) dy dt + \omega^2 r^2 dt^2$   
 $ds^2 = ds'^2 - \omega^2 dx^2 - \omega^2 dy^2 + 2\omega y dx dt - 2\omega x dy dt + (1 - \omega^2 r^2) dt^2$   
 $g_{11} = 1 - \omega^2 r^2$   
 $g_{14} = \omega y$   
 $g_{24} = -\omega x$   
 Ist die erste Gleichung Folge der beiden letzten auf Grund der Theorie?

Quantum Theory?

$$\psi = e^{iS}$$

# Three Paradoxes

- (1) The paradox of missing knowledge
- (2) The paradox of deceitful heuristics
- (3) The paradox of discontinuous progress

### Drehung



$$x' = x \cos \omega t + y \sin \omega t$$

$$y' = -x \sin \omega t + y \cos \omega t$$

$$dt' = dt$$

$$dx' = \cos \omega t dx + \sin \omega t dy + (-x \sin \omega t + y \cos \omega t) \omega dt$$

$$dy' = -\sin \omega t dx + \cos \omega t dy + (-x \cos \omega t - y \sin \omega t) \omega dt$$

$$dH = 0 dx + 0 dy + \dots dt$$

### Tafel der p

1	$\omega t$	$-x \sin \omega t + y \cos \omega t$	
$-\omega t$	1	$-x \cos \omega t - y \sin \omega t$	
0	0	1	stimmt.
$\omega$	$-\omega$		

### Beschleunigung

#### Tafel der p

$\cos \omega t$	$\sin \omega t$	$-x \sin \omega t + y \cos \omega t$
$-\sin \omega t$	$\cos \omega t$	$-x \cos \omega t - y \sin \omega t$
0	0	1

#### Tafel der v

$\cos \omega t$	$\sin \omega t$	0
$-\sin \omega t$	$\cos \omega t$	0
$x \cdot 0 + y \cdot \omega$	$y \cdot 0 + x \cdot \omega$	1

$\frac{d^2 x'}{dt'^2} = 0$   
immer erfüllt.

$$c = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$x = x' + \frac{a}{g} e^{2ax'/g^2}$$

$$t = e^{ax'/g}$$

$$x' = x - \frac{a}{g} t^2$$

$$t' = t(1 - \beta ax)$$

$$dx' = \frac{dx}{\sqrt{1 - \beta^2}} - at dt$$

$$dt' = -\beta a t dx + (1 - \beta ax) dt$$

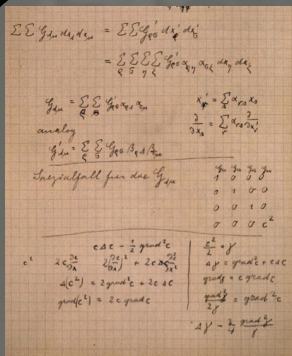
stimmt auch,  
bei geeigneter Massstabsverschiebung.

How did Einstein transform his qualitative insights into a new theory of gravitation?

The mental models of bucket (rotation) and elevator (linear acceleration) continued to guide him.

Albert Einstein:  
Zurich Notebook,  
1912/13

## The tinkering phase



A phase model for Einstein's discovery process

$$ds^2 = \sum g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$$

	$x_1'$	$x_2'$	$x_3'$	$x_4'$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
$x_1$	$\alpha_{11}$	$\alpha_{12}$	$\alpha_{13}$	$\alpha_{14}$	$\beta_{11}$			
$x_2$	$\alpha_{21}$				$\beta_{21}$			
$x_3$	$\alpha_{31}$				$\beta_{31}$			
$x_4$	$\alpha_{41}$				$\beta_{41}$			

$$\sum \sum g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu = \sum \sum g'_{\rho\sigma} dx'_\rho dx'_\sigma$$

$$= \sum_{\rho\sigma} \sum_{\eta\xi} g'_{\rho\sigma} \alpha_{\rho\eta} \alpha_{\sigma\xi} dx_\eta dx_\xi$$

$$g_{\mu\nu} = \sum_{\rho\sigma} \sum_{\eta\xi} g'_{\rho\sigma} \alpha_{\rho\mu} \alpha_{\sigma\nu}$$

$$x'_\rho = \sum_{\sigma} \alpha_{\rho\sigma} x_\sigma$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\rho} = \sum_{\sigma} \alpha_{\rho\sigma} \frac{\partial}{\partial x'_\sigma}$$

analogy

$$g'_{\rho\sigma} = \sum_{\eta\xi} g_{\eta\xi} \beta_{\rho\eta} \beta_{\sigma\xi}$$

Spezialfall für die  $g_{\mu\nu}$

$g_{11}$	$g_{22}$	$g_{33}$	$g_{44}$
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	$c^2$

$$c^2 \quad 2c \frac{\partial c}{\partial x} \quad c \Delta c - \frac{1}{2} \text{grad}^2 c$$

$$2 \left( \frac{\partial c}{\partial x} \right)^2 + 2c \Delta c \frac{\partial c}{\partial x^2}$$

$$\Delta(c^2) = 2 \text{grad}^2 c + 2c \Delta c$$

$$\text{grad}(c^2) = 2c \text{grad} c$$

$$\frac{c^2}{2} = \gamma$$

$$\Delta \gamma = \text{grad}^2 c + c \Delta c$$

$$\text{grad} \gamma = c \text{grad} c$$

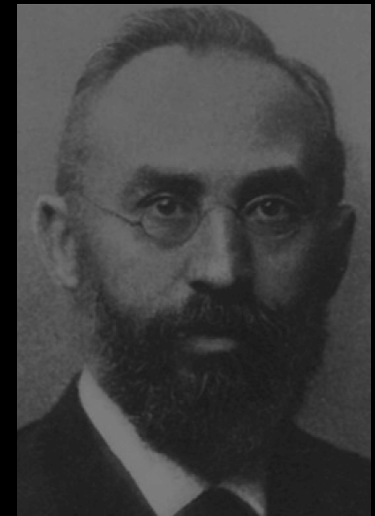
$$\frac{\text{grad}^2 \gamma}{2\gamma} = \text{grad}^2 c$$

$$\Delta \gamma - \frac{3}{4} \frac{\text{grad}^2 \gamma}{\gamma}$$

Albert Einstein,  
Zurich Notebook (1912/13),  
p. 39L.

# The Lorenz model of field theory

- ★ The field equation: source determines field
- ★ DIFFERENTIAL OPERATOR (FIELD) = SOURCE
- ★ Default setting for FIELD = metric tensor
- ★ Default setting for SOURCE = energy-momentum
- ★ Problem:  
Default setting for  
DIFFERENTIAL OPERATOR ???



$$\frac{\sum_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \left( \sqrt{g} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\nu}} \right)}{\sqrt{g} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \left( \sqrt{g} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\nu}} \right)} = \text{Skalar.}$$

Bildet man  $\partial_{\nu} \varphi$  auf zwei Arten, so folgt

$$\sum_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \left( \sum_{\mu} g_{\mu\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\mu}} \right) \text{ ein Vektor.}$$

$$\sum \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \left( \sum_{\nu} g_{\mu\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\nu}} \right)$$

$$\sum_{\alpha\beta\mu\nu\sigma\epsilon} \pi_{\mu\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( \pi_{\nu\beta} \pi_{\nu\sigma} \gamma_{\sigma\epsilon} \pi_{\beta\epsilon} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} (\pi_{il} \pi_{km} \gamma_{lm}) \right)$$

$\alpha\beta\mu\nu\sigma\epsilon$   
 $\begin{matrix} \parallel \\ \parallel \\ \parallel \\ \parallel \\ \parallel \\ \parallel \end{matrix}$

$$\sum \frac{\partial}{\partial x_{\epsilon}} \left( \gamma_{\sigma\epsilon} \frac{\partial}{\partial x_{\sigma}} (\pi_{il} \pi_{km} \gamma_{lm}) \right)$$

$$(\gamma)_{\alpha\beta} = \sum \pi_{\mu\alpha} \pi_{\nu\beta} \frac{\partial}{\partial x_{\epsilon}} \left( \gamma_{\sigma\epsilon} \frac{\partial}{\partial x_{\sigma}} (\pi_{il} \pi_{km} \gamma_{lm}) \right)$$

$$\pi_{il} \pi_{km} \frac{\partial \gamma_{lm}}{\partial x_{\epsilon}} + \gamma_{lm} \frac{\partial}{\partial x_{\epsilon}} (\pi_{il} \pi_{km})$$

$$\frac{\partial \gamma_{\sigma\epsilon}}{\partial x_{\epsilon}} (\pi_{il} \pi_{km} \frac{\partial \gamma_{lm}}{\partial x_{\sigma}}) + \gamma_{lm} \frac{\partial}{\partial x_{\sigma}} (\pi_{il} \pi_{km})$$

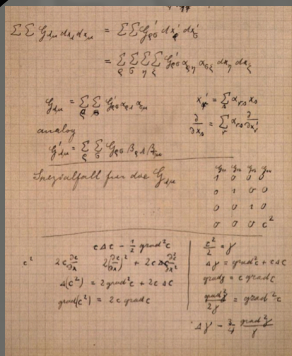
$$+ \gamma_{\sigma\epsilon} \pi_{il} \pi_{km} \frac{\partial \gamma_{lm}}{\partial x_{\sigma} \partial x_{\epsilon}} + \gamma_{\sigma\epsilon} \frac{\partial \gamma_{lm}}{\partial x_{\sigma}} \frac{\partial}{\partial x_{\epsilon}} (\pi_{il} \pi_{km}) + \frac{\partial \gamma_{lm}}{\partial x_{\sigma}} \frac{\partial}{\partial x_{\epsilon}} (\pi_{il} \pi_{km})$$

$$+ \gamma_{\sigma\epsilon} \gamma_{lm} \frac{\partial^2}{\partial x_{\sigma} \partial x_{\epsilon}} (\pi_{il} \pi_{km})$$

Albert Einstein,  
 Zurich Notebook [1912/13],  
 p. 7L.

The  
systematic  
searching  
phase

The  
tinkering  
phase



A phase model for  
Einstein's discovery process



Marcel Grossmann  
(1878 - 1936)

$$[\mu\nu]_{\epsilon} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\mu\epsilon}}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\epsilon}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\epsilon}} \right) \quad \frac{\partial [i\epsilon]}{\partial x_{\kappa}} - \frac{\partial [\kappa\epsilon]}{\partial x_i}$$

$$(i\kappa, l m) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x_{\kappa} \partial x_l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x_i \partial x_m} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x_{\kappa} \partial x_m} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x_i \partial x_l} \right) \left. \begin{array}{l} \text{Grossmann} \\ \text{Tensor over der} \\ \text{Mannigfaltigkeit} \end{array} \right\}$$

$$+ \sum_{\rho\sigma} \gamma_{\rho\sigma} \left( [{}^{im}]_{\rho} [{}^{\kappa l}]_{\sigma} - [{}^{il}]_{\rho} [{}^{\kappa m}]_{\sigma} \right)$$

$$\sum \gamma_{kl} (i\kappa, l m)$$

$$\sum \gamma_{kl} [{}^{\kappa l}]_{\rho} = \sum \gamma_{kl} \left[ \frac{\partial g_{\kappa\rho}}{\partial x_l} + \frac{\partial g_{l\rho}}{\partial x_{\kappa}} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x_{\rho}} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\rho\rho}}{\partial x_{\rho}} + 2 \sum_{\kappa l} \gamma_{kl} \frac{\partial g_{\kappa\rho}}{\partial x_l}$$

$$\frac{1}{4} \sum \gamma_{\rho\sigma} \left( \frac{\partial g_{i\rho}}{\partial x_m} + \frac{\partial g_{m\rho}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{im}}{\partial x_{\rho}} \right) \left[ -\frac{\partial g_{\rho\rho}}{\partial x_{\rho}} + 2 \sum_{\kappa l} \gamma_{kl} \frac{\partial g_{\kappa\rho}}{\partial x_l} \right]$$

$$\sum \gamma_{kl} \gamma_{\rho\sigma} \left( [{}^{im}]_{\rho} [{}^{\kappa l}]_{\sigma} - [{}^{il}]_{\rho} [{}^{\kappa m}]_{\sigma} \right)$$

$$= \sum_{\rho} \left\{ {}^{im} \right\}_{\rho} \cdot \frac{\partial g_{\rho\rho}}{\partial x_{\rho}} + 2 \sum_{\kappa l \rho} \left\{ {}^{im} \right\}_{\rho} \cdot \gamma_{kl} \frac{\partial g_{\kappa\rho}}{\partial x_l} - \sum_{\rho l \kappa} \left\{ {}^{il} \right\}_{\rho} \left( \frac{\partial g_{\rho\rho}}{\partial x_m} \right) \gamma_{kl}$$

$$+ \sum_{\rho l} \left\{ {}^{il} \right\}_{\rho} \cdot \left\{ {}^{\rho m} \right\}_l$$

$$\sum_{\kappa} \left( \frac{\partial^2 g_{\kappa\kappa}}{\partial x_i \partial x_m} - \frac{\partial^2 g_{i\kappa}}{\partial x_{\kappa} \partial x_m} - \frac{\partial^2 g_{m\kappa}}{\partial x_{\kappa} \partial x_i} \right) = 0$$

Sollte verschwinden.

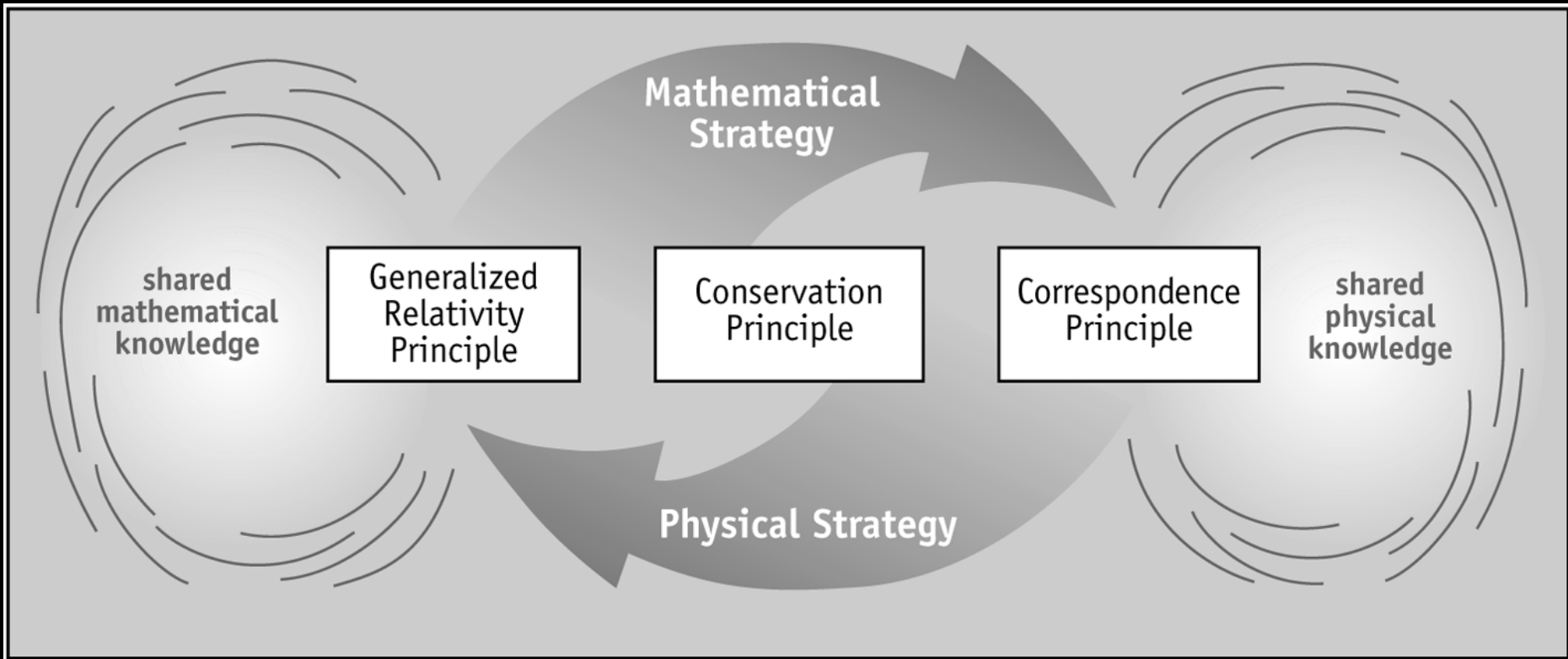
Matching the qualitative insights with the mathematical formalism turned out to be exceedingly difficult:

How to chew the Riemann tensor?

Albert Einstein:

Zurich Notebook, 1912/13,  
p. 14L.

# Einstein double strategy



Einstein's double strategy arose from the different roles of the heuristic requirements of generalized relativity, conservation, and correspondence

$$\sum \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad \sum g_{kk} = \sigma$$

$$\sum \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x_0^2} = g_0 \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{dt} - \left( \frac{1}{4} g_0 \sum \frac{dx_k}{dt} \frac{dx_k}{dt} \right)$$

perpendicular zu K.

$$\sum \left( \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kk}}{\partial x_i} \right) = 0 \quad \Delta^2 g_{im} =$$

$$\sum g_{kk} = u$$

gravitationsgleichungen

$$(\Delta g_{11} - \frac{1}{2} \Delta u) = T_{11} \quad \Delta g_{12} = T_{12} \quad \Delta g_{14} = T_{14}$$

$$2 \Delta u = \sum T_{kk}$$

Hilfsgleichungen

$$\Delta g_{11} = T_{11} + \frac{1}{2} \sum T_{kk} \quad \Delta g_{12} = T_{12} \quad \Delta g_{14} = T_{14}$$

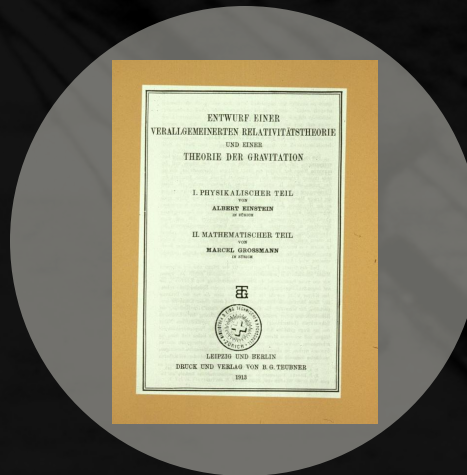
$$-\frac{1}{2} \sum \Delta u \frac{\partial g_{kk}}{\partial x_0} = -\frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x_0 \partial x_0} \frac{\partial g_{kk}}{\partial x_0} = -\frac{1}{2} \sum \Delta u \frac{\partial u}{\partial x_0}$$

$$= -\frac{1}{2} \sum \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} + \dots \right) \frac{\partial u}{\partial x_0}$$

Dies stellt man in der vert. Form.

Albert Einstein:  
Zurich Notebook, 1912/13,  
p. 20L.

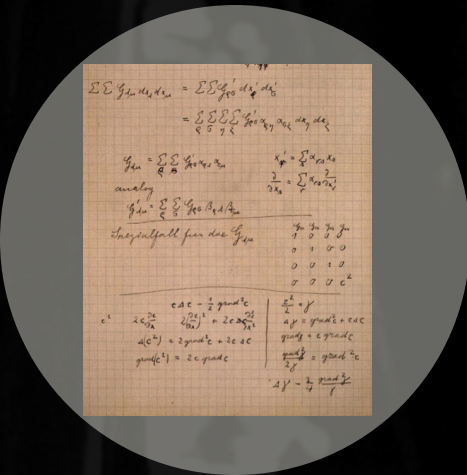
The  
consolidation  
phase



The  
systematic  
searching  
phase



The  
tinkering  
phase



A phase model for  
Einstein's discovery process

ENTWURF EINER  
VERALLGEMEINERTEN RELATIVITÄTSTHEORIE  
UND EINER  
THEORIE DER GRAVITATION

I. PHYSIKALISCHER TEIL  
VON  
ALBERT EINSTEIN  
IN ZÜRICH

II. MATHEMATISCHER TEIL  
VON  
MARCEL GROSSMANN  
IN ZÜRICH



LEIPZIG UND BERLIN  
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER

1913

‘Entwurf’ theory

Albert Einstein and  
Marcel Grossmann,  
“Draft of a Generalized  
Theory of Relativity and  
a Theory of Gravitation”,  
1913

# The Besso Memo

28 VIII 13

Zum Plankbew. in der Nordstörmschen Theorie:

weiss ich nicht, wie das  $\frac{d}{dt}$  zu verstehen ist (ob  $\varphi$  als zeitl. const. von des  
Sicht. zeichnen zu nehmen ist) - nein, mit dem ~~der~~ bewegten Punkt  
zu verstehen!

Es ergibt sich das Feld wie bei Newton

die Flächen <sup>geschwindigkeit</sup> ~~konstant~~ <sup>von</sup> Constante. wie bleibt es nach ~~der~~  
für ein ~~Verhalten~~ gegen die ~~Newtonsche~~ ~~der~~ Bewegung?  
die Bedeutung der Coordinaten? (Kommt nicht in Betracht  
bei der eugl. Substitution)

b) 1. Abgehendes Licht von einem rotierten <sup>Leucht</sup> ~~Welt~~ <sup>Körper</sup> geht von ihm mit immer  
größerer Geschwindigkeit ab, hat aber immer kleinere Energie. Wie  
Kommt diese Energie auf den Leuchtkörper zurück? - Ob Energie ins  
Fernfeld abfließt wissen wir nicht weil wir keine strenge Lösung für diesen Fall  
haben.

2. Stellt man durch Rotation eines Hohlkugels ein Coördinatenfeld ~~her~~ in dessen Koordinaten  
unabhängig von der Größe des Hohlkugels gleich

From the first of  
four pages of  
notes by  
Michele Besso  
on discussions  
with Albert  
Einstein about the  
'Entwurf' theory,  
August 1913



Michele Besso  
(1873-1955)

a lifelong friend to Einstein.

“The fraternity of physicists behaves rather passively with respect to my gravitation paper. [...] Laue is not open to the fundamental considerations, and neither is Planck, while Sommerfeld is more likely to be so. A free, unprejudiced look is not at all characteristic of the (adult) Germans (blindness!).”

Einstein an Michele Besso, January 1914

## Die formale Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie.

VON A. EINSTEIN.

(Vorgelegt am 29. October 1914 [s. oben S. 965].)

In den letzten Jahren habe ich, zum Teil zusammen mit meinem Freunde GROSSMANN, eine Verallgemeinerung der Relativitätstheorie ausgearbeitet. Als heuristische Hilfsmittel sind bei jenen Untersuchungen in bunter Mischung physikalische und mathematische Forderungen verwendet, so daß es nicht leicht ist, an Hand jener Arbeiten die Theorie vom formal mathematischen Standpunkte aus zu übersehen und zu charakterisieren. Diese Lücke habe ich durch die vorliegende Arbeit in erster Linie ausfüllen wollen. Es gelang insbesondere, die Gleichungen des Gravitationsfeldes auf einem rein kovarianten-theoretischen Wege zu gewinnen (Abteilung D). Auch suchte ich einfache Ableitungen für die Grundgesetze des absoluten Differentialkalküls zu geben, die zum Teil neu sein dürften (Abteilung B), um dem Leser ein vollständiges Erfassen der Theorie ohne die Lektüre anderer, rein mathematischer Abhandlungen zu ermöglichen. Um die mathematischen Methoden zu illustrieren, habe ich die (EULERschen) Gleichungen der Hydrodynamik und die Feldgleichungen der Elektrodynamik bewegter Körper abgeleitet (Abteilung C). Im Abschnitt E ist gezeigt, daß NEWTONS Gravitationstheorie sich aus der allgemeinen Theorie als Näherung ergibt; auch sind dort die elementarsten, für die vorliegende Theorie, charakteristischen Eigenschaften des NEWTONSchen (statischen) Gravitationsfeldes (Lichtstrahlenkrümmung, Verschiebung der Spektrallinien) abgeleitet.

### A. Grundgedanke der Theorie.

#### § 1. Einleitende Überlegungen.

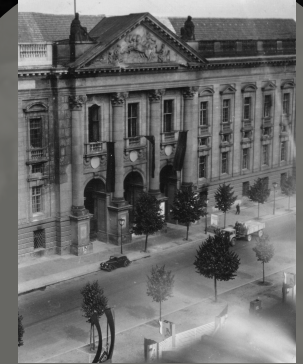
Der ursprünglichen Relativitätstheorie liegt die Voraussetzung zugrunde, daß für die Beschreibung der Naturgesetze alle Koordinatensysteme gleichberechtigt seien, die relativ zueinander in gleichförmiger Translationsbewegung sind. Vom Standpunkte der Erfahrung aus, er-

"The Formal Foundations  
of General Relativity" in:  
*Proceedings of the  
Prussian Academy  
of Sciences,*  
November, 19th 1914.

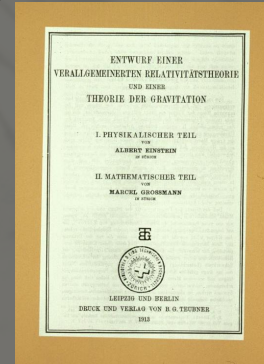
# Three Paradoxes

- (1) The paradox of missing knowledge
- (2) The paradox of deceitful heuristics
- (3) The paradox of discontinuous progress

The  
reflection  
phase



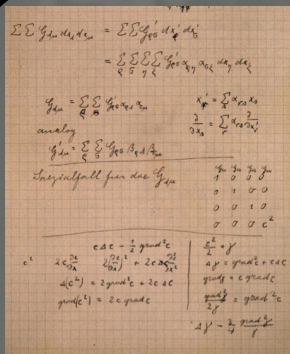
The  
consolidation  
phase



The  
systematic  
searching  
phase



The  
tinkering  
phase



A phase model for  
Einstein's discovery process

# Field equations

In November 1915 Einstein publishes in a dramatic acceleration of events four papers, ultimately returning to the correct field equations of 1912.

$$G_{im} = -\kappa \left( T_{im} - \frac{1}{2} g_{im} T \right), \quad (2a)$$

wobei

$$\sum_{\rho\sigma} g^{\rho\sigma} T_{\rho\sigma} = \sum_{\sigma} T_{\sigma}^{\sigma} = T \quad (5)$$

Albert Einstein, “Die Feldgleichungen der Gravitation” (November, 25th, 1915), p. 846.  
(in: *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, p. 844-847)

## Die Feldgleichungen der Gravitation.

VON A. EINSTEIN.

In zwei vor kurzem erschienenen Mitteilungen<sup>1</sup> habe ich gezeigt, wie man zu Feldgleichungen der Gravitation gelangen kann, die dem Postulat allgemeiner Relativität entsprechen, d. h. die in ihrer allgemeinen Fassung beliebigen Substitutionen der Raumzeitvariablen gegenüber kovariant sind.

Der Entwicklungsgang war dabei folgender. Zunächst fand ich Gleichungen, welche die NEWTONSCHE Theorie als Näherung enthalten und beliebigen Substitutionen von der Determinante 1 gegenüber kovariant waren. Hierauf fand ich, daß diesen Gleichungen allgemein kovariante entsprechen, falls der Skalar des Energietensors der „Materie“ verschwindet. Das Koordinatensystem war dann nach der einfachen Regel zu spezialisieren, daß  $| -g$  zu 1 gemacht wird, wodurch die Gleichungen der Theorie eine eminente Vereinfachung erfahren. Dabei mußte aber, wie erwähnt, die Hypothese eingeführt werden, daß der Skalar des Energietensors der Materie verschwinde.

Neuerdings finde ich nun, daß man ohne Hypothese über den Energietensor der Materie auskommen kann, wenn man den Energietensor der Materie in etwas anderer Weise in die Feldgleichungen einsetzt, als dies in meinen beiden früheren Mitteilungen geschehen ist. Die Feldgleichungen für das Vakuum, auf welche ich die Erklärung der Perihelbewegung des Merkur gegründet habe, bleiben von dieser Modifikation unberührt. Ich gebe hier nochmals die ganze Betrachtung, damit der Leser nicht genötigt ist, die früheren Mitteilungen unausgesetzt heranzuziehen.

Aus der bekannten RIEMANNSCHEM Kovariante vierten Ranges leitet man folgende Kovariante zweiten Ranges ab:

$$G_{im} = R_{im} + S_{im} \quad (1)$$

$$R_{im} = -\sum_l \frac{\partial^2 \{im\}}{\partial x_l^2} + \sum_{l_1} \{il\} \{mz\} \quad (1a)$$

$$S_{im} = \sum_l \frac{\partial \{il\}}{\partial x_m} - \sum_{l_1} \{im\} \{zl\} \quad (1b)$$

<sup>1</sup> Sitzungsber. XIV, S. 778 und XLVI, S. 799, 1915.

“The Field Equations  
of Gravitation”,

Einstein's final paper on the  
field equations of general  
relativity, Berlin 1915.

# Einstein & Hilbert

How did Einstein pass from the incorrect draft theory to General Relativity – only with Hilbert's help?

Einstein could actually reinterpret his old theory, keeping the same Lagrangian by giving a new interpretation to the field variables:

Lagrangian

$$L = g^{\mu\nu} \Gamma_{\beta\mu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}$$

The field in  
General Relativity

$$\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha} \equiv - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\mu \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2} g^{\alpha\rho} (g_{\rho\beta,\mu} + g_{\rho\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\rho})$$

The field in the  
Entwurf Theory

$$\tilde{\Gamma}_{\beta\mu}^{\alpha} \equiv -\frac{1}{2} g^{\alpha\rho} g_{\rho\beta,\mu}$$

A triumph of the physical strategy to integrate knowledge!

## “Fateful Prejudice”

kovarianter Vierervektor (kein  $V$ -Tensor bzw.  $V$ -Vektor). An diese Gleichung haben wir eine für das Folgende wichtige Bemerkung zu knüpfen. Diese Erhaltungsgleichung hat mich früher dazu verleitet, die Größen

$$\frac{1}{2} \sum_{\mu} g^{\tau\mu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}}$$

als den natürlichen Ausdruck für die Komponenten des Gravitationsfeldes anzusehen, obwohl es im Hinblick auf die Formeln des absoluten Differentialkalküls näher liegt, die CHRISTOFFELSchen Symbole

$$\left\{ \begin{matrix} \nu \sigma \\ \tau \end{matrix} \right\}$$

statt jener Größen einzuführen. Dies war ein verhängnisvolles Vorurteil. Eine Bevorzugung des CHRISTOFFELSchen Symbols rechtfertigt

Albert Einstein, “On the General Theory of Relativity” (November, 4th, 1915)

Traditionally, Hilbert is seen as having been the first to find the correct field equations.

David Hilbert,  
“The Foundations  
of Physics”,  
proceedings of the  
*Göttingen Academy  
of Sciences*, 1915.

## Die Grundlagen der Physik.

(Erste Mitteilung.)

Von

**David Hilbert.**

Vorgelegt in der Sitzung vom 20. November 1915.

Die gewaltigen Problemstellungen von Einstein<sup>1)</sup> sowie dessen scharfsinnige zu ihrer Lösung ersonnenen Methoden und die tiefgreifenden Gedanken und originellen Begriffsbildungen, vermöge derer Mie<sup>2)</sup> seine Elektrodynamik aufbaut, haben der Untersuchung über die Grundlagen der Physik neue Wege eröffnet.

Ich möchte im Folgenden — im Sinne der axiomatischen Methode — wesentlich aus zwei einfachen Axiomen ein neues System von Grundgleichungen der Physik aufstellen, die von idealer Schönheit sind, und in denen, wie ich glaube, die Lösung der Probleme von Einstein und Mie gleichzeitig enthalten ist. Die genauere Ausführung sowie vor Allem die spezielle Anwendung meiner Grundgleichungen auf die fundamentalen Fragen der Elektrizitätslehre behalte ich späteren Mitteilungen vor.

Es seien  $w_s$  ( $s = 1, 2, 3, 4$ ) irgendwelche die Weltpunkte wesentlich eindeutig benennende Koordinaten, die sogenannten Weltparameter (allgemeinste Raum-Zeit-Koordinaten). Die das Geschehen in  $w_s$  charakterisierenden Größen seien:

- 1) die zehn zuerst von Einstein eingeführten Gravitationspotentiale  $g_{\mu\nu}$  ( $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$ ) mit symmetrischem Tensorcharakter gegenüber einer beliebigen Transformation der Weltparameter  $w_s$ ;
- 2) die vier elektrodynamischen Potentiale  $q_s$  mit Vektorcharakter im selben Sinne.

1) Sitzungsber. d. Berliner Akad. 1914 S. 1030, 1915 S. 778, 799, 831, 844.

2) Ann. d. Phys. 1912, Bd. 37 S. 511, Bd. 39 S. 1, 1913, Bd. 40 S. 1.

Erste Vorlesung zur ersten Note.



Die Grundlagen der Physik.

(Erste Mitteilung.)

David Hilbert.

Vorgelegt in der Sitzung vom 20. November 1915.

Die tiefgreifenden Gedanken und originellen Begriffsbildungen, vermöge derer die seine Elektrodynamik aufbaut, und die gewaltigen Problemstellungen von Einstein sowie dessen scharfsinnige zu ihrer Lösung ersonnenen Methoden haben der Untersuchung über die Grundlagen der Physik neue Wege eröffnet.

Ich möchte im Folgenden — im Sinne der axiomatischen Methode — aus drei einfachen Axiomen ein neues System von Grundgleichungen der Physik aufstellen, die von idealer Schönheit sind, und in denen, wie ich glaube, die Lösung der gestellten Probleme enthalten ist. Die genauere Ausführung sowie vor allem die spezielle Anwendung meiner Grundgleichungen auf die fundamentalen Fragen der Elektrizitätslehre behalte ich späteren Mitteilungen vor.

Es seien  $w_s$  ( $s = 1, 2, 3, 4$ ) irgendwelche die Weltpunkte wesentlich eindeutig benennende Koordinaten, die sogenannten Weltparameter. Die das Geschehen in  $w_s$  charakterisierenden Größen seien:

1) die zehn Gravitationspotentiale  $g_{\mu\nu}$  ( $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$ ) mit symmetrischem Tensorcharakter gegenüber einer beliebigen Transformation der Weltparameter  $w_s$ ;

2) die vier elektrodynamischen Potentiale  $q_s$  mit Vektorcharakter im selben Sinne.

Das physikalische Geschehen ist nicht willkürlich, es gelten vielmehr zunächst folgende zwei Axiome:



Proofs of Hilbert's publication show that he initially followed Einstein in stipulating non-generally covariant field equations.

David Hilbert, "The Foundations of Physics", 1915, p. 1.

(page proofs, including handwritten notes by David Hilbert)

# Einstein & Hilbert

$$(16) \quad \frac{d^{\varphi} \sqrt{g} H}{d w_s} = 0 \quad (81)$$

Nach diesen Vorbereitungen stelle ich nunmehr das folgende Axiom auf:

**Axiom III (Axiom von Raum und Zeit).** *Die Raum-Zeitkoordinaten sind solche besonderen Weltparameter, für die der Energiesatz (15) gültig ist.*

Nach diesem Axiom liefern in Wirklichkeit Raum und Zeit eine solche besondere Benennung der Weltpunkte, daß der Energiesatz gültig ist.

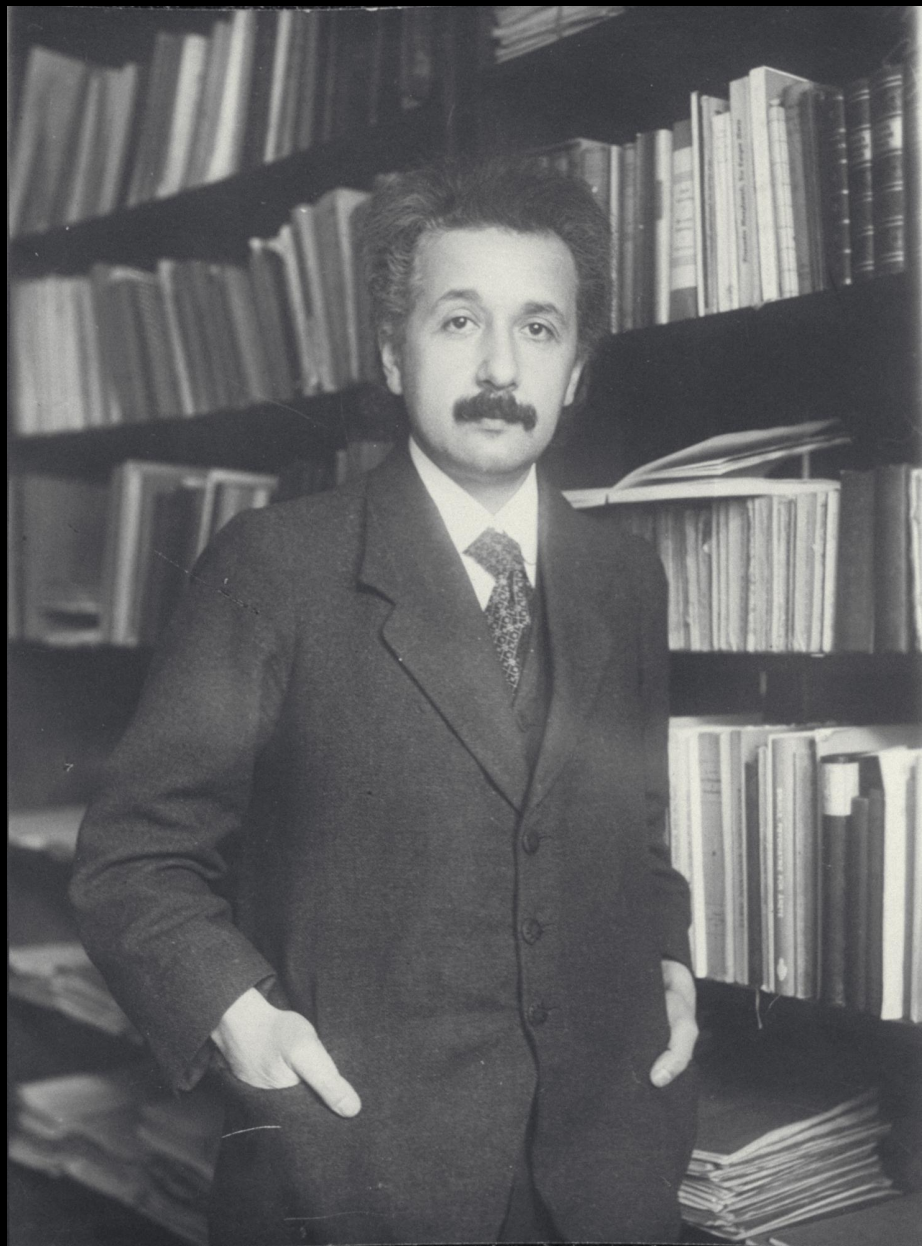
Das Axiom III hat das Bestehen der Gleichungen (16) zur Folge: diese vier Differentialgleichungen (16) vervollständigen die Gravitationsgleichungen (4) zu einem System von 14 Gleichungen für die 14 Potentiale  $g^{\mu\nu}, q_s$ : dem System der Grundgleichungen der Physik. Wegen der Gleichzahl der Gleichungen und der zu bestimmenden Potentiale ist für das physikalische Geschehen auch das Kausalitätsprinzip gewährleistet, und es enthüllt sich uns damit der engste Zusammenhang zwischen dem Energiesatz und dem Kausalitätsprinzip, indem beide sich einander bedingen. Dem Übergang von einem Raum-Zeit-Bezugssystem zu einem anderen entspricht die Transformation der Energieform von einer sogenannten „Normalform“

$$E = \sum_{s,l} e_s^l p_l^s$$

auf eine andere Normalform.

Hilbert's  
non-generally  
covariant energy  
condition

David Hilbert,  
„The Foundations  
of Physics”,  
1915, p. 7  
.(page proofs)



Albert Einstein  
Berlin, 1916

## The INTERPRETATION of space in general relativity

- ★ When Einstein found difficulties in establishing generally covariant field equations, he developed the so-called “hole argument” justifying why such equations could not exist.
- ★ The hole argument presupposes that one can identify space-time points prior to introducing a gravitational field, thus making use of its interpretation as a proper field.
- ★ When Einstein finally discovered generally covariant field equations, he had to get rid of the hole argument. He was helped by a philosophical argument due to Moritz Schlick stating that objective physical events can only be identified with the help of physically real space-time coincidences which already presuppose the existence of a gravitational field.

# The INTERPRETATION of space in general relativity



Moritz Schlick  
(1882 - 1936)

## The INTERPRETATION of space in general relativity

- ★ While Mach's principle claimed the primacy of matter over space on an ontological level, Schlick's principle seemed to establish the primacy of material events on an epistemological level.
- ★ But actually the gravitational field has strong implications for matter:  
No material space-time coincidences are needed, since it has its own landmarks. The gravitational field alone can be used to create an in principle observable grid of intrinsic coordinates that all observers will share.
- ★ The motion of matter and its description in terms of energy and momentum follow from the field equations.
- ★ Modifications of the field equations seemed to open up the possibility for formulating a comprehensive theory of matter (unified field theory).

# “Geometrie und Erfahrung” 1921

- ★ Only with the help of practical geometry can general relativity be interpreted as a theory of space.
- ★ Poincaré’s conventionalism: Only (G) + (P) can be controlled by experience, one can thus choose (G) as one likes.
- ★ **Einstein’s argument against conventionalism:**  
As long as part of the symbolic structure of a theory retains contact with underlying understanding of experiences of space, a theory describing new experiences (such as the theory of relativity) may affect our understanding of space.
- ★ **Conclusion:** The understanding of space is governed by a complex hierarchy of knowledge, with interactions between its layers.

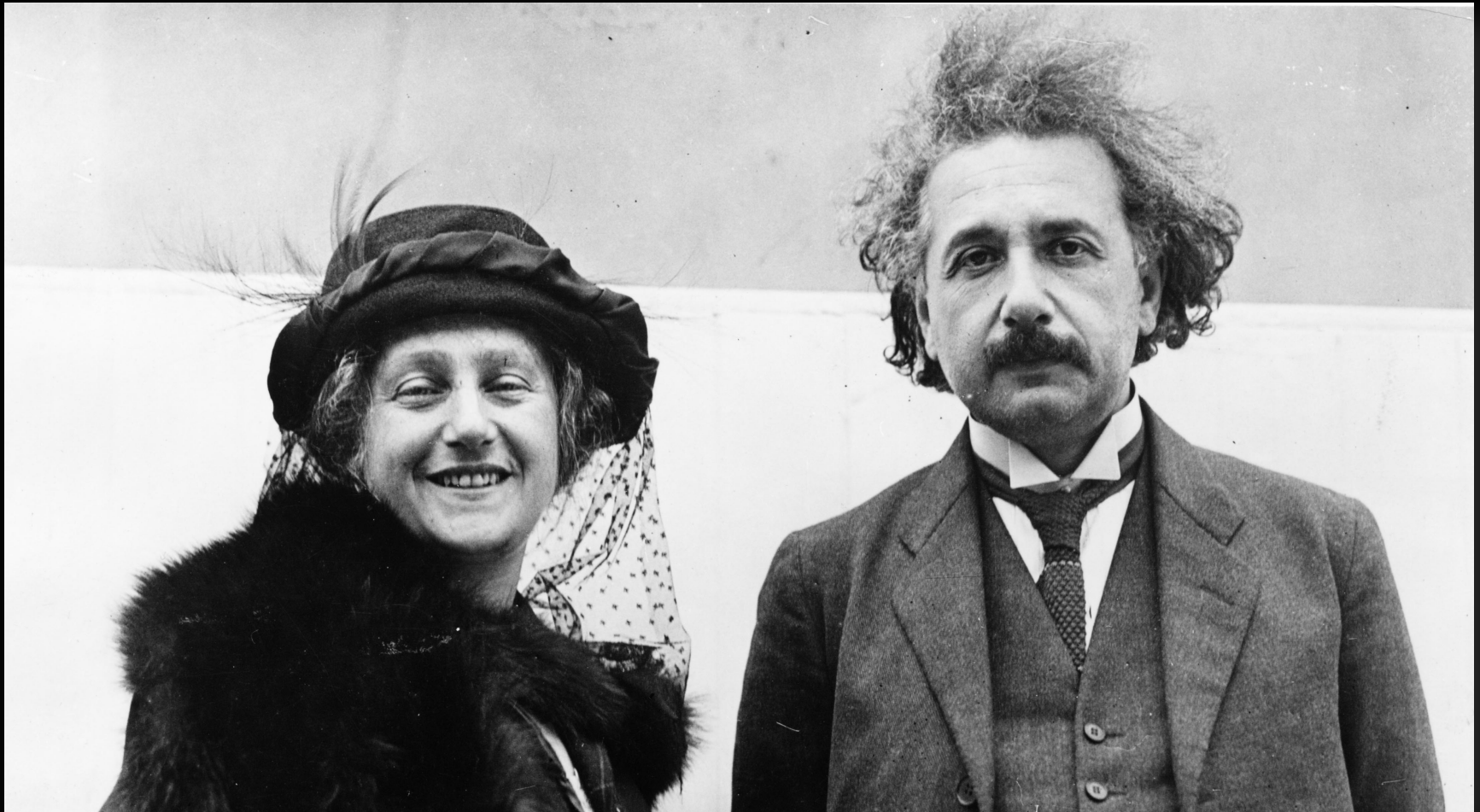
## The INTERPRETATION of space in general relativity

“Wie kommt aber der Raumbegriff selbst zustande? Wenn ich die Körper allesamt weggenommen denke, bleibt doch wohl der leere Raum über? Soll etwa auch dieser vom Körperbegriff abhängig gemacht werden? Nach meiner Überzeugung ganz gewiß!”

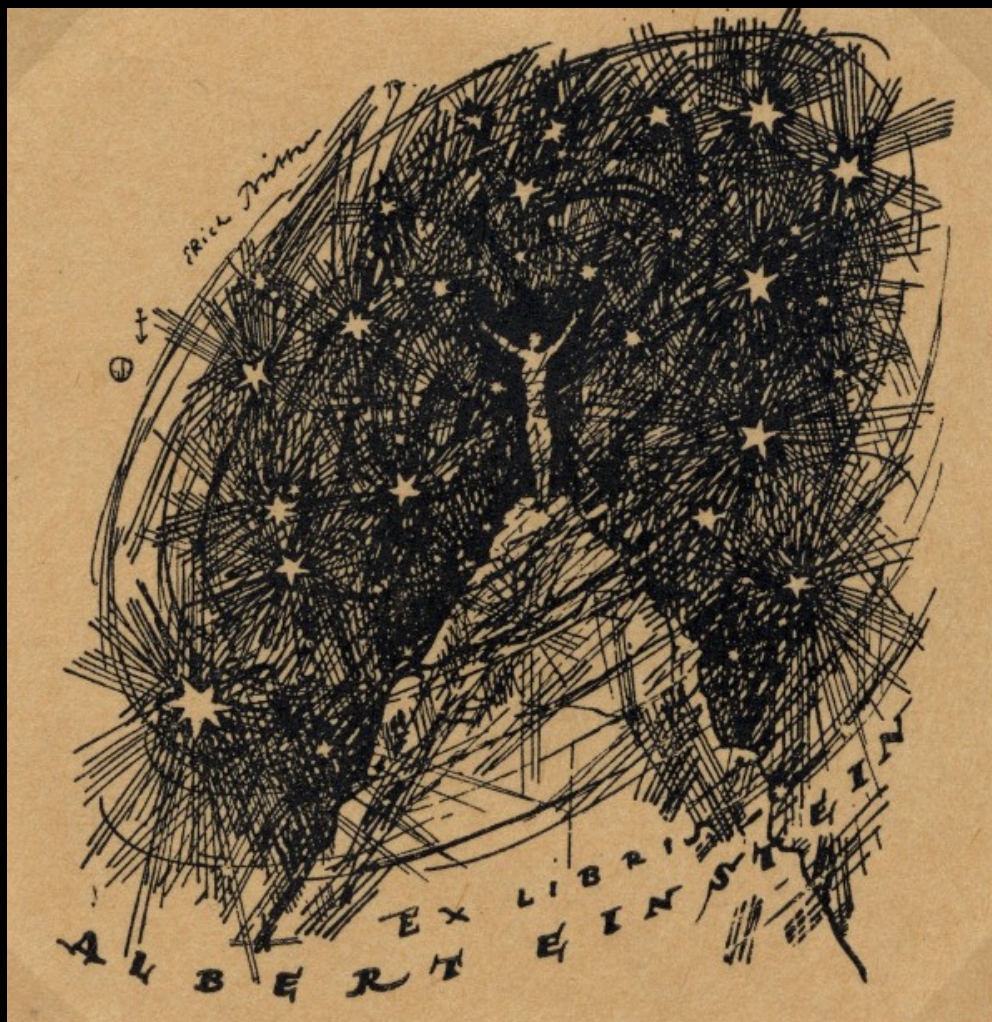
“The strange conclusion to which we have come is this—that now it appears that space will have to be regarded as a primary thing and that matter is derived from it, so to speak, as a secondary result. Space is now turning around and eating up matter. We have always regarded matter as a primary thing and space as a secondary result. Space is now having its revenge, so to speak, and is eating up matter.”

Albert Einstein, 1930

# Happy End?



# What about Cosmology?



Erich Büttner:  
Ex libris  
for Albert Einstein,  
1917

## Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie.

VON A. EINSTEIN.

Es ist wohlbekannt, daß die Poisson'sche Differentialgleichung

$$\Delta \phi = 4\pi K \rho \quad (1)$$

in Verbindung mit der Bewegungsgleichung des materiellen Punktes die Newton'sche Fernwirkungstheorie noch nicht vollständig ersetzt. Es muß noch die Bedingung hinzutreten, daß im räumlich Unendlichen das Potential  $\phi$  einem festen Grenzwerte zustrebt. Analog verhält es sich bei der Gravitationstheorie der allgemeinen Relativität; auch hier müssen zu den Differentialgleichungen Grenzbedingungen hinzutreten für das räumlich Unendliche, falls man die Welt wirklich als räumlich unendlich ausgedehnt anzusehen hat.

Bei der Behandlung des Planetenproblems habe ich diese Grenzbedingungen in Gestalt folgender Annahme gewählt: Es ist möglich, ein Bezugssystem so zu wählen, daß sämtliche Gravitationspotentiale  $g_{\alpha\beta}$  im räumlich Unendlichen konstant werden. Es ist aber a priori durchaus nicht evident, daß man dieselben Grenzbedingungen ansetzen darf, wenn man größere Partien der Körperwelt ins Auge fassen will. Im folgenden sollen die Überlegungen angegeben werden, welche ich bisher über diese prinzipiell wichtige Frage angestellt habe.

### § 1. Die Newton'sche Theorie.

Es ist wohlbekannt, daß die Newton'sche Grenzbedingung des konstanten Limes für  $\phi$  im räumlich Unendlichen zu der Auffassung hinführt, daß die Dichte der Materie im Unendlichen zu null wird. Wir denken uns nämlich, es lasse sich ein Ort im Weltraum finden, um den herum das Gravitationsfeld der Materie, im großen betrachtet, Kugelsymmetrie besitzt (Mittelpunkt). Dann folgt aus der Poisson'schen Gleichung, daß die mittlere Dichte  $\rho$  rascher als  $\frac{1}{r^2}$  mit wachsender Entfernung  $r$  vom Mittelpunkt zu null herabsinken muß, damit  $\phi$  im



Einstein's cosmological considerations of 1917 – introducing the **cosmological constant** – remain of a philosophical nature – strictly wedded to his Machian motivations.

„I have committed again a crime in gravitation theory that exposes me to the danger of being interned in a madhouse.“

„Now the problem does not plague me anymore, after it initially did not leave me any rest.“

Albert Einstein, 1917

## Alexander Friedmann proposes an expanding universe.

Notiz zu der Arbeit von A. Friedmann  
„Über die Krümmung des Raumes“

Ich habe in einer früheren Notiz<sup>x</sup> an  
die genannten Arbeit<sup>xx</sup> Kritik geübt.  
Mein Einwurf betraf aber - wie  
sich mir <sup>an Hand eines Briefes von Alex. Friedmann</sup> auf Anregung von Herrn  
Kant<sup>Kant</sup> ~~erwies~~ <sup>überzeugt</sup> habe - auf einen  
Rechenfehler. Ich halte Herrn Kant Friedmanns  
Resultate für richtig und interessant aufklärend.  
Es geht sich, dass die Feldgleichungen  
dynamisch neben den statischen <sup>dynamische</sup>  
(d. h. mit der Zeitkoordinate <sup>zentrisch-symmetrische</sup> veränderliche)  
Lösungen <sup>für die Raumstruktur</sup> ~~zulassen~~, denen eine physikalische  
Bedeutung kaum zugeschrieben sein  
dürfte.

A. Einstein.

<sup>x</sup> Zentr. f. Physik 1922 11.B. § 326  
<sup>xx</sup> Zentr. f. Physik 1922 10.B. § 322.

A. Einstein Archive



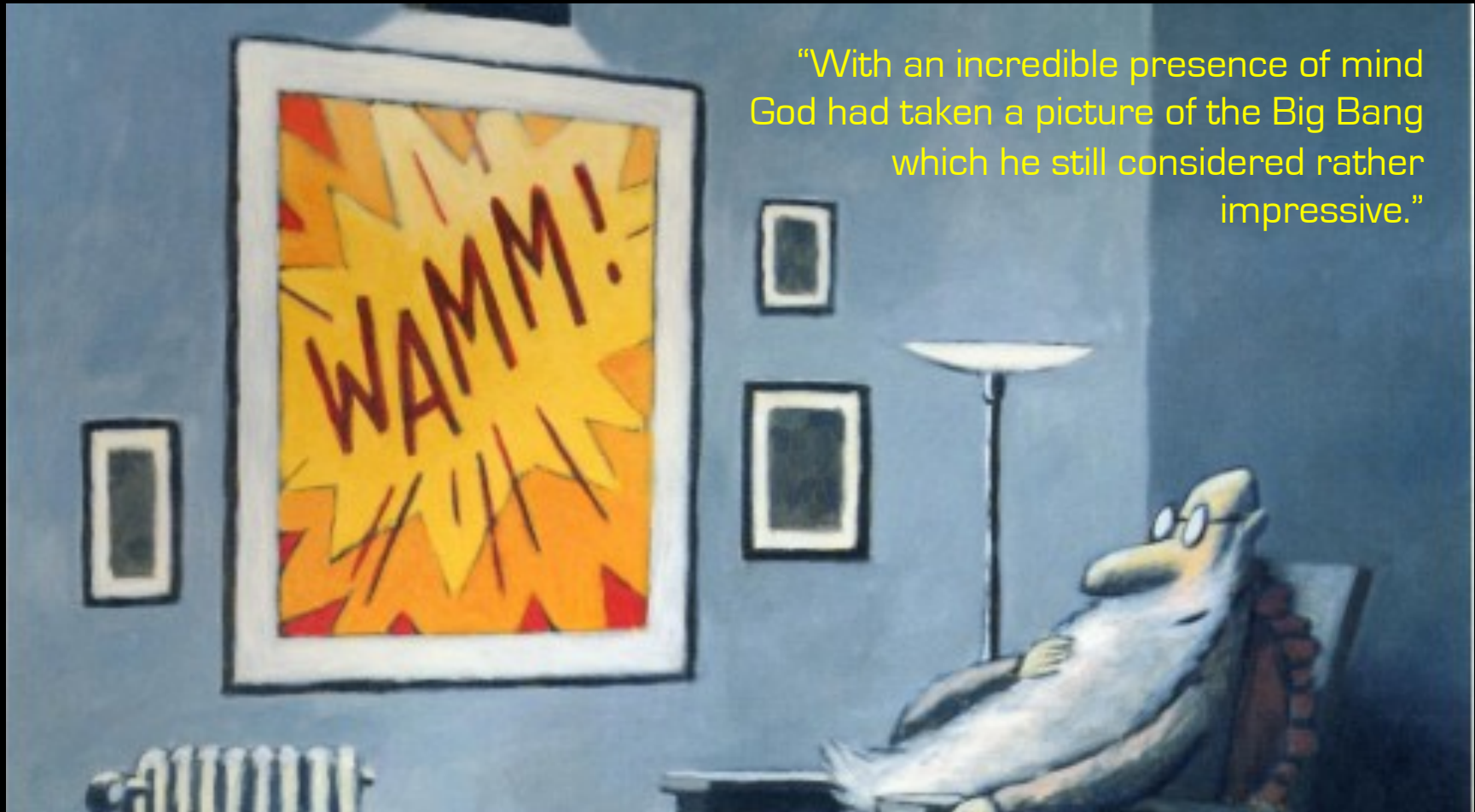
Einstein closes the eyes and denies the consequences of his own theory; he speaks of: „...dynamical solutions...“ to which a physical significance can hardly be attributed.” (1923)



Only the integration of General Relativity with observations of the redshift of galaxies establishes the cosmological significance of Einstein's theory.

Einstein with the director of the Mount Wilson Observatory (Walter S. Adams, in the middle), 1931

# Is this the end of the story?



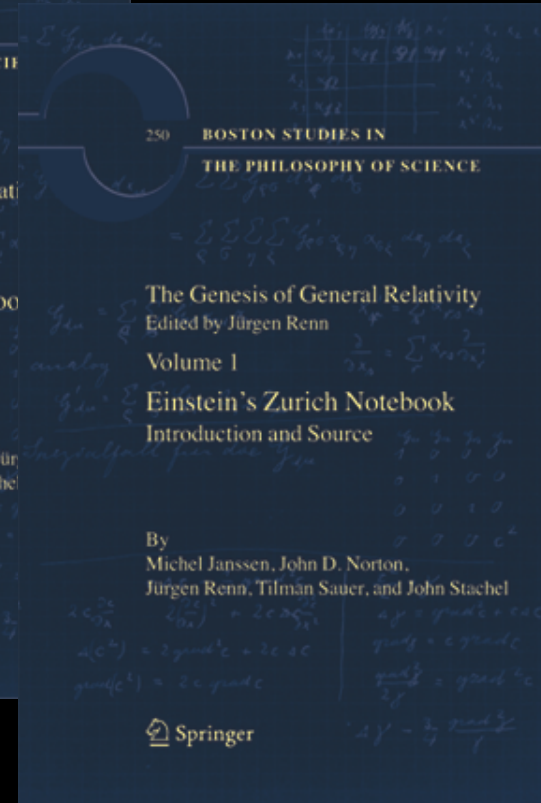
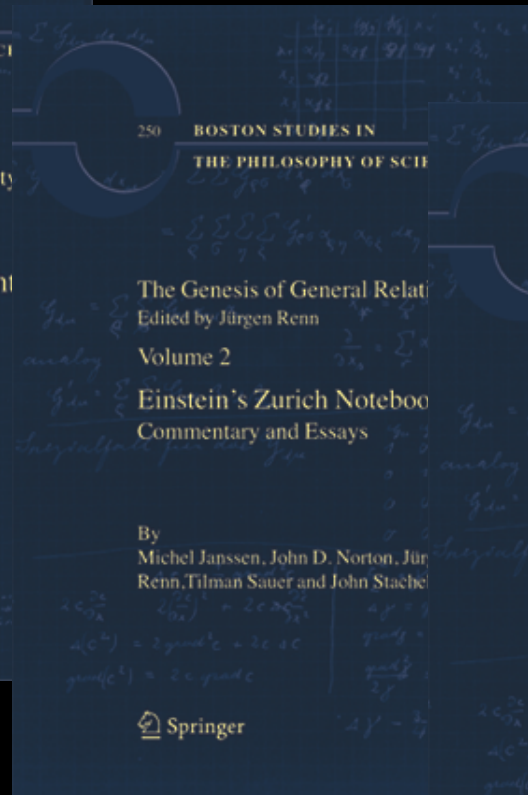
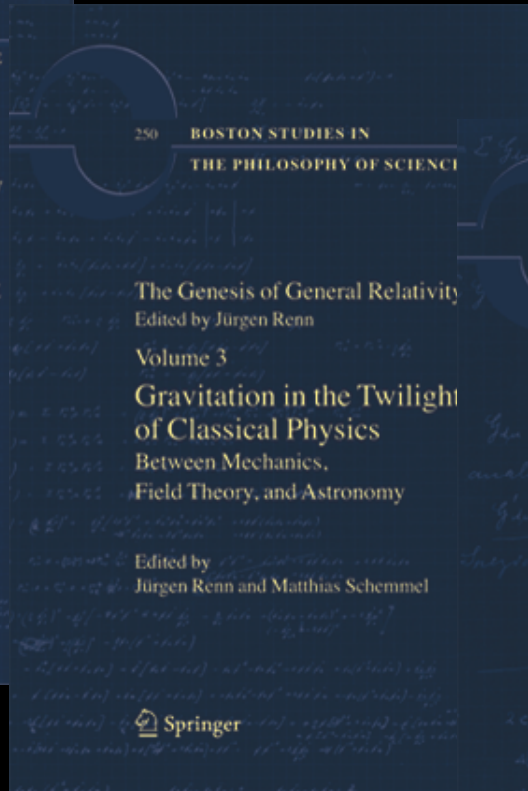
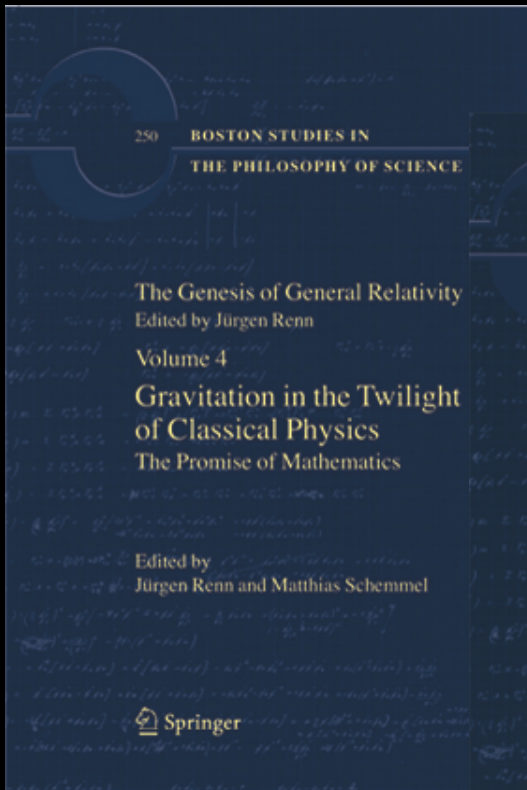
## The interpretation of space in the genesis of quantum gravity

- ★ The untypical character of the gravitational field is confirmed by difficulties of creating a quantum field theory of the gravitational field.
- ★ A quantum theory of gravitation thus emerges as a new borderline problem:
- ★ Quantum theory is characterized by a superposition principle of matter states. If matter acts as source of the gravitational field, then also space-time geometry should be subject to such a superposition principle.

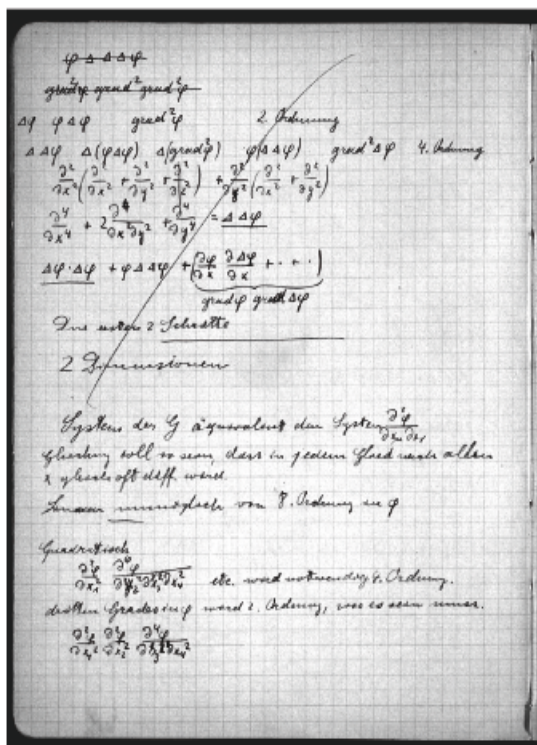
## The interpretation of space in the genesis of quantum gravity

- ★ If one wants to match formalisms, one has to reformulate them.
- ★ This happened in the history of quantum physics, which involved an elaboration of classical mechanics.
- ★ The formulation closest to quantum physics was the Hamilton-Jacobi formulation of classical mechanics because it allowed to build a wave mechanics including the superposition principle and the correct classical limit.
- ★ Can general relativity be reformulated in Hamilton-Jacobi form?
- ★ Yes, but only after mastering the problems of constrained Hamiltonian dynamics.

# The Genesis of General Relativity, 2006



[p. 40 L]



[p. 40 L]

$(\varphi \Delta \Delta \varphi)$

$(\text{grad}^2 \varphi \quad \text{grad}^2 \quad \text{grad}^2 \varphi)$

$\Delta \varphi \quad \varphi \Delta \varphi \quad \text{grad}^2 \varphi \quad 2. \text{ Ordnung}$

$\Delta \Delta \varphi \quad \Delta(\varphi \Delta \varphi) \quad \Delta(\text{grad}^2 \varphi) \quad \varphi \Delta \Delta \varphi \quad \text{grad}^2 \Delta \varphi \quad 4. \text{ Ordnung}$

$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$

$\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} = \Delta \Delta \varphi$

$\Delta \varphi \cdot \Delta \varphi + \varphi \Delta \Delta \varphi + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial x} + \dots \right)$   
grad<sup>2</sup> grad<sup>2</sup>  $\varphi$

Die ersten 2 Schritte

2 Dimensionen

System der  $G$  äquivalent dem System  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}$  [eq. 7]

Gleichung soll so sein, dass in jedem Glied nach allen  $x$  gleich oft diff. wird.

Linear unmöglich von 8. Ordnung in  $\varphi$

Quadratisch

$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \frac{\partial^6 \varphi}{\partial x_2^2 \partial x_3^2 \partial x_4^2}$  etc. wird notwendig 4. Ordnung.

dritten Grades in  $\varphi$  wird 2. Ordnung, wie es sein muss.

$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2 \partial x_4^2}$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3 \partial x_4} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_3 \partial x_2 \partial x_4} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_4 \partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_1 \partial x_3 \partial x_4} + \dots \quad (35)$$

This expression is fully symmetric under permutation of the indices. By having a second-order derivative operator symmetric in all four coordinates (such as the d'Alembertian) acting on this expression, one can now construct field equations that meet all three constraints, the two original ones and the modified version of the third one. However, Einstein did not pursue this line of inquiry any further.

2.5 Transforming the Ellipsoid Equation as a Model  
for Transforming the Line Element (40R-41L)

40R-41L

Einstein's first exploration of a metric theory of gravitation ends at the horizontal line drawn on p. 40R with the calculations discussed above. The remaining pages of this part, pp. 40R-43L, do not seem to be a direct continuation of these investigations.

On the bottom half of p. 40R and the top half of p. 41L, Einstein considered transformations of equations describing three-dimensional ellipsoids. Only these calculations, which bear on Einstein's exploration of the transformation properties of the metric tensor, will be discussed here. On the bottom half of p. 41L and the top half of p. 41R, Einstein examined some properties of infinitesimal unimodular transformations. These calculations will be discussed in sec. 4.5.7 along with very similar calculations at the bottom of p. 12R. The bottom half of p. 41R, dealing with constrained motion along a two-dimensional surface, will be discussed in the sec. 4.5.8. Finally, most, if not all, of the material on pp. 42L-43L is related to Einstein's considerations on pp. 23L-R and will be discussed in secs. 5.5.6-5.5.10.

On the bottom half of p. 40R, Einstein transformed the equation for a three-dimensional ellipsoid to its principal-axis form. On the top half of p. 41L, he then tried to determine the class of linear transformations that would leave this description of the ellipsoid invariant. The calculation on p. 40R is analogous to finding coordinate transformations that take the line element in arbitrary coordinates to its standard Minkowski form. This geometrical analogy can also be found in (Einstein and Grossmann 1913, sec. 3): "the real cone  $ds^2 = 0$  appears brought to its principal axes" ("der reelle Kegel  $ds^2 = 0$  erscheint auf seine Hauptachsen bezogen"). The calculation on p. 41L is analogous to finding the class of linear transformations leaving the Minkowski line element in its standard diagonal form invariant.<sup>44</sup>

40R

The calculation starts from the defining equation for an ellipsoid in Cartesian coordinates  $x, y$ , and  $z$ :

$$\alpha_{11}x^2 + 2\alpha_{12}xy + \dots + \alpha_{33}z^2 = 1. \quad (36)$$

44 These calculations may have been motivated by the following remark in (Wright 1908, 18): "The problem of the equivalence of two quadratic differential forms is reduced to that of the equivalence of two sets of algebraic forms, where one set is obtained from the other by a linear transformation."

**Thank you very much !**

IHES Paris, 07 March 2013

Jürgen Renn



**<http://www.mpiwg-berlin.mpg.de>**

# Bonus

# Historical Epistemology

- ★ We will embed the notion of space of relativistic mechanics in a long-term history of spatial thinking.
- ★ We will demonstrate how the heuristics originally paving the way for the space of relativistic mechanics is eventually overcome in its mature development.
- ★ We will argue that general relativity may actually suggest different concepts of space in dependence of the way in which it is formulated and that only its combination with quantum theory may settle this ambiguity.

# Some more remarks on Quantum Gravity

## The interpretation of space in the genesis of quantum gravity

- ★ The power of the formalism – examples from the past:
- ★ Integrating Fermat's principle of least time for light and Maupertuis' principle of least action for matter into a single formalism could have suggested special relativity.
- ★ Hamilton's optical-mechanical analogy did suggest the idea of a wave mechanics.
- ★ Which reformulations of general relativity and quantum theory will suggest a theory of quantum gravity?

## The interpretation of space in the genesis of quantum gravity

- ★ In 1965 a Hamilton-Jacobi reformulation of general relativity became the starting point for the Wheeler-DeWitt equation, the “Schrödinger equation” for quantum gravity.
- ★ This equation as well as subsequent work in quantum gravity suggest quantum fluctuations of geometry.
- ★ The Wheeler-DeWitt equation is, however, unsatisfactory because it is based on a phase space formulation of general relativity that does not adequately reflect the general covariance of the theory.
- ★ In a recent, fully covariant reformulation using intrinsic coordinates, it suggests quantum fluctuations of space and time.