Princeton, 25 Nov. 1972

Dear Mr. Serre,

Je réponds à vos questions :

1) Je ne vois pas généraliser la construction de l'arbre de $SL_2(\mathbb{Z}_p)$ au rang supérieur, mais il se peut très bien qu'une telle généralisation existe. Vous devriez essayer de regarder le cas de $SL_3(\mathbb{Z}_p)$, en explicitant le domaine fondamental, qui est connu. Cela fournirait sans doute un autre moyen de calculer son vcd.

2) Type d'homotopie de $\partial \overline{X}$.

L'idée de la démonstration est la suivante :

a) On recouvre $\partial \overline{X}$ par les $\overline{e(P)}$, adhérences des cellules ; on a un recouvrement par des espaces contractiles, et le nerf du recouvrement est l'immeuble de Tits du groupe. On en déduit (voir plus loin) que $\partial \overline{X}$ a le même type d'homotopie que l'immeuble.

b) L'immeuble de Tits a le type d'homotopie d'un bouquet de sphères. (C'est plus ou moins expliqué dans un article de Solomon, cité dans l'exposé Bourbaki que vous avez.

L'argument utilisé dans a) est plus ou moins standard — à cela près que, dans la littérature, il s'agit le plus souvent de recouvrement ouvert, alors qu'ici les $\overline{e(P)}$ sont fermés. On doit utiliser des propriétés de régularité locale (ANR). Je vous envoie ci-joint une copie d'un papier écrit à l'usage de Borel pour notre article commun sur les cocycles ; c'est un état préliminaire, que l'on peut simplifier ; nous n'avons pas du tout l'intention de le publier sous cette forme, mais je pense qu'il peut vous être utile pour reconstituer les démonstrations de a) et b).

3) Action admissible à domaine fondamental simplexe.

Votre énoncé est très naturel. Je m'étais autrefois posé la question, mais je n'ai jamais rédigé une démonstration complète. Vous devriez

essayer de le faire. Méthode possible : soit $\overline{G}$ le groupe universel pour les groupes G_a et les i_b. Construire au moyen de $\overline{G}$ un espace $\overline{T}$ où $\overline{G}$ opère de façon naturelle, de telle sorte que l'on ait un revêtement (il faudra le vérifier !)

$$\begin{array}{ccc} \overline{T} & \curvearrowright & \overline{G} \\ \downarrow & & \\ T & \curvearrowright & G \end{array}$$

compatible avec les actions de $\overline{G}$ et G. (Construire $\overline{T}$ en transportant les alcôves de pour $\overline{G}$ et les identifiant de façon évidente.)
Ceci étant, on utilise le fait que T est simplement connexe pour montrer que $\overline{T} = T$ d'où $\overline{G} = G$. (C'est une méthode standard dans la perte de question de "parapes")

Bien à vous

J-P. Serre.

P.S. A propos de 1), i.e. $SL_3(\mathbb{Z})$: il serait intéressant de mieux connaître toute la cohomologie de ce groupe (et des SL_n, si possible), et pas seulement son v.c.d. Ça doit être possible avec un domaine fondamental explicite, ainsi que connu (réduction des formes quadratiques à 3 variables).

Princeton, 12 déc. 72

Cher Monsieur,

Merci pour votre lettre. Je suis heureux que vous ayez justifié le cas où un simplexe est donné fondamental. Votre généralisation est un peu bizarre ; je ne comprends pas bien H_1, et H_2 est en tout cas bien plus fort que "simplement connexe" au sens usuel, qui devrait suffire.

A propos des questions que vous me posez : 1) on sait que, si le groupe de Coxeter W d'un immeuble est infini, l'immeuble est contractile. La démo consiste à regarder le sous-complexe X_n "formé" de chambres C' de la forme gC, où $g \in BwB$ avec $l(w) \leq n$. On montre par récurrence sur n que X_n est contractile ; la démo est la même que celle que j'ai donnée pour le complexe de Coxeter dans "Coh. des gr. discrets" ; le fait que W soit infini intervient par le fait qu'il n'y a pas de $w \in W$ de longueur maximum.

2) Dans le papier avec Bruhat, nous fabriquons un X et un $\bar{X}$ dans tout groupe algébrique linéaire (sur $\mathbb{Q}$, disons), l'hypothèse semi-simple ou réductif est inutile. Le type d'homotopie du bord $\partial \bar{X}$ est celui de l'immeuble à l'infini (notez que tout parabolique contient le radical, et que fait que l'immeuble est le même que celui du semi-simple associé). Dès lors on a vu groupes arithmétiques, ce n'est pas très surprenant : on tombe sur des extensions de groupes arithmétiques "semi-simples" par des groupes nilpotents de type fini, bien innocents. (J'ai oublié de dire que, bien sûr, X est contractile, Γ opère proprement sur $\bar{X}$, et $\bar{X}/\Gamma$ est compact.) Le cas d'un groupe réductif est particulièrement tricoté. Le groupe arithmétique Γ est connu sinon au produit d'un g. arithmétique "semi-simple" par un $\mathbb{Z}^n$!

Il me paraîtrait plus intéressant d'étudier en détail le cas de $SL_3(\mathbb{Z})$ et de son domaine fondamental. La théorie de Minkowski permet d'écrire ce dernier explicitement (voir Minkowski, Oeuvres, vol 2) ; dans l'espace des formes $ds^2 > 0$:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + Ayz + bzx + Cxy \quad (\text{à homothétie près}),$$

on doit écrire certaines inégalités entre a, b, c, A, B, C, [illegible] avoir, mais $0 < a \leq b \leq c$, $|A| \leq b$, $|B| \leq a$, $|C| \leq a$ (ce n'est pas symétrique !), $A + B + C \geq -a - b$, $\begin{cases} A - B - C \geq -a - b \\ B - C - A \geq -a - b \\ C - A - B \geq -a - b \end{cases}$.

Ce fait un domaine non compact à 5 dimensions, soit D_5. Il contient sur son bord le domaine compact (mod. homothéties) :

D_3 : $a = b = c$, $|A|, |B|, |C| \leq a$, etc. (cube tronqué)

[Pour $n = 2$ (SL_2), D_5 serait remplacé par  et D_3 en serait le bord inférieur o——o].

Il faudrait voir ici par exemple :

a) D_5 se contracte sur D_3.

b) Cette contraction s'étend en une contraction sur la réunion (D et conj de D_3 (analogue de  du cas $n = 2$). X_3)

c) Quelle relation d'équivalence y a-t-il sur D_3 (analogue de o——o du cas $n = 2$).

Si tout cela se faisait, on aurait une action propre de $SL_3(\mathbb{Z})$ sur un espace de dim 3, à savoir X_3, à domaine fondamental explicite. Ce serait très utile, et donnerait bien plus de renseignements sur la cohomologie de $SL_3(\mathbb{Z})$ et de ses sous-groupes que les résultats généraux de Borel et moi.

Bien à vous

J.-P. Serre.

P.S. Quelques références pour $SL_3(\mathbb{Z})$: Coxeter - Moser
Steinberg, p. 96
Magnus, Acta 1935.