Chapitre 1

Christophe Soulé
Théorie d'Arakelov

1.1 Introduction

Les articles d'Arakelov [Ara74, Ara75] datent des années 1970. Ils s'appuient sur des idées de Shafarevitch pour l'étude des équations diophantiennes. Je vais décrire tout d'abord l'idée générale, d'un point de vue volontairement un peu naïf.

On se donne une équation diophantienne

$$F(x,y) = 0 \ , \ \ F \in \mathbb{Z}\,[u,v]$$

dont on cherche les solutions (x, y) entières. Plutôt que d'attaquer directement le problème, on peut faire d'abord les deux choses suivantes :

1. considérer, pour tout nombre premier p, l'équation obtenue en réduisant modulo ce nombre premier, c'est-à-dire la congruence

   $$F(x,y) \equiv 0 \mod p.$$

   C'est un problème plus facile que le problème initial, ne serait-ce que parce qu'il n'y a qu'un nombre fini de couples (x, y) à tester. Ceci conduit à introduire le *schéma*

   $$X_{/p} := \operatorname{Spec}\left(\mathbb{F}_p\,[u,v]\,/\,(F)\right).$$

   Il s'agit de l'ensemble des idéaux premiers de l'anneau $R := \mathbb{F}_p\,[u,v]\,/\,(F)$, muni de la *topologie de Zariski* (1), et sur lequel on a défini un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_{X_{/p}}$, obtenu en considérant les *localisés* de R.
2. résoudre l'équation $F(x, y) = 0$ dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. On obtient ici « beaucoup » de solutions, puisque $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, qui forment une courbe affine sur $\mathbb{C}$, que l'on peut étudier avec les outils de la géométrie complexe.

Le but de la théorie d'Arakelov est en quelque sorte de traiter les deux opérations précedentes *simultanément.* En d'autres termes, on pourrait dire que la géométrie d'Arakelov consiste en une synthèse de la géométrie algébrique des variétés sur $\mathbb{Z}$ (théorie des schémas de Grothendieck) et

(1). C'est la topologie - définie sur le spectre de n'importe quel anneau R - dont les fermés sont les parties $Z(I) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \mathfrak{p} \supset I\}$, I décrivant l'ensemble des idéaux de R. (N.d.r.)

de la géométrie complexe hermitienne [2]. Si on a à l'esprit que l'équation initiale a en général très peu de solutions entières, la théorie d'Arakelov s'emploie à le prouver en utilisant simultanément les contraintes provenant des congruences modulo les nombres premiers, et celles fournies par la géométrie complexe.

1.2 Intersection arithmétique

Surface arithmétique

Dans cette section, X désigne une variété sur $\mathbb{Z}$ de dimension 2, autrement dit une *surface arithmétique*. Plus précisément, X est un schéma régulier irréductible de dimension 2, projectif, plat et semi-stable sur $S = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. Avant d'expliquer sommairement les sens de chacun des termes de cette définition, donnons une image pour visualiser les choses :

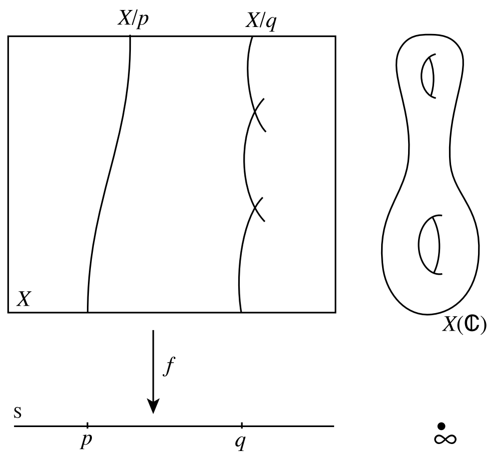

Figure 1.1 – Un schéma arithmétique complété à l'infini

Tout d'abord, le schéma X est *projectif*, c'est-à-dire que

$$X = \operatorname{Proj}\left(\mathbb{Z}\left[X_0, \ldots, X_n\right] / \left(P_1, \ldots, P_k\right)\right)$$

où les P_i sont des polynômes *homogènes* à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Par rapport à la notion de schéma affine de l'introduction, on a remplacé la notion de spectre d'un anneau (« Spec »), par celle de spectre projectif d'un anneau gradué (« Proj ») ce qui signifie que l'on ajoute une condition d'homogénéité dans toutes les définitions : ensemblistement, X est constitué des idéaux premiers *homogènes* de $R = \mathbb{Z}\left[X_0, \ldots, X_n\right] / \left(P_1, \ldots, P_k\right)$ (à l'exclusion de ceux qui contiennent l'idéal R_+ engendré par X_0, …, X_n), que l'on munit de la topologie de Zariski et d'un faisceau structural $\mathcal{O}_X$ dont la définition est sensiblement plus complexe que dans le cas affine.

Le schéma $X_{/p} = f^{-1}(p) = \operatorname{Proj}(R/pR) = \operatorname{Proj}\left(\mathbb{F}_p\left[X_0, \ldots, X_n\right] / \left(P_1, \ldots, P_k\right)\right)$ est la fibre au-dessus de p. En général, $X_{/p}$ est une courbe lisse, sauf pour un nombre fini de premiers p où la fibre est singulière. Noter que, comme le suggère la figure 1.1, il existe toujours dans cette situation *au moins un* nombre premier q avec une fibre singulière.

(2). Le sens de l'épithète *hermitienne* sera précisé plus loin.

Dire que X est *régulier* signifie que les anneaux locaux $\mathcal{O}_x$ (les *germes* du faisceau structural $\mathcal{O}_X$) sont réguliers. L'assertion sur la dimension est à comprendre au sens de la dimension de Krull.

Dire que X est un schéma *plat* sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ signifie que l'application f est surjective.

Quant à la semi-stabilité, c'est une condition relative au type de singularités autorisées : elles doivent être aussi « petites » que possible, c'est-à-dire au plus des points doubles, les différentes composantes de chaque fibre singulière sont réduites et on impose en outre une condition technique que l'on ne détaillera pas ici sur les composantes isomorphes à $\mathbb{P}_1$.

On s'intéresse également aux solutions complexes des équations définissant X ; on note $X(\mathbb{C})$ l'ensemble des solutions complexes des équations $P_1 = \cdots = P_k = 0$. C'est une surface de Riemann, dont on suppose en outre qu'elle est de genre au moins 2. Sur la figure 1.1, ceci est illustré en complétant la droite affine $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ par un point à l'infini, et en considérant $X(\mathbb{C})$ en quelque sorte comme la fibre au-dessus de ∞.

Voilà pour l'image que l'on peut donner d'une surface arithmétique. Sur ces surfaces, on va considérer des objets qui sont des fibrés en droites.

Fibré hermitien inversible sur X

Les objets de base de la géométrie d'Arakelov sont les *fibrés inversibles hermitiens* sur une surface arithmétique X, c'est-à-dire les couples $\overline{L} = (L, \|.\|)$ constitués d'un fibré inversible sur X et d'une norme $\mathcal{C}^\infty$ sur le fibré inversible induit sur la surface de Riemann $X(\mathbb{C})$. Plus précisément :

- L est un $\mathcal{O}_X$-module (faisceau en modules) localement libre de rang 1 : pour tout $x \in X$ la fibre $L_x := \varinjlim_{x\in\mathcal{U}} \Gamma(\mathcal{U}, L)$ est triviale, c'est-à-dire
$$\forall x \in X, L_x := \varinjlim_{x\in\mathcal{U}} \Gamma(\mathcal{U}, L) \simeq \mathcal{O}_x.$$
- $L_{\mathbb{C}} := L_{|X(\mathbb{C})}$, la restriction de L à $X(\mathbb{C})$, est un fibré inversible algébrique, donc holomorphe, sur $X(\mathbb{C})$; pour tout $x \in X(\mathbb{C})$, on munit $L(x) := L_x/\mathfrak{m}_x L_x \simeq \mathbb{C}$ d'une *norme hermitienne*, à savoir une application $\|\cdot\|\colon L(x) \to \mathbb{R}^+$ telle que
  1. $\|\lambda s\| = |\lambda|\|s\|$,
  2. $\|s\| = 0 \Leftrightarrow s = 0$.

  On souhaite en outre que cette norme varie de façon raisonnable avec x, c'est-à-dire qu'elle soit de classe $\mathcal{C}^\infty$ par rapport à x : pour tout ouvert $\mathcal{U}$ et toute section $s \in \Gamma(\mathcal{U}, L)$ ne s'annulant pas sur $\mathcal{U}$, l'application
$$\begin{aligned} f\ : \mathcal{U}(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto \|s(x)\| \end{aligned}$$
  est $\mathcal{C}^\infty$.

Arakelov définit dans [Ara74] une notion d'*intersection arithmétique* pour deux fibrés hermitiens inversibles $\overline{L}$ et $\overline{M}$ sur X : c'est un nombre réel (3) noté $\overline{L}\cdot\overline{M}$ et satisfaisant les deux propriétés suivantes :

1. $\overline{L}\cdot\overline{M} = \overline{M}\cdot\overline{L}$

(3). À la différence de la géométrie usuelle où l'intersection est plutôt un entier.

2. $\left(\overline{L_1}+\overline{L_2}\right)\cdot\overline{M}=\overline{L_1}\cdot\overline{M}+\overline{L_2}\cdot\overline{M}$ où $\overline{L_1}+\overline{L_2}$ désigne le fibré inversible $L_1\otimes L_2$ sur X muni de la norme hermitienne définie par la formule $\|s_1\otimes s_2\|=\|s_1\|\,\|s_2\|$.

On verra plus loin une définition explicite de cette intersection.

1.3 Le fibré dualisant relatif

L'exemple le plus important d'intersection arithmétique est l'auto-intersection du *fibré dualisant relatif*. Rappelons que $X/\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ n'est pas tout à fait lisse : il y a quelques singularités, qui sont des points doubles. Considérons l'ouvert $\mathcal{U}=X\setminus\{\text{points doubles}\}$: l'application $f:\mathcal{U}\longrightarrow\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ est lisse (4), et l'on peut alors parler du fibré inversible $\Omega^1_{\mathcal{U}/S}$ des différentielles relatives (le dual du fibré tangent vertical correspondant à l'application f). Le *fibré dualisant relatif* $\omega_{X/S}$ est par définition l'unique fibré inversible sur X dont la restriction à $\mathcal{U}$ coïncide avec $\Omega^1_{\mathcal{U}/S}$:

$$\omega_{X/S}|_{\mathcal{U}}=\Omega^1_{\mathcal{U}/S}.$$

Arakelov a défini une norme $\mathcal{C}^\infty$ sur $\omega_{X/S}$. On ne va pas donner ici la définition précise de cette norme, qui est assez longue à expliquer. On note $\overline{\omega}=\left(\omega_{X/S},\|\cdot\|_{\mathrm{Arakelov}}\right)$ le fibré hermitien correspondant et $\overline{\omega}^2=\overline{\omega}\cdot\overline{\omega}$ l'intersection de $\overline{\omega}$ avec lui-même (*self- intersection*). C'est un invariant fondamental pour l'arithmétique de X. On sait, d'après Faltings [Fal84], que

$$\overline{\omega}^2\geqslant 0.$$

Ce résultat a été amélioré 14 ans plus tard par Ullmo en 1998, qui a montré [Ull98] que

$$\overline{\omega}^2>0. \tag{1.1}$$

On cherchait à obtenir l'inégalité stricte 1.1 depuis que Szpiro avait montré que l'hypothèse $\overline{\omega}^2>0$ permettait d'établir la conjecture suivante, énoncée par Bogomolov :

Corollaire 1.3.1 (Szpiro [Szp90]). *Soit J la jacobienne de X et $j:X(\overline{\mathbb{Q}})\subset J(\overline{\mathbb{Q}})$ le plongement associé au choix d'un point $O\in X(\overline{\mathbb{Q}})$. Alors l'image de j est discrète pour la topologie définie par la hauteur de Néron-Tate.* (5)

Un cas particulier de ce résultat avait été établi précédemment par Raynaud [Ray83] : sous les mêmes hypophèses, l'ensemble des points de hauteur nulle dans $X(\overline{\mathbb{Q}})$ est fini.

Les résultats que l'on vient de voir fournissent un premier exemple des conséquences de la théorie de l'intersection sur les surfaces arithmétiques.

Conjectures

Je voudrais mentionner maintenant une conjecture au sujet de $\overline{\omega}^2$, qui porte non pas sur une borne inférieure, comme au paragraphe précédent, mais sur une borne supérieure. On note K le corps de définition de la fibre générique, $\mathcal{O}_K$ la clôture intégrale de $\mathbb{Z}$ dans K, $\Delta=\operatorname{disc}(K/\mathbb{Q})$

(4). Plus généralement, on est naturellement amener à considérer des schémas non pas sur $S=\operatorname{Spec}Z$ mais sur $S:=\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ où $\mathcal{O}_K$ est l'anneau des entiers d'un corps de nombres. On peut lire le paragraphe en ayant à l'esprit cette situation un peu plus générale. (N.d.r.)

(5). Insistons sur le fait que X est supposée vérifier les propriétés du paragraphe précédent, en particulier, *son genre g est au moins* 2.

le discriminant de l'extension $K/\mathbb{Q}$ et $[K:\mathbb{Q}]$ son degré. On a la conjecture suivante, qui est essentiellement due à Parshin [(6)] :

Conjecture 1.3.1 (Parshin,Moret-Bailly [Par88, MB90])**.** *Il existe des constantes $\alpha > 0$, $\beta > 0$, bornées dans une famille projective de courbes, telles que*

$$\overline{\omega}^2 \leqslant \alpha \log |\Delta| + \beta \, [K:\mathbb{Q}] \, .$$

Par *famille projective de courbes* on entend une famille de courbes indexée par une courbe projective, c'est-à-dire une surface au-dessus d'une courbe projective dont les fibres sont des courbes de genre au moins 2. Cette conjecture a de très belles conséquences : si l'on savait la démontrer on obtiendrait une variante effective de la conjecture de Mordell, d'où l'on déduirait la conjecture ABC (sous une forme faible). Précisément, on a le théoème suivant, que l'on trouve dans les articles de Parshin et Moret-Bailly précédemment cités :

Théorème 1.3.1 (Parshin,Moret-Bailly [Par88, MB90])**.** *La conjecture 1.3.1 implique ABC sous la forme faible suivante : il existe une constante $\gamma > 0$ telle que si $A + B = C$, avec $A,\ B,\ C \in \mathbb{N}$ et* $\operatorname{pgcd}(A, B, C) = 1$*, alors*

$$ABC \leqslant \Big(\prod_{p|ABC} p \Big)^{\gamma}.$$

Il existe également une variante sur un corps de nombres général, avec une constante dépendant du corps.

Ces résultats montrent clairement l'intérêt qu'il peut y avoir à mieux comprendre la self-intersection de $\overline{\omega}$.

1.4 Définition de l'intersection arithmétique

Soient $\overline{L_1}$ et $\overline{L_2}$ deux fibrés inversibles hermitiens sur X. On va définir $\overline{L_1} \cdot \overline{L_2}$. Par bilinéarité, on peut supposer qu'il existe des sections $s_i \in \Gamma(X, L_i)$, $i = 1, 2$ telles que le diviseur $D_i = \operatorname{Div}(s_i)$ soit irréductible. Par conséquent, $f(D_i)$ est un fermé irréductible de $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, c'est donc un point ou $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ tout entier. On peut ainsi distinguer deux types de diviseurs :

Définition 1.4.1. *Un diviseur irréductible D sur X est*

1. vertical *si $f(D) = \{p\}$,*
2. horizontal *si $f(D) = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$.*

Pour la définition de l'intersection de deux diviseurs irréductibles D_1 et D_2, il y a deux cas à considérer, selon que l'un des deux au moins est vertical ou pas :

- Si D_1 est vertical, $f(D_1) = \{p\}$, on pose

$$\overline{L_1} \cdot \overline{L_2} = \deg(L_{2|D_1}) \cdot \log p$$

.

(6). La version initiale proposée par Parshin s'est révélée fausse et c'est Moret-Bailly qui a proposé la version un peu plus faible présentée ici, qui suffit pour les applications.

- Si D_1 et D_2 sont horizontaux, comme illustré par la figure 1.2 ci dessous, la formule est plus compliquée.

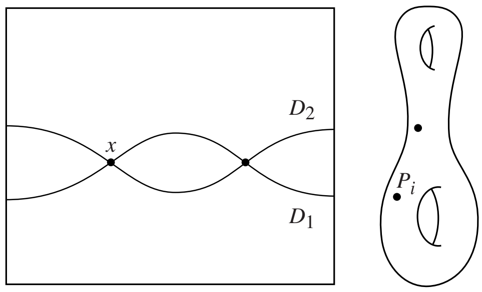

FIGURE 1.2 – Intersection de deux diviseurs horizontaux

Les diviseurs D_1 et D_2 définissent des points sur la surface de Riemann $X(\mathbb{C})$. On écrit la restriction de D_1 à $X(\mathbb{C})$ sous la forme

$$D_{1|X(\mathbb{C})} = \sum_i P_i.$$

On peut se ramener au cas où D_1 et D_2 s'intersectent en un nombre fini de points, au besoin en « bougeant » l'un des deux par le diviseur d'une fonction. On a alors, pour l'intersection de $\overline{L_1}$ et $\overline{L_2}$, la formule

$$\overline{L_1} \cdot \overline{L_2} := \underbrace{\sum_{x \in D_1 \cap D_2} \log \# \frac{\mathcal{O}_x}{\langle s_1, s_2 \rangle}}_{\text{partie finie}} - \underbrace{\sum_i \log \|s_2(P_i)\| - \int_{X(\mathbb{C}]} \log \|s_1\| c_1(\overline{L_{2,\mathbb{C}}})}_{\text{partie infinie}},$$

où $c_1(\overline{L_{2,\mathbb{C}}})$ désigne la première forme de Chern de $\overline{L_{2,\mathbb{C}}}$, c'est-à-dire la $(1,1)$-forme qui coïncide sur $X(\mathbb{C}) - D_2(\mathbb{C})$ avec $\dfrac{\partial\bar\partial}{2\pi i} \log \|s_2\|^2$. Remarquons que si la partie finie est clairement symétrique, il n'en va pas de même pour la partie infinie ; la symétrie de l'intersection demande donc une démonstration que nous ne donnerons pas ici.

1.5 Le déterminant du Laplacien

Avant d'aborder le théorème de Riemann-Roch arithmétique, on doit introduire le déterminant du Laplacien. Pour commencer, donnons-nous un n-uplet $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ de nombres réels strictement positifs. On peut lui associer une *fonction zêta* ζ_λ, définie par

$$\zeta_\lambda(s) = \sum_{i=1}^N \lambda_i^{-s}.$$

La dérivée en zéro de cette fonction vaut

$$\zeta'_\lambda(0) = -\sum_{i=1}^N \log \lambda_i$$

ce que l'on peut encore écrire sous la forme

$$\lambda_1 \cdots \lambda_N = \exp(-\zeta'_\lambda(0)). \tag{1.2}$$

Considérons maintenant une suite infinie $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots$ munie des propriétés suivantes :

1. $\zeta_\lambda(s) := \sum_i \lambda_i^{-s}$ converge absolument pour $\operatorname{Re} s > A$,
2. $\zeta_\lambda(s)$ admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$,
3. 0 n'est pas un pôle.

Dans ces conditions, on peut prendre l'égalité (1.2) comme définition du produit des λ_i :

$$\lambda_1\lambda_2 \cdots := \exp(-\zeta'_\lambda(0)).$$

Exemple 1.5.1. *Ce procédé, que l'on désigne souvent sous le nom de* régularisation zêta, *donne, lorsqu'il est appliqué à la fonction zêta de Riemann, la « formule » :*

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots = \sqrt{2\pi}.$$

On va employer ce procédé de façon systématique dans le cas où les λ_i sont les valeurs propres d'un opérateur elliptique, par exemple le Laplacien. Soit $X(\mathbb{C})$ une surface de Riemann et $(L_\mathbb{C}, \|\cdot\|)$ un fibré hermitien inversible sur $X(\mathbb{C})$. On se donne également une métrique sur l'espace tangent $TX(\mathbb{C})$. Avec ces deux métriques, on peut définir le *Laplacien*, qui est un opérateur elliptique de l'espace des sections $\mathcal{C}^\infty$ de $L_\mathbb{C}$ vers lui-même :

$$\Delta = \overline{\partial}^*\overline{\partial} : \mathcal{C}^\infty(X(\mathbb{C}), L_\mathbb{C}) \longrightarrow C^\infty(X(\mathbb{C}), L_\mathbb{C})$$

où $\overline{\partial}\colon \mathcal{C}^\infty(X(\mathbb{C}), L_\mathbb{C}) \longrightarrow A^{01}(L_\mathbb{C})$ désigne l'opérateur de Cauchy-Riemann et $\overline{\partial}^*\colon A^{01}(L_\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(X(\mathbb{C}), L_\mathbb{C})$ son adjoint (relatif aux produits scalaires induits par les métriques sur $L_\mathbb{C}$ et sur la courbe). Les valeurs propres non nulles $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots$ de Δ satisfont les 3 hypothèses précédentes, ce qui permet de définir le déterminant du Laplacien par la formule

$$\det{}'(\Delta) := \lambda_1\lambda_2 \cdots .$$

On écrit $\det'$ pour signifier que le produit obtenu par régularisation zêta porte sur les valeurs propres *non nulles* de Δ. Ce déterminant va jouer un rôle essentiel dans le théorème de Riemann-Roch pour les surfaces arithmétiques au paragraphe suivant.

1.6 Le théorème de Riemann-Roch arithmétique

Soit X une surface arithmétique, $\overline{L}$ un fibré hermitien inversible sur X. On choisit une métrique sur $TX(\mathbb{C})$, qui induit une forme volume $\mathrm{d}x$ sur $X(\mathbb{C})$, d'où une norme sur l'espace de dimension infinie $C^\infty(X(\mathbb{C}), L_\mathbb{C})$:

$$C^\infty(X(\mathbb{C}), L_\mathbb{C}) \ni s \longmapsto \|s\|_{L^2}^2 = \int_{X(\mathbb{C})} \|s(x)\|^2 \mathrm{d}x.$$

Cela induit en particulier une norme sur le sous-espace (de dimension finie) des sections holomorphes de $L_\mathbb{C}$, c'est-à-dire le noyau de $\overline{\partial}$.

La situation est donc la suivante : on considère le $\mathbb{Z}$-module libre de rang fini $H^0(X,L) = \Gamma(X,L)$ des sections globales de L sur X [(7)]. Ce $\mathbb{Z}$-module libre est muni d'une norme, induite par la norme L^2 que l'on vient de définir sur $H^0(X,L)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C} = \Gamma(X(\mathbb{C}), L_{\mathbb{C}})$, ce qui en fait un réseau euclidien. De même, par dualité de Serre, on a une norme L^2 sur $H^1(X,L)$, qui est aussi un $\mathbb{Z}$-module de type fini, dont le sous-groupe de torsion peut être non trivial.

On définit

$$\widehat{\deg}(H^0) = -\log \mathrm{vol}\,\frac{H^0(X,L)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}}{H^0(X,L)}$$

et

$$\widehat{\deg}(H^1) = \log \#H^1(X,L)_{\mathrm{tors}} - \log \mathrm{vol}\,\frac{H^1(X,L)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}}{H^1(X,L)}$$

le volume désignant le volume euclidien induit par le produit scalaire associé à la norme L^2 introduite précédemment.

Enfin, si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de K, corps de définition de la courbe, on note $N_{\mathfrak{p}} = \#\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$ et $\delta_{\mathfrak{p}} =$ nombre de points doubles de $X/\mathfrak{p}$.

Le théorème est le suivant :

Théorème 1.6.1 (Deligne ; Gillet-Soulé ; Bismut). [(8)]

$$\widehat{\deg}(H^0)-\widehat{\deg}(H^1)-\frac{1}{2}\log\det{}'(\Delta) = \frac{\overline{L}\cdot\overline{L}}{2}-\frac{\overline{\omega}\cdot\overline{L}}{2}+\frac{\overline{\omega}\cdot\overline{\omega}}{12}+\frac{1}{12}\sum_{\mathfrak{p}}\delta_{\mathfrak{p}}\log(N_{\mathfrak{p}})-\frac{g-1}{12}\,(24\zeta'(-1)-1)\,.$$

Dans cette formule, le terme $\widehat{\deg}(H^0)-\widehat{\deg}(H^1)$ correspond à une caractéristique d'Euler Poincaré, et le théorème de Riemann-Roch classique donnerait une égalité du type

$$\widehat{\deg}(H^0)-\widehat{\deg}(H^1) = \frac{\overline{L}\cdot\overline{L}}{2}-\frac{\overline{\omega}\cdot\overline{L}}{2}+\frac{\overline{\omega}\cdot\overline{\omega}}{12} \tag{1.3}$$

qu'il faut ici corriger, à gauche en retranchant $\frac{1}{2}\log\det{}'(\Delta)$ et à droite par un terme rendant compte de l'existence de singularités dans les fibres (c'est le terme « $\frac{1}{12}\sum_{\mathfrak{p}}\delta_{\mathfrak{p}}\log(N_{\mathfrak{p}})$ ») ainsi que par une constante assez étonnante $\frac{g-1}{12}(24\zeta'(-1)-1)$. La fonction ζ qui intervient dans cette formule est la fonction zêta de Riemann usuelle. La valeur de la fonction zêta au point -1 intervient déjà dans le théorème de Riemann-Roch classique, à cause de la formule $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$. Ce qui est très surprenant c'est que dans ce théorème de Riemann-Roch pour les surfaces arithmétiques, la valeur de la dérivée en -1 de ζ intervienne également.

Pour pouvoir exploiter cette formule, il faut contrôler le terme $\log\det{}'(\Delta)$, voire obtenir une formule explicite, ce qui est en général extrêmement difficile vu la définition du déterminant du Laplacien en termes de régularisation zêta. On peut par exemple considérer des puissances de L, et voir comment le déterminant du Laplacien varie. On peut également se restreindre à des variétés abéliennes, auquel cas ce terme peut se calculer explicitement.

(7). Pour la cohomologie d'une variété projective X, tous les groupes de cohomologie sont de type fini et, qui plus est, le H^0 est sans torsion.

(8). Deligne obtient la formule à une constante près [Del87], explicitée par Gillet et Soulé en s'appuyant sur des travaux de Bismut. Le théorème est démontré dans [GS92] et repose sur les résultats antérieurs obtenus dans [BGS90] et [BL91].

Nous avons démontré un énoncé analogue pour une variété projective X sur $\mathbb{Z}$ et un fibré hermitien $\overline{E}$ de rang arbitraire. La très grande difficulté de la démonstration de ce théorème rélève de l'analyse et repose sur les travaux de Bismut. La démonstration habituelle de Riemann-Roch procède par *déformation* : il faut pouvoir montrer que lorsque l'on effectue ce que l'on appelle la *déformation au cône normal*, on contrôle la façon dont évolue le déterminant du Laplacien, ce qui est rendu possible notamment par un très long papier de Bismut et Lebeau [BL91] qui étudie cette question.

1.7 Applications de la théorie d'Arakelov

Pour finir, je voudrais donner une liste d'applications de la théorie d'Arakelov, c'est-à-dire des résultats dont la démonstration utilise cette théorie.

1. La preuve de la conjecture de Mordell par Vojta ([Voj91]), utilisant le théorème de Riemann-Roch arithmétique que l'on vient de voir.
2. La preuve de la conjecture de Lang par Faltings ([Fal91]), qui n'utilise pas à proprement parler le théorème de Riemann-Roch, mais repose néanmoins sur la théorie de l'intersection arithmétique développée dans les paragraphes précédents.

Noter qu'il existe depuis des preuves de ces deux résultats n'utilisant pas la théorie d'Arakelov.

3. La conjecture de Bogomolov (voir plus haut).
4. La conjecture de Gross et Deligne sur les périodes des variétés de type CM. Il s'agit de variétés sur $\mathbb{Q}$ sur lesquelles agit un groupe fini. Gross et Deligne conjecturent que les périodes de ces variétés devraient être calculées par des valeurs spéciales de fonctions Γ aux nombres rationnels. Cela a été démontré dans le cas des surfaces par Maillot et Roessler [MR04]. Jusque là, les seuls cas connus de la conjecture étaient pour les variétés abéliennes. L'ingrédient de la preuve de Maillot et Roessler est un théorème de Lefschetz arithmétique, qui est une sorte de variante de Riemann-Roch avec action d'un groupe.
5. Valeurs aux points entiers des dérivées des fonctions L (Rapoport - Kudla et Maillot-Roessler). Rappelons le résultat célèbre de Gross et Zagier qui dit que la dérivée en $s = 1$ de la dérivée de la fonction L d'une forme modulaire est la hauteur d'un point de Heegner ; Kudla et Rappoport ont eu l'idée d'étendre ce résultat à des fonctions L de groupes « plus gros » que SL_2, et dans ce cadre ce n'est plus la hauteur d'un point qui intervient, mais un nombre d'intersection au sens de la théorie d'Arakelov.

Questions

Qing Liu. — Est-ce que la conjecture de Gross-Deligne est connue pour toutes les variétés abéliennes ?

Auteur — Oui, c'est un théorème de Colmez [Col93]. Il s'agit d'une généralisation de la formule de Chowla-Selberg dans le cas des courbes elliptiques.

Bibliographie

[Ara74] S. Ju. Arakelov, *An intersection theory for divisors on an arithmetic surface*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **38** (1974), 1179–1192.

[Ara75] S. J. Arakelov, *Theory of intersections on the arithmetic surface*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, B.C., 1974), Vol. 1, Canad. Math. Congress, Montreal, Que., 1975, pp. 405–408.

[BGS90] J.-M. Bismut, H. Gillet, and C. Soulé, *Bott-Chern currents and complex immersions*, Duke Math. J. **60** (1990), no. 1, 255–284.

[BL91] Jean-Michel Bismut and Gilles Lebeau, *Complex immersions and Quillen metrics*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1991), no. 74, ii+298 pp. (1992).

[Col93] Pierre Colmez, *Périodes des variétés abéliennes à multiplication complexe*, Ann. of Math. (2) **138** (1993), no. 3, 625–683.

[Del87] P. Deligne, *Le déterminant de la cohomologie*, Current trends in arithmetical algebraic geometry (Arcata, Calif., 1985), Contemp. Math., vol. 67, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, pp. 93–177.

[Fal84] Gerd Faltings, *Calculus on arithmetic surfaces*, Ann. of Math. (2) **119** (1984), no. 2, 387–424.

[Fal91] ______, *Diophantine approximation on abelian varieties*, Ann. of Math. (2) **133** (1991), no. 3, 549–576.

[GS92] Henri Gillet and Christophe Soulé, *An arithmetic Riemann-Roch theorem*, Invent. Math. **110** (1992), no. 3, 473–543.

[MB90] Laurent Moret-Bailly, *Hauteurs et classes de Chern sur les surfaces arithmétiques*, Astérisque (1990), no. 183, 37–58, Séminaire sur les Pinceaux de Courbes Elliptiques (Paris, 1988).

[MR04] Vincent Maillot and Damian Roessler, *On the periods of motives with complex multiplication and a conjecture of Gross-Deligne*, Ann. of Math. (2) **160** (2004), no. 2, 727–754.

[Par88] A. N. Parshin, *The Bogomolov-Miyaoka-Yau inequality for the arithmetical surfaces and its applications*, Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1986–87, Progr. Math., vol. 75, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1988, pp. 299–312.

[Ray83] M. Raynaud, *Courbes sur une variété abélienne et points de torsion*, Invent. Math. **71** (1983), no. 1, 207–233.

[Szp90] L. Szpiro, *Sur les propriétés numériques du dualisant relatif d'une surface arithmétique*, The Grothendieck Festschrift, Vol. III, Progr. Math., vol. 88, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, pp. 229–246.

[Ull98] Emmanuel Ullmo, *Positivité et discrétion des points algébriques des courbes*, Ann. of Math. (2) **147** (1998), no. 1, 167–179.

[Voj91] Paul Vojta, *Siegel's theorem in the compact case*, Ann. of Math. (2) **133** (1991), no. 3, 509–548.

Bibliographie