Cours d'analyse 1, semestre d'automne

Hugo Duminil-Copin

14 décembre 2015

Table des matières

Préface

Ces notes de cours présentent le contenu du cours d'analyse premier semestre donné à l'université de Genève. Nous remercions les étudiants et les assistants qui ont contribué par leur relecture attentive à la création de ces notes. Nous tenons également à remercier tout particulièrement Nicolas Curien et Ruth Ben Zion.

Ces notes complètent les notes manuscriptes présentées en cours. En aucun cas elles ne les remplacent ! Il est crucial de venir en cours et d'écrire le cours présenté en classe. Le processus consistant à écrire le cours représente la première étape de révision. Le contenu **exigible à l'examen est le matériel présenté en classe** (en particulier, de nombreuses parties du polycopié ne seront pas discutées en classe, et sont présentées pour votre culture). **De plus, ces notes peuvent être modifiées (de façon mineure) à tout moment. Vérifiez donc que vous avez bien une version relativement récente.**

Les exercices présentés dans ces notes ne correspondent pas nécessairement aux feuilles d'exercices distribuées chaque semaine et disponibles sur dokeos dans la rubrique Analyse 1 (automne 2014). **Comme pour le cours, les exercices de référence sont ceux des feuilles d'exercices**. Les exercices sont nombreux et de niveau variable. Nous ne nous attendons pas à ce que vous les réussissiez tous. Les exercices difficiles sont repérables grâce au sigle ☠ (ces exercices représentent des challenges dont la difficulté excède de loin le champs de compétence requis pour valider le cours). Les exercices des feuilles d'exercices avec un sigle $\diamond$ sont à rendre pendant le cours du mercredi (aucune copie ne sera acceptée après cette date). Les copies seront corrigées et notées. **Ces notes sur le semestre résulteront en une note sur 0.5 qui sera ajoutée comme bonus à la note finale du semestre**.

Un examen écrit de 4 heures viendra sanctionner le semestre. Aucun document n'est autorisé pendant cet examen. Une question de cours pouvant porter sur n'importe quelle partie du cours présenté en classe sera incluse dans l'examen. Les théorèmes encadrés sont absolument cruciaux, et il est très important de les connaitre parfaitement. Les exercices porteront sur le contenu du cours mais ne feront pas nécessairement partie des exercices préparés pendant l'année.

Concernant la lecture de ces notes, les encadrés comportent des remarques, des astuces ou des principes généraux de démonstration. Les arguments repérés par la mention "pour votre culture" ne sont en aucun cas requis à l'examen.

Le cours commence par une description succinte de la théorie des ensembles et de la logique. Cette partie est destinée à poser les bases nécessaires pour rédiger une preuve mathématique correctement. Elle offre également une opportunité de découvrir les fondements de notre discipline. Les chapitres suivants introduisent graduellement les nombres entiers, rationnels, réels et complexes. Nous étudions ensuite la notion de suite et de limite. Dans un quatrième temps, nous proposons une étude des fonctions de la variable réelle (continuité, dérivabilité, intégration). Certaines des notions étudiées dans ce semestre ne vous sont pas inconnues. Néanmoins, nous les étudierons plus en profondeur, et parfois avec un angle d'approche différent de celui avec lequel vous les avez rencontrées jusqu'à présent. **Le cours est complètement auto-contenu et aucun pré-requis n'est nécessaire**.

Un dernier conseil, nous vous recommandons de participer aux répétitoires le mardi et jeudi soir, que vous ayez des difficultés ou non. Mais ces répétitoires ne sauraient remplacer le travail personnel sur les exercices : **il est très important d'essayer de faire les exercices seul**.

Bonne lecture et bon semestre

Enseignant
Hugo Duminil-Copin
Bureau 615, 2-4 rue du Lièvre
Département de mathématique
Université de Genève
E-mail : hugo.duminil@unige.ch

Chapitre 1: Éléments de théorie des ensembles

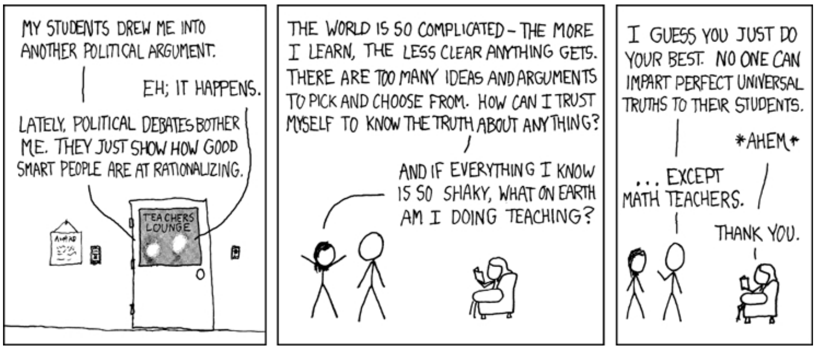
1.1 Éléments de Logique

Un énoncé au sens mathématique est un ensemble de symboles auquel est associé une *valeur logique* VRAIE ou FAUSSE. La construction de tels énoncés doit répondre à des règles précises, menant ainsi à une théorie cohérente dans laquelle la valeur logique de chaque énoncé est ou bien VRAIE, ou bien FAUSSE, mais jamais les deux à la fois. Une *assertion* est un énoncé répondant à ces règles de construction.

Le concept de vérité n'est pas universel, il dépend des individus. Afin de couper court à tout arbitraire, nous désirons développer une notion concrète et inattaquable de vérité mathématique. Pour cela, un petit nombre d'assertions, appelées *axiomes*, sont **supposées** VRAIES a priori. Il n'est pas nécessaire de les montrer. L'ensemble des assertions vraies est alors étendu au moyen de démonstrations, c'est à dire de règles de logique simples. Notons qu'a priori, nous avons une liberté totale quant au choix des axiomes. Les axiomes constituent une réponse au problème de la définition de vérité car ils fournissent une référence explicite que chaque individu peut utiliser afin de déterminer si un énoncé est vrai ou faux.

Plutôt que de dire "cet énoncé est vrai", il serait plus juste d'affirmer "cet énoncé est vrai si l'on **suppose** les axiomes vrais". Bien entendu, personne n'utilise ce formalisme, et l'on ne fait pas référence aux axiomes lorsque l'on pratique les mathématiques. Néanmoins, il est possible de se ramener à ces axiomes si besoin est, et la notion de vérité mathématique a des bases clairement établies.

Notons avant de commencer que vous rencontrerez des axiomes différents, dus à Euclide, dans le cours de géométrie. Ces axiomes sont beaucoup plus vieux (antiquité) que ceux que nous présenterons dans ce cours (début du vingtième siècle) mais ils ne couvrent que la géométrie dite Euclidienne et ne sont donc pas adaptés à notre contexte.



1.1.1 La notion d'ensemble

L'objet mathématique fondamental est appelé *ensemble*. Grossièrement, un ensemble est une collection d'éléments. Pour un élément x d'un ensemble E, notons $x \in E$. Les ensembles sont naturellement munis d'une opération, appelée inclusion, définie comme suit :

Définition 1.1. Soient E et F deux ensembles, E est *inclus* dans F si pour tout $x \in E$, $x \in F$. L'ensemble E est alors appelé une *partie* de F (noté $E \subset F$).

Les ensembles E et F sont dits égaux si $E \subset F$ et $F \subset E$. Si E, F, G sont trois ensembles, alors $E \subset F$ et $F \subset G$ implique que $E \subset G$. Remarquez que $\{1,2,3,2,1\}$ et $\{1,2,3\}$ sont deux ensembles égaux.

L'existence même d'un ensemble fait l'objet d'un axiome. Bien entendu, cet axiome semble évident, mais un axiome précis permet de couper court à toute approximation dans le développement future de la théorie.

Axiome 1 (axiome d'existence) Il existe un unique ensemble, l'ensemble vide, tel que quelque soit l'objet x, $x \notin \varnothing$.

Trois autres axiomes permettent de construire des ensembles à partir d'autres.

Axiome 2 (axiome de compréhension) Soient E un ensemble et des assertions $A(x)$ indexées par les éléments x de E, il existe un unique ensemble $F \subset E$ tel que les éléments de F soient exactement les éléments de E qui satisfont $A(x)$. Cet ensemble est noté

$$F = \{x \in E \text{ tel que } A(x)\} \overset{\text{not.}}{=} \{x \in E, A(x)\}.$$

Axiome 3 (axiome de puissance) Soit E un ensemble, il existe un unique ensemble dont les éléments sont exactement les parties de E (c'est donc un ensemble d'ensembles). Cet ensemble est noté

$$\mathscr{P}(E) \overset{\text{not.}}{=} \{F, F \subset E\}.$$

Axiome 4 (axiome de l'union) Soient E et F deux ensembles, il existe un unique ensemble $E \cup F$ formé des éléments de E et des éléments de F.

Noter que l'énoncé des axiomes est très précis, malgré le fait qu'ils semblent évidents. En effet, prenez l'exemple de l'axiome 2. Il est tentant de le remplacer par l'existence d'ensembles de la forme $F = \{x, A(x)\}$, où l'on ne restreint pas au fait que les x doivent appartenir à un ensemble déjà existant E. Avec un tel axiome, on aboutirait à des paradoxes du type "Je suis un menteur" (méditer sur l'existence de l'ensemble suivant $E = \{x, x \notin x\}$) qui mèneraient à une contradiction.

Les axiomes 2, 3 et 4 permettent de définir d'autres règles sur les ensembles.

Définition 1.2. Soient E et F deux ensembles, définissons

$$E \cap F \overset{\text{not.}}{=} \{x \in E, x \in F\}$$

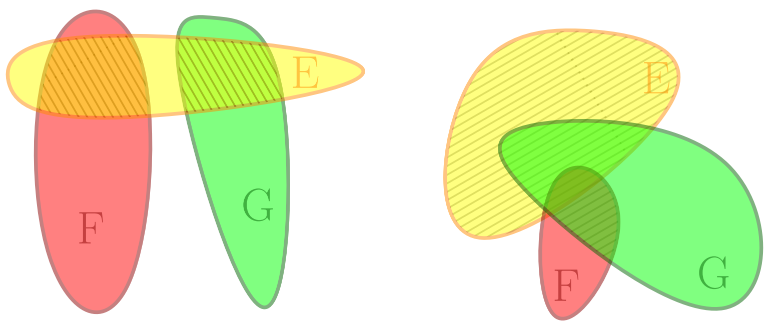
$$E \smallsetminus F \overset{\text{not.}}{=} \{x \in E, x \notin F\}$$

Lorsque $E \subset F$, l'ensemble $F \smallsetminus E$ est appelé *complémentaire* de E dans F. Lorsque F est évident dans le contexte, la référence à F n'est pas précisée et $F \smallsetminus E$ est noté E^c.

Proposition 1.3 (Distributivité)**.** *Soient E, F, G trois ensembles, alors*

1. $(E \cap F) \cup (E \cap G) = E \cap (F \cup G)$.
2. $(E \cup F) \cap (E \cup G) = E \cup (F \cap G)$.

Démonstration. Une preuve pas tout à fait rigoureuse mais visuelle consiste à regarder la figure suivante.



Pour les irréductibles, voici une preuve mathématique rigoureuse. Montrons la première égalité. Raisonnons par double inclusion, c'est-à-dire montrons

$$(E \cap F) \cup (E \cap G) \subset E \cap (F \cup G) \quad \text{et} \quad (E \cap F) \cup (E \cap G) \supset E \cap (F \cup G).$$

Soit $x \in (E \cap F) \cup (E \cap G)$, x appartient à $E \cap F$ ou $E \cap G$. Dans le premier cas, $x \in E$ et $x \in F \subset F \cup G$. Ainsi, $x \in E \cap (F \cup G)$. Dans le deuxième cas, $x \in E$ et $x \in G \subset F \cup G$. Ainsi, $x \in E \cap (F \cup G)$. Nous en déduisons que $(E \cap F) \cup (E \cap G) \subset E \cap (F \cup G)$.

Soit $x \in E \cap (F \cup G)$, alors $x \in E$ et $x \in F \cup G$. Si $x \in F$, alors $x \in E \cap F$ et donc $x \in (E \cap F) \cup (E \cap G)$. Si $x \in G$, alors $x \in E \cap G$ et donc $x \in (E \cap F) \cup (E \cap G)$. Nous en déduisons que $E \cap (F \cup G) \subset (E \cap F) \cup (E \cap G)$.

La même méthode peut être utilisée afin de montrer la deuxième égalité. □

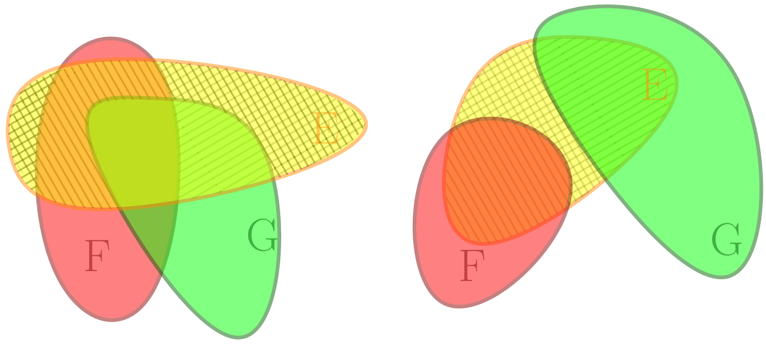
Raisonnement par double-inclusion Pour prouver que E et F sont égaux, on montre que $E \subset F$ et $F \subset E$. Ce raisonnement doit être annoncé comme tel au début de la démonstration.

Proposition 1.4 (loi de Morgan)**.** *Soient E, F, G trois ensembles, alors*

1. $(E \smallsetminus F) \cup (E \smallsetminus G) = E \smallsetminus (F \cap G)$.
2. $(E \smallsetminus F) \cap (E \smallsetminus G) = E \smallsetminus (F \cup G)$.

Augustus de Morgan (anglais 1806-1871)

Démonstration. Une preuve pas tout à fait rigoureuse mais visuelle consiste à regarder la figure suivante.



À nouveau, voici une preuve plus rigoureuse. Montrons la première égalité. Raisonnons par double inclusion, c'est-à-dire montrons

$$(E \setminus F) \cup (E \setminus G) \subset E \setminus (F \cap G) \quad \text{et} \quad (E \setminus F) \cup (E \setminus G) \supset E \setminus (F \cap G).$$

Soit $x \in (E \setminus F) \cup (E \setminus G)$, alors x appartient à $E \setminus F$ ou $E \setminus G$. Dans le premier cas, $x \in E$ et $x \notin F$. Ainsi, $x \notin F \cap G$ et donc $x \in E \setminus (F \cap G)$. Dans le deuxième cas, $x \in E$ et $x \notin G$. Ainsi, $x \in E \setminus (F \cap G)$. On en déduit que $(E \setminus F) \cup (E \setminus G) \subset E \setminus (F \cap G)$.

Soit $x \in E \setminus (F \cap G)$, alors $x \in E$ et $x \notin F \cap G$. Cela signifie que x n'est pas dans F ni dans G. Si $x \notin F$, alors $x \in E \setminus F$ et donc $x \in (E \setminus F) \cup (E \setminus G)$. Si $x \notin G$, alors $x \in E \setminus G$ et donc $x \in (E \setminus F) \cup (E \setminus G))$. On en déduit que $E \setminus (F \cap G) \subset (E \setminus F) \cup (E \setminus G)$.

La même méthode peut être utilisée afin de montrer la deuxième égalité. □

Donnons un exemple plus complexe de règle sur les ensembles. Soient E et F deux ensembles, définissons le *produit cartésien* de E et F

$$E \times F = \big\{(a,b), a \in E, b \in F\big\}.$$

Un élément de $E \times F$ est appelé un *couple*. La propriété caractéristique des couples est $(x,y) = (x',y')$ si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$. Définissons un n-uplet comme un élément de

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n = (\cdots(E_1 \times E_2) \times \cdots) \times E_n).$$

Les notions d'union et d'intersection peuvent être étendues aux ensembles indexés par un ensemble I comme suit.

Définition 1.5. Soient E un ensemble et $(E_i)_{i \in I}$ des parties de E indexées par un ensemble I. La *réunion des E_i* est définie comme étant l'ensemble

$$\bigcup_{i \in I} E_i = \{x \in E, \text{ il existe } i \in I, x \in E_i\} \subset E.$$

L'*intersection des E_i* est définie comme étant l'ensemble

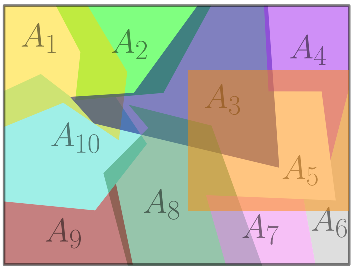
$$\bigcap_{i \in I} E_i = \{x \in E, \text{ pour tout } i \in I, x \in E_i\}.$$

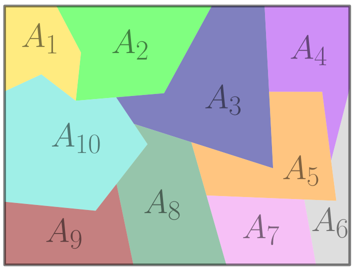
Finissons cette section sur les ensembles par un peu de vocabulaire.

Définition 1.6. Soient $(A_i)_{i \in I}$ des parties de E et $F \subset E$.

1. Les A_i forment un *recouvrement* de F si $F \subset \bigcup_{i \in I} A_i$.
2. Les A_i forment une *partition* de E si les A_i recouvrent E et si pour tout $i \neq j$ dans I, $A_i \cap A_j = \varnothing$.

La figure de gauche montre un recouvrement. Chaque élément est dans un ensemble, mais ces ensembles peuvent a priori se recouper. La figure de droite montre une partition.





1.1.2 Logique élémentaire et principes de démonstration

À partir d'assertions mathématiques quelconques, nous construisons de nouvelles assertions dont la valeur logique VRAIE ou FAUSSE dépend de la valeur logique des assertions originelles. Nous discutons également comment prouver des assertions (ces principes de démonstration reviendront à de nombreuses reprises dans le cours).

Nous disposons de deux types d'outils pour construire de nouvelles assertions : les opérations sur les assertions et les quantificateurs. Commençons par les premières.

Opérations sur les assertions

Négation. Si A est un assertion mathématiques, *non* A est définie comme étant vraie lorsque A est fausse et réciproquement, ce qui peut être résumé par le tableau suivant, appelé *table de vérité*,

A	non A
V	F
F	V

La négation de mon chat est noir est mon chat n'est pas noir. La négation de tous les chats sont noirs est il existe un chat qui n'est pas noir.

Ou. Si A et B sont deux assertions, l'assertion A *ou* B est définie par la table de vérité suivante

A	B	A ou B
V	F	V
V	V	V
F	F	F
F	V	V

Notez que le *ou* mathématique n'est pas exclusif : VRAIE ou VRAIE est VRAIE. De plus, la définition nous indique un principe de démonstration : pour prouver que A ou B est VRAIE, on suppose que A est FAUSSE et à l'aide de cela on montre que B est VRAIE. On peut bien entendu supposer que B est FAUSSE et montrer que A est VRAIE puisque cela revient au même.

Et. Si A et B sont deux assertions, associons l'assertion A *et* B définie par la table de vérité suivante

A	B	A et B
V	F	F
V	V	V
F	F	F
F	V	F

Proposition 1.7. *Soient A et B deux assertions, non(A ou B) est équivalente à non$A$ et non$B$. De même, non(A et B) est équivalente à non$A$ ou non$B$.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que les deux assertions ont la même table de vérité. Nous le faisons pour non(A ou B) et non$A$ et non$B$.

A	B	non A	non B	A ou B	non (A ou B)	(non A) et non B
V	F	F	V	V	F	F
V	V	F	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	F	V	F	F

□

Implication. Si A et B sont deux assertions, associons l'assertion A implique B (notée $A \Rightarrow B$) définie par la table de vérité suivante

A	B	A implique B
V	F	F
V	V	V
F	F	V
F	V	V

Contrairement à A *ou* B et A *et* B, la table de vérité de $A \Rightarrow B$ n'est pas totalement intuitive. En effet, si A est FAUSSE, alors l'implication est nécessairement VRAIE. En particulier, FAUX implique FAUX est considéré comme VRAIE en mathématique. Ce choix est en fait raisonnable. Imaginons par exemple l'assertion suivante, "J'ai eu une discussion avec un chien implique mon chien parle". Bien entendu, cette implication est juste, mais ni A ni B ne le sont.

La table de vérité de l'implication nous indique comment procéder pour montrer que $A \Rightarrow B$ est VRAIE : on suppose que A est VRAIE et on montre que B est VRAIE. En effet, si A est FAUSSE l'implication est de toute façon VRAIE et il n'y a rien à prouver.

Nous utiliserons souvent le vocabulaire suivant, si $A \Rightarrow B$ est VRAIE, nous dirons : *si A alors B*. L'assertion A est alors appelée une *condition suffisante* pour B, et B une *condition nécessaire* pour A.

Proposition 1.8. *Les assertions $A \Rightarrow B$, (non B) $\Rightarrow$ (non A), (non A) ou B sont équivalentes, dans le sens que quelque soit la valeur logique de A et B, ces assertions sont vraies ou fausses simultanément.*

Puisque $A \Rightarrow B$ est équivalente à *non*A et B, nous obtenons que la négation de $A \Rightarrow B$ est A ou *non*B.

Démonstration. Il suffit de vérifier que ces trois assertions ont la même table de vérité.

A	B	A implique B	non B	non A	(non B) $\Rightarrow$ (non A)	(non A) ou B
V	F	F	V	F	F	F
V	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V

$\square$

L'assertion (non B) $\Rightarrow$ (non A) est appelée la *contraposée* de $A \Rightarrow B$. Les assertions $A \Rightarrow B$ et non $B \Rightarrow$ non A étant logiquement équivalentes, on peut prouver $A \Rightarrow B$ en supposant que B est FAUSSE et en montrant que A est FAUSSE. Ce raisonnement est appelé *raisonnement par contraposée* et doit être annoncé comme tel au début de la démonstration.

Attention ! Le raisonnement par contraposée ne doit pas être confondu avec le raisonnement **par l'absurde**. Celui-ci repose sur un principe différent. Pour prouver que C est VRAIE, on suppose que non C est VRAIE et on montre que cela mène à une contradiction. Dans le cas où $C = (A \Rightarrow B)$, nous obtenons que nous supposons A et *non*B et que nous montrons que cela mène à une contradiction. Le raisonnement par l'absurde doit être annoncé comme tel au début de la démonstration.

Équivalence. Soient A et B deux assertions, l'assertion $A \iff B$ signifie ($A \Rightarrow B$ *et* $B \Rightarrow A$).

Proposition 1.9. *La table de vérité de* $A \iff B$ *est*

A	B	$A \iff B$
V	F	F
V	V	V
F	F	V
F	V	F

Démonstration. Il suffit de calculer la table de vérité pas à pas.

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$[(A \Rightarrow B)$ et $(B \Rightarrow A)] \overset{\text{not.}}{=} [A \iff B]$
V	F	F	V	F
V	V	V	V	V
F	F	V	V	V
F	V	V	F	F

$\square$

Deux assertions sont donc équivalentes si elles sont toutes deux vraies ou toutes deux fausses. Si l'assertion $A \iff B$ est VRAIE, nous dirons : A *si et seulement si* B, ou A *ssi* B en raccourci. L'assertion A est une condition *nécessaire et suffisante* pour B (et réciproquement B est une condition nécessaire et suffisante pour A).

Pour prouver une équivalence, nous disposons de deux possibilités. La première consiste à raisonner par équivalences successives, en général plus simples à montrer. Cependant, ce type de preuve n'est pas toujours à privilégier, on peut utiliser le fait que $A \iff B$ est équivalente à $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$. Montrer $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$ séparément s'appelle *raisonner par double implication.* Ce raisonnement doit être annoncé comme tel au début de la démonstration.

Quantificateurs Un autre outil important est la notion de quantificateurs. Soient E un ensemble et $A(x)$ des assertions indexées par $x \in E$.

- L'assertion $\forall x \in E, A(x)$ est VRAIE si et seulement si pour tout $x \in E$, $A(x)$ est VRAIE. Le symbole $\forall$ est appelé *quantificateur universel.*
- L'assertion $\exists x \in E, A(x)$ est VRAIE si et seulement si il existe $x \in E$ tel que $A(x)$ est VRAIE. Le symbole $\exists$ est appelé *quantificateur existentiel.*

Proposition 1.10. *La négation de* $[\forall x \in E, A(x)]$ *est* $[\exists x \in E,\ non\ A(x)]$ *et la négation de* $[\exists x \in E, A(x)]$ *est* $[\forall x \in E,\ non\ A(x)]$.

Cette proposition peut être utilisée pour nier des assertions plus compliquées. Par exemple, $\forall x \in E, \exists y \in F, \forall z \in G, A(x,y,z)$ est un raccourci (sans les parenthèses inutiles) pour l'assertion $\forall x \in E, (\exists y \in F, (\forall z \in G, A(x,y,z)))$. Ainsi, la proposition utilisée trois fois de suite montre que la négation de cette assertion est $\exists x \in E, (\forall y \in F, (\exists z \in G, \text{non}\, A(x,y,z)))$. Il est crucial d'être méthodique lorsque l'on nie une assertion, car il est très facile d'écrire un contre-sens.

Pour montrer $\forall x \in E, A(x)$, nous devons montrer $A(x)$ pour $x \in E$ quelconque. On se donne donc un $x \in E$ arbitraire, et on montre $A(x)$. On écrira donc systématiquement "**Soit** $x \in E$" au début de la démonstration, de telle sorte qu'il nous suffit alors de montrer $A(x)$.

Pour montrer $\exists x \in E, A(x)$, nous devons trouver $x \in E$ tel que $A(x)$. Ces preuves reviendront souvent (mais pas toujours) à **construire** l'object x ayant la propriété $A(x)$.

Mentionons un dernier type de démonstration, appelé **preuve par contre-exemple**. Afin de montrer que $\forall x \in E, A(x)$ est FAUSSE, if faut montrer que $\exists x \in E, \text{non}\ A(x)$. On dit alors que $x \in E$ tel que non $A(x)$ est VRAIE est un *contre-exemple*. Ce raisonnement doit être annoncé comme tel au début de la preuve.

Exemple : Considérons l'assertion $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ [x < y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{R}, x < z < y]$.

Nions cette assertion. Tout d'abord, elle est de la forme $\forall x \in \mathbb{R},\ A(x)$ où $A(x)$ est l'assertion $\forall y \in \mathbb{R},\ [x < y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{R}, x < z < y]$. Ainsi, la négation sera de la forme $\exists x \in \mathbb{R}, \text{non}\ A(x)$. Il nous faut donc nier $A(x)$. Cette assertion est de la forme $\forall y \in \mathbb{R}$, $B(y)$ où $B(y)$ est l'assertion $[x < y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{R}, x < z < y]$. La négation sera donc de la forme $\exists y \in \mathbb{R}$, non $B(y)$. Maintenant, $B(y)$ est une implication dont la négation est $x < y$ et non$(\exists z \in \mathbb{R}, x < z < y)$, c'est à dire $x < y$ et $\forall z \in \mathbb{R}, (x \geq z$ ou $y \leq z)$. Nous avons utilisé le fait que $x < z < y$ est équivalente à $x < z$ et $z < y$ et que non$(A \Rightarrow B)$ vaut (A et non$B$). En conclusion, nous obtenons que la négation est

$$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, [x < y \text{ et } \forall z \in \mathbb{R}, x \geq z \text{ ou } y \leq z].$$

Maintenant, nous désirons prouver l'assertion. Elle commence par $\forall x \in \mathbb{R}$, nous nous donnons donc $x \in \mathbb{R}$. Elle poursuit par $\forall y \in \mathbb{R}$, nous nous donnons donc $y \in \mathbb{R}$. Ensuite, pour montrer l'implication, nous supposons A, ie $x < y$ et nous montrons B, ie $\exists z \in \mathbb{R}, x < z < y$. il nous faut donc trouver un z tel que $x < z < y$. Il nous suffit de prendre $z = \frac{x+y}{2}$. En conclusion, une preuve de l'assertion serait :

"Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $y \in \mathbb{R}$. Supposons que $x < y$. Posons $z = \frac{x+y}{2}$. On a bien $x < z < y$."

À partir de maintenant, l'usage des symboles $\exists$ et $\forall$ est restreint aux assertions. Ces symboles sont des quantificateurs, ils n'ont leur place qu'à l'intérieur d'une assertion. Dans une phrase en français, nous préférerons l'usage de *pour tout* et *il existe*. De même, nous n'utiliserons pas $\Rightarrow$ mais les termes *alors* ou *donc*.

Exercice 1. Soient A, B et C trois ensembles.

1. Montrer que : $(A = B) \iff (A \cap B = A \cup B)$.
2. Montrer que : $(A = B) \iff (\mathscr{P}(A) = \mathscr{P}(B))$.
3. Montrer que : $(A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C) \Rightarrow (B = C)$.

Exercice 2 (Différence symétrique)**.** L'opération Δ est définie sur les ensembles $A, B \subset E$ par $A\Delta B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$.

1. Montrer que $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
2. Vérifier que $(A\Delta B = \varnothing) \iff (A = B)$.

Exercice 3. En remarquant que $\{\varnothing\}$ est un ensemble à un élément, essayer de construire à l'aide des axiomes des ensembles à 2,3 éléments. Pensez vous pouvoir construire des ensembles de taille finie quelconque ?

Exercice 4. Un ensemble d'assertions constitue une théorie. Une théorie est dite *contradictoire* si à partir des axiomes et des règles de logique, il est possible de montrer qu'une assertion A est à la fois VRAIE et FAUSSE. Montrer que dans une théorie contradictoire, toute assertion est VRAIE et FAUSSE.

Remarquons qu'il est possible d'avoir des théories non contradictoires pour lesquelles il est impossible de **montrer** si certaines assertions sont VRAIES ou si elles sont FAUSSES. Notez qu'elles sont bien entendu soit vraies soit fausses, mais leur valeur logique ne peut pas être déterminée (prouvée) en utilisant les axiomes et une preuve. Ces assertions sont dites *indécidables* et la théorie est alors *incomplète*. Une théorie mathématique devrait naturellement être ni contradictoire, ni incomplète. L'objectif de construire une telle théorie (de trouver les bons axiomes en quelque sorte) fut au coeur des mathématiques du début du vingtième siècle. En 1930, Gödel montra un théorème d'une portée exceptionnelle : toute théorie non contradictoire contenant la notion d'entiers naturels est incomplète. Il est donc vain de tenter de créer un système d'axiomes "parfait". Ce théorème s'appelle pompeusement le *théorème d'incomplétude.*

Exercice 5. Supposons que l'axiome 2 soit moins précis. En considérant l'ensemble $E = \{x, x \notin x\}$, montrer que si $E \in E$, alors $E \notin E$ et que si $E \notin E$, alors $E \in E$.

Ainsi, on obtient que $E \in E$ et non$(E \in E)$ sont VRAIES et FAUSSES, et la théorie devient contradictoire. On comprend donc mieux l'utilité de préciser que x doit appartenir à un ensemble F dans la formule $E = \{x \in F : A(x)\}$. Le problème créé par un axiome 2 moins précis est appelé paradoxe du menteur (un menteur disant "je suis un menteur").

Exercice 6. Montrer que l'implication est transitive : $[(A \Rightarrow B)$ et $(B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$.

Exercice 7. Écrire la négation des assertions suivantes :

1. $\forall x, y \in E,\ xy = yx$.
2. $\exists x \in E,\ \forall y \in E, xy = yx$.
3. $\forall a, b \in A,\ [ab = 0 \Rightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0)]$.
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ [x < y \Rightarrow f(x) < f(y)]$ (où f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).
5. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ [n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon]$ (où (u_n) est une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$).
6. $\exists \ell \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ [n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon]$ (où (u_n) est une suite réelle).
7. $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0,\ \forall y \in \mathbb{R},\ [|x - y| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq f(y)]$ (où f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).
8. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall y \in \mathbb{R},\ [|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon]$ (où f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).
9. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \geq N,\ [n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$ (où f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).
10. $\forall E \subset \mathbb{N},\ [E \neq \varnothing \Rightarrow (\exists n \in E, \forall m \in E, m \geq n)]$
11. $\forall E \subset \mathbb{R},\ [E \neq \varnothing \Rightarrow \exists a \in \mathbb{R}, ((\forall b \in E : b \leq a) \text{ et } (\forall \varepsilon > 0, \exists b \in E : b \geq a - \varepsilon))]$

Exercice 8. Soient E et F deux ensembles et $A(x, y)$ des assertions indexées par $(x, y) \in E \times F$.

1. Montrer que $\big[\forall x \in E, \forall y \in F, A(x, y)\big] \Leftrightarrow \big[\forall y \in F, \forall x \in E, A(x, y)\big]$.
2. Montrer que $\big[\exists x \in E, \exists y \in F, A(x, y)\big] \Leftrightarrow \big[\exists y \in F, \exists x \in E, A(x, y)\big]$.
3. Montrer en donnant un exemple que $\exists x \in E, \forall y \in F, A(x, y)$ n'est pas nécessairement équivalent à $\forall y \in F, \exists x \in E, A(x, y)$.

On dira que l'on peut échanger les quantificateurs $\forall$ adjacents (ou les $\exists$ adjacents), mais que l'on ne peut pas échanger les quantificateurs $\forall$ et $\exists$.

Exercice 9. Quelle est la contraposée des implications suivantes ? Même question avec la négation.

1. Si $x > 0$, alors $f(x) \leq 0$.
2. Si $ab = 0$, alors $(a = 0 \text{ ou } b = 0)$.
3. p divise ab implique (p divise a ou p divise b)

4. $E \neq \varnothing$ implique qu'il existe a tel que $a = \min(E)$.

Exercice 10. Expliquer en français ce que signifient les assertions suivantes et écrire leur négation.

1. $\forall n \geq 0$, $u_n < u_{n+1}$ (où (u_n) est une suite réelle).
2. $\exists A \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq A$ (où f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).
3. $\forall (x,y) \in \mathbb{Q}^2$, $[x < y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{Q} : x < z < y]$.

Exercice 11 (Lois de Morgan généralisées)**.** Soient $I \neq \varnothing$ un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E et $A \subset E$. Montrer que

$$A \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}(A \cap A_i), \quad A \cup (\textstyle\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I}(A \cup A_i)$$
$$A \setminus \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} A \setminus A_i, \qquad A \setminus \textstyle\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} A \setminus A_i.$$

(*Indication :* puisqu'il est difficile de dessiner un nombre infini de patates, on pourra d'abord tenter de prouver les lois de Morgan classiques à l'aide de quantificateurs et de raisonnements sur les ensembles)

Exercice 12 (Formules d'associativité)**.** Soit E un ensemble, $(A_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathscr{P}(E)$ et $(J_k)_{k\in K}$ une famille incluse dans I et recouvrant I. Montrer que

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{k\in K}\bigcup_{i\in J_k} A_i \quad \text{et} \quad \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{k\in K}\bigcap_{i\in J_k} A_i.$$

1.2 Relations d'ordre

Maintenant que nous disposons d'une notion d'assertion, et d'une notion d'ensemble et d'éléments de ces ensembles, il est naturel de comparer ces éléments entre eux. Nous introduisons donc la notion de relation d'ordre.

Une relation sur E, notée $\mathscr{R}$, est un objet prenant deux éléments x, y de E et renvoyant VRAI ou FAUX. On note en général $x\mathscr{R}y$. Grossièrement, une relation d'ordre affirme si "x est plus petit que y", où petit peut être a priori interprété dans un sens très large. Les trois propriétés ci-dessous suivent l'intuition naturelle.

Définition 1.11. Soit E un ensemble, $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre si
- $\mathscr{R}$ est *réflexive* : $\forall x \in E$, $x\mathscr{R}x$.
- $\mathscr{R}$ est *transitive* : $\forall x,y,z \in E$, $[(x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}z) \Rightarrow x\mathscr{R}z]$.
- $\mathscr{R}$ est *antisymétrique* : $\forall x,y \in E$, $[(x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}x) \Rightarrow x = y]$.

Nous noterons souvent $\leqslant$ à la place de $\mathscr{R}$ et $x\mathscr{R}y$ signifie que "x est inférieur à y". Notons également $x \geq y$ si $y\mathscr{R}x$ et $x < y$ si $y\mathscr{R}x$ et $x \neq y$.

Afin de montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre, il faut montrer que $\mathscr{R}$ est réflexive, transitive et antisymétrique. Ainsi, la preuve que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre devra toujours être écrite de la façon suivante :

1. **Montrons que $\mathscr{R}$ est réflexive : soit $x \in E$**

   "Prouver que $x\mathscr{R}x$"

2. **Montrons que $\mathscr{R}$ est transitive : soient $x, y, z \in E$ tels que $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z$**

   "Prouver que $x\mathscr{R}z$"

3. **Montrons que $\mathscr{R}$ est antisymétrique : soient $x, y \in E$ tels que $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}x$**

   "Prouver que $x = y$"

Exemple : L'ordre au sens usuel sur $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre (puisque nous ne l'avons pas encore défini, nous ne le prouvons pas).

Exemple : La relation sur les parties d'un ensemble $\mathscr{E}$ donnée par $F\mathscr{R}G$ ssi $F \subset G$ est une relation d'ordre.

Démonstration. Rappelons que $F \subset G$ si $\forall x \in F, x \in G$.

1. Montrons que $\subset$ est réflexive : soit $F \in \mathscr{E}$. Puisque $\forall x \in F, x \in F$, nous avons bien $F \subset F$.
2. Montrons que $\subset$ est transitive : soient $F, G, H \in \mathscr{E}$ tels que $F \subset G$ et $G \subset H$. Si F est une partie de G et G est une partie de H, alors F est bien une partie de H. En effet, si $x \in F$, alors $x \in G$ et donc $x \in H$. D'où $F \subset H$.
3. Montrons que $\subset$ est antisymmétrique : soient $F, G \in \mathscr{E}$ tels que $F \subset G$ et $G \subset F$. Alors $\forall x \in F, x \in G$ et $\forall x \in G, x \in F$. Ainsi, $x \in G$ ssi $x \in H$ et donc F et G ont les mêmes éléments. D'où $F = G$.

□

Exemple : La relation $x\mathscr{R}y$ ssi $x = y$ est une relation d'ordre.

Un ensemble muni d'une relation d'ordre est dit *ordonné* et est notée $(E, \leqslant)$.

Définition 1.12. Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné, $F \subset E$ et $m, M \in E$.

- M est *un majorant* de F si $\forall x \in F, x \leqslant M$.
- M est *le supremum* (ou *la borne supérieure*) de F si M est un majorant de F et pour tout M' majorant de F, $M \leq M'$. Il est noté $\sup F$.
- M est *le maximum* de F si M est le supremum de F et $M \in F$. Il est noté $\max F$.

- m est un minorant de F si $\forall x \in F, m \leqslant x$.
- m est *l'infimum* (ou *la borne inférieure*) de F si m est un minorant de F et pour tout m' minorant de F, $m' \leq m$. Il est noté $\inf F$.
- m est *le minimum* de F si m est l'infimum de F et $m \in F$. Il est noté $\min F$.

Attention, ces éléments n'existent pas toujours. Si F admet un majorant, on dit qu'il est *majoré*. S'il admet un minorant, il est dit *minoré*. S'il est minoré et majoré, on le dit *borné*.

Par contre, le supremum est unique s'il existe, idem pour le maximum, minimum, infimum. De plus, le maximum et le supremum sont confondus s'ils existent tous les deux. On peut également montrer que le supremum est le minimum de l'ensemble des majorants.

Proposition 1.13 (Critère pratique pour l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$)**.** *Soit $F \subset \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) M est la borne supérieure de F dans $\mathbb{R}$.

(ii) $\forall x \in F, x \leq M$ et $\forall y \in \mathbb{R}, [y < M \Rightarrow (\exists x \in F, y < x)]$.

Démonstration. Si l'on écrit (i) comme une assertion, nous obtenons que (i) est en fait $[\forall x \in F, x \leq M]$ et $\left[\forall y \in \mathbb{R}, (\forall x \in F, x \leq y) \Rightarrow y \geq M\right]$. Puisque $[(\forall x \in F, x \leq y) \Rightarrow y \geq M]$ est la contraposée de $[y < M \Rightarrow (\exists x \in F, y < x)]$, ces deux assertions sont équivalentes et donc (i) et (ii) sont équivalentes. □

Cette preuve fonctionne en fait pour tout ordre dit total, ie que $x \leq y$ ou $y \leq x$ (l'inclusion n'est pas un ordre total can on ne peut pas forcément comparer deux ensembles pour l'inclusion). Dans ce cas, la négation de $x \leq y$ est bien $y < x$. Pour un ordre qui n'est pas nécessairement total, on peut transformer les assertions en remplacant $<$ par "pas $\geq$".

Exercice 13. Montrer que la relation sur les entiers définie par $p\mathscr{R}q$ ssi il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $q = mp$ est une relation d'ordre. Connaissez-vous le nom de cette relation ?

Exercice 14. Soient $F \subset G \subset E$ avec E ordonné. Montrer que $\sup F \leqslant \sup G$ et $\inf G \leqslant \inf F$.

> Soit $F \subset E$ et $a \in E$. Afin de montrer que $\sup F \leq a$, il suffit de montrer que a est un majorant de F, ie $\forall x \in F, x \leq a$, puisque $\sup F$ est par définition le plus petit des majorants.

Exercice 15 (Relation d'ordre totale ou partielle, élément maximal)**.** Une relation d'ordre $\leqslant$ est dite *totale* si $\forall x, y \in E$, $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$, sinon la relation d'ordre est dite *partielle*. Soit F une partie de E.

1. Montrer que les relation suivantes sont des relations d'ordre. Lesquelles sont partielles ?
   (a) L'inclusion sur E.
   (b) La divisibilité sur $\mathbb{N}$.
   (c) L'ordre usuel sur $\mathbb{R}$.
   (d) L'ordre lexicographique sur $\mathbb{R}^2$ défini par $(x,y)\mathscr{R}(a,b)$ ssi $x < a$ ou $x = a$ et $y \leq b$.
2. Un élément m est un *élément minimal* de F si $\forall x \in F, [m \geqslant x \Rightarrow x = m]$. Montrer qu'un minorant de F est un élément minimal.
3. Quelles sont les éléments minimaux de $\mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$ pour la divisibilité sur $\mathbb{N}$? Même question avec $\mathbb{N} \smallsetminus \{0,1\}$. Montrer qu'un élément minimal n'est pas forcément un minorant.
4. Montrer que si l'ordre est total, alors il existe au plus un élément minimal pour F.

Johann Dirichlet (allemand 1805-1859) Il fut l'un des pionners de l'utilisation d'outils d'analyse complexe en théorie des nombres. Cela le mena à la preuve du théorème de la progression arithmétique.
On lui doit aussi le principe des tiroirs.

Exercice 16. Déterminer quelles sont les fonctions injectives, surjectives et bijections parmi la liste suivante. Justifier vos affirmations.

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$
2. $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} \smallsetminus \{0,1\} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \text{le plus petit nombre premier divisant } n \end{array}$
3. **(cette question n'est pas à rendre)** Soit E un ensemble,
$$\chi : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \{0,1\}^E \\ A & \longmapsto & \chi_A \end{array}$$
où χ_A est la fonction caractéristique de l'ensemble A (on pourra utiliser l'exercice 8 de la série précédente).

Déterminer quelles sont les fonctions croissantes et décroissantes parmi la liste suivante. Justifier vos affirmations.

1. $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$, même question avec $i : \begin{array}{ccc} \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$
2. $j : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \pi(n) \end{array}$ où $\pi(n)$ est le nombre de nombre premiers inférieurs ou égaux à n.
3. Soit $B \subset E$. De l'ensemble ordonné $(\mathscr{P}(E), \subset)$ dans lui-même, $k : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ A & \longmapsto & A \cup B \end{array}$
4. De $\mathbb{R}^2$ muni de l'ordre lexicographique (rappelons que, dans ce cas, $(x,y)\mathscr{R}(x',y')$ ssi $x < x'$ ou $[x = x'$ et $y \leq y']$) dans $(\mathbb{R}, \leq)$, la fonction $\ell : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy \end{array}$

Exercice 17. Trouver le supremum et infimum de $\{\frac{1}{n} + (-1)^n, n \in \mathbb{N}^*\}$. Est-ce que ce sont des maximums et des minimums ?

Exercice 18. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux fonctions.

1. Supposons que $g \circ f$ est injective, est-ce que f est injective ? Même question avec g ?
2. Supposons que $g \circ f$ est surjective, est-ce que f est surjective ? Même question avec g ?
3. Est-ce que $g \circ f$ bijective implique f et g bijectives ?

Si la réponse est oui, le prouver, sinon, exhiber un contre-exemple.

Exercice 19. On dispose les élèves de la classe en un rectangle de n lignes et p colonnes. On repère le plus grand élève de chaque ligne et on retient le plus petit de ces plus grands ; soit x sa taille. Puis, on repère le plus petit élève de chaque colonne et on retient le plus grand de ces plus petits ; soit y sa taille. Comparer x et y.

1.3 Applications

Nous en venons maintenant à un objet que vous avez déjà manipulé à maintes reprises lors de votre cursus scolaire, la notion de fonction (ou application). Contrairement à ce que l'on pourrait croire, une fonction n'est pas forcément la donnée d'une formule écrite avec les opérations usuelles $+, \times, -, /, \sqrt{\cdot}$, etc. La notion peut en fait être définie de façon abstraite, et couvrir ainsi un grand nombre de possibilités. La première apparition de cette définition est probablement due à Dirichlet (1837).

1.3.1 Définition

Définition 1.14. Soient E et F deux ensembles et $A \subset E \times F$. L'ensemble A est un *graphe fonctionnel* si

$$\forall x \in E, \exists! y \in F, (x,y) \in A$$

(ici, $\exists!$ signifie qu'il existe un unique élément). Une *application* (ou *fonction*) est la donnée de deux ensembles E, F et d'un graphe fonctionnel c'est à dire une partie du produit cartésien $E \times F$.

Une application f, qui est la donnée de (E, F, A), est habituellement notée

$$f : \begin{array}{ccl} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) = y \quad \text{où } y \text{ est l'unique élément tel que } (x,y) \in A. \end{array}$$

Leopold Kronecker (allemand 1823-1891)
Célèbre pour son opposition avec son étudiant Cantor, dont il estime la démarche de ce dernier sur l'infini non rigoureuse. Hilbert commenta : "personne ne nous chassera du paradis que Cantor nous a créé."

Grossièrement, une application entre E et F est un objet qui associe à chaque élément de E un unique élément de F.

Exemple : (fonctions usuelles) Les fonctions usuelles de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que x, $|x|$, x^2, $\cos x$, $\sin x$, $\exp x$ peuvent toutes être écrites comme précédemment.

Exemple : La fonction tan de $\mathbb{R} \setminus \{\ldots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots\}$ dans $\mathbb{R}$.

Venons-en à des exemples plus compliqués (voir exercices et ci-dessous), qui ne peuvent pas s'écrire en fonction de formules simples invoquant $+, \times, -, /, \sqrt{\cdot}$, etc.

Exemple : (fonction Dirac) Pour E un ensemble quelconque et $a \in E$, définissons

$$\delta_a : \begin{array}{ccl} E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & 1 \quad \text{si } a = x \text{ et } 0 \text{ sinon.} \end{array}$$

Paul Dirac (anglais 1902-1984)
Mathématicien et physicien.

Cette application est appelée la *fonction de Kronecker*, ou la *fonction Dirac* au point a.

Exemple : $\pi : \begin{array}{ccl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \pi(n) = \text{ nombre d'entiers premiers inférieurs ou égaux à } n \end{array}$

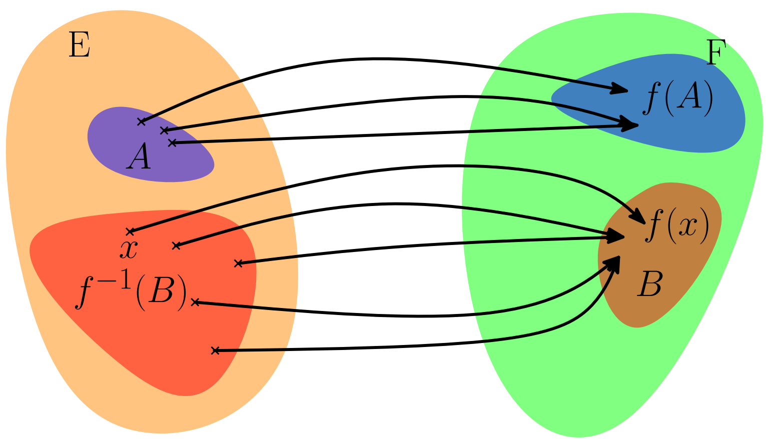
Exemple : Soit E un ensemble. L'*identité* de E est l'application $\mathbb{I}_E : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$.

Exemple : Une application de $u : \mathbb{N} \to E$ est appelée une *suite*. La notation $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera préférée à la notation $u : n \in \mathbb{N} \longmapsto u(n)$.

Exemple : Soit I un ensemble, une *famille indicée* sur I est une application x dont l'ensemble de départ est I. Au lieu de la noter $x : i \in I \longmapsto x(i)$ on préfèrera, comme pour les suites, la notation $x = (x_i)_{i\in I}$. L'ensemble I est l'*ensemble des indices* de la famille x.

Introduisons maintenant un petit peu de vocabulaire :

1. L'élément x est appelé *antécédent* de y par f, et y est l'*image* de x par f.
2. L'ensemble E est appelé le *domaine de définition* de f. L'ensemble F est le *domaine d'arrivée* de f.
3. Pour $A \subset E$ et $B \subset F$. L'*image directe* de A par f est $f(A) = \{f(x) \in F, x \in A\}$. L'ensemble $f(E)$ est appelée *image directe* de f. L'*image réciproque* de B par f est $f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$. Par exemple, $f^{-1}(\{a\})$ est l'ensemble des antécédents de a et est un sous-ensemble de E. Il est défini pour toute fonction, contrairement à $f^{-1}(a)$, qui est un élément de E et est défini si et seulement si f est bijective.
4. Soient E et F deux ensembles, F^E désigne l'ensemble des applications de E dans F.



Définition 1.15 (Restriction et prolongement)**.** Soient E et F deux ensembles et $A \subset E$. Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction. Alors

$$g : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

est une fonction, appelée *restriction* de f à A et notée $g = f|_A$. Dans ce cas, f est un *prolongement* de g.

Pour montrer que deux fonctions sont égales, on montre qu'elles ont mêmes ensembles de départ et d'arrivée et même graphe fonctionel. Il est crucial de se rappeler qu'une application est la donnée de $f(x)$ pour tout x, **mais également d'un ensemble de départ et d'un ensemble d'arrivée**. Par exemples, les applications

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \quad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

sont toutes différentes. En particulier, elles n'ont pas les mêmes propriétés (injectivité, croissance, etc). Ainsi, il faut *toujours* préciser les domaines de définition et d'arrivée de l'application.

1.3.2 Compositions des applications.

Une opération, appelée *composition*, peut être définie naturellement sur les applications.

Définition 1.16. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. La *composée* de g par f est l'application $g \circ f$ définie par

$$g \circ f \ : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array} .$$

Proposition 1.17. *Soient trois fonctions $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ et $h : G \longrightarrow H$.*

1. *La loi $\circ$ est associative ie $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$,*
2. *$\mathbb{I}_F \circ f = f \circ \mathbb{I}_E = f$.*

Démonstration. Montrons 1. Tout d'abord, $h \circ (g \circ f)$ et $(h \circ g) \circ f$ partent de E et arrivent dans H. Soit $x \in E$,

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h(g \circ f(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x).$$

Montrons 2. Tout d'abord, $\mathbb{I}_F \circ f$, f et $f \circ \mathbb{I}_E$ partent de E et arrivent dans F. De plus, pour tout $x \in E$,

$$(\mathbb{I}_F \circ f)(x) = \mathbb{I}_F(f(x)) = f(x) = f(\mathbb{I}_E(x)) = (f \circ \mathbb{I}_E)(x).$$

$\square$

La propriété d'associativité montre que les parenthèses sont inutiles. On écrira donc $h \circ g \circ f$ pour $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ (de même pour plus de trois fonctions).

1.3.3 Injection-Surjection-Bijection

Définition 1.18. Soit $f : E \longrightarrow F$.

1. La fonction f est *injective* si $\forall x, x' \in E, [f(x) = f(x') \Rightarrow x = x']$
2. La fonction f est *surjective* si $\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$
3. La fonction f est *bijective* si f est injective et surjective.

L'injectivité est la propriété que chaque élément de F a au plus un antécédent. La surjectivité est la propriété que chaque élément de F a au moins un antécédent. La bijectivité est la propriété que chaque élément de F a exactement un antécédent.

L'injectivité est souvent définie par la contraposée de la définition fournie ici, c'est-à-dire $\forall x, x' \in E, [x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')]$. Nous utiliserons souvent cette définition pour dériver des conséquences de l'injectivité d'une fonction. Par contre, pour prouver qu'une fonction est injective, il est souvent astucieux d'utiliser la définition donnée plus haut. Il est en général plus facile de prouver une égalité qu'une inégalité.

Proposition 1.19. *Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$.*

1. *si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.*
2. *si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.*
3. *si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.*

Démonstration. Montrons 1. Soient $x, x' \in E$ tels que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$, montrons que $x = x'$. Puisque $g(f(x)) = g(f(x'))$ et g est injective, nous déduisons $f(x) = f(x')$. Puisque f est injective, $x = x'$. Ainsi, $g \circ f$ est injective.

Montrons 2. Soit $z \in G$, montrons qu'il existe $x \in E$ tel que $z = (g \circ f)(x)$. Puisque g est surjective, il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$. Puisque $y \in F$ et f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Ainsi, $z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$.

La propriété 3 est la combinaison de 1 et 2. □

Lorsque $f : E \longrightarrow F$ est bijective, l'*application réciproque* (ou *inverse*) de f est l'application

$$f^{-1} : \begin{array}{ccl} F & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & x \text{ tel que } f(x) = y \end{array}.$$

Proposition 1.20. 1. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application bijective, alors*

   (a) *${f^{-1}}^{-1} = f$,*

   (b) *$f^{-1} \circ f = \mathbb{I}_E$,*

   (c) *$f \circ f^{-1} = \mathbb{I}_F$.*

2. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application bijective, f^{-1} est bijective.*
3. *(unicité de l'inverse) Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$ telles que $f \circ g = \mathbb{I}_F$ et $g \circ f = \mathbb{I}_E$, alors $g = f^{-1}$.*
4. *(composition des inverses) Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ bijectives, alors $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

Démonstration. Montrons 1(a). ${f^{-1}}^{-1}$ part bien de E et arrive dans F. Soit $x \in E$, nous avons que ${f^{-1}}^{-1}(x)$ est l'unique $y \in F$ tel que $f^{-1}(y) = x$, c'est-à-dire (par la définition de l'inverse) l'unique $y \in F$ tel que $y = f(x)$. Mais $f(x)$ vérifie cette propriété ce qui permet de conclure que ${f^{-1}}^{-1}(x) = f(x)$.

Montrons 1(b). $f^{-1} \circ f$ part de E et arrive dans E. Soit $x \in E$, $f^{-1}(f(x))$ est l'unique $z \in E$ tel que $f(z) = f(x)$. Par injectivité, $z = x$ et donc $f^{-1}(f(x)) = x$.

Montrons 1(c). Cette propriété est la propriété (b) appliquée à $f^{-1} : F \to E$.

Montrons 2. Commençons par l'injectivité. Soient $x, y \in F$ tels que $f^{-1}(x) = f^{-1}(y)$. On a alors $f(f^{-1}(x)) = f(f^{-1}(y))$. Or $f \circ f^{-1} = \mathbb{I}_F$, donc cette égalité équivaut à $x = y$. Prouvons maintenant la surjectivité. Soit $y \in E$, cherchons $x \in F$ tel que $f^{-1}(x) = y$. Mais $f^{-1}(f(y)) = y$ d'après (b), donc $f(y)$ est un antécédent de y.

Montrons 3. Sous les hypothèses que $f \circ g = \mathbb{I}_F$ et $g \circ f = \mathbb{I}_E$, montrons que f est bijective. Commençons par l'injectivité. Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. Ainsi $x = g(f(x)) = g(f(x')) = x'$. Maintenant, montrons la surjectivité. Soit $y \in F$, nous avons $f(g(y)) = y$ et donc $g(y)$ est un antécédent de y par f et f est surjective.

Il nous est donc possible de considérer f^{-1}. Par (b), nous obtenons $\mathbb{I}_E \circ f^{-1} = g \circ f \circ f^{-1} = g \circ \mathbb{I}_F = g$.

Montrons 4. Grâce à (b), nous avons $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = \mathbb{I}_F$. Grâce à (c), nous en déduisons $\mathbb{I}_F \circ (g \circ f)^{-1} = (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ ((g \circ f) \circ (g \circ f)^{-1}) = (g \circ f)^{-1}$. $\square$

Exemple : L'inverse de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}$ est f lui-même.

Exemple : L'inverse de $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ est $g^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$.

Exemple : L'inverse de $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array}$ est $h^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & n-1 \end{array}$.

Exemple : L'inverse de $i : \begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ r & \longmapsto & 2r \end{array}$ est $i^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ r & \longmapsto & r/2 \end{array}$.

Exemple : Soit $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. La fonction $j : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ F & \longmapsto & F^c \end{array}$ est bijective d'inverse elle-même.

1.3.4 Applications croissantes, décroissantes et monotones

Définition 1.21. Soient $(E, \preccurlyeq)$ et $(F, \preccurlyeq)$ deux ensembles ordonnés. $f : E \longrightarrow F$ est dite
- *croissante* si $\forall x, x' \in E, [x \preccurlyeq x' \Rightarrow f(x) \preccurlyeq f(x')]$.
- *strictement croissante* si elle est croissante et injective.

On définit de même la notion de fonction *décroissante*, *strictement décroissante*, *monotone* (ou bien croissante, ou bien décroissante), *strictement monotone.*

Proposition 1.22. *Soient E, F, G trois ensembles ordonnés.*
1. *Si $f : E \longrightarrow F$ et $g : E \longrightarrow F$ sont monotones de même sens, alors $g \circ f$ est croissante.*
2. *Si f et g sont monotones de sens contraires, alors $g \circ f$ est décroissante.*

La démonstration est laissée pour l'exercice 21.

Exercice 20 (Fonctions caractéristiques χ_A)**.** Soient E un ensemble et $A \subset E$. La fonction caractéristique de A est définie par

$$\chi_A : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x \in E & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que deux ensembles sont égaux si et seulement si ils ont la même fonction caractéristique.
2. Que peut-on dire sur A et B si $\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$ pour tout $x \in E$?

3. Montrer que $\chi_{A\cap B} = \chi_A\chi_B$, $\chi_{A^c} = 1-\chi_A$ et $\chi_{A\cup B} = \chi_A+\chi_B-\chi_A\chi_B$.
4. Montrer les formules de Morgan en utilisant les fonctions caractéristiques.

Exercice 21. Prouver la proposition 1.22.

Le but de l'exercice suivant est de montrer le célèbre théorème suivant.

Théorème 1.23 (Théorème de Cantor)**.** *Soit E un ensemble. Il n'existe pas de surjection de E sur $\mathscr{P}(E)$.*

Exercice 22 (Théorème de Cantor)**.** Supposons qu'il existe une surjection $s : E \longrightarrow \mathscr{P}(E)$. En considérant l'ensemble $A = \{x \in E, x \notin s(x)\} \subseteq E$, montrer que nous aboutissons à une contradiction.

Exercice 23. Soit f une application bijective et monotone, est ce que f^{-1} est monotone ?

Exercice 24 (Théorème de Cantor-Schröder-Bernstein)**.** Soient E et F deux ensembles. Supposons qu'il existe une injection f de E dans F, et une injection g de F dans E. Nous désirons montrer qu'il existe une bijection de E dans F. Définissons $h : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E)$ par $h(X) = E \smallsetminus g(F \smallsetminus f(X))$ pour toute partie $X \subset E$.

1. Montrer que h est croissante pour l'inclusion.
2. Considérons l'ensemble $Y = \bigcup_{X\subset h(X)} X$. Soit $x \in Y$, montrer que pour tout X tel que $X \subset h(X)$, $x \in h(X)$. En déduire que $x \in h(Y)$ et donc que $Y \subset h(Y)$.
3. Montrer que pour tout X tel que $X \subset h(X)$, alors $X \subset Y$. Montrer que $h(Y) \subset h(h(Y))$. En déduire que $h(Y) \subset Y$.
4. Montrer que $Y = E \smallsetminus g(F \smallsetminus f(Y))$.
5. Montrer que pour tout $x \notin Y$, il existe $y \in F$ tel que $x = g(y)$. Il est ainsi possible de définir l'application

$$\Phi : \begin{array}{ccl} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in Y \\ \text{l'unique } y \text{ tel que } g(y) = x & \text{si } x \notin Y \end{cases} \end{array}$$

6. Vérifier que Φ est bijective.

Chapitre 2: Entiers naturels et ensembles finis

Ernst Zermelo (allemand 1871-1953)

2.1 Entiers naturels

Abraham Fraenkel (allemand puis israelien 1871-1953) Il précise le système d'axiomes de Zermelo en 1919 et montre l'indépendance de l'axiome du choix sous certaines conditions. Ces travaux seront repris par Cohen.

Comme vu dans l'exercice 3, les axiomes permettent de construire des ensemble de taille finie quelconque. Par contre, ils ne permettent pas a priori de construire un ensemble infini. Ainsi, l'ensemble $\mathbb{N}$ ne peut pas être construit à partir des axiomes et il est nécessaire de postuler son existence. Nous introduisons donc un nouvel axiome. Avec ce nouvel axiome, les axiomes forment le système de Zermelo-Fraenkel (à vrai dire, pas tout à fait, mais presque).

Axiome 5 (axiome de Peano) Il existe un unique triplet $(0, \mathbb{N}, S)$ tel que

1. $\mathbb{N}$ est un ensemble.
2. 0 un élément de $\mathbb{N}$.
3. La fonction $S : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & S(n) \end{array}$ satisfait les propriétés suivantes
   (a) S est injective,
   (b) $S(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$,
   (c) Pour tout $A \subset \mathbb{N}$, si $[0 \in A \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, (n \in A \Rightarrow S(n) \in A)]$ alors $A = \mathbb{N}$.

L'image $S(n)$ de n est appelé son *successeur*. L'ensemble $\mathbb{N}$ est appelé ensemble des *entiers naturels*. L'ensemble $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ est noté $\mathbb{N}^*$. Nous utilisons la notation $1 = S(0)$, $2 = S(1)$, etc. Nous noterons également $S(n) = n + 1$. Posons $[\![m, n]\!] = \{m, m+1, \ldots, n\}$.

Giuseppe Peano (italien 1858-1932) Père de la logique mathématique, il est aussi connu pour la courbe de Peano, une courbe continue dont l'image est tout le carré de coté 1.

La propriété 3(c) est parfois appelée axiome de récurrence. Elle mène au théorème suivant.

Théorème 2.1 (Principe de récurrence)**.** *Soit $\mathscr{H}_n$ une assertion dépendant de $n \in \mathbb{N}$. Si l'assertion*

$$\mathscr{H}_0 \text{ et } [\forall n \in \mathbb{N}, \mathscr{H}_n \Rightarrow \mathscr{H}_{n+1}]$$

est VRAIE alors $\mathscr{H}_n$ est VRAIE pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Soit $A = \{n \in \mathbb{N}, \mathscr{H}_n \text{ est VRAIE}\}$. Puisque $\mathscr{H}_0$ est VRAIE, 0 appartient à A. De plus, si $n \in A$, $\mathscr{H}_n$ est VRAIE. De plus, $\mathscr{H}_n \Rightarrow \mathscr{H}_{n+1}$ est VRAIE. Cela implique que $\mathscr{H}_{n+1}$ est VRAIE. Ainsi $S(n) \in A$. La propriété (c) implique que $A = \mathbb{N}$ et $\mathscr{H}_n$ est donc VRAIE pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Noter que la récurrence est donc axiomatique. L'assertion $\mathscr{H}_n$ est appelée *hypothèse de récurrence.* Prouver $\mathscr{H}_0$ est appelé *pas initial.* L'implication $\mathscr{H}_n \Rightarrow \mathscr{H}_{n+1}$ est appelée *pas de récurrence.* Puisque FAUX implique FAUX est VRAI, le fait que $\mathscr{H}_n \Rightarrow \mathscr{H}_{n+1}$ est VRAIE pour tout $n \in \mathbb{N}$ ne permet de conclure que $\mathscr{H}_n$ est VRAIE que si $\mathscr{H}_0$ est VRAIE. Il est donc primordial de vérifier le pas initial, même si celui-ci peut paraitre évident !

Donnons quelques exemples d'applications.

Le signe $\sum_{i\in I} a_i$ est un raccourci signifiant que l'on somme tous les éléments a_i, pour $i \in I$. Le signe i est appelé la variable d'indice ou plus simplement variable. L'exemple le plus classique étant bien entendu $I = \{1, \dots, n\}$, ie que l'on somme sur les n premiers termes. Il y a quelques petites choses à remarquer sur cette notation, qui fût introduite par Fourier en 1820.

Exemple : $1+2+3+4+\cdots+n = \sum_{i\in\{1,\dots,n\}} i$. Tout d'abord, la variable i est dite “muette”, dans le sens que l'on peut sommer sur quelque chose d'autre, tant que l'on somme les mêmes objects. Plus précisément, si σ est une bijection de J dans I, on a que

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J} a_{\sigma(j)}.$$

Exemple : $$\sum_{i\in\{1,\dots,n\}} i = \sum_{j\in\{0,\dots,n-1\}} j+1 = \sum_{k\in\{2,4,6,8,\dots,2n\}} \frac{k}{2}.$$

Exemple : Dans le cas particulier de $I = \{0, \dots, n\}$, on note $\sum_{i=0}^n a_i$.

On appelle l'opération de changement la variable muette un changement de variable. De façon évidente,

$$\sum_{i\in I}(a_i + b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i.$$

Une autre méthode importante s'appelle la sommation par paquets. Imaginons que $I = \cup_{k\in K} I_k$, et que les I_k sont disjoints, nous avons alors

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{k\in K}\sum_{j\in I_k} a_j.$$

Ceci est particulièrement intéressant lorsque $I = J \times K$, dans ce cas, nous trouvons que $J \times K = \cup_{j\in J}\{j\} \times K$, et donc

$$\sum_{(j,k)\in J\times K} a_{j,k} = \sum_{j\in J}\sum_{(j,k)\in\{j\}\times K} a_{j,k} = \sum_{j\in J}\sum_{k\in K} a_{j,k}.$$

Nous parlons alors d'une double somme.

Exemple : Par exemple, nous avons

$$\sum_{(i,j)\in\{0,\dots,n\}^2} a_{i,j} = \sum_{i=0}^n\sum_{j=0}^n a_{i,j}.$$

Pierre de Fermat (français -1665) juriste, mathématicien et mécène. Célèbre pour le principe de Fermat en optique, ainsi que par des questions laissées en suspend. La plus connue est le théorème de Fermat, qui résista à des générations de mathématiciens avant d'être finalement prouvée en 1994 par Wiles. Fermat prétendit avoir une preuve de ce résultat qui n'aurait pas tenu dans sa marge. Nous savons maintenant que comme de nombreux autres mathématiciens, sa preuve était fausse (la preuve de Wiles est très compliquée et invoquent des théories mathématiques développées récemment). Mentionons également les nombres de Fermat de la forme $2^{2^n}+1$. Il vérifia que ces nombres sont premiers pour $n \le 5$ et conjectura qu'ils le sont tous. Jusquà présent, tous les nombres vérifiés par ordinateurs pour $n \ge 6$ se sont révélés ne pas être premiers. Nous recommandons la lecture de *Fermat's last theorem* par Simon Singh.

Proposition 2.2. *Soit $n \geq 0$,*

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
4. *(somme géométrique) pour $a \neq 1$,* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$.

Nous laissons la preuve de ce résultat pour l'exercice 26.

Remarque 2.3. *Le raisonnement par récurrence peut être généralisé comme suit. Soit $A \subset \mathbb{N}$. Si*

$$\forall n \in \mathbb{N}, [(\forall k \in A \cap [\![0,n]\!], \mathscr{H}_k) \Rightarrow \mathscr{H}_n]$$

est vraie, alors $\mathscr{H}_n$ est vraie pour tout $n \in A$. Cette généralisation permet de considérer $A = \{m, m+1, \dots\}$ ou $A = 2\mathbb{N}$ par exemple. Si on se place à $n_0 = \min A$ alors l'assertion à montrer devient $\mathscr{H}_{n_0}$ et on en revient encore au fait qu'il faut toujours initialiser sa récurrence.

Dans la suite, un raisonnement par récurrence doit toujours être annoncé, et présenté comme suit :

Nous montrons cette propriété par récurrence. Définissons pour tout $n \in A$,

$\mathscr{H}_n$ = **écrire votre hypothèse de récurrence**

Montrons $\mathscr{H}_0$:

Présenter la preuve de $\mathscr{H}_0$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons l'hypothèse de récurrence $\mathscr{H}_n$, montrons $\mathscr{H}_{n+1}$:

Présenter la preuve de $\mathscr{H}_n \Rightarrow \mathscr{H}_{n+1}$.

Maintenant que nous disposons des entiers et du raisonnement par récurrence, les opérations + et × peuvent être définies par récurrence comme des applications $+ : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $\times : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Nous n'entrons pas dans les détails de cette construction et laissons la preuve en exercices. Afin de raccourcir les notations, on pose $+(m,n) = m+n$ et $\times(m,n) = m \times n = m \cdot n = mn$. Soient $n, m \in \mathbb{N}$, l'ordre usuel sur $\mathbb{N}$ est défini comme suit

$$n \leqslant m \iff \exists d \in \mathbb{N},\ m = n + d.$$

Théorème 2.4. *Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.*

Démonstration. Nous montrons ce résultat par récurrence. Définissons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$\mathscr{H}_n$: tout ensemble $A \subset \mathbb{N}$ contenant un entier $k \leq n$ admet un plus petit élément.

Montrons $\mathscr{H}_0$. Si $0 \in A$, alors 0 est le plus petit élément de A, puisque 0 est plus petit que n'importe quel entier.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathscr{H}_n$ et montrons $\mathscr{H}_{n+1}$. Soit A un ensemble contenant $k \leq n+1$. Si $k \leq n$, alors en invoquant $\mathscr{H}_n$, nous obtenons que A admet un plus petit élément. S'il n'existe pas de $k \leq n$ dans A, alors cela signifie que $n+1 \in A$ et que $\forall m \in A, m \geq n+1$. Ainsi, $n+1$ est le plus petit élément de A. Nous venons de montrer $\mathscr{H}_{n+1}$. □

Corollaire 2.5 (Principe de descente infinie)**.** *Toute suite décroissante d'entiers naturels est stationnaire.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'entiers naturels. L'ensemble $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ admet un plus petit élément, qui est nécessairement de la forme u_N pour un certain $N \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $n \geq N$, $u_n \leq u_N$ car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Mais puisque u_N est le plus petit élément de A, nous avons également $u_n \geq u_N$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, $u_n = u_N$ pour tout $n \geq N$ et la suite est bien stationnaire. □

On dit souvent qu'il n'existe pas de suite strictement décroissante d'entiers naturels, c'est le principe de descente infinie de Fermat. Ce principe fut utilisé fréquemment en arithmétique, par exemple par Fermat et Euler. Il peut souvent être remplacé par un autre type de raisonnement et nous n'insisterons donc pas dessus. Finissons cette partie par un autre exemple fondamental d'application du principe de récurrence.

Théorème 2.6 (Division Euclidienne)**.** *Soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, alors il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant*

$$a = bq + r \text{ avec } 0 \leqslant r < b.$$

Démonstration. Commençons par l'unicité. Soient (q, r) et (q', r') tels que $a = bq + r = bq' + r'$ et supposons sans perte de généralité que $r' \geq r$. Ceci implique $0 \leq b(q - q') = r' - r \leq b - 1$. Ainsi, $q = q'$ nécessairement (sinon $b(q - q') \geq b$) et donc $r = r'$.

Montrons maintenant l'existence. Soit $b \in \mathbb{N}$. Nous procédons par récurrence. Soit $n \in \mathbb{N}$, définissons

$$\mathscr{H}_n : \text{pour tout } a \leq n, \text{ il existe } (q, r) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } a = bq + r \text{ et } 0 \leq r < b.$$

Montrons $\mathscr{H}_{b-1}$. Dans ce cas, on pose $q = 0$ et $r = a$.

Soit $n \geq b - 1$. Supposons $\mathscr{H}_n$ et montrons $\mathscr{H}_{n+1}$. Soit $a \leq n + 1$. Si $a \leq n$, il suffit d'utiliser $\mathscr{H}_n$. Si $a = n + 1$, considérons $0 \leq a - b \leq n$. L'hypothèse de récurrence implique l'existence de q_1 et $0 \leq r_1 < b$ tels que $a - b = bq_1 + r_1$. On obtient alors $a = b(q_1 + 1) + r_1$. La preuve peut être conclue en posant $q = q_1 + 1$ et $r = r_1$. □

Sans rentrer dans les détails, les entiers relatifs $\mathbb{Z}$ peuvent être définis à partir de $\mathbb{N}$ en associant à $n \in \mathbb{N}$ son opposé $-n$ pour $+$.

Exercice 25. Montrons que le plus grand entier naturel strictement positif est 1. En effet, soit n le plus grand entier positif. Comme $n \geq 1$, nous trouvons $n^2 \geq n$. Mais puisque n est le plus grand entier naturel, $n^2 \leq n$ de sorte que $n^2 = n$ et donc $n = 1$ (puisque $n \neq 0$). Donc 1 est le plus grand entier naturel strictement positif. Où est la faute de raisonnement ?

Exercice 26. Montrer par récurrence que

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ pour tout $n \geq 0$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour tout $n \geq 0$.
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ pour tout $n \geq 0$.
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k = (1 - a^{n+1})/(1 - a)$ pour tout $a \neq 1$ et $n \geq 0$.

Le signe $\sum_{i \in I} a_i$ est un raccourci signifiant que l'on somme tous les éléments a_i, pour $i \in I$. De plus, $\sum_{k=0}^{n}$ signifie $\sum_{k \in \{0,\dots,n\}}$, on somme donc tous les éléments indexés par k entre 0 et n.

Exercice 27. Montrer par récurrence que $3^{2n} - 2^n$ est toujours divisible par 7.

Exercice 28.
1. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $n < 2^n$.
2. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite d'entiers strictement croissante, montrer que $u_n \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Georg Cantor (allemand 1845-1918) Père de la théorie des ensembles. Définit les cardinaux et ordinaux, et formule l'hypothèse du continu. Ses travaux, dont la dimension dépasse les mathématiques, ne furent pas accueillis unanimement par les mathématiciens de son époque, en particulier Kronecker. Sa preuve du théorème d'équipotence contenait une lacune, tout comme celle de Schröder. Bernstein fournit une preuve complète dans sa thèse.

2.2 Ensembles finis et notion de cardinal

Le but de cette section est de pouvoir "comparer" des ensembles, notamment leur taille.

Définition 2.7. Soient E et F deux ensembles. Les ensembles E et F sont *équipotents* s'il existe une bijection $f : E \longrightarrow F$.

Deux ensembles équipotents sont considérés comme étant de la même taille.

Naturellement, un ensemble E est "plus petit" que F s'il existe une injection de E dans F. Si E est plus petit que F, et F est plus petit que E, nous aimerions dire que E et F ont la même taille. Ce résultat est donné par le théorème suivant.

Théorème 2.8 (Cantor-Schröder-Bernstein)**.** *Soient E et F deux ensembles, s'il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E, alors E et F sont équipotents.*

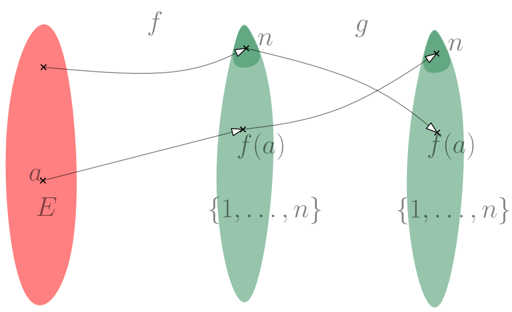
La preuve de ce théorème a été proposée dans l'exercice 24. Nous l'admettons dans ce cours.

L'ensemble de référence pour compter est l'ensemble $[\![1, n]\!]$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons tout d'abord que

Proposition 2.9. *Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$.*

1. *S'il existe une bijection de E dans $[\![1, n]\!]$, alors pour tout $a \in E$, il existe une bijection de $E \smallsetminus \{a\}$ dans $[\![1, n-1]\!]$.*
2. *Il existe une injection de $[\![1, m]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ $\iff$ $m \leqslant n$.*
3. *Il existe une surjection de $[\![1, m]\!]$ sur $[\![1, n]\!]$ $\iff$ $m \geqslant n$.*
4. *Il existe une bijection de $[\![1, m]\!]$ sur $[\![1, n]\!]$ $\iff$ $m = n$.*

Démonstration. Montrons 1. On peut s'inspirer du dessin suivant.



Soient E un ensemble et $f : E \to [\![1,n]\!]$. Soit $a \in E$. Noter que $f(a) \in [\![1,n]\!]$. Construisons la bijection de $g : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$ telle que $g(f(a)) = n$, $g(n) = f(a)$ et $g(k) = k$ pour tous les autres éléments de $[\![1,n]\!]$ (cette bijection inverse $f(a)$ et n). La fonction $g \circ f$ est alors une bijection de E dans $[\![1,n]\!]$. De plus, $g \circ f(a) = n$. Ainsi, $g \circ f(E \setminus \{a\}) = [\![1,n-1]\!]$. De plus, cette fonction est injective. Ainsi, la restriction de $g \circ f$ à $E \setminus \{a\}$ est une bijection de $E \setminus \{a\}$ dans $[\![1,n-1]\!]$.

Montrons 2. Montrons l'implication inverse en premier. Si $m \leq n$, considérer simplement la fonction $\mathbb{I} : [\![1,m]\!] \to [\![1,n]\!]$ telle que $\mathbb{I}(k) = k$. Cette fonction est clairement injective. Montrons maintenant l'implication directe. On raisonne par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$. Soit $m \in \mathbb{N}$, définissons

$\mathscr{H}_m$: Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, s'il existe une injection de $[\![1,m]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$, alors $m \leq n$.

L'assertion $\mathscr{H}_1$ est clairement VRAIE puisque $1 \leq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{H}_m$ et montrons $\mathscr{H}_{m+1}$. Soit $f : [\![1,m+1]\!] \to [\![1,n]\!]$ une application injective. Traitons deux cas. Si $n \notin f([\![1,m+1]\!])$, alors $f([\![1,m]\!]) \subset [\![1,n-1]\!]$. En particulier, l'hypothèse de récurrence implique que $m \leq n-1$, qui implique $m+1 \leq n$. Si $n \in f([\![1,m+1]\!])$, notons $k \in [\![1,m+1]\!]$ l'antécédent de n (c'est-à-dire l'entier k tel que $f(k) = n$). Notez que cet antécédent est unique. D'après la propriété 1, il existe une bijection $g : [\![1,m+1]\!] \setminus \{k\} \to [\![1,m]\!]$. La fonction $f \circ g^{-1} : [\![1,m]\!] \to [\![1,n-1]\!]$ est donc injective. L'hypothèse de récurrence implique que $m \leq n-1$, ce qui peut être réécrit $m+1 \leq n$.

Montrons 3. Comme pour 2, l'implication réciproque est facile. Si $m \geq n$, on peut simplement considérer la fonction $i : [\![1,m]\!] \to [\![1,n]\!]$ telle que $i(k) = k$ pour $k \leq n$ et $i(k) = n$ pour $k > n$. Montrons maintenant l'implication directe. Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, définissons

$\mathscr{H}_n$: Pour tout $m \in \mathbb{N}$, s'il existe une surjection de $[\![1,m]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$, alors $m \geq n$.

Montrons $\mathscr{H}_1$. Comme $f : [\![1,m]\!] \to [\![1,1]\!]$ est surjective, nous avons au moins un antécédent de 1 par f, et donc $m \geq 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{H}_n$ et montrons $\mathscr{H}_{n+1}$. Soit $f : [\![1,m]\!] \to [\![1,n+1]\!]$ une application surjective. Puisque f est surjective, il existe $\ell \in [\![1,m]\!]$ tel que $f(\ell) = n+1$. Si $g : [\![1,m-1]\!] \to [\![1,m]\!] \setminus \{\ell\}$ est une bijection (dont l'existence est donnée par 1), $f \circ g$ est une application surjective de $[\![1,m-1]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$. Dès lors, $m-1 \geq n$ par hypothèse de récurrence, et donc en particulier $m \geq n+1$.

La propriété 4 est une conséquence facile des propriétés 2 et 3. □

Définition 2.10. Soit E un ensemble. L'ensemble E est *fini* si $E = \varnothing$ ou s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que E est en bijection avec $[\![1,n]\!]$. Dans ce cas, $n \in \mathbb{N}^*$ est appelé le cardinal de E, et est noté $\mathrm{Card}(E)$. Par convention, $\mathrm{Card}(\varnothing) = 0$. Si E n'est pas fini, E est dit *infini*.

Noter que la définition de $\mathrm{Card}(E)$ nécessite l'unicité de n, qui est donnée par les propriétés 2 et 3. Remarquez également que si E et F sont en bijections, ils ont le même cardinal. En effet, si $g : E \to [\![1,n]\!]$ et $f : F \to E$ sont des bijections, alors $g \circ f$ est une bijection de F dans $[\![1,n]\!]$. La notion de cardinal est très utile : elle permet d'effectuer des raisonnements par récurrence sur le cardinal des ensembles.

La notion d'ensemble fini est stable par sous-ensemble et par image.

Proposition 2.11. *Soit E un ensemble fini.*

1. *Soit $f : E \longrightarrow F$ bijective, alors F est fini et* $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$.
2. *Soit $A \subset E$, alors A est fini et* $\mathrm{Card}(A) \leqslant \mathrm{Card}(E)$. *De plus*

$$\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(E) \Rightarrow A = E.$$

3. *Soit $f : E \longrightarrow F$, où F est quelconque, alors $f(E)$ est fini. De plus,* $\mathrm{Card}(f(E)) \leqslant \mathrm{Card}(E)$ *avec égalité si et seulement si f est injective.*

Démonstration. Montrons 1. Notons n le cardinal de E. Soit $g : E \to [\![1,n]\!]$ une bijection. La fonction $g \circ f^{-1}$ est une bijection de F dans $[\![1,n]\!]$, ce qui implique que F est fini et que $n = \mathrm{Card}(F)$.

Montrons 2. Supposons tout d'abord que $E = [\![1,n]\!]$ et montrons le résultat par récurrence sur n. Soit

$$\mathscr{H}_n : \text{"Pour tout ensemble } A \subset [\![1,n]\!],\ A \text{ est fini et } \mathrm{Card}(A) \leq n."$$

Montrons $\mathscr{H}_1$. Si $A \subset \{1\}$, ou bien $A = \varnothing$ ou $A = \{1\}$. Ainsi, A est fini et $\mathrm{Card}(A) \leq 1$.

Soit $n \geq 1$, supposons $\mathscr{H}_n$ et montrons $\mathscr{H}_{n+1}$. Si A est inclus dans $[\![1,n]\!]$, on obtient par l'hypothèse de récurrence que A est fini et $\mathrm{Card}(A) \leq n \leq n+1$. La preuve est fini dans ce cas.

On peut donc supposer que $n+1 \in A$. On obtient par l'hypothèse de récurrence que $A \setminus \{n+1\} \subset [\![1,n]\!]$ et donc $A \setminus \{n+1\}$ est fini de cardinal inférieur à n. Soit f une bijection de $A \setminus \{n+1\}$ dans $[\![1, \mathrm{Card}(A \setminus \{n+1\})]\!]$. On construit facilement une bijection de A dans $[\![1, \mathrm{Card}(A \setminus \{n+1\}) + 1]\!]$ en posant

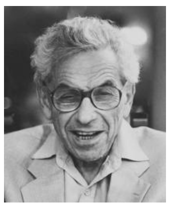
$$\overline{f} : \begin{array}{ccl} A & \longrightarrow & [\![1, \mathrm{Card}(A \setminus \{n+1\}) + 1]\!] \\ k & \longmapsto & \begin{cases} f(k) & \text{si } k \leq n \text{ dans } A \\ \mathrm{Card}(A \setminus \{n+1\}) + 1 & \text{si } k = n+1 \end{cases} \end{array}$$

Il est facile de vérifier que $\overline{f}$ est une bijection. Ceci implique que A est fini de cardinal $\mathrm{Card}(A \setminus \{n+1\}) + 1 \leq n+1$.

Maintenant, soit $A \subset E$. L'ensemble E est en bijection avec $[\![1, \mathrm{Card}(E)]\!]$. Soit f cette bijection. L'ensemble $f(A)$ est un sous-ensemble de E, il est donc fini de cardinal inférieur à $\mathrm{Card}(E)$. Mais $f_{|A} : A \to f(A)$ est bijective. En effet, elle est surjective puisque $f_{|A}(A) = f(A)$, et elle est injective car $f_{|A}(x) = f_{|A}(x')$ implique $f(x) = f(x')$ ce qui implique à son tour que $x = x'$ puisque f est injective. On peut alors utiliser la propriété 1 pour conclure.

Montrons 3. Construisons une bijection g entre $f(E)$ et un sous-ensemble de F. Procédons comme suit. Soit $y \in f(E)$. Puisque $y \in f(E)$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$, que nous posons comme étant égal à $g(y)$ $(= x)$. Ceci définit une fonction $g : f(E) \to g(f(E))$. Cette fonction est injective. En effet, si $g(y) = g(y')$, alors $y = f(g(y)) = f(g(y')) = y'$. De plus, elle est surjective puisqu'arrivant dans $g(f(E))$. Noter que $g(f(E)) \subset E$ est fini de cardinal inférieur ou égal à celui de E. Par la propriété 2, $f(E)$ est fini de cardinal inférieur à celui de E.

Supposons maintenant que f est injective, alors $f : E \to f(E)$ est bijective et donc $\mathrm{Card}(f(E)) = \mathrm{Card}(E)$. Réciproquement, si $\mathrm{Card}(f(E)) = \mathrm{Card}(E)$, nous savons que $\mathrm{Card}(g(f(E)) = \mathrm{Card}(f(E)) = \mathrm{Card}(E)$ et donc par la propriété 2, $g(f(E)) = E$. La fonction g est donc injective et surjective, i.e. bijective. Ainsi, $f = g^{-1}$ est également bijective, et donc en particulier injective. □



Paul Erdös (hongrois 1913-1996) Mathématicien le plus prolifique de tous les temps avec plus de 1600 articles. Il est le père de la méthode probabiliste en combinatoires. Il prouva le théorème des nombres premiers (i.e. que $\pi(n) \sim n/\log n$, où $\pi(n)$ est le nombre d'entiers premiers inférieurs à n, et $\sim$ signifie équivalent, comme défini dans le dernier chapitre du cours) de facon

Le principe de démonstration suivant est très utile. Il est appelé *principe des tiroirs.*

Corollaire 2.12 (Principe des tiroirs)**.** *Soient E et F deux ensembles finis et $f : E \longrightarrow F$. Si* $\mathrm{Card}(F) < \mathrm{Card}(E)$*, alors f n'est pas injective.*

Le nom de ce principe vient du raisonnement suivant. Si l'on met $n+1$ chaussettes dans n tiroirs, au moins un tiroir contiendra au moins deux chaussettes.

Démonstration. Cela suit du fait que f injective implique que $\mathrm{Card}(f(E)) = \mathrm{Card}(E)$. □

Concluons cette partie par une autre application que nous utiliserons très fréquemment.

Corollaire 2.13. *Soient E et F deux ensembles* finis *et $f : E \longrightarrow F$. Supposons que* $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$*, alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :*
(i) *f est injective.*
(ii) *f est surjective.*
(iii) *f est bijective.*

Ainsi, lorsque E est un ensemble fini et f est une application de E dans E, il revient au même de dire que f est surjective, injective ou bijective.

La preuve suivante contient une astuce importante. Afin de montrer que trois assertions sont équivalentes, il suffit de montrer certaines implications. Par exemple, nous montrons que (i) implique (iii), que (iii) implique (ii) et que (ii) implique (i). Toutes les propriétés sont alors équivalentes car par exemple (i)⇒(iii)⇒(ii).

Démonstration. Montrons (i) implique (iii). La fonction $f : E \to f(E)$ est injective et surjective (par définition de $f(E)$). Elle est donc bijective, ce qui implique $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(f(E))$. Puisque $f(E) \subset F$ et $\mathrm{Card}(f(E)) = \mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$, la propriété 1 de la proposition 2.11 nous donne que $f(E) = F$. Ainsi, $f : E \to F$ est bijective.

Le fait que (iii) implique (ii) est trivial puisque toute application bijective est surjective.

Montrons que (ii) implique (i). Soit $f : E \to F$ une application surjective. Puisque $f(E) = F$, nous trouvons $\mathrm{Card}(f(E)) = \mathrm{Card}(F) = \mathrm{Card}(E)$. La propriété 3 de la proposition 2.11 implique que f est injective. □

Exercice 29. Montrer qu'un ensemble fini totalement ordonné admet un plus grand et un plus petit élément.

Exercice 30. (extension du principe des tiroirs) ⋄ ♡ En utilisant une preuve par contraposée ou une preuve par récurrence, montrer que pour tout $k \geq 1$ et $n \geq 1$, si $kn+1$ boules doivent être rangées dans n tiroirs, il existe au moins un tiroir qui contient au moins $k+1$ boules.

Exercice 31. Cet exercice traite de quelques applications du principe des tiroirs (la difficulté dans l'utilisation du principe des tiroirs est de trouver les bons tiroirs).

1. Un crâne humain contient au plus 600 000 cheveux. Parmi les 12 millions de parisiens, combien de personnes au minimum ont le même nombre de cheveux.
2. Montrer que parmi 7 personnes il y en a au moins 4 de même sexe.
3. Montrer que chaque matin dans la classe, il y a deux élèves qui serrent le même nombre de mains.

4. Soit A une partie de $[\![1, 2n]\!]$ de cardinal $n+1$. Montrer qu'il existe a, b dans A premiers entre eux Montrer qu'il existe deux entiers distincts a et b dans A tels que a divise b. *Ces deux exercices sont dûs au mathématicien Paul Erdös qui aimait les poser aux jeunes mathématiciens. Pour avoir des indications (ces deux questions sont difficiles, spécialement la deuxième !), il vous faudra attendre le début du cours mercredi prochain, le professeur vous les donnera. D'ici là, à vous de jouer.*

2.3 Analyse combinatoire sur les ensembles finis

Le but de l'analyse combinatoire est de calculer le cardinal d'ensembles naturels. Le principe est de mettre en bijection les ensembles dont on désire calculer la taille avec des ensembles simples.

Blaise Pascal (français 1623-1662) mathématicien, physicien, théologiste, écrivain. Ses travaux les plus importants concernent les probabilités et la notion de pression, dont l'unité de mesure possède son nom. Il inventa la machine à calculer (appelée Pascaline).

Théorème 2.14. *Soient E et F deux ensembles finis.*

1. *Si E et F sont disjoints, alors $E \cup F$ est fini et* $\mathrm{Card}(E \cup F) = \mathrm{Card}(E) + \mathrm{Card}(F)$.
2. *Si $E \subset F$, alors* $\mathrm{Card}(F \setminus E) = \mathrm{Card}(F) - \mathrm{Card}(E)$.
3. *$E \cup F$ est fini et* $\mathrm{Card}(E \cup F) = \mathrm{Card}(E) + \mathrm{Card}(F) - \mathrm{Card}(E \cap F)$.
4. *$E \times F$ est fini et* $\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}(E) \cdot \mathrm{Card}(F)$.
5. *F^E est fini et* $\mathrm{Card}(F^E) = \mathrm{Card}(F)^{\mathrm{Card}(E)}$.

Démonstration. Montrons 1. Notons $m = \mathrm{Card}(E)$ et $n = \mathrm{Card}(F)$. Commençons par montrer que si E et F sont disjoints, alors $\mathrm{Card}(E \cup F) = m + n$. Pour cela, observons que si $f : E \to [\![1, n]\!]$ et $g : F \to [\![1, m]\!]$ sont bijectives, alors

$$h : \begin{array}{ccc} E \cup F & \longrightarrow & [\![1, m+n]\!] \\ x & \longmapsto & f(x) \text{ si } x \in E \text{ et } g(x) + n \text{ si } x \in F \end{array}$$

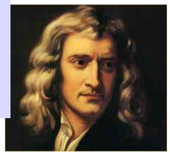
est bijective.

Montrons 2. Les ensembles E et $F \setminus E$ étant disjoints, $\mathrm{Card}(F \setminus E) + \mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$ d'où $\mathrm{Card}(F \setminus E) = \mathrm{Card}(F) - \mathrm{Card}(E)$.

Montrons 3. Les ensembles $E \cap F$, $E \setminus (E \cap F)$ et $F \setminus (E \cap F)$ sont disjoints et d'union E. D'où

$$\begin{aligned} \mathrm{Card}(E) &= \mathrm{Card}(E \cap F) + \mathrm{Card}(E \setminus F) + \mathrm{Card}(F \setminus E) \\ &= \mathrm{Card}(E \cap F) + \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(E \cap F) + \mathrm{Card}(F) - \mathrm{Card}(E \cap F) \\ &= \mathrm{Card}(E) + \mathrm{Card}(F) - \mathrm{Card}(E \cap F). \end{aligned}$$

Les propriétés 4 et 5 sont laissées en exercice (exercice 32). □



Isaac Newton (anglais 1642-1727) Considéré par certain comme le scientifique le plus influent de tous les temps, il posa les fondations de la mécanique classique dans *Principia*. En mathématiques, il inventa le calcul différentiel et intégral (partageant les honneurs avec Gottfried Leibniz). Il est connu pour la citation suivante : "If I have seen further it is by standing on the shoulders of giants".

On en déduit un principle classique de dénombrement.

Corollaire 2.15 (Principe des bergers)**.** *Soit E un ensemble fini,*

1. *Soit $(E_i)_{i\in I}$ une partition de E, alors* $\mathrm{Card}(E) = \sum_{i\in I} \mathrm{Card}(E_i)$.
2. *Soit $f : E \longrightarrow F$, alors* $\mathrm{Card}(E) = \sum_{y\in F} \mathrm{Card}\left(f^{-1}(\{y\})\right)$.

Démonstration. Montrons la propriété 1. Le fait que les (E_i) forment une partition signifie qu'ils sont disjoints et que $\bigcup_{i\in I} E_i = E$. Les E_i étant disjoints, nous obtenons

$$\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) = \sum_{i\in I} \mathrm{Card}(E_i).$$

La propriété 2 suit de la propriété 1 et du fait que $(f^{-1}(y))_{y\in F}$ est une partition. Montrons ce dernier point. Tout d'abord, pour tout $y \in F$, $f^{-1}(\{y\}) \subset E$ par définition ce qui implique que

$$\bigcup_{y\in F} f^{-1}(\{y\}) \subset E.$$

De plus, $x \in E$ appartient à $f^{-1}(\{f(x)\})$ et donc

$$E \subset \bigcup_{y\in F} f^{-1}(\{y\}).$$

Nous avons donc que $(f^{-1}(\{y\}))_{y\in F}$ est un recouvrement. Montrons que les $f^{-1}(\{y\})$ sont disjoints deux à deux. Supposons que $f^{-1}(\{y\}) \cap f^{-1}(\{y'\}) \neq \varnothing$. Dans ce cas, prenons x dans l'intersection, nous obtenons que $f(x) = y$ (car $x \in f^{-1}(\{y\})$) et $f(x) = y'$ (car $x \in f^{-1}(\{y'\})$). Ceci implique $y = y'$. Ainsi, la contraposée de ce que l'on vient de montrer donne $y \neq y'$ implique $f^{-1}(\{y\}) \cap f^{-1}(\{y'\}) = \varnothing$ et la preuve est terminée. □

Donnons maintenant des exemples en calculant le cardinal de certains ensembles classiques. On appelle *permutation* d'un ensemble E toute application $f : E \longrightarrow E$ bijective. L'ensemble des permutations de E est noté $\mathscr{S}(E)$. La *factorielle* est définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par la formule

$$n! \overset{\text{not.}}{=} n(n-1)\cdots 2\,1 \qquad \text{et} \qquad 0! = 1.$$

Pour $0 \leq p \leq n$, définit le symbole *p parmi n* (également appelé coefficient *binomial*) par

$$\binom{n}{p} \overset{\text{not.}}{=} \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Proposition 2.16. *Soient E, F deux ensembles finis avec* $\mathrm{Card}(E) = n$. *Soit* $p \in \mathbb{N}$.

1. $\mathrm{Card}(\mathscr{P}(E)) = 2^n$.
2. *Soit $p \leq n$. Le nombre de p-uplets $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ tels que les x_i sont tous distincts est donné par*
$$n(n-1)\cdots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$
3. $\mathrm{Card}(\mathscr{S}(E)) = n!$
4. *Le nombre de sous-ensembles à p éléments de E est donné par*
$$\frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p(p-1)\cdots 2\,1} = \binom{n}{p}.$$

Démonstration. Montrons 1. L'application $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \{0,1\}^E \\ F & \longmapsto & \chi_F \end{array}$ est bijective (voir exercice 20). Ainsi,

$$\mathrm{Card}(\mathscr{P}(E)) = \mathrm{Card}(\{0,1\}^E) = 2^{\mathrm{Card}(E)}.$$

Montrons 2. Nous prouvons ce résultat par récurrence sur $p \leq n$. Définissons

$\mathscr{H}_p$: Pour tout $n \geq p$, le nombre de p-uplets $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ tels que les x_i sont distincts est donné par $n(n-1)\cdots(n-p+1) = \frac{n!}{p!}$.

L'assertion $\mathscr{H}_1$ est évidente puisque nous avons n choix pour x_1.

Soit $p \geq 1$. Supposons $\mathscr{H}_p$ et montrons $\mathscr{H}_{p+1}$. Soit $n \geq p+1$. Les $(p+1)$-uplets $(x_1, \ldots, x_{p+1})$ avec les x_i tous distincts sont composés d'un p-uplet $(x_1, \ldots, x_p)$ où les x_i sont tous distincts, et d'un élément $x_{p+1} \in E \setminus \{x_1, \ldots, x_p\}$. Ainsi, nous avons $n(n-1)\cdots(n-p+1)$ choix pour le p-uplets, et $n-p$ pour le dernier élément. Le cardinal recherché est donc $n(n-1)\cdots(n-p)$.

Montrons 3. Les bijections de E dans E sont en bijection avec les n-uplets d'éléments distincts (exercice : expliciter la bijection). Ainsi, en appliquant la formule précédente à $p = n$, nous obtenons le résultat.

Montrons 4. Soit $p \leq n$. Tout d'abord, il existe une bijection entre les parties à p éléments de E et celles à p éléments de $\{1, \ldots, n\}$. Nous allons donc énumérer ces derniers. Notons $\mathscr{A}_{p,n}$ l'ensemble des p-uplets ordonnés de $\{1, \ldots, n\}$. Notons $\mathscr{P}_{p,n}$ l'ensembles des parties à p éléments de $\{1, \ldots, n\}$. Pour chaque partie F à p éléments, on dénote les éléments dans F par $x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}$ où $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$. L'application

$$\Psi : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}_{p,n} \times \mathscr{S}(\{1, \ldots, p\}) & \longrightarrow & \mathscr{A}_{p,n} \\ (\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}\}, \sigma) & \longmapsto & (x_{i_{\sigma(1)}}, \ldots, x_{i_{\sigma(p)}}) \end{array}$$

est une bijection. Puisque $\mathrm{Card}(\mathscr{S}(\{1, \ldots, p\}) = p!$ et $\mathrm{Card}(\mathscr{A}_{p,n})$, nous en déduisons que $\mathrm{Card}(\mathscr{P}_{p,n}) \cdot p! = \frac{n!}{(n-p)!}$ ce qui donne le résultat immédiatement. □

Décrivons maintenant quelques propriétés du symbole $\binom{n}{p}$.

Proposition 2.17. *Soit* $0 \leqslant p \leqslant n \in \mathbb{N}$, *nous avons*

1. $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
2. *Si* $n \geqslant 1$ *et* $p \geqslant 1$ *alors* $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$.
3. *(formule de Pascal) Soit* $p < n$, $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$
4. *(formule du binôme de Newton) pour tout* $a, b \in \mathbb{R}$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Nous proposons deux preuves de 1, 3 et 4 : l'une par le calcul, l'autre par un argument combinatoire. Cette dernière propriété peut être utile afin de se souvenir des formules, et pour proposer des preuves rapides de résultats plus complexes.

Démonstration. Prouvons 1. Soit $p \leq n$. Nous avons

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \binom{n}{n-p}.$$

Un autre preuve consiste à voir que $\binom{n}{p}$ est le nombre de parties de cardinal p dans n. Mais choisir une partie de n revient à choisir son complémentaire (on obtient la même information). Ainsi, le nombre de parties de cardinal p est en fait égal au nombre de parties de cardinal $n-p$, et l'égalité suit.

Prouvons 2. Soient $1 \leq p \leq n$, nous trouvons

$$p\binom{n}{p} = \frac{n!}{(p-1)!(n-p)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(p-1)!(n-1-(p-1))!} = n\binom{n-1}{p-1}.$$

Prouvons 3. Soit $p < n$,

$$\begin{aligned} \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} = \frac{n!(p+1) + n!(n-p)}{(p+1)!(n-p)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n+1-(p+1))!} = \binom{n+1}{p+1}. \end{aligned}$$

Il est souvent plus facile de partir de l'expression la plus complexe pour se ramener à l'expression la plus simple. Cela vient du fait qu'il est plus simple de factoriser que de développer (dans ce dernier cas, on est souvent amené à deviner les termes à ajouter).

Proposons une autre preuve. Remarquer que $\binom{n+1}{p+1}$ est le nombre de parties à $p+1$ éléments de E. Choisissons $a \in E$. Une partie à $p+1$ éléments de E peut être de deux types : ou bien elle contient a, et dans ce cas là, elle correspond à une partie à p éléments de $E \setminus \{a\}$, qui a n éléments. Ou bien elle ne contient pas a. Dans ce cas, elle correspond à une partie à $p+1$ éléments de $E \setminus \{a\}$. Ainsi,

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1},$$

le premier terme du membre de droite comptant le nombre de parties du premier type, et le second celles du second type.

Montrons 4 par récurrence. Soit $n \in \mathbb{N}$, définissons

$$\mathscr{H}_n : \text{Pour tout } a, b \in \mathbb{R},\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Pour $n = 0$, le résultat est clair car $(a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0} a^0 b^0$.

Supposons $\mathscr{H}_n$ vraie et montrons $\mathscr{H}_{n+1}$. Nous avons

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b)\Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\Big) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n+1-(k+1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n+1-(k+1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

Dans la deuxième égalité, nous avons utilisé $\mathscr{H}_n$. Maintenant, posons l'application bijective de $\{0, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots, n+1\}$ qui à k associe $k' = k+1$. En remplacant $k+1$ par k' dans la première somme, nous trouvons

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \sum_{k'=1}^{n+1} \binom{n}{k'-1} a^{k'} b^{n+1-k'} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \Big(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\Big) a^k b^{n+1-k} \ + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \ + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

Dans la troisième égalité, nous avons utilisé la formule de Pascal et le fait que $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = 1$. □

La preuve précédente contient un argument classique, mais très important. Le changement d'indices $k \mapsto k' = k+1$ dans la somme est justifié comme ceci. Le signe $\sum_{i\in I} a_i$ est un raccourci permettant d'affirmer que l'on somme tous les éléments a_i, pour $i \in I$. Si l'on se donne une bijection $\varphi : J \to I$, alors $\sum_{j\in J} a_{\varphi(j)}$ signifie la somme de tous les éléments $a_{\varphi(j)}$, pour $j \in J$. Mais ces éléments sont exactement les a_i pour $i \in I$. On vient de faire un changement de variable dans la somme. Nous rencontrerons de nombreuses instances de ce principe. À chaque fois, il est possible de l'écrire comme suit : posons la bijection $\varphi : J \to I$, alors

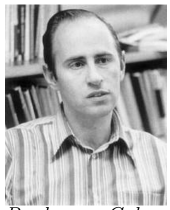
$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J} a_{\varphi(j)}.$$

Avec de l'habitude, nous effectuerons les changements de somme sans les justifier.

Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796) Il est aussi à l'origine du déterminant de Vandermonde, que vous rencontrerez souvent en algèbre.

La formule du binôme remonte en fait à Pascal (1654). La preuve originale utilise le triangle de Pascal, qui est construit comme suit

$$\begin{array}{ccccccccc}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
\binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots & \binom{n}{p} & \cdots & \binom{n}{n} \\
\binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \binom{n+1}{2} & \cdots & \binom{n+1}{p} & \cdots & \binom{n+1}{n} & \binom{n+1}{n+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$



Paul Cohen (américain 1934-2007) Il inventa la méthode du forcing en logique et l'utilisa conjointement avec les travaux de Fraenkel afin de montrer l'indépendance de l'axiome du choix et de l'hypothèse du continu.

Nous obtenons donc

$$\begin{array}{cccccc}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
\end{array}$$

Exercice 32. Soient E et F deux ensembles finis.

1. Montrer que $\mathrm{Card}(E\times F) = \mathrm{Card}(E)\cdot\mathrm{Card}(F)$ par récurrence sur $\mathrm{Card}(F) \geq 1$. On pourra prouver puis utiliser le fait que pour tout $a \in E$, $E\times F$ et l'union de $(E \setminus \{a\}) \times F$ et F sont en bijection.
2. Montrer que $\mathrm{Card}(E^F) = \mathrm{Card}(E)^{\mathrm{Card}(F)}$ par récurrence sur $\mathrm{Card}(F) \geq 1$. On pourra prouver puis utiliser le fait que pour tout $a \in F$, E^F et $E^{F\setminus\{a\}} \times E$ sont en bijection.

Euclide (grec 323-283 BC) père de la géométrie. Il écrivit "les éléments".

Exercice 33. Soient E et F deux ensembles tels que $\mathrm{Card}(E) = p$ et $\mathrm{Card}(F) = n$. Montrer que le nombre d'injections de E dans F est donné par

$$\begin{cases} n(n-1)\cdots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!} & \text{si } p \leqslant n, \\ 0 & \text{si } p > n. \end{cases}$$

Exercice 34 (Formule du Crible). ☠ Soient $I = \{1,\dots,n\}$ un ensemble fini et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties d'un ensemble fini. Montrer par récurrence sur n que

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{J\subset I \text{ avec } J\neq\varnothing} (-1)^{1+\mathrm{Card}(J)}\,\mathrm{Card}\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right).$$

Exercice 35 (Formule de Vandermonde)**.** Montrer en utilisant une récurrence sur q (trouver quelle est la bonne hypothèse de récurrence) puis en utilisant une méthode par bijection que pour tout $n, p, q \in \mathbb{N}$ tels que $n \leq p + q$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}.$$

Tenter de faire une récurrence sur n. Est-ce plus difficile ?

Exercice 36. Soit $n \geq 1$.

1. Quel est le nombre de couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $\max(|x|, |y|) \leq n$?
2. Quel est le nombre de couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $\max(|x|, |y|) = n$?
3. Quel est le nombre de couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $|x| + |y| \leq n$?

Exercice 37. Soit $n \geqslant 2$, posons $E = \{1, 2, \dots n\}$. Combien existe-il de couples $(x, y) \in E \times E$ tels que

1. $x + y = n$?
2. $x \neq y$?
3. $x < y$?

Exercice 38. Une partition de n en p entiers est un p-uplet $(n_1, \dots, n_p)$ tel que $n_1 + \cdots + n_p = n$ (on rappelle que l'ordre est important dans un p-uplet). Montrer que le nombre de partitions de n en p entiers vaut $\binom{n+p}{p}$ (*indication :* on pourra penser à l'image de p feuilles noires insérées entre n boules blanches alignées).

2.4 Ensembles infinis

Afin de manipuler efficacement les ensembles infinis, nous avons maintenant besoin d'un nouvel et dernier axiome. Celui-ci affirme qu'il est possible de choisir un élément dans chaque ensemble d'une famille quelconque d'ensemble.

Axiome 6 (axiome du choix) Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles non-vides, alors il existe une famille d'éléments $(x_i)_{i \in I}$ telle que $x_i \in E_i$ pour tout $i \in I$.

En 1963, Cohen prouva que cet axiome est indépendant des axiomes présentés précédemment. Certaines personnes refusent l'utilisation de cet axiome, qui n'est pas nécessairement intuitif (il implique certaines propriétés appelées paradoxes). Ainsi, l'axiome du choix illustre à merveille l'arbitraire du choix des axiomes. Par exemple, les axiomes d'Euclide, lorsque modifiés, mènent aux géométries hyperbolique et sphérique. De même qu'une modification des axiomes d'Euclide crée d'autres géométries, différents axiomes de la théorie des ensembles mèneraient à "différentes mathématiques", dans lesquelles certains théorèmes vrais dans notre contexte pourraient devenir faux.

Pour plus de détails, on pourra se reporter à l'ouvrage "Le Vrai, le Faux et l'incertain" (Tangente hors série 15).

La notion d'équipotence est tout à fait valable dans le cas des ensembles infinis. Deux ensembles infinis ont alors le *même cardinal* s'ils sont équipotents.

Définition 2.18. Soit E un ensemble, E est *dénombrable* s'il existe une surjection de $\mathbb{N}$ dans E. Dans le cas contraire, il est *indénombrable*.

Ainsi, E est dénombrable si E est fini ou en bijection avec $\mathbb{N}$. De façon claire, toute partie de $\mathbb{N}$ est dénombrable. En utilisant les propriétés des sections précédentes, E est dénombrable si et seulement si il existe une injection de E dans $\mathbb{N}$.

De plus, il est possible de montrer que tout ensemble infini contient un sous-ensemble infini dénombrable (voir l'exercice 40). D'un certain point de vue, les ensembles infinis dénombrables sont les plus petits ensembles infinis.

Proposition 2.19. *1.* $\mathbb{N}^2$ *est dénombrable.*

2. Soient E et F deux ensembles dénombrables, alors $E \times F$ est dénombrable.

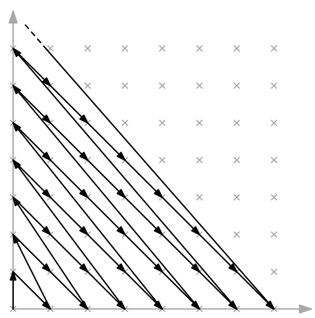
3. Une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Remarquer que la propriété 1 affirme qu'il n'y a pas plus d'éléments dans $\mathbb{N}^2$ que dans $\mathbb{N}$.

Démonstration. Montrons 1. Nous allons construire une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$. Posons

$$f \ : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (m,n) & \longmapsto & \dfrac{(m+n)(m+n+1)}{2} + m \end{array}$$

Il est possible d'interpréter l'inverse de cette bijection comme une indexation de $\mathbb{N}^2$ (voir sur la figure suivante) :



La fonction f est alors clairement bijective (cela peut également être vérifié par le calcul).

Montrons 2. Soient $f : \mathbb{N} \to E$ et $g : \mathbb{N} \to F$ surjectives. Définir $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to E \times F$ par $h(m,n) = (f(m), g(n))$. Montrons que h est surjective. Soit $(x,y) \in E \times F$. Puisque f est surjective, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $f(m) = x$. De même, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(n) = y$. Nous en déduisons que $h(m,n) = (x,y)$. Ainsi, h est surjective et $E \times F$ est dénombrable.

Montrons 3. Soit $E = \cup_{i \in I} E_i$ une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables. Par définition, pour tout $i \in I$, E_i est dénombrable donc il existe une surjection $f_i : \mathbb{N} \to E_i$. Définissons $F : \mathbb{N} \times I \to E$ par $F(n,i) = f_i(n)$. Maintenant, soit $y \in E$, il existe i tel que $y \in E_i$, et donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $F(n,i) = f_i(n) = y$. Ainsi, la fonction F est surjective. Puisque $\mathbb{N} \times I$ est dénombrable, il existe une surjection $G : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times I$. Alors, $F \circ G$ nous fournit un exemple de surjection de $\mathbb{N}$ dans E. Ceci implique la dénombrabilité de E. □

Théorème 2.20 (Cantor, 1874). *L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.*

Démonstration. Nous présentons l'argument de la diagonale de Cantor. C'est un raisonnement par l'absurde.

Supposons qu'il existe une bijection f entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$. Écrivons chaque réel $f(n)$ en base 10 et intéressons nous aux chiffres après la virgule. Notons $f_1(n)$ le premier chiffre après la virgule, $f_2(n)$ le deuxième, ec... Notre but est de construire un nombre réel qui n'est pas dans l'image de f, ce qui représentera une contradiction puisque f est supposée bijective donc en particulier surjective.

Définissons le réel x entre 0 et 1 dont le k-ième chiffre après la virgule est un chiffre x_k choisis entre 0 et 8 et différent du k-ième chiffre après la virgule de $f(k)$. Montrons que x n'appartient pas à l'image de f. En effet, si $x = f(n)$ pour un certain n, on a alors que le n-ième chiffre après la virgule de x et de $f(n)$ sont à la fois différents et égaux, ce qui est absurde. Ce raisonnement très simple conclut la preuve. □

Expliquons rapidement pourquoi nous avons choisi de ne jamais prendre 9 comme chiffre après la virgule pour x. En effet, cela vient du fait que $0.1199999999999\cdots = 1,1200000000\ldots$. Ainsi, deux réels peuvent être égaux sans que tous leurs chiffres après la virgule ne le soient (bien entendu, cela n'est vrai que lorsque nous avons une suite infinie de 9). Vous discuterez le développement décimal et ses subtilités plus tard dans votre cursus.

L'argument est appelé argument de la diagonale de Cantor pour la raison suivante. Écrivons les décimales de $f(1)$, $f(2)$, etc dans un tableau :

$$\begin{array}{l} \ldots, \mathbf{f_1(1)} f_2(1) f_3(1) \ldots f_k(1) \ldots \\ \ldots, f_1(2) \mathbf{f_2(2)} f_3(2) \ldots f_k(2) \ldots \\ \ldots, f_1(3) f_2(3) \mathbf{f_3(3)} \ldots f_k(3) \ldots \\ \vdots \\ \ldots, f_1(3) f_2(3) f_3(3) \ldots \mathbf{f_k(k)} \ldots \end{array}$$

On choisit alors x de telle sorte que x_k est différent de $f_k(k)$ pour tout k, c'est à dire qu'il ne correspond pas aux éléments de la diagonale.

Ce théorème tient une place particulière dans la théorie mathématique. Il relança la théorie des ensembles décrite dans le chapitre précédent. Nous laissons la preuve de ce théorème en exercice 41.

Pour la culture, mentionons deux choses. Premièrement, le théorème 1.23 montre qu'il n'y a pas d'ensemble le plus gros. Deuxièmement, la question de l'existence d'un ensemble de cardinal strictement "entre" les cardinaux de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ a été centrale dans les mathématiques du vingtième siècle. Cohen montra finalement que l'hypothèse du continu (c'est à dire le postulat qu'il n'existe pas de cardinaux intermédiaires entre $\mathbb{N}$

et $\mathbb{R}$) est indépendant des axiomes de Zermelo-Fraenkel : il est impossible de montrer si l'hypothèse est vraie ou fausse en utilisant seulement ces axiomes.

Exercice 39. Montrer en justifiant soigneusement que $\mathbb{N}$ et $2\mathbb{N}$ sont équipotents. *Il y a donc autant de nombres entiers que de nombres pairs.*

Exercice 40. Montrer que tout ensemble infini contient un sous-ensemble infini dénombrable (utiliser l'axiome du choix).

Exercice 41 ($\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable)**.**

1. Montrer que $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.
2. ☠☠ En utilisant le développement en base 2 d'un nombre réel, montrer qu'il existe une injection de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ dans $[0,1]$. En utilisant la bijection entre les parties de $\mathbb{N}$ et les fonctions caractéristiques, montrer qu'il existe une injection de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ dans $[0,1]$.
3. En déduire que $\mathbb{R}$ est indénombrable.

Exercice 42. Soit E un ensemble, montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :
(i) E est infini.
(ii) $\mathbb{N}$ s'injecte dans E.
(iii) Il existe une suite d'éléments deux à deux distincts de E.

(*indication :* on pourra procéder en montrant (i)⇒(ii), (ii)⇒(iii), (iii)⇒(i). Pour montrer (i)⇒(ii), on pourra construire la fonction par récurrence.)

Chapitre 3: Les nombres rationnels et réels

3.1 L'ensemble des nombres rationnels

L'ensemble $\mathbb{Z}$ a le gros défaut suivant : seuls $n = 1$ et $n = -1$ admettent un inverse, c'est-à-dire un élément $m \in \mathbb{Z}$ tel que $nm = 1$. Nous remédions à ce problème en introduisant l'ensemble des nombres rationnels.

Définition 3.1. Il existe un ensemble, noté $\mathbb{Q}$, et des opérations $+$, $\times$ et $\leq$ telles que

1. Les éléments de $\mathbb{Q}$ sont exactement les éléments de la forme $r = \frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
2. Pour tout $r = \frac{p}{q}$ et $r' = \frac{p'}{q'}$ dans $\mathbb{Q}$,

$$r + r' = \frac{pq' + p'q}{qq'} \quad \text{et} \quad rr' = \frac{pp'}{qq'} \quad \text{et} \quad r \leq r' \text{ ssi } pq' \leq p'q.$$

Il est en fait possible de construire les nombres rationnels à partir des entiers relatifs et des axiomes.

Proposition 3.2 (Propriétés de l'ordre)**.** *Soient $a, b, x, y \in \mathbb{Q}$.*

1. *$x \leq y$ ou $y \leq x$ (on dit alors que $\leqslant$ est un ordre total).*
2. *$x \leqslant y$ implique que $x + a \leqslant y + a$.*
3. *$x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$ implique que $xy \geq 0$.*
4. *Si $a \leqslant b$ et si $x \leqslant y$, alors $a + x \leqslant b + y$.*
5. *Si $a > 0$ et $x \leqslant y$, alors $ax \leqslant ay$. Si $a < 0$ et $x \leqslant y$, alors $ay \leqslant ax$.*
6. *Si $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 \leqslant x \leqslant y$, alors $ax \leqslant by$.*
7. *x et $\frac{1}{x}$ sont de même signe.*
8. *$0 \leqslant x \leqslant y$ implique $\frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{x}$.*

La preuve de cette proposition étant très simple, nous la laissons en exercice.

Bien que $\mathbb{Q}$ ait l'air beaucoup plus grand que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$, ces trois ensembles sont en fait équipotents.

Théorème 3.3. *L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dénombrable.*

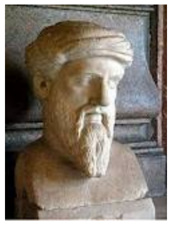
Démonstration. Il existe une surjection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z}^2$ puisque ce dernier est dénombrable d'après le chapitre précédent. Ainsi, $\mathbb{Q}$ est dénombrable. □

L'ensemble $\mathbb{Q}$ a trois gros "défauts" que nous présentons maintenant.

1. Certaines équations simples n'ont pas de solution dans $\mathbb{Q}$, l'exemple le plus classique étant $x^2 = 2$.

   Démonstration. Pour cela, raisonnons par l'absurde. Soient $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $2 = (\frac{p}{q})^2$. Quitte à diviser par la plus grande puissance de deux divisant p et q, on peut supposer que p ou q n'est pas divisible par 2. Maintenant, l'équation se réécrit $2q^2 = p^2$, ce qui implique que p^2 est divisible par 2. Par conséquent, p est divisible par 2. Ainsi, il existe $\tilde{p} \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2\tilde{p}$. En réinjectant cette expression dans l'équation, nous obtenons $2q^2 = 4\tilde{p}^2$, ce qui nous mène à $q^2 = 2\tilde{p}^2$. Ainsi, q^2 et donc q sont également divisibles par 2, ce qui est en contradiction avec le fait que seul un des deux entiers p, q peut être divisible par 2. □

   Ce fait est souvent appelé irrationalité de $\sqrt{2}$. La légende voudrait qu'un élève de la célèbre école Pythagoricienne (cela remonterait donc à l'antiquité) aurait découvert que $\sqrt{2}$ n'est pas commensurable, c'est à dire rationnel en langage moderne, et qu'il aurait alors été expulsé de l'école, tant l'idée de nombres non commensurables était impensable à l'époque. À vrai dire, de nombreuses astuces permirent aux mathématiciens de travailler sans définir correctement les nombres irrationnels pendant plus de 2000 ans, et ces derniers ne furent définis qu'au dix-neuvième siècle.



Pythagore (grec 570-495 BC) mathématicien et philosophe. Peu d'information a survécu sur l'école de pensée qu'il fonda, et il n'est pas certain que Pythagore ait travaillé lui même sur le théorème de Pythagore.

2. Les nombres rationnels sont mal adaptés à la notion d'infini. En effet, Euclide considera les suites $x_0 = 1$ et $y_0 = 1$ et

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = x_n + y_n \end{cases}$$

   afin d'approximer la diagonale d'un carré. En effet, les grecs avaient l'intuition que $\frac{x_n}{y_n}$ s'approche de plus en plus de $\sqrt{2}$. Nous aimerions dire que cette suite converge, mais malheureusement, ce n'est pas le cas dans $\mathbb{Q}$.

   Les grecs résolvèrent ce problème en refusant de considérer l'infini comme une notion mathématique, c'est au dix-neuvième siècle que les mathématiciens se tournèrent enfin vers cette question.

3. Certains ensembles bornés ne possèdent pas d'infimum ou de supremum. Par exemple, $A = \{x \in \mathbb{Q}, x^2 \leqslant 2\}$. Nous laissons la preuve de ce résultat pour l'exercice 44.

Pour toutes ces raisons, nous introduisons un nouvel ensemble, appelé ensemble des nombres réels, dans la prochaine section.

Exercice 43. Montrer que $x^3 = 17$ ne possède pas de solution dans $\mathbb{Q}$. Montrer que $x^2 + x + 1 = 0$ ne possède pas de solution dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 44. Montrer que $\{x \in \mathbb{Q}, x^2 \leqslant 2\}$ ne possède pas de supremum dans $\mathbb{Q}$.

3.2 L'ensemble $\mathbb{R}$

3.2.1 Définitions

Théorème 3.4. *Il existe un ensemble $\mathbb{R}$, contenant $\mathbb{Q}$ et muni d'opérations $+$, $\times$, et d'un ordre total $\leqslant$ qui prolongent les opérations et l'ordre de $\mathbb{Q}$.*
De plus si $E \subset \mathbb{R}$ est non-vide et majoré, alors E admet une borne supérieure.

L'ensemble $\mathbb{R}$ est appelé le corps des nombres réels. Les ensembles suivants seront utilisés fréquemment :

$$\mathbb{R}_+ \overset{\text{not.}}{=} \{x \in \mathbb{R}, x \geqslant 0\} \qquad \mathbb{R}_- \overset{\text{not.}}{=} \{x \in \mathbb{R}, x \leq 0\} \qquad \mathbb{R}^* \overset{\text{not.}}{=} \{x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}.$$

Richard Dedekind (allemand 1831-1916) Proposa la première construction des nombres réels par l'intermédiaire de la notion de coupures. Il rencontra Cantor plusieures années plus tard, et fut l'un de ses plus fervents défenseurs dans son opposition avec Kronecker.

La preuve de ce théorème (il faut en effet montrer l'existence au sens mathématique, c'est-à-dire à partir des axiomes) remonte à 1872 (Dedekind). La construction utilisée par Dedekind s'appelle la construction par les coupures. Cette construction réconcilia enfin l'intuition grec d'infini avec la rigueur nécessaire à l'exercice des mathématiques, et en particulier du calcul différentiel. On parle parfois de $\mathbb{R}$ comme étant le premier ensemble "continu".

Les propriétés de la proposition 3.2 sont encore valides dans $\mathbb{R}$. Notez que si une partie E de $\mathbb{R}$ est non vide et minorée, alors elle admet une borne inférieure. La caractérisation du supremum prouvé dans le premier chapitre entraine la caractérisation suivante sur $\mathbb{R}$:

$$\alpha = \sup E \iff \begin{cases} \forall x \in E, x \leqslant \alpha \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in E, \alpha - \varepsilon < x \end{cases}$$

Pour un ensemble $F \subset E$ et $a \in E$, notons $a + F = \{a + x, x \in F\}$ et $aF = \{ax, x \in F\}$.

Proposition 3.5. *Soient $F \subset \mathbb{R}$ non vide et majoré et $a \in \mathbb{R}$.*

$$\sup(a + F) = a + \sup F \quad \textit{et} \quad \sup(aF) = a \sup F \ \textit{si}\ a > 0.$$

Démonstration. Vérifions que $a + \sup F$ satisfait la caractérisation précédente. Soit $x \in a + F$, il existe $y \in F$ tel que $x = a + y$. Puisque $y \leq \sup F$, $x = a + y \leq a + \sup F$. De même, soit $\varepsilon > 0$. Par la caractérisation de $\sup F$, il existe $z \in F$ tel que $\sup F - \varepsilon < z$. Ainsi, $a + \sup F - \varepsilon < a + z$ ce qui permet de conclure.

La preuve pour aF suit les mêmes lignes. □

Définissons maintenant les intervalles. Soit $\mathbb{R}$. Soient $a \leqslant b$ deux réels, on pose

$$\begin{aligned} [a,b] &\overset{\text{not.}}{=} \{x \in \mathbb{R}, a \leqslant x \leqslant b\}, \\ [a,b) &\overset{\text{not.}}{=} \{x \in \mathbb{R}, a \leqslant x < b\}, \\ (a,b] &\overset{\text{not.}}{=} \{x \in \mathbb{R}, a < x \leqslant b\}, \\ (a,b) &\overset{\text{not.}}{=} \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}. \end{aligned}$$

De même, on pose

$$\begin{aligned} [a,\infty) &\overset{\text{not.}}{=} \{x \in \mathbb{R}, a \leqslant x\}, \\ (a,\infty) &\overset{\text{not.}}{=} \{x \in \mathbb{R}, a < x\}, \\ (-\infty,b] &\overset{\text{not.}}{=} \{x \in \mathbb{R}, x \leq b\}, \\ (-\infty,b) &\overset{\text{not.}}{=} \{x \in \mathbb{R}, x < b\}. \end{aligned}$$

Parfois, on utilise la notation $]a, b[$ au lieu de (a, b). Les deux notations sont valides.

Les extrémités d'un intervalle sont ses bornes supérieures et inférieures. Lorsque $a < b \in \mathbb{R}$, la longueur d'un intervalle d'extrémités a et b est $b - a$. L'ensemble $[a, b]$ (respectivement (a, b)) est appelé *l'intervalle fermé (*respectivement *ouvert) d'extrémités* a et b de *longueur* $b - a$.

Théorème 3.6. *Soit $I \subset \mathbb{R}$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*
(i) I est un intervalle.
(ii) $\forall \alpha, \beta \in I, [\alpha, \beta] \subset I$.

Démonstration. (i) implique (ii) est facile. Montrons (ii) implique (i). Si $I = \varnothing$, alors $I = (a, a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ et nous avons fini. Supposons donc que I est non vide. Traitons le cas où I est majoré et minoré, les autres cas se déduisant facilement en utilisant les mêmes arguments. Dans ce cas I possède un supremum, noté a et un infimum, noté b. Si $a = b$, $I = \{a\}$ et la preuve est finie. Supposons donc $a < b$. Montrons que $(a, b) \subset I \subset [a, b]$, ce qui implique le résultat. Le fait que $I \subset [a, b]$ est trivial par définition de a et b. Maintenant, Fixons $0 < \varepsilon < \frac{1}{2(b-a)}$. Par définition de a et b, il existe $\alpha, \beta \in I$ tels que $\alpha < a + \varepsilon < b - \varepsilon < \beta$. Ainsi, $[a + \varepsilon, b - \varepsilon] \subset [\alpha, \beta] \subset I$. Puisque ce résultat est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, nous obtenons que tout $x \in (a, b)$ est dans I. □

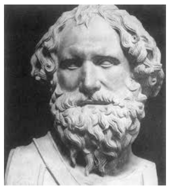
3.2.2 Principe d'Archimède

Théorème 3.7. *L'ensemble $\mathbb{N}$ n'est pas majorée dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Soir $\alpha = \sup \mathbb{N}$. Nous utiliserons la caractérisation de supremum décrite dans la subsection précédente. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > \alpha - 1$, c'est-à-dire $n + 1 > \alpha$, ce qui est contradictoire. □

Corollaire 3.8 (Principe d'Archimède)**.** *Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.*

Démonstration. Puisque $\mathbb{N}$ n'est pas majoré, il existe $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Nous avons alors $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$. □



Archimede de Syracuse (grec 287-212 BC) Expliqua le principe du levier et de la poussée d'Archimède (afin de mesurer le volume d'un tas d'or). Auteur de l'exclamation "Eureka !"

3.2.3 Valeur absolue sur $\mathbb{R}$

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ les réels

$$\max(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq y \\ y & \text{si } x \leq y \end{cases} \qquad \min(x, y) = \begin{cases} y & \text{si } x \geq y \\ x & \text{si } x \leq y \end{cases}$$

sont appelés *maximum* et *minimum* de x et y.

Définition 3.9. Soit $x \in \mathbb{R}$ la *valeur absolue* de x est donnée par $|x| = \max(x, -x)$.

La définition même de $|\cdot|$ nous indique comment prouver que $|x| \leq a$. Il faut montrer que $x \leq a$ et $-x \leq a$. Cette astuce utile est à retenir : une inégalité invoquant une valeur absolue se montre en montrant deux inégalités.

On peut définir la valeur absolue de façon alternative en posant

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Ainsi, les valeurs absolues amènent parfois à faire des raisonnements par distinction de cas.

Proposition 3.10. *Soient $x, y \in \mathbb{R}$.*

1. $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$
2. $|xy| = |x||y|$
3. *(Inégalité triangulaire)* $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x + y| \leqslant |x| + |y|$

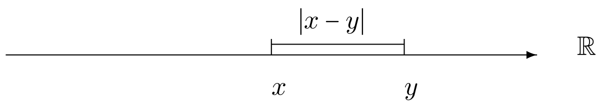
Démonstration. Montrons 1. Puisque $|x| = 0$, nous avons $x \leq 0$ et $-x \leq 0$, i.e. $x \leq 0$ et $x \geq 0$. Ainsi, $x = 0$.

Montrons 2. Traitons différents cas selon les signes de x et y. Si $x, y > 0$, nous obtenons $x = |x|$ et $y = |y|$ et l'égalité est claire. Si $x, y < 0$, nous obtenons $x = -|x|$ et $y = -|y|$ et l'égalité est également claire. Les cas $x > 0$ et $y < 0$ ou $x < 0$ et $y > 0$ suivent aussi facilement.

Montrons 3. Commençons par l'inégalité de droite. Les inégalités $x \leq |x|$ et $y \leq |y|$ impliquent $x + y \leq |x| + |y|$. De même, $-x \leq |x|$ et $-y \leq |y|$ impliquent $-(x + y) \leq |x| + |y|$. Ainsi, $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Pour l'inégalité de gauche, appliquons l'inégalité de droite à $x' = -x$ et $y' = x + y$ afin d'obtenir $|y| = |x' + y'| \leq |x'| + |y'| = |x| + |x + y|$ qui se réécrit comme $|y| - |x| \leq |x + y|$. L'inégalité $|x| - |y| \leq |y + x|$ suit de la même preuve (par symétrie de x et y). Ensembles, ces deux inégalités impliquent $\big||x| - |y|\big| \leq |x + y|$. □

Les propriétés de la fonction d : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & |x - y| \end{array}$ en font une notion de "distance" (vous verrez la définition mathématique de ces objets plus tard). Ainsi, nous utiliserons l'intuition selon laquelle $|x - y|$ représente la distance de x à y dans $\mathbb{R}$.



Mentionons que $|x - y| \leq \varepsilon$ est équivalent à $x - y \leq \varepsilon$ et $-(x - y) \leq \varepsilon$, ie $x - \varepsilon \leq y \leq x + \varepsilon$.

3.2.4 Densité d'un ensemble dans $\mathbb{R}$

Définition 3.11. Soit $A \subset \mathbb{R}$, A est *dense* dans $\mathbb{R}$ si pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe $a \in A$ tel que $|x - a| \leqslant \varepsilon$.

En quelques mots, être dense signifie que pour tout élément x de $\mathbb{R}$, il existe des éléments de A arbitrairement proches de x.

Exemple : $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Exemple : Si A est dense dans $\mathbb{R}$ et $A \subset B$, alors B est dense dans $\mathbb{R}$.

Proposition 3.12. *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*
(i) A est dense *dans $\mathbb{R}$,*
(ii) Pour tout $x < y \in \mathbb{R}$, il existe $r \in A$ tel que $x < r < y$.

Démonstration. Montrons que (i) implique (ii). En appliquant (i) à $a = \frac{x+y}{2}$ et $0 < \varepsilon < (y-x)/2$, il existe $r \in A \cap [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \subset (x,y)$, ce qui est l'énoncé. Pour montrer (ii) implique (i), appliquer (ii) à $x = a$ et $y = a + \varepsilon$. □

Proposition 3.13. *Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.*

Avant la démonstration, introduisons une notion très utile lorsque l'on manipule les nombres réels.

Définition 3.14. Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que

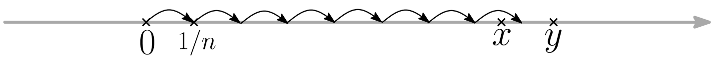
$$n \leq x < n + 1.$$

L'entier n est appelé *partie entière* de x et est noté $\lfloor x \rfloor$.

La justification de la définition provient du fait que $\{n \in \mathbb{N} : n \leq x\}$ est majoré et possède donc un plus grand élément. Nous portons votre attention sur le fait que l'inégalié de gauche est large ($\leq$) alors que celle de gauche est stricte ($<$).

Al-Khowârizmî (perse 780-850) fut longtemps considéré comme le père de l'algèbre (en fait, ses travaux sont probablement inspirés de travaux plus agés de mathématiciens indiens et grècs). Mentionons que algèbre provient du perse Al-jabr.

Preuve de la proposition 3.13. Montrons que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Nous pourrons nous inspirer de la figure suivante.



Soit $x < y$. Le principe d'Archimède appliqué à $\varepsilon = y - x$ implique l'existence de $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < \frac{1}{n} < y - x$. En posant $r = \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}$, nous obtenons

$$x = \frac{nx}{n} < \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n} \leq \frac{nx+1}{n} = x + \frac{1}{n} < x + (y - x) = y.$$

Si $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, alors $\sqrt{2} + \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (à montrer). Ainsi, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. □

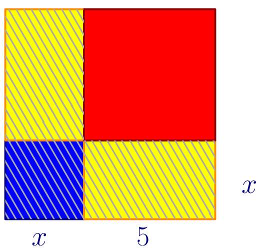
François Viète (français 1540-1603) Il introduisit les lettres pour les variables d'équations (cette nouveauté eut beaucoup d'importance pour le développement de l'algèbre moderne).

3.2.5 Résolution des équations du second degré sur $\mathbb{R}$

La résolution des équations du second degré remonte probablement à plus d'un millénaire. Le premier manuscrit contenant la solution d'une équation du second degré date de 1342. Il présente la solution d'Al-Khowârizmî à l'équation

$$x^2 + 10x = 39.$$

Le mathématicien procède géométriquement. Il dessine un carré de côté x pour représenter une aire x^2 et deux rectangles de côtés 5 et x juxtaposés au carré de la façon décrite sur la figures suivante. L'équation montre que l'aire hachurée est 39, par conséquent, l'aire du carré entier est $39 + 25 = 64 = 8 \cdot 8$. Ainsi, $5 + x = 8$ ce qui donne $x = 3$. Différentes équations peuvent nécessiter des dessins différents. Nous présentons maintenant l'approche moderne, pûrement algébrique mais beaucoup plus systématique. Le premier mathématicien à utiliser une théorie générale est François Viète en 1591.



Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) pionnier de l'analyse (son "cours d'analyse" à l'école polytechnique est un classique), il prouve rigoureusement des théorèmes de calcul infinitésimal et définit la continuité. Il influença également l'analyse complexe et l'algèbre. Il fut l'un des mathématiciens les plus prolifiques. Il était un catholique fervent et un royaliste forçonné, ce qui le mena à de nombreux conflits avec ses contemporains.

Donnons nous un triplet $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$ et considèrons l'équation

$$(E) \quad ax^2 + bx + c = 0,$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. La quantité $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelée *discriminant* de (E).

Théorème 3.15. *Supposons $a > 0$. Trois cas sont possibles :*

1. *$\Delta < 0$: $ax^2 + bx + c > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. En particulier, (E) n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$.*
2. *$\Delta = 0$: $ax^2 + bx + c \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. De plus, (E) a une unique solution $\frac{-b}{2a}$ sur $\mathbb{R}$.*
3. *$\Delta > 0$: $ax^2 + bx + c$ prend des valeurs positives et négatives. De plus, (E) a deux solutions $x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ sur $\mathbb{R}$.*

Pour le cas $a < 0$, on inverse les signes.

Démonstration. Rappelons que $a > 0$. Nous avons,

$$ax^2 + bx + c = a\Big[\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\Big] = a\Big[\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\Big].$$

En particulier, si $\Delta \leq 0$, alors $ax^2 + bx + c \geq 0$. De plus, si $\Delta > 0$, $ax^2 + bx + c = -\frac{\Delta}{4a} < 0$ en $x = -b/(2a)$ et $ax^2 + bx + c \geq 0$ pour x assez grand. Ainsi, nous avons bien les changements de signes précisé dans l'énoncé. De plus

$$\begin{aligned} (E) \quad &\iff \quad \Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ &\iff \quad \Big(2a\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)\Big)^2 = \Delta \end{aligned}$$

Maintenant, remarquez que le terme de gauche est positif ou nul. Ainsi, si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solutions. Si $\Delta \geq 0$, il est possible de prendre la racine carrée et nous obtenons le résultat. ☐

Hermann Schwarz (allemand 1843-1921) Connu principalement pour ses travaux en analyse complexe (principe de réflection de Schwarz, fonctions de Schwarz-Christoffel, etc).

L'absence de solution dans le cas $\Delta < 0$ est un défaut important de $\mathbb{R}$. Par exemple, l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$.

Remarquons l'observation suivante, à toujours garder dans le coin de la tête : la somme et le produit des solutions de l'équation peuvent être exprimés en fonctions des coefficients a, b et c.

$$\begin{cases} x_- + x_+ &= -\frac{b}{a} \\ x_- x_+ &= \frac{c}{a} \end{cases}$$

Inversement, pour $x, y \in \mathbb{R}$, x et y sont les racines de l'équation $t^2 - (x+y)t + xy = 0$ d'inconnue $t \in \mathbb{R}$.

Mentionons maintenant une inégalité fondamentale, qui sera utilisée dans différents cours le long de votre cursus.

Théorème 3.16 (Inégalité de Cauchy-Schwarz.)**.** *Soient* $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ *et* $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. *Alors*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

De plus, il y a égalité si et seulement s'il existe $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $a_i = xb_i$ *pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$.

Démonstration. Considérons l'équation (E) d'inconnue $x \in \mathbb{R}$,

$$(E) \quad \sum_{i=1}^{n} (a_i - xb_i)^2 = 0.$$

Puisque le terme de gauche est toujours positif ou nul, $\Delta \leq 0$. Ici,

$$\Delta = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \leq 0$$

ce qui nous donne l'inégalité immédiatement. De plus, $\Delta = 0$ ssi (E) admet une solution qui a son tour est équivalent à l'existence de $x \in \mathbb{R}$ (ce sera la solution de (E)) tel que $(a_i - xb_i)^2 = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. □

Jacob Bernoulli (suisse 1654-1705) Connu pour son travail "Ars Conjectandi" sur la thérie des probabilités et sa découverte de *e*. La famille Bernoulli est remplie de mathématiciens célèbres, son père ayant inventé les nombres de Bernoulli, et son frère Johann ayant été le précepteur d'Euler. De nombreux autres membres de la famille participèrent au développement des mathématiques de l'époque.

Exercice 45. Trouver les bornes supérieure et inférieure dans $\mathbb{R}$ des ensembles suivants. Préciser lorsque ce sont des minimums et maximums

1. $[2,3)$, $[2,3]$, $(2,3)$ et $(2,3]$.
2. $[-2,2] \cup (5,8)$.
3. $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$.
4. $\{x^2, x \in [-1,4)\}$.
5. $\left\{4 + \frac{1+(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Exercice 46. Soient E et F deux parties non vides et majorées. Définissons $E+F = \{x+y; x \in E; y \in F\}$.

1. Montrer que $\sup(E+F) \leq \sup(E) + \sup(F)$.
2. En utilisant la caractérisation du supremum dans $\mathbb{R}$ présentée en cours, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in E$ et $y \in F$ tels que
$$\sup(E) + \sup(F) \leq x + y + 2\varepsilon.$$
En déduire que
$$\sup(E) + \sup(F) \leq \sup(E+F) + 2\varepsilon.$$
3. Conclure que
$$\sup(E+F) = \sup(E) + \sup(F).$$

Hermann Minkowski (allemand 1864-1909) pionnier de l'utilisation de la géométrie pour résoudre des problèmes de théorie des nombres. Il contribua également à l'élaboration de la théorie de la relativité.

Exercice 47. Soit $F \subset E$ avec E non vide et bornée. Supposons que F est non vide. Montrer que $\inf E \leq \inf F \leq \sup F \leq \sup E$.

Exercice 48. Trouver les bornes supérieure et inférieure de $\{\frac{1}{n} + (-1)^n, n \in \mathbb{N}^*\}$.

Exercice 49 (Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$)**.** Considérons un ensemble non-vide G de $\mathbb{R}$ tel que pour tout $x, y \in G$, $x + y \in G$ et $-x \in G$.

1. Montrer que $0 \in G$ et que pour tout $x \in G$ et $n \in \mathbb{Z}$, $nx \in G$.
2. Supposons que $G \neq \{0\}$. Montrer que $a = \inf\{x > 0, x \in G\}$ est bien défini.
3. Donner des exemples de G pour lesquels $a = 0$ et d'autres pour lesquels $a > 0$.
4. Si $a = 0$, montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$ (on pourra s'inspirer de la preuve de la densité de $\mathbb{Q}$).
5. Supposons $a > 0$. Montrer que $G \cap]0, 2a[= \{a\}$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $G \cap]na, (n+2)a[= \{(n+1)a\}$. Conclure que $G = a\mathbb{Z}$.

6. Montrer que $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z} = \{m + n\sqrt{2}, m, n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

On vient de classifier les ensembles appelés sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$. Soit ils sont de la forme $a\mathbb{Z}$ pour un certain $a > 0$, qui est alors l'infimum des $x > 0$ dans le sous-groupe, soit ils sont denses. Ce résultat est fondamental et requis à l'examen.

Exercice 50 (Inégalités de Bernoulli)**.** Montrer que pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Exercice 51 (Inégalité de Minkowski)**.** En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer l'inégalité de Minkowski,

$$\forall a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}, \quad \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{1/2}.$$

Indication : Penser à élever au carré.

Cette inégalité est cruciale en mathématiques. Elle permet de montrer que la norme 2 (voir le cours plus tard) est bien une norme.

Exercice 52. Exprimer les deux réels x et y en fonction de $(x+y)/2$ et $(x-y)/2$. Utiliser l'inégalité triangulaire afin de montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|x| + |y| \leq |x+y| + |x-y|.$$

Exercice 53. Considérons une application f croissante de $[0,1]$ dans $[0,1]$. En considérant le supremum de l'ensemble $X = \{x, f(x) \leq x\}$, montrer qu'il existe $y \in [0,1]$ tel que $f(y) = y$.

Soit $f : I \to I$. Un point $\ell \in I$ est un *point fixe* de f si $f(\ell) = \ell$. Les théorèmes d'existence de points fixes d'applications sont très utiles. Nous appelons un théorème prouvant l'existence d'un point fixe un *théorème de point fixe*. Nous verrons de nombreuses applications (nous en avons déjà rencontré une cachée dans l'exercice 24).

Exercice 54. Résoudre les équations suivantes en la variable $x \in \mathbb{R}$.

1. $x^2 - 5x + 6 = 0$
2. $x^2 + (1+\sqrt{2})x - \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$
3. $x^2 - 34x + 289 = 0$.

Exercice 55. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, déterminer combien de solutions en $x \in \mathbb{R}$ l'équation suivante possède :

$$yx^2 - 2(y^2+1)x - y^3 - y = 0.$$

Exercice 56 (Classification des morphismes monotones de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}, +)$)**.** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$

1. Montrer que $f(0) = 0$.
2. Montrer que $f(n) = f(1)n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que $f(p) = f(1)p$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$.
4. Montrer que $f(r) = f(1)r$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$.
5. Supposons f monotone. Montrer que $f(x) = f(1)x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. *Indication :* utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Nous venons de montrer que tout morphisme monotone de $(\mathbb{R}, +)$ dans lui-même est linéaire. L'exercice 121 va plus loin et montrer que l'hypothèse de monotonie peut être remplacé par d'autres hypothèses, comme par exemple la continuité.

Exercice 57 (Inégalité de réordonnement)**.** Soient $n \geq 2$ et $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$ et $0 < b_1 < b_2 < \dots < b_n$. Montrer que pour toute transposition $\tau = (i, j)$ (i.e. la permutation qui envoie i sur j et j sur i, et qui fixe tous les autres éléments),

$$\sum_{i=1}^n a_i b_{\tau(i)} \leq \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

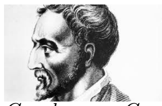
En déduire que pour toute permutation $\sigma \in \mathscr{S}([\![1, n]\!])$,

$$\sum_{i=1}^n a_i b_{\sigma(i)} \leq \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

(*Indication :* admettre que toute permutation s'écrit comme produit de transpositions)

Ainsi, pour maximiser la somme, il est préférable d'associer les termes les plus grands entre eux.

Chapitre 4: Les nombres complexes



Gerolamo Cardano (italien 1501-1576) Joueur invétéré, il développa des facultés de joueur d'échec et de miseur. Dans son ouvrage "Liber de ludo aleae", il traite de la théorie des probabilités.

Leonhard Euler (suisse 1707-1783) profondes contributions à l'analyse (en particulier l'expression en série entière de e et de l'inverse de la tangente), l'introduction des symboles $f(x)$ et i, à l'étude des nombres premiers (il prouva que $2^{31}-1$ est premier. Ce nombre resta le plus grand nombre premier connu jusqu'en 1867), théorie des graphes (formule d'Euler, problème des ponts de Königsberg), astronomy, etc. Euler devint aveugle en 1766, ce qui ne l'empècha pas de continuer à faire des mathématiques. Il devint l'un des mathématiciens les plus prolifiques. Laplace dira "lisez Euler, lisez Euler, il est notre maitre à tous".

Cardano (1545) fut le premier à rencontrer des nombres complexes en posant la question de l'existence de solutions dites "imaginaires" comme par exemple $\sqrt{-1}$ aux équations de degré 2 ne possèdant pas de solution dans $\mathbb{R}$. Les symboles du type $\sqrt{-x}$ pour $x > 0$ furent utilisés de plus en plus fréquemment (nous nous interdisons ce symbole dangereux dans notre cours) durant les siècles qui suivirent. C'est Euler, deux siècles plus tard, qui introduisit le premier le symbole i afin de montrer le grand théorème de Fermat dans le cas $n = 3$.

Définition 4.1. Il existe un ensemble $\mathbb{C}$ et des opérations + et × tels que

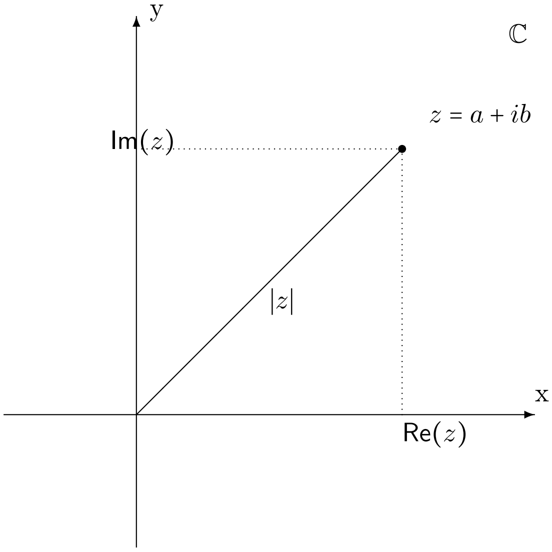
1. $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$.
2. $\mathbb{C}$ contient un élément noté $i \notin \mathbb{R}$ tel que $i \times i = -1$.
3. Les éléments de $\mathbb{C}$ s'écrivent de façon unique de la forme $a + ib$, où $a, b \in \mathbb{R}$.
4. Nous avons les règles de calcul pour deux nombres $z = a + ib$ et $w = c + id$, où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$z + w = (a + c) + i(c + d) \quad \text{et} \quad z \times w = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Pour un nombre complexe $z = a + ib$, où $a, b \in \mathbb{R}$, le réel a est appelé *partie réelle* de z, notée également $\mathsf{Re}(z)$, et b *partie imaginaire*, notée $b = \mathsf{Im}(z)$. Un nombre complexe est dit *réel* si $\mathsf{Im}(z) = 0$. Il est dit *imaginaire (pur)* si $\mathsf{Re}(z) = 0$.

L'ensemble $\mathbb{C}$ est appelé l'ensemble des nombres complexes, $z \in \mathbb{C}$ est un *nombre complexe*. Posons $\mathbb{C}^* \overset{\text{not.}}{=} \mathbb{C} \setminus \{0\}$. L'ensemble des nombres imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$, celui des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

La décomposition $z = a + ib$ n'est unique que lorsque l'on suppose a et b réels. Ainsi, lorsque l'on utilise l'unicité de cette écriture (ce que nous ferons souvent), il est important de vérifier que a et b sont bien dans $\mathbb{R}$.



Chaque nombre complexe correspond à un point du plan (Gauss et Argand fûrent les premiers à utiliser cette interprétation en 1799). Ce point $(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$ est appelé *affixe* de z. Les parties réelle et imaginaire de z sont l'abscisse et l'ordonnée de l'affixe de z.

Un avertissement avant de commencer L'intérêt principal des nombres complexes est le fait que tous les éléments possèdent une "racine carrée" (voir la prochaine section) et que les équations polynomiales possèdent toujours des solutions. Cette propriété a un prix. En effet, l'ordre $\leq$ sur $\mathbb{R}$ ne peut pas être étendu en un ordre complet sur $\mathbb{C}$ de telle sorte que la propriété $\forall x, y \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0$ reste vraie. En effet, raisonnons par contradiction. Supposons que l'ordre puisse être étendu à $\mathbb{C}$. Si $i \geq 0$, alors $-1 = i^2 \geq 0$ ce qui est absurde. Si $i \leq 0$, alors $-i \geq 0$ et le raisonnement précédent montre que $-1 \geq 0$ ce qui est également absurde.

Pour cette raison, il est formellement interdit d'utiliser des inégalités avec les nombres complexes.

4.1 Équations polynomiales d'une variable complexe

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{C}$. Une fonction $f : E \to \mathbb{C}$ est dite *polynomiale* s'il existe $a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{C}$ avec $a_d \neq 0$ tels que

$$f(z) = a_d z^d + \cdots + a_1 z + a_0, \quad z \in E,$$

ou si $f(z) = 0$. L'entier d est appelé *degré* de la fonction.

Résolution des équations polynomiales du second degré Dans cette section, nous prouvons l'existence de racines carrées pour tout nombre complexe. De plus, nous étudions les conséquence de l'existence de ces racines.

Théorème 4.2. *Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, il existe exactement deux nombres complexes w et $-w$ tels que $w^2 = z$.*

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Posons $z = a + ib$, où $a, b \in \mathbb{R}$. Cherchons $w \in \mathbb{C}$ de la forme $w = x + iy$, où $x, y \in \mathbb{R}$. L'équation $w^2 = z$ sur $\mathbb{C}$ est équivalente à l'équation d'inconnues x

et y réels tels que $x^2 - y^2 + 2ixy = a + ib$. Puisque la décomposition est unique, l'équation est équivalente à l'équation

$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = & a \\ 2xy & = & b \end{cases}$$

Cette équation est alors équivalente à l'équation

$$(E) \quad \begin{cases} x^2 - y^2 & = & a \\ x^2y^2 & = & b^2/4 \\ xy \cdot b & \geq & 0 \end{cases}$$

La troisième équation fixe le signe de xy. Il nous faut donc montrer que cette équation a deux solutions $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ opposées l'une de l'autre. En effectuant le changement de variable $X = x^2$ et $Y = -y^2$, il suffit de trouver des solutions $(X,Y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-$ à l'équation

$$(E^*) \quad \begin{cases} X + Y & = & a \\ XY & = & -b^2/4 \end{cases}$$

puisqu'alors, $(x,y) = (\sqrt{X}, \varepsilon\sqrt{-Y})$ et $(-\sqrt{X}, -\varepsilon\sqrt{-Y})$, avec $\varepsilon \in \{+,-\}$ le signe de b, sont solutions de (E).

En utilisant l'observation faite à la fin du chapitre précédent sur les sommes et produits de solutions d'équations du second degré, nous obtenons que (E^*) est équivalent au fait que l'équation d'une variable réelle t

$$(E^{**}) \quad t^2 - at - b^2/4 = 0$$

admet deux solutions réelles de signes différentes. Remarquons que si (E^{**}) a deux solutions, elles sont nécessairement de signe différent puisque le produit est $-b^2/4 \leq 0$. La seule chose à vérifier est donc que le discriminant de (E^{**}) est strictement positif. Or nous avons

$$\Delta = (-a)^2 - 4(-b^2/4) = a^2 + b^2 > 0,$$

puisque $z = a + ib \neq 0$. $\square$

Corollaire 4.3. *Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. L'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$,*

$$(E) \quad az^2 + bz + c = 0$$

admet toujours deux solutions $x_\pm$, possiblement confondues. De plus, $x_\pm = \frac{-b \pm w}{2a}$, où w est un nombre complexe tel que w^2 est égal au discriminant Δ de (E).

Résolution des équations polynomiales de degré inférieur à quatre

Méthodes de Cardano et Ferrari. Cardano en 1545 proposa une expression explicite pour les équations du troisième degré.

Théorème 4.4 (Cardano)**.** *Soient $p, q \in \mathbb{R}$. Si $q^2 + \frac{4p^3}{27} \geq 0$, une solution réelle de $z^3 + pz + q = 0$ est donnée par*

$$x = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)^{1/3} + \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)^{1/3}.$$

En fait, la méthode suivante permet de trouver toutes les solutions lorsque p et q sont des nombres complexes quelconques. Nous vous renvoyons aux exercices 60 (pour la preuve du théorème précédent) et 77 (pour la méthode générale). Mentionons que les équations de degré 4 peuvent également être résolues grâce à la méthode de Ferrari que nous ne présentons pas ici (voir exercice 61).

Bien entendu, les expressions précédentes sont très compliquées. L'équation $x^3+6x-7=0$. On a bien $(-7)^2+\frac{4}{27}6^3 \geq 0$. Lorsque résolue via la méthode de Cardano, donne la solution

$$x = \left(-\frac{-7}{2}+\sqrt{\frac{49}{4}+\frac{216}{27}}\right)^{1/3} + \left(-\frac{-7}{2}-\sqrt{\frac{49}{4}+\frac{216}{27}}\right)^{1/3},$$

qui est en fait égal à 1, ce qui n'est pas très explicite. Cet exemple illustre le fait que ces solutions explicites ne constituent pas la bonne approche pour résoudre une équation polynomiale en pratique. Nous proposons deux autres méthodes à tenter avant d'utiliser ces stratégies.

Recherche de racines évidentes Une première méthode alternative consiste à chercher des solutions évidentes. Après avoir trouvé une solution particulière z_{part}, on factorise $a_d z^d+\cdots+a_1 z+a_0$ sous la forme $(z-z_{\text{part}})(a'_{d-1}z^{d-1}+\cdots+a'_1 z+a'_0)$. Les autres solutions de l'équation d'origine sont donc solutions de l'équation

$$(E^*) \quad a'_{d-1}z^{d-1}+\cdots+a'_1 z+a'_0=0,$$

qui est plus simple puisque le degré est maintenant $d-1$. Cette méthode peut être utilisée dans le cas de polynômes de degré quelconque pour réduire leur degré. Elle est très puissante car les coefficients $a'_{d-1},\ldots,a'_0$ peuvent être calculés facilement en utilisant l'algorithme suivant.

Algorithme de calcul des coefficients $a'_0,\ldots,a'_{d-1}$.

Étape 1 Dans un tableau comme ci-dessous, reporter les coefficients $a_0,\ldots,a_d$.

On calcule les coefficients $a'_0,\ldots,a'_{d-1}$ en parcourant les cases numérotées comme sur la figure de gauche. On commence par mettre 0 dans la case n°1.

Étape 2 On ajoute le coefficient en haut de la colonne correspondante en se rendant à la case suivante en dessous et on va à l'étape 3.

Étape 3 On multiplie par z_{part} en se rendant à la case suivante en diagonale et on retourne à l'étape 2.

Étape 4 Les coefficients de la colonne du bas sont les coefficients $a'_{d-1},\ldots,a'_1,a'_0$ et le dernier est 0.

a_d	a_{d-1}	...	a_1	a_0
n° 1	n° 3	...	n° $2d-1$	n° $2d+1$
n° 2	n° 4	...	n° $2d$	n° $2d+2$

a_d	a_{d-1}	...	a_1	a_0
0	$z_{\text{part}}a_d$	...	?	?
a_d	$z_{\text{part}}a_d+a_{d-1}$	...	?	0

Formes particulières Une autre méthode importante est de vérifier si l'équation a une forme particulière, permettant une résolution facile. Nous mentionons deux exemples concernant les équations d'ordre 4.

1. **(Équations bicarrée)** Soit z une solution de

$$az^4+bz^2+c=0.$$

En posant $w=z^2$, déterminer les valeurs possibles de w en résolvant l'équation $aw^2+bw+c=0$. Puis déterminer les valeurs de z en résolvant l'équation $z^2=w$.

2. **(Équations réciproques)** Soit z une solution non nulle de
$$az^4 + bz^3 + cz^2 + bz + a = 0.$$
Remarquez que z étant non-nul, il est possible de diviser par z^2 afin d'obtenir
$$az^2 + bz + c + bz^{-1} + az^{-2} = 0.$$
En posant $w = z + \frac{1}{z}$, déterminer les valeurs possibles de w en résolvant l'équation $aw^2 + bw + c - 2a = 0$. Puis déterminer les valeurs de z en résolvant l'équation $z^2 - wz + 1 = 0$.

Évariste Galois (français 1811-1832) Sa vie est le roman d'un génie. Il ne parvint pas à rentrer à l'École polytechnique pour manque d'explications lors de son examination orale. Pendant ses études, il développa la théorie qui porte son nom, fournissant une condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation polynomiale soit résoluble par radicaux. Il formula pour la première fois la notion de corps fini. Il fut emprisonné à la bastille et mourut lors d'un duel. Nous vous conseillons la page web images.math.cnrs.fr/+-Autour-de-Galois-+.html. De façon générale, images des mathematiques est un site extraordinaire où vous trouverez de nombreux articles de vulgarisation mathématique pour votre culture.

Notez qu'a priori, il y a deux solutions pour w, et donc quatre solutions pour z.

En conclusion, les deux méthodes précédentes doivent toujours être préférées aux méthodes de Cardano et Ferrari quand c'est possible :

> Résolution des équations polynomiales de degré 3 et 4
>
> Étape 1 Chercher des solutions évidentes. Si on en trouve une, on utilise l'algorithme pour réduire le degré et nous recommençons à l'Étape 1.
>
> Étape 2 Regarder si l'équation polynomiale a une forme simple, ou se ramène à une forme simple. Si on trouve une forme simple, on résoud l'équation.
>
> Étape 3 Sinon, utiliser la méthode de Cardano ou de Ferrari (à vos risques et périls).

Équations polynomiales de degré général (pour votre culture) Toute "équation polynomiale" (c'est-à-dire de la forme $f(z) = 0$ où f est un polynôme) admet une solution dans $\mathbb{C}$. Nous admettons la preuve de ce résultat.

Théorème 4.5 (Théorème fondamental de l'algèbre)**.** *Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{C}$ tels que $a_d \neq 0$. L'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$*
$$(E) \quad a_d z^d + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$
admet une solution.

On dit alors que l'ensemble des nombres complexes est *algébriquement clos*. Ce résultat sera prouvé en analyse complexe l'année prochaine.

Le théorème précédent prouve l'existence de solutions, mais il ne décrit pas comment exprimer les solutions en fonction des coefficients. Les méthodes de Cardano et Ferrari montrent qu'il est possible d'exprimer les racines d'équations de la forme $az^3+bz^2+cz+d = 0$ et $az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e = 0$ en fonction des coefficients en n'utilisant seulement les symboles $+$, $-$, $\times$, $/$ et $(\cdot)^{1/n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Lorsque le degré du polynomial est supérieur ou égal à 5, ce n'est plus systématiquement le cas. On peut tenter de trouver des solutions évidentes pour réduire le degré, mais en général il n'existe pas de solution qui s'écrive avec les symboles $+$, $-$, $\times$, $/$ et $(\cdot)^{1/n}$. On dit que les pôlynomes de degré plus grand que 5 ne *sont pas résolubles par radicaux* (dû à Abel). Prouver ce résultat requiert une théorie algébrique relativement élaborée, dûe à Galois, que vous étudierez en deuxième année.

Lodovico Ferrari (italien 1522-1565) Étudiant de Cardano.

Exercice 58. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$,

1. $z^2 + 2z + 2 = 0$
2. $2z^2 + (4i - 1)z - (8 + i) = 0$

3. $iz^2 - 3(2i+1)z + 13 - 9i = 0$
4. $z^4 - (5-14i)z^2 - 2(5i+12) = 0$
5. $(3z^2 + z + 1)^2 + (z^2 + 2z + 2)^2 = 0$ (*indication :* se ramener à deux équations du second degré)
6. $z^4 + 7z^3 + 14z^2 + 7z + 1 = 0$.

Exercice 59. 1. Chercher les solutions d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ à l'équation

$$\begin{cases} x + y + z = 8 \\ xy + yz + zx = 17 \\ xyz = 10 \end{cases}$$

(on pourra développer, pour $t \in \mathbb{C}$, le terme $(t-x)(t-y)(t-z)$ afin de montrer que x, y et z sont solutions de l'équation en la variable t : $t^3 - 8t^2 + 17t - 10 = 0$, puis utiliser ce fait pour déterminer x, y et z).

2. Chercher les solutions d'inconnues $(x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4$ à l'équation

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ xy + xz + xt + yz + yt + zt = 0 \\ xyz + xyt + xzt + yzt = 0 \\ xyzt = -1 \end{cases}$$

(on pourra prouver un fait similaire au cas précédent).

Combien y a-t-il de solutions dans le premier cas ? Dans le deuxième ?

Les deux exercices suivants concernent les méthodes de Cardano et Ferrari.

Exercice 60 (méthode de Cardano dans le cas réel)**.** Considérons l'équation $z^3 + pz + q = 0$ avec $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ et d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. On suppose que $q^2 + \frac{4p^3}{27} \geq 0$.

1. Montrer qu'il existe $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $-\frac{p^3}{27} = u^3v^3$ et $q = -(u^3 + v^3)$. On pourra penser à l'équation $X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = 0$.
2. En déduire qu'il existe $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $-\frac{p}{3} = uv$ et $q = -(u^3 + v^3)$.
3. Montrer que si $-\frac{p}{3} = uv$ et $q = -(u^3 + v^3)$, alors $z = u + v$ est solution de $z^3 + pz + q = 0$.
4. En déduire l'expression d'une solution de $z^3 + pz + q = 0$.
5. Montrer qu'en effectuant un changement de variable simple, il est possible d'exprimer les solutions z de $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ (avec $a \neq 0$) en fonction des solutions w de $w^3 + pw + q = 0$, où p et q sont bien choisis.

Montrons maintenant comment résoudre une équation du quatrième degré. La méthode consiste à effectuer des changements de variables afin de se ramener à des équations de degrés inférieurs. Tous les calculs utilisés sont alors des résolutions d'équation du degré 3 ou 2.

Exercice 61 (méthode de Ferrari)**.**

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ une solution de l'équation $az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e = 0$ avec $a \neq 0$. Montrer que $x = z + \frac{b}{4a}$ est solution de $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ où p, q, r peuvent être exprimés en fonction de a, b, c, d, e.
2. Soit y une solution de $8y^3 - 4py^2 - 8ry + 4rp - q^2 = 0$ (noter que l'on peut la trouver en utilisant la formule de Cardano). Montrer que la solution de $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ satisfait

$$(x^2 + y)^2 - (\alpha x + \beta)^2 = 0$$

où $\alpha^2 = 2y - p$ et $\beta = -\frac{q}{2\alpha}$ si $\alpha \neq 0$ ou $\beta^2 = y^2 - r$ sinon.

3. En déduire que les solutions x de $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ sont les solutions de l'une des deux équations suivantes : $x^2 + \alpha x + (y + \beta) = 0$ ou $x^2 - \alpha x + (y - \beta) = 0$.

4.2 Conjuguaison et module d'un nombre complexe

Définition 4.6. Soit $z \in \mathbb{C}$. Notons $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}^2$.

1. Le *conjugué* de z est le nombre complexe $\overline{z} = a - ib$.
2. Le *module* de z est le nombre réel positif $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Johann Gauss (allemand 1777-1855) l'un des mathématiciens les plus influents de tous les temps. Gauss prouva le théorème fondamental de l'algèbre. Il est aussi à l'origine de la distribution de Gauss (un object fondamental en théorie des probabilités).

Proposition 4.7 (Propriétés du conjugué)**.** *Soient $z, z' \in \mathbb{C}$.*

1. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
2. $\mathsf{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$
3. $\mathsf{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$
4. $z \in \mathbb{R} \iff \overline{z} = z$
5. $z \in i\mathbb{R} \iff \overline{z} = -z$
6. $\overline{\overline{z}} = z$
7. $\overline{zz'} = \overline{z}\overline{z'}$.

Démonstration. Écrivons $z = a+ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $z' = c+id$ avec $c, d \in \mathbb{R}$. Nous trouvons que $z + z' = (a + c) + i(b + d)$. On a alors $\overline{z + z'} = (a + c) - i(b + d) = a - ib + c - id = \overline{z} + \overline{z'}$. Nous avons également $\frac{z+\overline{z}}{2} = \frac{1}{2}(a + ib + a - ib) = a$ et $\frac{z-\overline{z}}{2} = \frac{1}{2}(a + ib - (a - ib)) = ib$ ce qui nous donne 1 et 2. Pour 3 et 4, on trouve facilement que $z \in \mathbb{R}$ ssi $b = 0$, ie $\mathsf{Im}(z) = 0$. La propriété 2 implique que $z \in \mathbb{R}$ ssi $z = \overline{z}$. De même, il est facile de prouver que $z \in i\mathbb{R}$ ssi $z = -\overline{z}$. La propriété 5 est triviale : nous avons $\overline{z} = a + i(-b)$ et donc $\overline{\overline{z}} = a - i(-b) = a + ib$. Si $z' = c + id$ avec c et d réels, alors

$$\overline{zz'} = (ac - bd) - i(bc + ad) = (ac - (-b)(-d)) + i((-b)c + a(-d)) = \overline{z}\overline{z'}.$$

□

Jean-Robert Argand (français 1768-1822)

> Ainsi, une bonne manière de vérifier si un nombre complexe est réel est de calculer z et son conjugué, et de montrer qu'ils sont égaux.

Al Kashi (perse 1380-1429) mathématicien et astronome.

Le module de z s'interprète comme la distance euclidienne entre l'affixe de z et l'origine.

Le module est compatible avec la valeur absolue sur $\mathbb{R}$. Lorsque z est un nombre réel, le module correspond à la valeur absolue. Il en partage également les propriétés essentielles.

Proposition 4.8 (Propriétés du module)**.** *Soient $z, z' \in \mathbb{C}$, nous avons*

1. $|z|^2 = z\overline{z}$.
2. $|z| = 0$ *implique* $z = 0$
3. $|zz'| = |z||z'|$
4. $|\overline{z}| = |z|$
5. $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ *si* $z \neq 0$.
6. $|\mathsf{Re}(z)| \leqslant |z|$ *et* $|\mathsf{Im}(z)| \leq |z|$
7. (Formule d'Al-Kashi) $|z + z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\mathsf{Re}(z\overline{z'})$,
8. (Inégalité triangulaire) $\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$

> La première propriété suggère qu'il est souvent utile d'étudier le carré du module plutôt que le module lui-même.

Démonstration. Soit $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Nous avons $z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - iab + iab - (i^2)b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$ ce qui implique 1. Les propriétés 2, 3, 4, 5 suivent trivialement de 1.

La propriété 6 suit du fait que $|a|$ et $|b|$ sont inférieurs à $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Montrons 7. Soit $z' \in \mathbb{C}$. Nous trouvons

$$\begin{aligned} |z + z'|^2 &= (z + z')(\overline{z} + \overline{z'}) \\ &= z\overline{z} + z'\overline{z'} + z\overline{z'} + \overline{z}z' \\ &= |z|^2 + |z'|^2 + z\overline{z'} + \overline{z\overline{z'}} \\ &= |z|^2 + |z'|^2 + 2\mathsf{Re}(z\overline{z'}) \end{aligned}$$

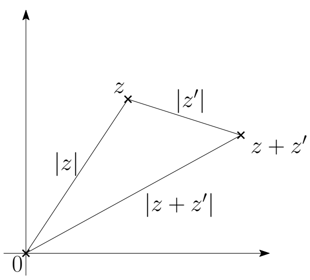
Montrons 8. Comme pour l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue, l'inégalité de gauche est une conséquence de l'inégalité de droite. Nous nous attachons donc à montrer cette dernière en l'élevant au carré. Soient $z, z' \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} |z + z'|^2 &= |z|^2 + |z'|^2 + 2\mathsf{Re}(z\overline{z'}) \\ &\leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||\overline{z'}| \\ &\leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'| \\ &= \big(|z| + |z'|\big)^2. \end{aligned}$$

Dans la première égalité, nous avons utilisé la formula d'Al-Kashi. Dans la deuxième, la propriété 5 et dans la troisième, la propriété 6. □

Leonardo de Pisa, dit Fibonacci (italien 1170-1250) bien qu'il ne l'ait pas découverte, il introduisit la suite de Fibonacci dans "Liber Abaci" (1202). Cette suite naturelle intervient dans de nombreux problèmes de mathématique et de physique, et est reliée au nombre d'or $\varphi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$. Cette suite apparait également dans la nature, comme par exemple dans la répartition des graines de la fleur de tournesol (nous vous reportons à l'adresse suivante pour plus de détails www.crm.umontreal.ca /math2000/tournesol.html).

Les formules d'Al-Kashi et de l'inégalité triangulaire s'interprètent particulièrement bien sur un dessin. La première permet de calculer la longueur du troisième coté d'un triangle lorsque la longueur des deux premiers est connue. Ainsi, elle généralise la formule de Pythagore. La deuxième correspond à l'inégalité triangulaire classique en géométrie.



Exercice 62. Écrire les nombres suivants de la forme $a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$: $\dfrac{2 - 3i}{1 + i}$, $\frac{1}{\sqrt{3} - i}$ et $(2 + i\sqrt{2})^3$. Calculer leur module et les dessiner dans le plan complexe.

Exercice 63. Calculer le module des nombres complexes suivants : $-i$, $1+i$, $2i(3+i)(1+i)$, $\dfrac{(2 + 3i)(1 + 2i)}{(-1 + i)(1 + i)}$, $\dfrac{(1 + i)^4}{2 + i}$ et $\dfrac{2 + i}{1 - i} + \dfrac{2i}{1 + i}$.

Exercice 64. Trouver les nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $\frac{z+1}{z-1} \in \mathbb{R}$. Même question avec $\frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}$.

Exercice 65. Montrer que pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tel que $z_1 z_2 \neq -1$ et $|z_1| = |z_2| = 1$, alors $\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ est un réel.

Exercice 66. Trouver tous les nombres complexes tels que z, $1/z$ et $1-z$ ont le même module.

Exercice 67 (Identité de Fibonacci)**.** Montrer à la main puis en utilisant les nombres complexes que pour tout $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2.$$

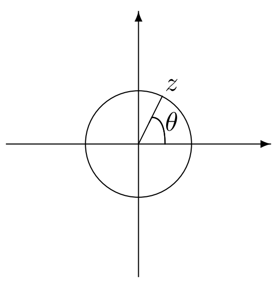
L'identité de Fibonacci est cruciale lorsque l'on cherche à déterminer quels nombres entiers s'écrivent comme somme de deux carrés.

4.3 Argument complexe, applications exponentielle et écriture polaire

4.3.1 Argument d'un nombre complexe

Commençons par rappeler la *définition* de π : c'est la valeur de l'angle plat $\widehat{-1\,0\,1}$.

Définition 4.9. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. L'*argument complexe principal* de z est l'angle $\theta \in (-\pi, \pi]$ entre le segment reliant 0 et 1, et le segment reliant 0 et le point d'affixe z. It est noté arg(z).



L'angle entre deux segments n'est pas formellement défini de façon unique, $\pi/2$, $5\pi/2$ et $-3\pi/2$ désigne tous les trois l'angle droit $\widehat{i\,0\,1}$ par exemple. De façon générale, si θ est un angle entre deux segments, alors $\theta + n2\pi$ est également l'angle entre ces mêmes segments. Ceci motive la définition suivante. Définissons $a \equiv b$ si $a - b \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Définition 4.10. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Un argument de z est n'importe quel $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \equiv \arg(z)$, où $\arg(z)$ est l'argument principal de z. Par convention, on note également $\arg(z)$ pour n'importe lequel de ces θ.

Proposition 4.11. *Soient $z, z' \in \mathbb{C}^*$. Pour tout argument $\arg(z)$ et $\arg(z')$ de z et z',*

$$\begin{array}{rcl} \arg(zz') & \equiv & \arg(z) + \arg(z') \\ \arg(xz) & \equiv & \arg(z) \text{ si } x > 0 \\ \arg(\overline{z}) & \equiv & -\arg(z) \\ \arg(z/z') & \equiv & \arg(z) - \arg(z') \end{array}$$

Démonstration. Cette preuve suit directement de la définition de l'angle entre deux segments. □

4.3.2 Définition de la fonction exponentielle complexe et écriture polaire

Nous aimerions écrire z en fonction de $\arg(z)$ et $|z|$. Pour cela, nous utilisons la fonction exponentielle, dont l'existence est justifiée par le théorème suivant.

Théorème 4.12. *Il existe une unique application* $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ *telle que*

– $\forall z, w \in \mathbb{C}$, $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$.
– $\forall z \in \mathbb{C}$, $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$.
– $\forall z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) = 1$ *est équivalente à l'existence de* $n \in \mathbb{Z}$ *tel que* $z = 2\pi i n$.
– $\exp$ *est continue*

De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z = |z| \exp[i \arg(z)].$$

Bien que nous ne puissions pas justifier ce théorème maintenant (nous ne savons même pas ce qu'est une fonction continue), mentionons que la preuve est tout à fait à la portée d'étudiants en premier semestre d'analyse. Nous en prouverons une bonne partie dans la suite du cours.

1. À partir de maintenant, nous utiliserons la notation pratique $\exp(z) = e^z$ et $\exp(1) = e$.

2. Nous avons $|\exp(z)|^2 = \exp(z)\overline{\exp(z)} = \exp(z)\exp(\overline{z}) = \exp(z+\overline{z})$. En particulier, $|\exp(z)| = 1$ ssi $z + \overline{z} \in 2\pi i\mathbb{Z}$. Puisque $z + \overline{z}$ est forcément réel, la seule possibilité est que $z = -\overline{z}$, et donc $z \in i\mathbb{R}$. Ainsi
$$\{z \in \mathbb{C} : |\exp(z)| = 1\} = i\mathbb{R}$$

3. Si $z \in \mathbb{R}$, alors $\exp(z) = \exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$ et $\exp(z) \in \mathbb{R}$. Il est possible de montrer que la restriction de $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est l'application exponentielle que vous connaissez.

4. Soient $z, z' \in \mathbb{C}^*$. Si $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ avec $r, r' > 0$ et $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, nous avons $zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$ (simplement utiliser le fait que l'exponentielle d'une somme est le produit des exponentielles).

Définition 4.13. Un nombre complexe $z \in \mathbb{C}^*$ s'écrit donc de façon unique comme $z = re^{i\theta}$, où $r > 0$ et $\theta \in (-\pi, \pi]$. De façon plus générale, on appelle *écriture polaire* de z toute écriture de la forme $z = re^{i\theta}$, où $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Nous avons alors que $r = |z|$ et que $\theta = \arg(z)$.

Démonstration. L'existence de $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $z = re^{i\theta}$ vient de la proposition précédente, qui nous permet de prendre $r = |z|$, et θ n'importe quel argument. En particulier, en prenant l'argument principal nous obtenons l'ecriture avec $\theta \in (-\pi, \pi]$.

L'unicité est simple. Écrivons $z = re^{i\theta} = r'e^{i\theta'}$, avec $r, r' > 0$ et $\theta, \theta' \in (-\pi, \pi]$. En prenant le module, nous obtenons $r = r'$. En divisant z par lui-même, nous trouvons $e^{i(\theta-\theta')} = 1$. La définition de l'exponentielle nous permet d'affirmer que $\theta - \theta' \in 2\pi\mathbb{Z}$. Mais $\theta - \theta' \in (-2\pi, 2\pi)$, ce qui impose $\theta - \theta' = 0$, ie $\theta = \theta'$. □

Nous attirons votre attention sur le fait qu'il est nécessaire de préciser $r > 0$ et non pas seulement $r \in \mathbb{R}$, sinon θ n'est pas bien défini. Faites également attention au fait que $z = 0$ n'admet pas de représentation au sens plein du terme, puisqu'alors θ ne serait pas déterminé. Il est donc nécessaire de vérifier que $z \neq 0$ lorsque la décomposition polaire est utilisée.

Puisque $zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$, la représentation polaire est adaptée au produit, tandis que la représentation par parties réelle et imaginaire est adaptée à la somme. Conservez cette observation en tête lorsque vous aborder un problème concernant les nombres complexes !

4.3.3 Racines n-ièmes

Finissons cette section en utilisant la représentation polaire pour discuter l'existence de racines n-ième.

Définition 4.14. Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Un nombre complexe $w \in \mathbb{C}$ est une racine n-ième de z si $w^n = z$.

Soit $n \geqslant 2$, notons $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C}, z^n = 1\}$, l'ensemble des *racines n-ième de l'unité.*

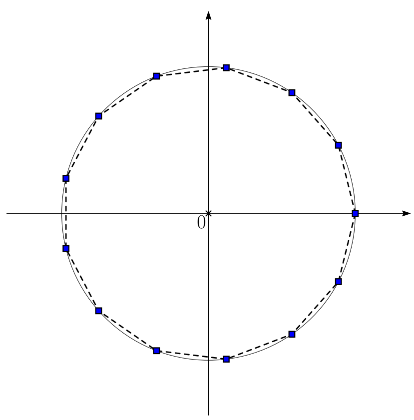
Théorème 4.15. *Pour tout $n \geq 1$,*

$$\mathbb{U}_n = \left\{1, e^{\frac{2i\pi}{n}}, e^{\frac{2\times 2i\pi}{n}}, \dots, e^{\frac{2(n-1)i\pi}{n}}\right\} = \{e^{\frac{2\pi ik}{n}}, k \in \{0, \dots, n-1\}\} = \{e^{\frac{2\pi ik}{n}}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

En particulier, $\mathrm{Card}(\mathbb{U}_n) = n$.

Démonstration. On sait que $\mathbb{U}_n$ est inclus dans l'ensemble des nombres complexes de module 1. Ainsi, si $z \in \mathbb{U}_n$, il existe θ tel que $z = e^{i\theta}$. Dès lors, $1 = z^n = e^{in\theta}$. Nous déduisons qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n\theta = 2\pi ik$ i.e. $\theta = 2\pi ik/n$. Nous avons raisonné par équivalence et le résultat suit donc directement. Le fait que le cardinal vaut n vient du fait que toutes ces racines sont distinctes. En effet, soit $0 \leq k \leq k' \leq n-1$ tel que $e^{\frac{2\pi ik}{n}} = e^{\frac{2\pi ik'}{n}}$. On a alors $e^{i\frac{2\pi(k'-k)}{n}} = 1$. Mais $0 \leq \frac{2\pi(k'-k)}{n} < 2\pi$, et donc par minimalité de 2π, $\frac{2\pi(k'-k)}{n} = 0$ i.e. $k = k'$. □

Graphiquement ce sont les sommets d'un polygône régulier à n cotés (comme le montre la figure suivante, où $n = 13$). Concluons par une formule à retenir.



Corollaire 4.16. *Soit ω une racine n-ième de l'unité, alors*

$$1 + \omega + \cdots + \omega^{n-1} = \begin{cases} 0 & si\ \omega \neq 1, \\ n & si\ \omega = 1 \end{cases}.$$

Démonstration. Rappelons la formule suivante, que nous avons prouvée dans l'exercice 26. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ alors pour tout $n \geq 1$,

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}.$$

Le résultat suit immédiatement. □

4.4 Fonctions trigonométriques cosinus, sinus et tangente

Dans la section précédente, nous avons admis l'existence d'une fonction exponentielle complexe. Montrons comment cette fonction nous permet de définir les fonctions cosinus et sinus.

4.4.1 Définition des fonctions cosinus et sinus

Nous sommes enfin en mesure de définir les fonctions trigonométriques usuelles. Remarquez que c'est bien la première fois que vous définissez "rigoureusement" (conditionnellement au fait que l'exponentielle est définie correctement) la notion de cos et sin.

Abraham de Moivre (français 1667-1754) importante contribution à la théorie des probabilités. Il découvrit également la formule de Binet et la formule close pour la suite de Fibonacci.

Définition 4.17. Les applications cosinus et sinus sont définies par les formules

$$\cos : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \mathsf{Re}(e^{ix}) \end{array} \quad \text{et} \quad \sin : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \mathsf{Im}(e^{ix}) \end{array}$$

Notez que le fait que cos et sin soient à valeurs dans $[-1,1]$ (a priori elles sont à valeurs dans $\mathbb{R}$) suit du fait que $|\mathsf{Re}(e^{ix})|$ et $|\mathsf{Im}(e^{ix})|$ sont inférieures à $|e^{ix}| = 1$.

On obtient immédiatement la relation classique

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En particulier,

$$\mathsf{Re}(z) = |z|\cos[\arg(z)] \text{ et } \mathsf{Im}(z) = |z|\sin[\arg(z)].$$

Nous retrouvons l'interprétation géométrique de cosinus et sinus : dans un triangle rectangle d'hypothénuse de longueur 1, et d'angle θ, les côtés adjacent et opposé ont longueur $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

Attention ! L'argument principal $\arg(z)$ est défini uniquement par le fait que

$$\cos(\arg(z)) = \mathsf{Re}(z)/|z| \quad \textbf{ET} \quad \sin(\arg(z)) = \mathsf{Im}(z)/|z|.$$

Il est tentant, lorsque l'on connait les fonctions arccosinus et arcsinus (elles seront définies dans le chapitre sur les fonctions continues), de dire que $\arg(z) = \arccos(\mathsf{Re}(z)/|z|)$ mais ceci n'est vrai que si $\mathsf{Im}(z)/|z| \geq 0$.

4.4.2 Propriétés du cosinus et du sinus

Mentionons quelques propriétés des fonctions cosinus et sinus.

Proposition 4.18 (Formules sur les cosinus et sinus)**.** *Soient* $x, y \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{N}$*,*

1. $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1.$
2. (Formules d'Euler) $\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ *et* $\sin(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$
3. (Formules de Moivre) $\big(\cos(x) + i\sin(x)\big)^n = \cos(nx) + i\sin(nx).$
4. (Formules trigonométriques)

$$\begin{aligned}
\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)\\
\sin(x+y) &= \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y)\\
\cos(2x) &= \cos(x)^2 - \sin(x)^2\\
\sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x)\\
2\cos(x)\cos(y) &= \cos(x+y) + \cos(x-y)\\
2\sin(x)\cos(y) &= \sin(x+y) + \sin(x-y)\\
2\cos(x/2)^2 &= 1 + \cos(x)\\
2\sin(x/2)^2 &= 1 - \cos(x)
\end{aligned}$$

Démonstration. La première formule vient du fait que

$$1 = |e^{ix}|^2 = \cos(x)^2 + \sin(x)^2.$$

Les deuxième et troisième viennent du fait que $\mathsf{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ et $\mathsf{Im}(x) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$. La quatrième vient du fait que

$$(\cos(x) + i\sin(x))^n = (e^{ix})^n = e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx).$$

Ensuite, $\cos(x+y)$ et $\sin(x+y)$ sont les parties réelle et imaginaire de $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$. Il suffit alors de développer le produit

$$(\cos(x) + i\sin(x))(\cos(y) + i\sin(y))$$

et d'identifier la partie réelle et la partie imaginaire.

Toutes les formules suivantes découlent de la formule pour $\cos(x+y)$ et $\sin(x+y)$, lorsque x et y sont bien choisis. □

Définition 4.19. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $x \in E$ ssi $-x \in E$. La fonction f est *paire* si $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in E$. Elle est *impaire* si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in E$. Soient $T > 0$ et f une fonction telle que $x \in E$ ssi $x + T \in E$. La fonction f est dite *périodique de période* T si $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in E$.

Proposition 4.20. *Les fonctions* cos *et* sin *sont périodiques de période* 2π*. De plus,* cos *est paire et* sin *est impaire.*

Démonstration. On ne traite que le cas de cos, le cas de sin étant identique. Montrons que cos est périodique. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x+2\pi) = \frac{1}{2}\big(e^{ix+2\pi i} + e^{-ix-2\pi i}\big) = \frac{1}{2}(e^{ix}e^{2\pi i} + e^{-ix}e^{-2\pi i}) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \cos(x).$$

Montrons que cos est paire. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(-x) = \frac{1}{2}\big(e^{i(-x)} + e^{-i(-x)}\big) = \frac{1}{2}(e^{-ix} + e^{ix}) = \cos(x).$$

La preuve pour sinus suit les mêmes lignes. □

4.4.3 La fonction tangente

À partir des fonctions cosinus et sinus, il est possible de définir la fonction tangente.

Définition 4.21. Pour $x \in \mathbb{R}$ avec $x \notin \{t \in \mathbb{R}, \exists k \in \mathbb{Z}, t = \frac{\pi}{2}(1+2k)\}$, définissons

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

De plus, tan est impaire et périodique de période π (ceci se vérifie facilement).

Proposition 4.22. *Pour $x, y \in \mathbb{R}$ tels que les expressions suivantes sont bien définies, nous avons*

$$\begin{aligned}
\tan(x+y) &= \tfrac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)} \\
\tfrac{1}{\cos^2(x)} &= 1+\tan^2(x) \\
\cos(x) &= \tfrac{1-\tan(x/2)^2}{1+\tan(x/2)^2} \\
\sin(x) &= \tfrac{2\tan(x/2)}{1+\tan(x/2)^2} \\
\tan(x) &= \tfrac{2\tan(x/2)}{1-\tan(x/2)^2}
\end{aligned}$$

Démonstration. La preuve de cette proposition est laissée en exercice. □

Exercice 68. Déterminer l'ensemble des nombres complexes tels que $\exp(z) \in \mathbb{R}$.

Exercice 69. Soit $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} : \exp(z) = re^{i\theta}\}$.

Exercice 70 (Formules trigonométriques)**.** Prouver les relations des propositions 4.18 et 4.22 en utilisant les définitions de cosinus et sinus.

Exercice 71. Justifier à l'aide des formules trigonométriques le tableau suivant :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0

Exercice 72. Calculer $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{2004}$.

Exercice 73. Calculer les différentes solutions de $w^3 = 1 + i\sqrt{3}$ et les dessiner dans le plan complexe.

Exercice 74. Résoudre $z^{10} + 1 = 0$

1. à l'aide de la représentation polaire et des fonctions trigonométriques.
2. en divisant $z^{10} + 1$ par $z^2 + 1$ et en trouvant les racines par un calcul algébrique (ne pas mener les calculs jusqu'au bout).
3. Montrer que $2\cos(\pi/5) = z^2 + z^{-2}$ pour une certaine solution z de $z^{10} + 1 = 0$. En déduire que $2\cos(\pi/5)$ est solution de l'équation $w^2 - w - 1 = 0$ d'inconnue $w \in \mathbb{C}$. En déduire $2\cos(\pi/5)$. Avec une formule trigonométrique du cours, montrer que $\sin(\pi/10) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Exercice 75.
1. Déterminer un argument de $z = \sin\theta - i\cos\theta$, où $\theta \in \mathbb{R}$.
2. Soit $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ tels que $\theta - \theta' \notin \{\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}\}$. Trouver le module et un argument de $e^{i\theta} + e^{i\theta'}$ pour $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ (on pourra introduire l'angle $(\theta + \theta')/2$).
3. Soit $\theta \notin \{\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}\}$, déterminer le module et l'argument de $1 + \cos\theta + i\sin\theta$.

La transformation introduite dans la deuxième question de l'exercice précédent est très utile et est à retenir. Elle constitue un cas particulier où la représentation polaire se comporte bien vis-à-vis de l'addition.

Exercice 76. Montrer que pour tout $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}^*$, $|z_1 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + \cdots + |z_n|$. Montrer qu'il y a égalité si et seulement si les z_i ont tous le même argument.

Exercice 77 (méthode de Cardano générale)**.** Considérons l'équation $z^3 + pz + q = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. On ne suppose pas que $q^2 + \frac{4p^3}{27} \geq 0$.

- Soient $(u, v) \in \mathbb{C}$ tels que $-\frac{p}{3} = uv$ et $q = -(u^3 + v^3)$, montrer que u^3 et v^3 sont les deux solutions complexes de $X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = 0$.
- En déduire qu'il existe trois couples (u, v) de nombres complexes tels que $-\frac{p}{3} = uv$ et $q = -(u^3+v^3)$.
- Montrer que si $-\frac{p}{3} = uv$ et $q = -(u^3 + v^3)$, alors $z = u + v$ est solution de $z^3 + pz + q = 0$.
- Quelle est la chose à laquelle il fallait faire attention dans le cas général ?

Exercice 78 (Polynômes de Chebyshev)**.** Montrer qu'il existe deux polynômes T_n et S_n de degré n tel que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ et $S_n(\sin(\theta)) = \sin(n\theta)$. On pourra utiliser le fait que $\cos(n\theta) = \mathsf{Re}(e^{in\theta}) = \mathsf{Re}((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n)$. Sauriez vous montrer que ces polynômes sont uniques ?

Pafnuty Chebyshev (russe 1821-1894) fameux pour ses contributions en théorie des probabilités et théorie des nombres. Il est considéré comme l'un des pères des mathématiques russes.

Ces polynômes jouissent de nombreuses propriétés.

Pour la route, un dernier exercice sur les fonctions paires et impaires. La preuve tient en une ligne (peut-être un peu longue), mais il faut y penser.

Exercice 79. Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Chapitre 5: Suites numériques

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une suite est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$. La notation $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ sera préférée à la notation u : $\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ n & \longmapsto & u(n) \end{array}$. De plus, la notation rigoureuse $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera souvent remplacée par (u_n). Par contre, nous conservons la notation habituelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ si les indices sont restreints à $\mathbb{N}^*$. Nous attirons votre attention sur le fait que (u_n) est une suite tandis que u_n est le n-ième terme de la suite et est donc à ce titre un élément de $\mathbb{K}$. Il est important de bien distinguer ces notations.

5.1 Suites convergentes dans $\mathbb{K}$

5.1.1 Définition et premières propriétés

Jean-Baptiste d'Alembert (français 1717-1783) mathématicien, physicien et co-auteur de l'Encyclopédie avec Diderot.

Pour commencer, citons D'Alembert (1765) :

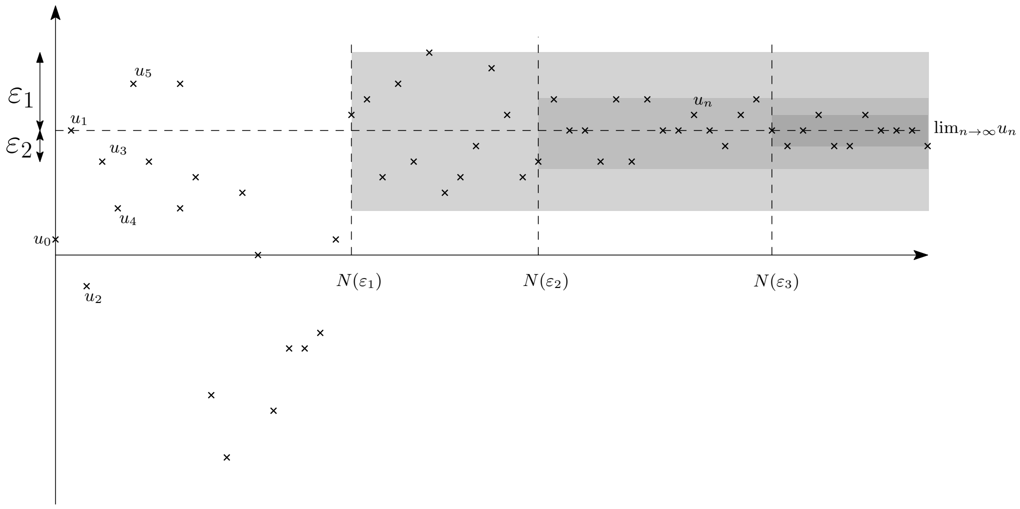
> "On dit qu'une grandeur est la limite d'une autre grandeur, quand la seconde peut approcher de la première plus près que d'une grandeur donnée, si petite qu'on la puisse supposer."

Intuitivement, D'Alembert explique qu'un nombre ℓ est dit limite d'une suite (u_n) si pour n suffisamment grand, les termes s_n sont aussi proches de ℓ qu'on le souhaite. Ce concept est important et nécessite des précisions. Tout d'abord, "aussi proches qu'on le souhaite" signifie "plus proche que tout nombre $\varepsilon > 0$, i.e. $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. D'autre part, "pour n suffisamment grand" veut dire qu'il existe N tel que l'estimation précédente soit vraie pour tout $n \geq N$. La définition rigoureuse du concept de limite est donc la suivante.

Définition 5.1 (D'Alembert 1765, Cauchy, 1821)**.** Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{K}$. La suite (u_n) *converge vers* ℓ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Le réel ℓ est appelé la *limite* de (u_n) et est noté $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$.



Commençons par quelques remarques et observations simples :

1. La définition de convergence peut s'écrire sans valeur absolue, de la façon suivante : (u_n) tend vers ℓ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon.$$

2. Une suite (u_n) telle qu'il existe $\ell \in \mathbb{K}$ avec (u_n) converge vers ℓ est dite *convergente* (dans $\mathbb{K}$). Une suite qui n'est pas convergente est *divergente*.
3. On dit parfois que (u_n) tend vers ℓ, et on note $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
4. La formule "ℓ est **la** limite de (u_n)" est justifiée par le fait que

   la limite, lorsqu'elle existe, est **unique**.

   En effet, l'intuition suggère qu'une suite ne peut pas s'approcher de deux valeurs différentes, et cette intuition peut être traduite en une preuve rigoureuse.

   Démonstration. Soient ℓ et ℓ' tels que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists \tilde{N} \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant \tilde{N},\ |u_n - \ell'| < \varepsilon.$$

   Posons $\varepsilon > 0$. Il existe N et $\tilde{N}$ tels que $|u_n - \ell| < \varepsilon$ pour $n \geq N$ et $|u_n - \ell'| < \varepsilon$ pour $n \geq \tilde{N}$. Posons $m = \max\{N, \tilde{N}\}$. L'inégalité triangulaire implique

$$|\ell - \ell'| = |\ell - u_m + u_m - \ell'| \leq |\ell - u_m| + |u_m - \ell'| \leq 2\varepsilon.$$

   Ce résultat étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, nous en déduisons que $\ell = \ell'$. □

   Le principe d'unicité de la limite sera très utile dans la suite du cours. Notons également que l'astuce consistant à ajouter et soustraire le terme u_m sera également utilisée à maintes reprises.
5. Il est important de noter que la notation $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ ne peut être utilisée que si l'existence de la limite a été prouvée. On précisera donc toujours que la suite (u_n) est convergente avant d'écrire $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.
6. Par définition, (u_n) tend vers ℓ si et seulement si $(u_n - \ell)$ tend vers 0.

7. Les assertions
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - \ell| < \varepsilon$$
et
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$
sont équivalentes. En d'autres termes, prendre des inégalités larges ou strictes dans la définition d'une suite convergente revient au même.
8. Notez également que la notion de limite est une notion *asymptotique* dans le sens qu'elle ne dépend que des termes u_n pour n arbitrairement grands. En particulier, le fait que (u_n) tend vers ℓ ne change pas si l'on change un nombre arbitraire (mais fini) parmi les premiers termes de la suite (voir exercice 80 pour une preuve rigoureuse).

Pour montrer que u_n tend vers ℓ, il faut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $|u_n - \ell| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$.
Ainsi, on commencera toujours la preuve par la phrase suivante :

Soit $\varepsilon > 0$. Cherchons N tel que $|u_n - \ell| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$.

Le reste de la preuve consiste à prouver l'existence de N. Notez qu'on ne demande pas de trouver le plus petit N, ou même d'expliciter N en fonction de ε, mais simplement de prouver qu'il existe.

Exemple : La suite $u_n = \frac{1}{n}$ est convergente et $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, cherchons N tel que $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. Le principe d'Archimède implique l'existence de $N > 0$ tel que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Pour $n \geq N$, nous avons alors $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$. □

Exemple : Soit $a > 0$. La suite $u_n = \frac{(-1)^n}{n^a}$ converge vers 0.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Cherchons N tel que $|\frac{(-1)^n}{n^a} - 0| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. Le principe d'Archimède implique l'existence de $N > 0$ tel que $\frac{1}{N} \leq \varepsilon^{1/a}$. Pour $n \geq N$, nous avons alors $|\frac{(-1)^n}{n^a} - 0| = \frac{1}{n^a} \leq \frac{1}{N^a} < \varepsilon$. □

Exemple : La suite $u_n = \frac{n+1}{n}$ tend vers 1.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Cherchons N tel que $|u_n - 1| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. De façon équivalente, cherchons N tel que $1/n = |\frac{n+1}{n} - 1| = |u_n - 1| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. Nous nous somme ramenés à la même question que précédemment et la preuve est terminée. □

Afin de prouver qu'une suite est divergente, il nous faut montrer
$$\forall \ell \in \mathbb{K}, \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |u_n - \ell| \geq \varepsilon,$$
c'est-à-dire que pour tout $\ell \in \mathbb{K}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $N > 0$, il existe $n \geq N$ avec $|u_n - \ell| \geq \varepsilon$.

Exemple : La suite $u_n = (-1)^n$ est divergente.

Démonstration. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Montrons que pour tout $N > 0$, il existe $n \geq N$ tel que $|u_n - \ell| \geq 1$. Soit $N \in \mathbb{N}$, si $\ell \leq 0$, alors $|u_{2N} - \ell| = 1 - \ell \geq 1$. De même, si $\ell \geq 0$, alors $|u_{2N+1} - \ell| = \ell + 1 \geq 1$. □

Exemple : (Caractérisation séquentielle du sup) Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble non vide et majoré. Il existe une suite (a_n) à valeurs dans A avec $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup A$.

Démonstration. Construisons cette suite par récurrence. Soit $a \in A$. On pose $a_0 = a$. Maintenant, supposons la suite construite jusqu'au rang n. Puisque $\sup A - \frac{1}{n}$ n'est pas un majorant, il existe $a \in A$ tel que $\sup A \geq a > \sup A - \frac{1}{n+1}$. On dénote cet élément a_{n+1}. Maintenant, $|a_n - \sup A| \leq \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$, ce qui implique que (a_n) tend vers $\sup A$. □

Proposition 5.2. *Une suite convergente est bornée.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite convergente. Soit $\ell = \lim_{n\to\infty} u_n$. La définition de convergence appliquée à $\varepsilon = 1$ implique l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \ell| \leq 1$ pour tout $n \geq N$. En particulier, l'inégalité triangulaire donne

$$|u_n| \leq |\ell| + 1, \forall n \geq N.$$

Nous en déduisons que $|u_n| \leq M$ pour tout $n \geq 0$, où

$$M = \max\{|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{N-1}|, |\ell| + 1\}.$$

□

Attention, la réciproque est fausse, puisque $u_n = (-1)^n$ est bornée et divergente.

Proposition 5.3. *Soient $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{K}$. Soit (v_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Si*

1. $\exists m \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant m, |u_n - \ell| < v_n$,
2. (v_n) *converge vers 0,*

alors (u_n) converge vers ℓ.

Cette propriété est très utile puisqu'elle montre qu'il suffit de se ramener à des suites (en général plus simples) qui convergent vers 0.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Cherchons N tel que $|u_n - \ell| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. Puisque $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, il existe N_1 tel que $v_n \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N_1$. Posons $N = \max\{m, N_1\}$. Nous obtenons $|u_n - \ell| \leq v_n \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. □

5.1.2 Opérations sur les limites

Proposition 5.4. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes.*

1. (Somme de limites) *La suite $(u_n + v_n)$ est convergente et*

$$\lim_{n\to\infty} (u_n + v_n) = \lim_{n\to\infty} u_n + \lim_{n\to\infty} v_n.$$

2. (Produit de limites) *La suite $(u_n v_n)$ est convergente et*

$$\lim_{n\to\infty} u_n v_n = \lim_{n\to\infty} u_n \cdot \lim_{n\to\infty} v_n.$$

3. (Quotient de limites) *Supposons que* $\lim_{n\to\infty} v_n \neq 0$. *Alors il existe* $m \in \mathbb{N}$ *tel que* $v_n \neq 0$ *pour* $n \geq m$. *De plus, la suite* $(u_n/v_n)_{n\geq m}$ *est convergente et*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} u_n}{\lim\limits_{n\to\infty} v_n}.$$

4. (Valeur absolue) *La suite* $(|u_n|)$ *est convergente et*

$$\lim_{n\to\infty} |u_n| = \left|\lim_{n\to\infty} u_n\right|.$$

5. (Parties réelle et imaginaire) *Supposons* (u_n) *à valeurs dans* $\mathbb{C}$. *Les suites* $(\mathsf{Re}(u_n))$ *et* $(\mathsf{Im}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *sont convergentes et*

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{Re}(u_n) = \mathsf{Re}\left(\lim_{n\to\infty} u_n\right) \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \mathsf{Im}(u_n) = \mathsf{Im}\left(\lim_{n\to\infty} u_n\right).$$

La réciproque de la propriété 5 est vraie : si $(\mathsf{Re}(u_n))$ et $(\mathsf{Im}(u_n))$ convergent respectivement vers a et b, alors (u_n) converge vers $a + ib$.

Démonstration. Posons $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ et $\ell' = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque (u_n) converge vers ℓ, il existe $N_1 > 0$ tel que

$$\forall n \geq N_1, \quad |u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De même, si (v_n) converge vers ℓ', il existe $N_2 > 0$ tel que

$$\forall n \geq N_2, \quad |v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $N = \max\{N_1, N_2\}$. Soit $n \geq N$, l'inégalité triangulaire implique

$$|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| = |(u_n - \ell) + (v_n - \ell')| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ce qui conclut la preuve.

2. Soit $\varepsilon > 0$. La suite (v_n) converge, elle est donc majorée. Ainsi, il existe $M > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M.$$

Puisque (u_n) converge vers ℓ, il existe $N_1 > 0$ tel que

$$\forall n \geq N_1, \quad |u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

De même, si (v_n) converge vers ℓ', il existe $N_2 > 0$ tel que

$$\forall n \geq N_2, \quad |v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2|\ell|}.$$

Posons $N = \max\{N_1, N_2\}$. Soit $n \geq N$, l'inégalité triangulaire implique

$$|u_n v_n - \ell\ell'| = |(u_n - \ell)v_n + \ell(v_n - \ell')| \leq |v_n||u_n - \ell| + |\ell||v_n - \ell'| < M\frac{\varepsilon}{2M} + |\ell|\frac{\varepsilon}{2|\ell|} = \varepsilon$$

ce qui conclut la preuve.

3. Soit $\varepsilon > 0$. La suite (v_n) converge vers $\ell > 0$. Pour $\varepsilon = |\ell|/2$, il existe doncN_1 tel que $|v_n| \geq |\ell|/2$ pour tout $n \geq N_1$. Aussi, il existe $N_2 > 0$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |v_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon|\ell|^2}{2}.$$
En particulier, pour $n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$, l'inégalité triangulaire implique
$$\left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \left|\frac{v_n - \ell}{v_n \ell}\right| \leq \frac{2}{|\ell|^2}|v_n - \ell| < \varepsilon$$
ce qui prouve que $(1/v_n)_{n \geq N_1}$ converge. La propriété 3 suit maintenant de la propriété 2.
4. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque (u_n) converge vers ℓ, il existe $N > 0$ tel que
$$\forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| < \varepsilon.$$
L'inégalité triangulaire implique donc que pour tout $n \geq N$,
$$\big||u_n| - |\ell|\big| \leq |u_n - \ell| < \varepsilon$$
ce qui conclut la preuve.
5. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque (u_n) converge vers ℓ, il existe $N > 0$ tel que
$$\forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| < \varepsilon.$$
La relation $|\mathsf{Re}(z)| \leq |z|$ implique que pour tout $n \geq N$,
$$|\mathsf{Re}(u_n) - \mathsf{Re}(\ell)| = |\mathsf{Re}(u_n - \ell)| \leq |u_n - \ell| < \varepsilon$$
ce qui conclut la preuve pour Re. La même preuve fonctionne pour Im.

□

Nous avons encore une fois utilisé une astuce classique : pour estimer une différence, nous ajoutons et soustrayons une quantité bien choisie.

Exercice 80. Soit (u_n) une suite convergeant vers ℓ. Soit $N > 0$. Montrer que toute suite (v_n) telle que $u_n = v_n$ pour $n \geq N$ converge également vers ℓ.

Exercice 81. Montrer que $u_n = \dfrac{6n^2 - \sqrt{n}}{2n^2 + n}$ converge vers 3.

Exercice 82. Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Montrer que (u_n) converge ssi (u_n) est *stationnaire*, c'est-à-dire qu'il existe $N > 0$ tel que pour tout $n > N$, $u_n = u_N$.

Exercice 83. En utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite de nombres rationnels convergeant vers x.

Exercice 84. Rappelons que $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, soit (u_n) la suite de terme général
$$u_n = 2\frac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor + \cdots + \lfloor nx \rfloor}{n^2}.$$
Montrer que (u_n) converge vers une limite que l'on déterminera. (*Indication :* on pourra utiliser l'inégalité définissant la partie entière).
2. En déduire une preuve alternative du fait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 85. Déterminer si chacune des suites suivantes est convergente ou divergente et calculer leur limite lorsqu'elle existe.

1. $a_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}$
   Il est souvent intéressant de multiplier les expressions de la forme $\sqrt{A} - \sqrt{B}$ par $\sqrt{A} + \sqrt{B}$.
2. $b_n = (-1)^n \left(\dfrac{n+5}{n}\right)$
3. $c_n = \dfrac{n(n-1)}{2^n - 5}$ (on pourra montrer que $2^n \geq n^3$ pour $n \geq 10$ en raisonnant par récurrence puis utiliser ce résultat).
4. $d_n = \left(\dfrac{2n^3}{n^3 - 7}\right)^2$

Exercice 86. Soient (u_n) une suite convergeant vers 0 et (v_n) une suite bornée. Montrer que $(u_n v_n)$ tend vers 0.

Ernesto Cesàro (italien 1859-1906)

Exercice 87 (Théorème de Cesàro)**.** ☠ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite convergeant vers ℓ. Posons $S_n = u_1 + \cdots + u_n$. Nous désirons montrer le théorème de Césaro, c'est-à-dire que $\frac{1}{n} S_n$ converge vers ℓ.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,
$$\left| \sum_{k=N}^{n} u_k - (n - N + 1)\ell \right| < (n - N + 1)\varepsilon.$$
2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$, il existe $N' \geq N$ tel que pour tout $n \geq N'$
$$\frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{N-1} u_k \right| < \varepsilon.$$
3. Montrer en découpant la somme S_n astucieusement, que $\frac{1}{n} S_n$ converge vers ℓ.

5.2 Suites à valeurs réelles et relation d'ordre

Dans cette section, les suites sont supposées **à valeurs réelles** afin de pouvoir utiliser les inégalités.

5.2.1 Inégalité et limites

Voyons maintenant comment utiliser les inégalités avec les limites.

Proposition 5.5 (Prolongement des inégalités larges)**.** *Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes à valeurs réelles. S'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq m$, alors*
$$\lim_{n \to \infty} u_n \leq \lim_{n \to \infty} v_n.$$

En particulier, le résultat appliqué à la suite $v_n = B$ pour tout n implique qu'une suite convergente telle que $u_n \leq B$ a une limite inférieure ou égale à B. Il est très important de noter que des inégalités strictes ne se transportent pas à la limite. En effet, $1/n > 0$ mais $\lim_{n \to \infty} 1/n = 0$.

Démonstration. Posons $\ell = \lim_{n \to \infty} u_n$ et $\ell' = \lim_{n \to \infty} v_n$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque (u_n) converge vers ℓ, il existe N_1 tel que $u_n > \ell - \varepsilon$ pour tout $n \geq N_1$. De même, il existe N_2 tel que $v_n < \ell' + \varepsilon$ pour tout $n \geq N_2$. Considérons $N = \max\{N_1, N_2, m\}$, nous trouvons
$$\ell < u_n + \varepsilon \leq v_n + \varepsilon < \ell' + 2\varepsilon.$$
Dans la deuxième inégalité, nous avons utilisé l'hypothèse $u_n \leq v_n$ pour $n \geq m$. Nous en déduisons que $\ell < \ell' + 2\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Ceci implique $\ell \leq \ell'$. □

Théorème 5.6 (Théorème des gendarmes)**.** *Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles. Supposons*

1. $\exists m \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant m, u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} w_n = \ell$.

Alors (v_n) *converge vers* ℓ.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Cherchons N tel que $|v_n - \ell| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. Il existe N_1 tel que $w_n < \ell + \varepsilon$ pour tout $n \geq N_1$. De même, il existe N_2 tel que $u_n > \ell - \varepsilon$ pour tout $n \geq N_2$. Posons $N = \max\{N_1, N_2, m\}$. Nous obtenons que $-\varepsilon < u_n - \ell \leq v_n - \ell \leq w_n - \ell < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. Ceci implique que $|v_n - \ell| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. □

Attention ! Il n'est pas suffisant d'utiliser la proposition 5.5 deux fois, car pour utiliser cet argument, il serait nécessaire de savoir que la suite (v_n) converge ce qui ne fait pas partie des hypothèses du théorème des gendarmes.

Exemple : La suite $v_n = \frac{\sin n}{n}$ tend vers 0 car $-\frac{1}{n} \leq v_n \leq \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$.

5.2.2 Suites monotones à valeurs dans $\mathbb{R}$

Rappellons qu'une suite est croissante ssi $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$. Une suite est décroissante ssi $u_n \geq u_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$. Une suite est monotone si elle est croissante ou décroissante. La suite est *majorée* s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite est *minorée* s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \geq m$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Remarquer qu'une suite majorée et minorée est bornée, et réciproquement. Le théorème suivant constitue la propriété de base concernant les suites monotones. Il représente notre principal outil pour prouver une convergence. **Lorsque vous faites face à une suite, commencez par vérifier si elle n'est pas monotone.**

Théorème 5.7 (Convergence des suites croissantes)**.** *Une suite réelle croissante et majorée* (u_n) *converge. De plus,*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \sup u_n := \sup\{u_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, cherchons $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - \sup u_k| \leq \varepsilon$. Puisque $\sup u_n$ est le supremum, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sup u_k - \varepsilon < u_N \leq \sup u_k$. Ainsi, pour tout $n \geq N$,

$$\sup u_k - \varepsilon < u_N \leq u_n \leq \sup u_k < \sup u_k + \varepsilon.$$

□

Attention ! Ce résultat n'est pas vrai dans $\mathbb{Q}$.

Un résultat équivalent existe pour les suites décroissantes et monotones.

Le résultat suivant est très utile, car il permet de prouver la convergence de suites sans en connaitre la limite éventuelle.

Théorème 5.8 (Théorème des suites adjacentes)**.** *Soient* (u_n) *et* (v_n) *deux suites réelles. Si*

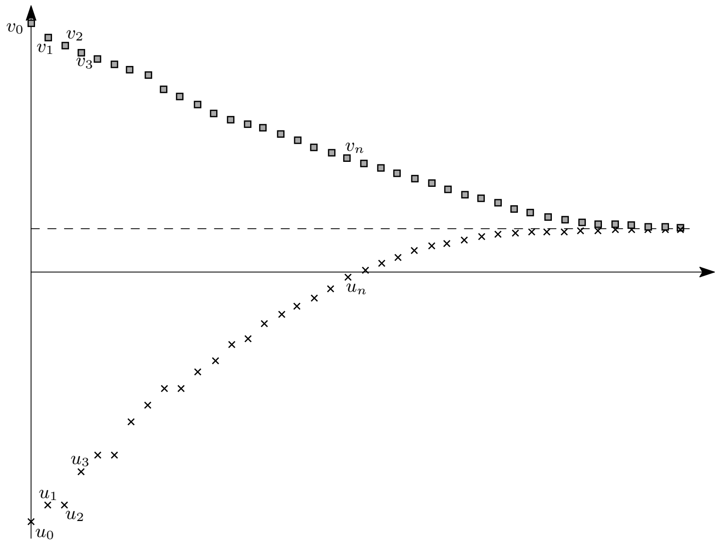
(i) (u_n) *est croissante et* (v_n) *est décroissante,*

(ii) $v_n \geqslant u_n$ *pour tout* $n \geq 0$,

(iii) $\lim_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0$,

alors (u_n) *et* (v_n) *convergent et* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

Deux suites vérifiant les propriétés (i), (ii) et (iii) sont dites *adjacentes*.



Démonstration. La suite (u_n) est majorée par v_0, puisque pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq v_n \leq v_0$. Ainsi, (u_n) est croissante et majorée. Elle converge donc vers un certain réel ℓ. De même, (v_n) est décroissance et minorée, elle converge donc vers ℓ'. De plus, la propriété (iii) implique que $\ell = \ell'$. □

Donnons un exemple d'application directe.

Corollaire 5.9 (Théorème des segments emboités)**.** *Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de segments emboités ($I_{n+1} \subset I_n$). Si la longueur des segments converge vers 0, alors*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \text{ est un singleton.}$$

Démonstration. Tout d'abord, posons $I_n = [u_n, v_n]$. Puisque $[u_{n+1}, v_{n+1}] = I_{n+1} \subset I_n = [u_n, v_m]$, nous obtenons que $u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n$. De plus, $v_n - u_n$ tend vers 0 par hypothèse. Les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes. Par le théorème précédent, elles convergent vers un réel ℓ. Ce réel est dans chaque I_n, puisque $u_n \leq \ell \leq v_n$ pour tout n. En conclusion, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est non vide.

Maintenant, si $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$, alors $|x - \ell|$ est inférieur à la longueur de I_n, et ce pour tout n. Nous en déduisons que $|x - \ell| = 0$, i.e. $x = \ell$. Ainsi, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ ne contient qu'un seul élément. □

Ce corollaire est très utile pour prouver l'existence d'objets.

Exercice 88 (Inversion des supremums, pas des limites)**.** 1. Montrer que pour tout ensembles A, B, et pour toute famille $(a_{i,j})_{i\in A, j\in B}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$,

$$\sup_A \sup_B a_{i,j} = \sup_B \sup_A a_{i,j}.$$

2. Trouver un exemple de famille $(a_{i,j})_{i\in\mathbb{N}, j\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{i\to\infty} \lim_{j\to\infty} a_{i,j} \neq \lim_{j\to\infty} \lim_{i\to\infty} a_{i,j}.$$

Exercice 89 (Théorème spécial des séries alternées)**.** Soit (u_n) une suite réelle décroissante qui converge vers 0 et posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.

1. Montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. En déduire que (S_n) converge.

2. Montrer que pour tout $m \geq n$, $|S_n - S_m| \leq u_{n+1}$ (*Indication :* utiliser le fait que $u_k - u_{k+1} \geq 0$). En déduire que si $S = \lim S_n$, alors $|S_n - S| \leq u_{n+1}$.
3. Montrer que la suite $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge (*Vous montrerez durant le second semestre que la limite vaut* $\log 2$).

Exercice 90. Soient $a < b$ deux réels positifs. Définissons les deux suites (x_n) et (y_n) par récurrence par $x_0 = a$, $y_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$ et $y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$.

1. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $x^2 + y^2 \geq 2xy$. En déduire que $x_n \leq y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que (x_n) croit et que (y_n) décroit.
3. Montrer que (x_n) et (y_n) convergent (on les notera ℓ et ℓ'). Utiliser le fait que $y_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2}$ afin de montrer que $\ell' = \frac{\ell+\ell'}{2}$. En déduire que $\ell = \ell'$.

La limite commune est appelée moyenne arithmético-géométrique de a *et* b*.*

Exercice 91. ☠ Définir $u_n = (1 + 1/n)^n$ et $v_n = (1 + 1/n)^{n+1}$.

1. Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
2. En déduire qu'elles convergent vers une même limite.

La limite des suites (u_n) et (v_n) est en fait $e := \exp(1)$, comme nous le verrons plus tard dans le cours.

Exercice 92 (Suites sous-additives)**.** ☠ Soit (u_n) une suite réelle bornée inférieurement telle que

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, u_{n+m} \leqslant u_n + u_m.$$

Le but de cet exercice est de montrer que (u_n/n) converge vers $\inf\{u_n/n, n \in \mathbb{N}\}$.

1. Montrer que $\ell = \inf\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est bien définie.
2. Montrer que pour tout entiers $p, q, r > 0$, nous avons
$$\frac{u_{pq}}{pq} \leq \frac{u_q}{q} \quad \text{et} \quad \frac{u_{pq+r}}{pq+r} \leq \frac{u_q}{q} + \frac{u_r}{pq+r}.$$
3. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que pour $q \geq m$,
$$\frac{u_q}{q} < \ell + \varepsilon.$$
4. Soit $\varepsilon > 0$, montrer que pour N assez grand, $\frac{u_n}{n} < \ell + 2\varepsilon$.
5. En déduire que (u_n) converge vers ℓ.

5.3 Valeurs d'adhérence d'une suite.

Lorsque une suite ne converge pas, il est parfois possible que certains termes de la suite forment eux-mêmes une suite convergente. Les limites de ce type de suite jouent un rôle important, et sont appelées valeurs d'adhérence. Nous les étudions maintenant.

Une *sous-suite extraite* de (u_n) est une suite de la forme $(u_{\varphi(n)})$, où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.

Exemple : (u_{2n}), (u_{2n+1}), (u_{2^n}) et (u_{p_n}), où p_n est le n-ième nombre premier, sont toutes des sous-suites extraites de (u_n).

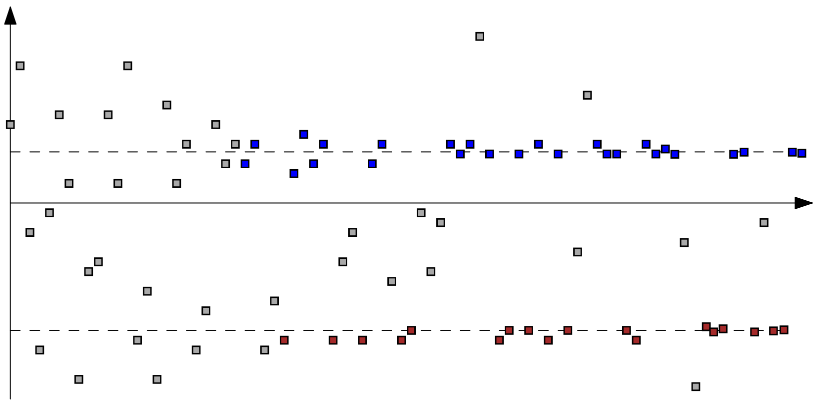
Proposition 5.10. *Toute sous-suite extraite d'une suite convergente a la même limite.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{K}$. Soit $(u_{\varphi(n)})$ une sous-suite extraite. Soit $\varepsilon > 0$. Cherchons $N > 0$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon$. Puisque (u_n) converge vers ℓ, il existe $N > 0$ tel que $|u_n - \ell| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. Maintenant $\varphi(n) \geq n$ (voir l'exercice 28), donc $|u_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon$ ce qui conclut la preuve. □

Définition 5.11. Soient $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $a \in \mathbb{K}$, a est *une valeur d'adhérence* de (u_n) s'il existe une sous-suite extraite de (u_n) qui converge vers a.

Bernard Bolzano (bohḿien 1781-1848) fournit la première définition rigoureuse de la notion de limite, ainsi que les premières preuves purement analytique du théorème fondamental de l'algèbre, du théorème des valeurs intermédiaires et du théorème de Bolzano-Weierstrass. Ses travaux furent égarés et restèrent longtemps ignorés de la communité.

Sur le dessin, une suite avec deux valeurs d'adhérence. En bleu et marron, les indices de deux suites extraites convergent vers ces deux valeurs d'adhérence.



La proposition 5.10 affirme donc qu'une suite convergente admet une unique valeur d'adhérence, qui est sa limite. Elle offre une technique efficace pour montrer qu'une suite est divergente. Il suffit d'exhiber deux valeurs d'adhérence différentes. On pourra penser à l'exemple de $u_n = (-1)^n(1 + \frac{1}{n})$, pour lequel 1 et -1 sont clairement des valeurs d'adhérence.

Proposition 5.12. *Soient $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $a \in \mathbb{K}$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes,*

(i) *a est une valeur d'adhérence de la suite (u_n),*

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |u_n - a| < \varepsilon$.

En mots, la deuxième propriété correspond à la phrase suivante : quelque soit la distance $\varepsilon > 0$ donnée et quel que soit le rang N donné, il existe n plus grand que N tel que u_n et a soient à distance inférieure à ε l'un de l'autre.

Karl Weierstrass (allemand 1815-1897) l'un des fondateurs de l'analyse moderne.

Démonstration. Montrons que (i) implique (ii). Puisque a est une valeur d'adhérence, il existe φ strictement croissante telle que $(u_{\varphi(n)})$ converge vers a. Fixons maintenant $\varepsilon > 0$. Il existe $N_0 > 0$ tel que $|u_{\varphi(n)} - a| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N_0$. Par conséquent, pour tout $N > N_0$, $|u_{\varphi(N)} - a| < \varepsilon$ et $\varphi(N) \geq N$. Pour $N < N_0$, nous pouvons considérer $\varphi(N_0) \geq N_0 \geq N$.

Montrons que (ii) implique (i). Construisons une suite extraite par récurrence. Pour $\varepsilon = 1$, considérons k tel que $|u_k - a| < 1$. Posons $\varphi(1) := k$. Maintenant, supposons la suite construite jusqu'au rang n. Pour $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$ et $N = \varphi(n) + 1$, il existe $k \geq N$ tel que $|u_k - a| < \frac{1}{n+1}$. Posons $k = \varphi(n+1)$. Remarquez que $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ et $|u_{\varphi(n)} - a| < 1/n$ pour tout $n \geq 1$. La suite $(u_{\varphi(n)})$ est donc une suite extraite de (u_n) convergent vers a. La valeur a est donc une valeur d'adhérence de (u_n). □

Tournons nous maintenant vers le théorème principal de cette section.

Théorème 5.13 (théorème de Bolzano-Weierstrass)**.** *Toute suite bornée à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$ possède une valeur d'adhérence.*

Avant de montrer ce résultat, précisons qu'il n'est pas vrai pour les suites à valeurs dans $\mathbb{Q}$: la suite dans $\mathbb{Q}$ donnée par $r_n = \lfloor 10^n\sqrt{2}\rfloor 10^{-n}$ ne possède pas de valeur d'adhérence. En effet, si elle en possèdait une, celle-ci serait égale à $\sqrt{2}$. Mais $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel, ce qui exclue le fait qu'il soit valeur d'adhérence de la suite, **lorsque considérée comme suite d'entiers rationnels**. Par contre, $\sqrt{2}$ est une valeur d'adhérence de r_n lorsque considérée comme suite à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Afin de montrer ce théorème, nous introduisons une notion très utile concernant les suites à valeurs réelles.

Définition 5.14. Les *limite sup* et *limite inf* d'une suite bornée (u_n) **à valeurs réelles** sont définies par les formules suivantes

$$\limsup u_n \overset{\text{not.}}{=} \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} u_k \quad \text{et} \quad \liminf u_n \overset{\text{not.}}{=} \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} u_k.$$

Nous insistons sur le fait que la suite doit être supposée bornée et réelle. En effet, les supremum de la forme $\sup_{k\geq n} u_k$ sont finis puisque (u_n) est majorée. Ainsi, la suite $(\sup_{k\geq n} u_k)$ est décroissante. Puisque (u_n) est minorée, la suite $(\sup_{k\geq n} u_k)$ est minorée et la suite converge donc, ce qui justifie bien la définition.

Notons que la suite de terme général $\alpha_n = \sup_{k\geq n} u_k$ est décroissante, car les ensembles $\{u_k, k \geq n\}$ sont de plus en plus petit. (Rappelons que $\sup_A f \leq \sup_B f$ lorsque $A \subset B$.)

Proposition 5.15. *Les limsup et liminf sont des valeurs d'adhérence. De plus, la limsup est le maximum de l'ensemble des valeurs d'adhérence. La liminf est le minimum des valeurs d'adhérence.*

Démonstration. Effectuons la preuve pour la limsup, la preuve pour la liminf étant similaire.

Nous utilisons la caractérisation (ii) de la valeur d'adhérence. Soit $\varepsilon > 0$ et $N \geq 0$. Puisque la suite de terme général $\sup_{k\geq n} u_k$ tend vers $\limsup u_n$ et est décroissante, il existe $N' \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N'$,

$$\limsup u_n \leq \sup_{k\geq n} u_k \leq \limsup u_n + \varepsilon.$$

En particulier, puisque $u_n \leq \sup_{k\geq n} u_k$, nous en déduisons que tout valeur d'adhérence est inférieure ou égale à $\limsup u_n$.

Dans l'autre sens, vérifions que $\limsup u_n$ est une valeur d'adhérence. Considérons $n = \max\{N, N'\}$. La caractérisation du supremum implique l'existence de $k \geq n = \max\{N, N'\}$ tel que

$$\sup_{k\geq n} u_k - \varepsilon \leq u_k \leq \sup_{k\geq n} u_k.$$

En réinjectant dans l'équation précédente, nous obtenons

$$\limsup u_n - \varepsilon \leq u_k \leq \limsup u_n + \varepsilon.$$

□

Démonstration du théorème de Bolzano-Weierstrass. Dans le cas d'une suite à valeurs réelles, il suffit de prendre la limsup, qui est bien définie puisque la suite est bornée.

Dans le cas d'une suite à valeurs complexes, observons que $(\mathsf{Re}(u_n))$ est une suite réelle bornée, qui admet donc une valeur d'adhérence. Supposons que $(\mathsf{Re}(u_{\varphi(n)})$ soit une suite convergente vers cette valeur d'adhérence. La suite $(\mathsf{Im}(u_{\varphi(n)}))$ est elle aussi bornée et réelle, et elle admet donc elle aussi une valeur d'adhérence. Soit ψ telle que $(\mathsf{Im}(u_{\varphi(\psi(n))}))$ converge. Puisque $(\mathsf{Re}(u_{\varphi(\psi(n))})$ converge comme suite extraite d'une suite convergente, on obtient que $(u_{\varphi\circ\psi(n)})$ converge puisque sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent. $\square$

Exercice 93. Soit (u_n) une suite à valeurs réelles.

1. Montrer que si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite, alors la suite (u_n) converge.
2. Montrer que si les suites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent, alors la suite (u_n) converge.
3. Donner un exemple d'une suite (u_n) divergente telle que pour tout $k \geq 2$, la suite (u_{kn}) soit convergente.

Exercice 94. 1. Donner un exemple de suites possèdant respectivement une, deux et trois valeurs d'adhérence.

2. Même question avec m valeurs d'adhérence.
3. Même question avec $\mathbb{N}$.
4. Même question avec $\mathbb{R}$.

Déterminer, lorsqu'elles existent, les liminf et limsup de ces suites.

Exercice 95 (Une preuve par dichotomie du théorème de Bolzano-Weierstrass)**.** Soit (u_n) une suite à valeurs dans $[a,b]$. On désire construire une sous-suite convergente $(u_{\varphi(n)})$. Posons $\varphi(0) = 0$, $a_0 = a$ et $b_0 = b$.

1. Montrer qu'ou bien il existe une infinité d'indices n tels que $u_n \in [\frac{a+b}{2}, b]$, ou bien il existe une infinité d'indices n tels que $u_n \in [a, \frac{a+b}{2}]$. Dans le premier cas, posons $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ et $b_1 = b_0$. Dans le deuxième cas, posons $a_1 = a_0$ et $b_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$. De plus, on pose $\varphi(1)$ comme étant le plus petit indice $n \geq \varphi(0) = 0$ tel que $u_n \in [a_1, b_1]$.
2. Montrer qu'ou bien il existe une infinité d'indices $n \geq \varphi(1)$ tels que $u_n \in [\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$, ou bien il existe une infinité d'indices n tels que $u_n \in [a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$. Dans le premier cas, posons $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$ et $b_2 = b_1$. Dans le deuxième cas, posons $a_2 = a_1$ et $b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$. De plus, on pose $\varphi(2)$ comme étant le plus petit indice $n \geq \varphi(0) = 0$ tel que $u_n \in [a_2, b_2]$.
3. Poursuivre cette construction afin d'obtenir trois suites (a_n), (b_n) et $(u_{\varphi(n)})$ avec des propriétés bien choisies.
4. Montrer que (a_n) est croissante, (b_n) est décroissante, et $b_n - a_n$ tend vers 0. En déduire que (a_n) et (b_n) tendent vers une limite ℓ.
5. En déduire que $(u_{\varphi(n)})$ tend également vers ℓ.

Le but de l'exercice suivant est de montrer que toute suite bornée dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ possèdant une unique valeur d'adhérence est convergente.

Exercice 96. Soit (u_n) suite bornée à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Montrer que (u_n) possède une valeur d'adhérence, que l'on note a.
2. Supposons que (u_n) ne converge pas, montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que $|u_n - a| \geq \varepsilon$.
3. Prouver l'existence d'une sous-suite extraite de (u_n), que l'on notera $(u_{\varphi(n)})$, telle que $|u_{\varphi(n)} - a| \geq \varepsilon$ pour tout $n \geq 0$.
4. Montrer que (u_n) possède une valeur d'adhérence $a' \neq a$.
5. Conclure que toute suite bornée dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ possèdant une unique valeur d'adhérence est convergente.

Ce résultat est utilisé très fréquemment en mathématique. En effet, il donne un moyen de montrer qu'une suite bornée converge : il suffit de considérer deux valeurs d'adhérences, et de montrer qu'elles sont nécessairement égales.

5.4 Suites de Cauchy

Le défaut des critères précédents (à l'exception du théorème des suites adjacentes et du théorème invoquant l'unicité de la valeur d'adhérence) est qu'ils requièrent de connaitre la limite potentielle avant d'entamer une preuve de convergence. Afin de remédier à cette faiblesse, nous introduisons la notion de suite de Cauchy.

Dans cette partie, $\mathbb{K}$ peut être égal à $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{Q}$.

Définition 5.16. Une suite (u_n) est *de Cauchy* si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m > N, |u_n - u_m| < \varepsilon.$$

Avec les mots, cette définition garantit que quelque soit la distance $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N \geq 0$ tel qu'après ce rang, tous les termes de la suite sont à distance inférieure à ε les uns des autres.

Proposition 5.17. *Toute suite convergente est de Cauchy.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Notons ℓ la limite de (u_n). Puisque (u_n) est convergente, il existe $N > 0$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| < \varepsilon/2$. Ainsi, pour tout $n, m \geq N$,

$$|u_n - u_m| \leq |u_n - \ell + \ell - u_m| \leq |u_n - \ell| + |u_m - \ell| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

□

Attention ! Il ne suffit pas de montrer que $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0 pour montrer qu'une suite est de Cauchy. On pourra méditer sur l'exemple de la suite

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

On a bien $H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1}$ mais

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

ce qui empêche cette suite d'être de Cauchy (appliquer la définition à $\varepsilon < 1/2$ pour aboutir à une contradiction).

Jusqu'ici, nous n'avons pas pris la peine de préciser que la suite convergeait *dans* $\mathbb{K}$. Mais cette omission est à prendre avec des pincettes, car une suite peut converger dans un ensemble et pas dans un autre. Donnons un exemple, considérons à nouveau la suite dans $\mathbb{Q}$ donnée par $r_n = \lfloor 10^n \sqrt{2} \rfloor 10^{-n}$. Cette suite ne converge pas vers $\sqrt{2}$ dans $\mathbb{Q}$, puisque $\sqrt{2}$ n'appartient pas à $\mathbb{Q}$ (la limite d'une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un élément de $\mathbb{K}$). En un certain sens, elle tend vers un "trou" dans $\mathbb{Q}$. À l'inverse, la suite, considérée comme une suite d'éléments de $\mathbb{R}$, converge vers $\sqrt{2}$ dans $\mathbb{R}$. Gardez cette remarque à l'esprit lorsque vous ferez de la topologie.
Par contre, la suite est toujours de Cauchy, qu'elle soit considérée comme une suite dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{Q}$. Cette suite nous donne un exemple de suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ qui n'est pas convergente dans $\mathbb{R}$. Il est très important de réaliser que la notion de suite de Cauchy n'est pas équivalente à la notion de suite convergente.

Proposition 5.18. *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite de Cauchy. La définition appliquée à $\varepsilon = 1$ implique l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - u_N| \leq 1$ pour tout $n \geq N$. En particulier, l'inégalité triangulaire donne

$$|u_n| \leq |u_N| + 1, \forall n \geq N.$$

Nous en déduisons que $|u_n| \leq M$ pour tout $n \geq 0$, où

$$M = \max\{|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{N-1}|, |u_N| + 1\}.$$

□

Lemme 5.19. *Une suite de Cauchy possèdant une valeur d'adhérence est convergente.*

Ce lemme résume bien la différence entre la notion de suite convergente et suite de Cauchy. À partir du moment où l'on possède un candidat pour être la limite (ici la valeur d'adhérence), alors la suite est effectivement convergente, et elle converge vers ce candidat. Mais il est possible en général, par exemple pour des suites dans $\mathbb{Q}$, que le candidat ne soit pas dans l'ensemble.

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{K}$ une valeur d'adhérence de (u_n). Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N_0 > 0$ tel que pour tout $n, m \geq N$ $|u_n - u_m| < \varepsilon/2$. Puisque a est une valeur d'adhérence, il existe $N > N_0$ tel que $|a_N - a| < \varepsilon/2$. Dès lors, pour tout $n \geq N_0$,

$$|u_n - a| \leq |u_n - u_N| + |u_N - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

□

Un espace X tel que toute suite dans X de Cauchy est convergente dans X est appelé un espace *complet*. Par exemple, l'ensemble $\mathbb{Q}$ n'est pas complet comme nous l'a fournit l'exemple de l'encadré précédent. Pour revenir à la troisième faiblesse de $\mathbb{Q}$ expliquée dans le chapitre sur $\mathbb{R}$, les suites qui auraient dû converger dans $\mathbb{Q}$ sont les suites de Cauchy. Par contre, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des espaces complets.

Mentionons que Cauchy proposa une construction alternative de $\mathbb{R}$, utilisant les suites de Cauchy à valeurs dans $\mathbb{Q}$, qui fait de $\mathbb{R}$ un ensemble complet immédiatement. Par contre, il faut travailler quelque peu pour montrer l'existence d'un supremum et un infimum, une propriété qui était immédiate avec la construction de Dedekind.

Corollaire 5.20 ($\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont complets)**.** *Toute suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ converge dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Puisque qu'une suite de Cauchy est bornée, le théorème de Bolzano-Wieirstrass implique qu'elle possède une valeur d'adhérence. La proposition précédente implique que la suite est convergente. □

Il est temps de faire un point sur les différentes techniques disponibles pour prouver la convergence de suites.

1. **Si la limite potentielle n'est pas connue.** Dans ce cas, les seules techniques possibles sont :
   (a) Si nous sommes en fait en possession de deux suites adjacentes, on utilise le théorème des suites adjacentes (cas de $\mathbb{R}$).
   (b) On montre que la suite est bornée et possède une unique valeur d'adhérence (cas de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
   (c) On montre qu'elle est de Cauchy (cas de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
2. **Si la limite potentielle est connue**
   (a) On peut encadrer la suite par deux suites connues et utiliser le théorème des gendarmes.
   (b) On prouve la convergence à la main.

Exercice 97. Dans cette exercice, nous considérons $\mathbb{K}$ différent de $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$ est complet. Montrer que $\mathbb{K} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'est pas complet.

Exercice 98 (irrationalité de e)**.** ☠
1. Montrer que $\sum_{n=N+1}^{M} \frac{1}{n!} < \frac{1}{N \cdot N!}$ pour N assez grand et $M \geq N$.
2. Supposons que $e = \exp(1) = \frac{p}{q}$ avec p et q entiers. En considérant $q!e$, montrer que l'on aboutit à une contradiction.

5.5 Suites à récurrence linéaire

Mentionons maintenant un exemple typique de suite.

Définition 5.21. Une suite (u_n) est dite *à récurrence linéaire d'ordre d* s'il existe $a_0, \dots, a_{d-1} \in \mathbb{R}$ (non tous nuls) et $b_0, \dots, b_{d-1} \in \mathbb{R}$ tels que $u_i = b_i$ pour tout $i \leq d-1$ et

$$u_{n+d} = a_{d-1} u_{n+d-1} + \cdots + a_1 u_n + a_0.$$

On dit parfois que la suite v_n solution de $v_{n+d} = a_{d-1} v_{n+d-1} + \cdots + a_1 v_n$ est la solution du système homogène.

Il est possible de résoudre ces suites de façon explicite. Nous donnons l'exemple des suites d'ordre 1 et 2.

Proposition 5.22 (Suite récurrente d'ordre 1 homogène)**.** *Soit (u_n) la suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = a u_n$ et la condition initiale u_0. Alors pour tout $n \geq 0$, $u_n = a^n u_0$.*

Démonstration. Ceci suit d'une preuve très simple par récurrence. □

Corollaire 5.23 (Suite récurrente d'ordre 1 inhomogène)**.** *Soit (u_n) la suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = a u_n + b$ et la condition initiale u_0. Alors pour tout $n \geq 0$,*

$$u_n = \begin{cases} a^n \left(u_0 + \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a} & si\ a \neq 1 \\ bn + u_0 & si\ a = 1 \end{cases}.$$

Démonstration. La preuve consiste à résoudre l'équation où (u_n) est remplacée par la suite constante égale à ℓ. On obtient donc $\ell = a\ell + b$ ce qui donne $\ell = \frac{b}{1-a}$ si $a \neq 1$. En posant $v_n = u_n - \ell$, nous trouvons que (v_n) est solution du système homogène. Ainsi, $v_n = a^n v_0$, d'où le résultat.

Traitons maintenant le cas $a = 1$. Dans ce cas, $u_{n+1} = u_n + b$. On pose $v_n = u_n - nb$. On obtient que $v_{n+1} + (n+1)b = v_n + nb + b$ ce qui donne $v_{n+1} = v_n$ et on obtient donc le résultat par la proposition précédente. □

Proposition 5.24 (Suite récurrente d'ordre 2 homogène)**.** *Soit (u_n) la suite définie par la relation de récurrence*

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Alors il existe A et B dépendant uniquement de a, b et des conditions initialles u_0 et u_1 telles que,

1. *Si $\Delta = a^2 + 4b \neq 0$ alors $u_n = A\lambda^n + B\mu^n$ où λ et μ sont les deux solutions distinctes sur $\mathbb{C}$ de $x^2 - ax - b = 0$.*

2. *Si $\Delta = a^2 + 4b = 0$, alors $u_n = (An + B)\lambda^n$ où λ est l'unique solution dans $\mathbb{C}$ de $x^2 - ax - b = 0$.*

Démonstration. Intéressons nous au premier cas. Notons λ et μ les deux solutions de $x^2 - ax - b$, qui sont nécessairement distinctes (elles peuvent être complexe). Résolvons le système à deux inconnues deux équations

$$(S) \quad \begin{cases} A + B = u_0 \\ A\lambda + B\mu = u_1 \end{cases}$$

Le déterminant de l'équation d'inconnues A et B est $\mu - \lambda \neq 0$. Nous obtenons $A = \dfrac{\mu u_0 - u_1}{\mu - \lambda}$ et $B = \dfrac{\lambda u_0 - u_1}{\lambda - \mu}$. Montrons maintenant que $u_n = A\lambda^n + B\mu^n$ par récurrence sur $n \geq 1$,

$\mathscr{H}_n$: "$u_n = A\lambda^n + B\mu^n$ et $u_{n-1} = A\lambda^{n-1} + B\mu^{n-1}$."

$\mathscr{H}_1$ est montré grâce au système (S). Supposons $\mathscr{H}_n$ vraie et montrons $\mathscr{H}_{n+1}$. Nous avons déjà $u_n = A\lambda^n + B\mu^n$ par $\mathscr{H}_n$. Maintenant

$$\begin{aligned} u_{n+1} = au_n + bu_{n-1} &= a(A\lambda^n + B\mu^n) + b(A\lambda^{n-1} + B\mu^{n-1}) \\ &= A\lambda^{n-1}(a\lambda + 1) + B\mu^{n-1}(b\mu + 1) \\ &= A\lambda^{n-1}\lambda^2 + B\mu^{n-1}\mu^2 = A\lambda^{n+1} + B\mu^{n+1}. \end{aligned}$$

Intéressons-nous au deuxième cas. Notons λ l'unique solution de $x^2 - ax - b$. Puisque a et b ne peuvent pas être nuls simultanéments, aucun d'eux ne sont nuls (sinon cela impliquerait que les deux le serait) on obtient que $\lambda = a/2 \neq 0$. Résolvons le système à deux inconnues et deux équations

$$(S') \quad \begin{cases} A \cdot 0 + B = b_0 \\ (A + B)\lambda = b_1 \end{cases}$$

Nous obtenons $A = \lambda^{-1}u_1 - u_0$ et $B = u_0$. Montrons maintenant que $u_n = (An + B)\lambda^n$ par récurrence sur $n \geq 1$,

$\mathscr{H}_n$: "$u_n = (An + B)\lambda^n$ et $u_{n-1} = (A(n-1) + B)\lambda^{n-1}$."

$\mathscr{H}_1$ est montré grâce au système (S'). Supposons $\mathscr{H}_n$ vraie et montrons $\mathscr{H}_{n+1}$. Nous avons déjà $u_n = (An+B)\lambda^n$ par $\mathscr{H}_n$. Maintenant

$$\begin{aligned} u_{n+1} = au_n + bu_{n-1} &= a(An+B)\lambda^n + b(A(n-1)+B)\lambda^{n-1} \\ &= [a(An+B)\lambda + b(A(n-1)+B)]\lambda^{n-1} \\ &= [(An+B)(a\lambda+b) - bA]\lambda^{n-1}. \end{aligned}$$

Mais puisque $\lambda^2 - a\lambda + b$, et $x^2 - ax - b = (x-\lambda)^2$ (λ est l'unique solution de l'équation) nous obtenons $-b = \lambda^2$. Ainsi, nous trouvons

$$u_{n+1} = [(an+b)\lambda^2 + A\lambda^2]\lambda^{n-1} = [A(n+1)+B]\lambda^{n+1}.$$

□

Plutôt de de d'écrire généralement le cas des suites récurrentes d'ordre 2 inhomogènes, nous présentons comment les résoudre au cas par cas. Le but est de se ramener au cas de (v_n) solution du système homogène (que l'on sait résoudre par la proposition précédente) en trouvant une solution particulière.

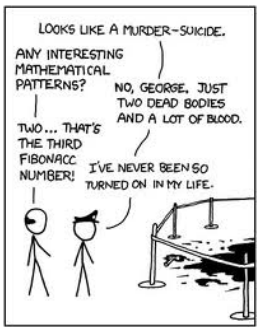
- Si $a+b \neq 1$, on essaye tout d'abord de remplacer (u_n) par ℓ, on obtient $\ell = a\ell + b\ell + c$. On obtient $\ell = \frac{c}{1-a-b}$. En posant $v_n = u_n - \ell$, on peut résoudre le système homogène, qui donne alors la solution du système général.
- Si $a+b = 1$ et $1+b \neq 0$, on tente de trouver une solution de la forme xn. On trouve que $x(n+1) = axn + bx(n-1) + c$ implique $x = -bx + c$. En posant $v_n = u_n - \frac{c}{1+b}n$, on trouve que (v_n) satisfait la relation de récurrence homogène.
- Si $a+b = 1$ et $1+b = 0$, on tente de trouver une solution de la forme yn^2. On trouve que $y(n+1)^2 = ayn^2 + by(n-1)^2 + c$ implique $y = c$. On a alors que $v_n = u_n - cn^2$ satisfait la relation de récurrence homogène.

Exemple : (Suite de Fibonacci, douzième siècle) Soit (u_n) définie par récurrence par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \end{cases}$$

Si $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (le nombre d'or), alors

$$u_n = \varphi^n + \varphi^{-n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$



5.6 Suites tendant vers l'infini et formes indéterminées

Définition 5.25. Soit (u_n) une suite réelle.

1. (u_n) *tend vers* $+\infty$ si $\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \geqslant M$.
2. (u_n) *tend vers* $-\infty$ si $\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \leq M$.

Notons que $-\infty/+\infty$ n'est pas une limite au sens propre du terme, puisque ce n'est pas un réel. Il faudra donc faire attention lorsque l'on manipule ces limites. Nous mentionons maintenant certaines propriétés de la limite (dans le cas où la limite est $+\infty$).

Proposition 5.26. *1. Si (u_n) tend vers $+\infty$, alors (u_n) n'est pas majorée.*

2. Si (u_n) tend vers $+\infty$ et $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors (v_n) tend vers $+\infty$.

3. Si $A \subset \mathbb{R}$ est non majoré, alors il existe une suite de A tendant vers $+\infty$.

4. Si (u_n) une suite réelle croissante non majorée, alors (u_n) tend vers $+\infty$.

5. Si (u_n) tend vers $+\infty$, alors $\frac{1}{u_n}$ tend vers 0.

Démonstration. Montrons 1. Raisonnons par l'absurde. Soit $M > 0$ majorant (u_n). En appliquant la définition de la convergence vers l'infini, il existe N tel que $u_n \geq M + 1$ pour tout $n \geq N$, ce qui est absurde.

Montrons 2. Soit $M > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \geq M$. Nous avons alors $v_n \geq u_n \geq M$ pour tout $n \geq N$.

Montrons 3. Construisons cette suite par récurrence. Soit $n \geq 0$, puisque A n'est pas majoré, il existe $x \in A$ tel que $x \geq n$. Posons $u_n := x$. La suite (u_n) est à valeurs dans A et vérifie $u_n \geq n$ pour tout n. Puisque la suite de terme général n tend vers l'infini, (u_n) tend vers l'infini (par le point 2).

Montrons 4. Soit $M > 0$. Puisque (u_n) n'est pas majorée, en particulier il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \geq M$. Mais alors $u_n \geq u_N \geq M$ pour tout $n \geq N$.

Montrons 5. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque (u_n) tend vers $+\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq \frac{1}{\varepsilon}$ pour tout $n \geq N$. On a alors $0 < \frac{1}{u_n} \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. □

Notons $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Définissons les opérations intuitives sur $\overline{\mathbb{R}}$ qui étendent les opérations sur $\mathbb{R}$ comme suit :

$$\begin{array}{lccccccccccc}
\forall \ell \in \mathbb{R}, & \ell & + & +\infty & = & +\infty & \text{et} & \ell & + & -\infty & = & -\infty \\
 & +\infty & + & +\infty & = & +\infty & \text{et} & -\infty & + & -\infty & = & -\infty \\
\forall \ell \in \mathbb{R}^*, & \ell & / & +\infty & = & 0 & \text{et} & \ell & / & -\infty & = & 0 \\
\forall \ell > 0, & \ell & \times & +\infty & = & +\infty & \text{et} & \ell & \times & -\infty & = & -\infty \\
\forall \ell < 0, & \ell & \times & +\infty & = & -\infty & \text{et} & \ell & \times & -\infty & = & +\infty
\end{array}$$

Remarquez que certaines opérations ne sont pas autorisées (par exemple, $\infty \times 0$ ou ∞/∞, ou $0/0$ ou même $1/0$). Ces opérations correspondent à des expressions dites *formes indéterminées*.
Exemple : La limite de $u_n = n^2 - n$ est $+\infty$, et $v_n = n - n^2$ est $-\infty$.

Proposition 5.27. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes. Les limites respectent les opérations, tant que celles-ci ne sont pas des formes indéterminées.*

Démonstration. Il suffit de vérifier tous les cas. C'est un peu fastidieux mais cela fonctionne sans aucun problème. □

Nous verrons dans le chapitre sur les développements asymptotiques comment s'occuper des formes indéterminées.

Chapitre 6: Fonctions Continues

6.1 Limite d'une fonction en un point

Dans cette partie, $E \subset \mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$. On note $\overline{E}$ l'ensemble des points $x_0 \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe une suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ tendant vers x_0. Cet ensemble est appelé l'*adhérence* de E. Par exemple $\overline{(a,b)} = [a,b]$, $\overline{\mathbb{R} \setminus \{0\}} = \mathbb{R}$.

6.1.1 Convergence en x_0

Définition 6.1. Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $E \subset \mathbb{R}$. Considérons $x_0 \in \overline{E}$. La fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *tend vers ℓ en x_0* si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E, \Big[|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon\Big].$$

1. Notons alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.
2. Comme pour la limite de suite, le symbole lim ne peut être utilisé que si nous avons précédemment prouvé l'existence de cette limite.
3. Lorsque $x_0 \in E$, nous avons nécessairement $f(x_0) = \ell$.
4. La limite en x_0 est une propriété locale. Elle ne dépend que de la fonction "au voisinage de x_0".

Exemple : La limite de $\lim_{x \to 3} x^2 - 9 = 0$.

Pour montrer que f tend vers ℓ en x_0, il faut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|x - x_0| < \delta$ implique $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ pour tout $x \in E$.
Ainsi, on commencera toujours la preuve par la phrase suivante :

Soit $\varepsilon > 0$.

On cherche ensuite $\delta > 0$. Après l'avoir construit, on écrit.

Soit $x \in E$ tel que $|x - x_0| < \delta$, montrons que $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Comme pour la limite de suite, de nombreuses propriétés sont vérifiées. En particulier, la limite se comporte bien vis-à-vis des opérations.

Proposition 6.2. *Soient f et g deux fonctions de E dans $\mathbb{R}$. Supposons que f converge vers ℓ en x_0 et g converge vers ℓ' en x_0. Alors*
- *$f+g$ converge vers $\ell+\ell'$,*
- *fg converge vers $\ell\ell'$,*
- *Si $\ell' \neq 0$, alors $g \neq 0$ pour x assez proche de x_0 et f/g converge vers ℓ/ℓ'.*

Démonstration. **Preuve pour la somme.** Soit $\varepsilon > 0$. Cherchons $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $|x - x_0| < \delta$ implique $|(f+g)(x) - (\ell+\ell')| < \varepsilon$. Il existe δ_1 tel que $|x-x_0| < \delta_1$ implique $|f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. Il existe δ_2 tel que $|x - x_0| < \delta_2$ implique $|g(x) - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2}$. Posons $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Pour tout $x \in E$ tel que $|x - x_0| < \delta$,

$$|(f+g)(x) - (\ell+\ell')| \leq |f(x) - \ell| + |g(x) - \ell'| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Preuve pour la multiplication. Soit $\varepsilon > 0$. Cherchons $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $|x - x_0| < \delta$ implique $|(fg)(x) - \ell\ell'| < \varepsilon$. Il existe $\delta_1 > 0$ tel que $|x - x_0| < \delta_1$ implique $|f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2|\ell'|}$. En particulier, $|f(x)|$ est bornée sur $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$. Il existe $\delta_2 > 0$ tel que $|x - x_0| < \delta_2$ implique $|g(x) - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2\max_{x\in(x_0-\delta_1,x_0+\delta_1)}|f(x)|}$. Posons $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Pour tout $x \in E$ tel que $|x - x_0| < \delta$,

$$\begin{aligned}
|(fg)(x) - (\ell\ell')| &= \big|f(x)\big(g(x) - \ell'\big) + \ell'\big(f(x) - \ell\big)\big| \\
&\leq |f(x)||g(x) - \ell'| + |\ell'||f(x) - \ell| \\
&\leq \Big(\max_{x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)} |f(x)|\Big)\frac{\varepsilon}{2\max_{x\in(x_0-\delta_1,x_0+\delta_1)}|f(x)|} + |\ell'|\frac{\varepsilon}{2|\ell'|} \\
&< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.
\end{aligned}$$

On a utilisé le fait que le maximum de $|f|$ est plus petit sur $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ que sur $[x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]$.

Preuve pour le quotient. Soit $\varepsilon > 0$. Cherchons $\delta > 0$ tel que $|x - x_0| < \delta$ implique $|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{\ell}{\ell'}| < \varepsilon$.

Tout d'abord, en appliquant la définition de la continuité de g en x_0 à $\varepsilon = |\ell'|/2$, il existe $\delta_1 > 0$ tel que $|x - x_0| < \delta_1$ implique $|\ell'| - |g(x)| \leq |g(x) - \ell'| < |\ell'|/2$, ce qui nous donne $|g(x)| > |\ell'|/2$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta_2 > 0$ tel que $|x - x_0| < \delta_2$ implique $|f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon|\ell'|}{4}$. De même, il existe $\delta_3 > 0$ tel que $|x - x_0| < \delta_3$ implique $|g(x) - \ell'| < \dfrac{\varepsilon|\ell'|^2}{4|\ell|}$. Posons $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Pour tout $x \in E$ tel que $|x - x_0| < \delta$,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{\ell}{\ell'}\right| &= \left|\frac{f(x)-\ell}{g(x)} + \ell\left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{\ell'}\right)\right| \\
&= \left|\frac{f(x)-\ell}{g(x)} + \ell\frac{g(x)-\ell'}{\ell' g(x)}\right| \\
&= |f(x) - \ell|\frac{1}{|g(x)|} + \frac{|\ell|}{|\ell'||g(x)|}|g(x) - \ell'| \\
&< \frac{\varepsilon|\ell'|}{4}\frac{2}{|\ell'|} + \frac{2|\ell|}{|\ell'|^2}\frac{\varepsilon|\ell'|^2}{4|\ell|} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Dans la preuve précédente, les formules sont longues et hideuses. On peut en fait simplifier ces formules en remarquant que les assertions suivantes sont équivalentes (voir l'exercice 100)

1. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E, [|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon]$
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E, [|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon]$
3. $\exists M > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E, [|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq M\varepsilon]$

On peut alors réécrire par exemple la dernière preuve en prenant $\delta > 0$ tel que $|g(x)| \geq |\ell'|/2$, $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ et $|g(x) - \ell'| < \varepsilon$. On a alors

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{\ell}{\ell'} \right| \leq \left(\frac{1}{|\ell'|} + 2\frac{|\ell|}{|\ell'|^2} \right) \varepsilon$$

qui est de la forme 3. avec $M = \frac{1}{|\ell'|} + 2\frac{|\ell|}{|\ell'|^2}$. Ainsi, il n'est pas vraiment nécessaire de deviner quels sont les bons $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tels que $|f(x) - \ell| < \varepsilon_1$ et $|g(x) - \ell'| < \varepsilon_2$ à prendre pour obtenir ε à la fin. À partir de maintenant, nous utiliserons cette remarque systématiquement.

6.1.2 Convergence en $\pm\infty$ et convergence vers $\pm\infty$

Supposons dans cette section que $(x_0, +\infty) \subset E$ si on considère la limite en $+\infty$ ou $(-\infty, x_0) \subset E$ si l'on considère la limite en $-\infty$.

Définition 6.3 (limite en $\pm\infty$)**.** On dit que la fonction f converge vers ℓ en $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, \forall x \in E, \big[x > M \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon\big].$$

On note alors $\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell$.

De même, la fonction f converge vers ℓ en $-\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m < 0, \forall x \in E, \big[x < m \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon\big].$$

On note alors $\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell$.

La propriété sur les opérations sur les limites est la même. Je vous laisse sa preuve comme exercice.

Définition 6.4 (convergence vers $\pm\infty$)**.** On dit que la fonction f converge vers $+\infty$ en x_0 si

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E, \big[|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq A\big].$$

On note alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

De même, la fonction f converge vers $-\infty$ en x_0 si

$$\forall B < 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E, \big[|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow f(x) \leq B\big].$$

On note alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

6.2 Continuité des fonctions de la variable réelle

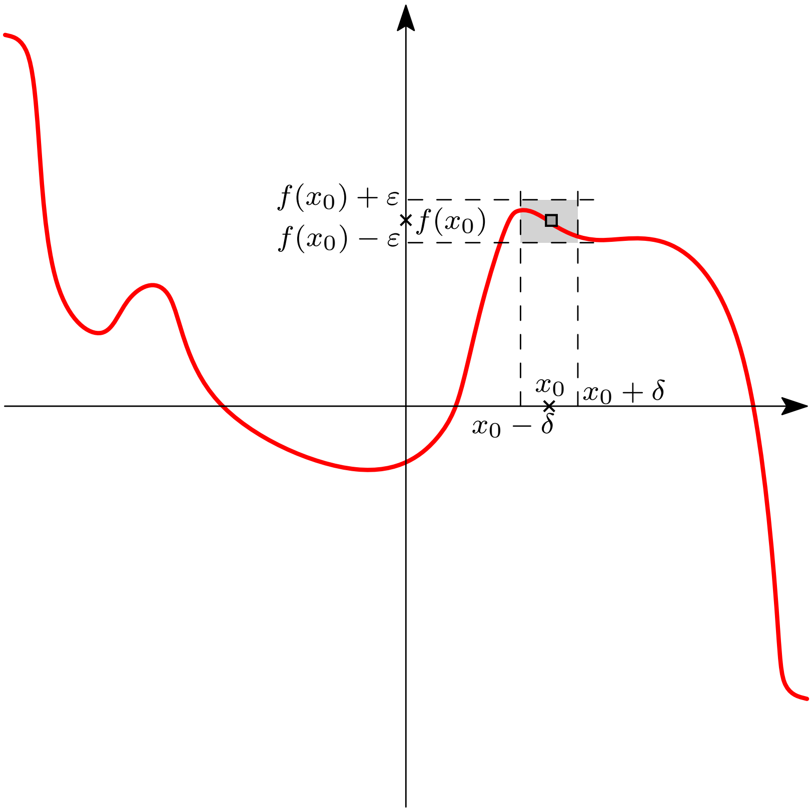
6.2.1 Définition de la continuité.

Cauchy (1821) introduisit le concept de fonction continue, en exigeant que des variations *indéfiniment* petites de x produisent des variations *indéfiniment* petites de y :

> "... $f(x)$ sera fonction continue, si la valeur de la différence $f(x+\alpha) - f(x)$ décroît indéfiniment avec celle de α ..."

Bolzano (1817) et Weierstrass (1874) furent plus précis : la différence $f(x) - f(x_0)$ doit être *arbitrairement* petite, si la différence $x - x_0$ est *suffisamment* petite.

Définition 6.5. Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in E$. La fonction f est *continue en* x_0 si f tend vers $f(x_0)$ en x_0.



Mentionnons dès à présent les remarques suivantes.

1. Si f n'est pas continue en x_0, elle est dite *discontinue en* x_0.
2. Si f est continue pour tout $x_0 \in E$, f est dite *continue sur* E. L'ensemble des fonctions continues de E dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathscr{C}^0(E, \mathbb{R})$.
3. La continuité en x_0 est une propriété locale. Elle ne dépend que de la fonction "au voisinage de a".

Il existe une définition alternative de la continuité, que nous présentons maintenant.

Théorème 6.6. *Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in E$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) f est continue en x_0.

(ii) Pour tout suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ convergente vers x_0, $\lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = f(x_0)$.

Démonstration. Montrons que (i) implique (ii). Soit (u_n) une suite convergent vers x_0. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Puisque (u_n) converge vers x_0, il existe $N > 0$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - x_0| < \delta$. Nous avons donc $|f(u_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$.

Montrons que (ii) implique (i). Pour cela, utilisons la contraposée. Supposons non(i), i.e. que f n'est pas continue en x_0. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, il existe $x_\delta \in E$ tel que $|x - x_0| < \delta$ et $|f(x) - f(x_0)| > \varepsilon$. Pour $\delta = \frac{1}{n}$, notons l'élément u_n. Nous avons alors $|u_n - x_0| < \frac{1}{n}$ et $|f(u_n) - f(x_0)| > \varepsilon$. Donc (u_n) tend vers x_0 et $f(u_n)$ ne tend pas vers $f(x_0)$. Nous venons donc de montrer non(ii). □

On utilisera souvent la propriété précédente comme ceci. Pour toute fonction continue f et toute suite convergente (u_n)

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f\Big(\lim_{n\to\infty} u_n\Big).$$

Pour montrer que f est continue en x_0, il faut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|x - x_0| < \delta$ implique $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ pour tout $x \in E$. Ainsi, on commencera toujours la preuve par la phrase suivante :

Soit $\varepsilon > 0$.

On cherche ensuite $\delta > 0$. Après l'avoir défini, on écrit.

Soit $x \in E$ tel que $|x - x_0| < \delta$, montrons que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Mentionons des exemples élémentaires de fonctions continues.

Exemple : Les fonctions constantes sont clairement continues.

Exemple : La fonction identité sur $E \subset \mathbb{R}$ est clairement continue.

Exemple : La fonction définie par $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$ est continue en 0. En effet, nous avons que $|f(x)| \leq |x|$ ce qui implique facilement que la limite de f en 0 est 0.

Afin de prouver qu'une fonction n'est pas continue en x_0, il nous faut montrer que pour un certain $\varepsilon > 0$, la propriété suivante est valide :

$$\forall \delta > 0, \exists x \in E, \big[|x - x_0| < \delta \text{ et } |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon\big].$$

Une façon équivalente de voir cette assertion, et qui peut être pratique concrêtement, est de montrer

Il existe une suite (u_n) tendant vers x_0 telle que $|f(u_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$.

On appelle ce critère le critère séquentiel de non-continuité.

Exemple : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$ est discontinue en 0.

Démonstration. Pour $u_n = \frac{1}{\pi n}$, on obtient que $f(u_n) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et donc $|f(u_n) - f(0)| \geq 1$ pour tout $n \geq 1$. □

Exemple : La fonction $\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est partout discontinue. La fonction $\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ est continue (car constante). Ainsi, il est très important de préciser le domaine de définition.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{Q}$. Soit (u_n) une suite d'irrationnels tendant vers x. Nous avons alors $\chi_{\mathbb{Q}}(u_n) = 0$ qui ne tend pas vers $\chi_{\mathbb{Q}}(x) = 1$. Similairement, pour $x \notin \mathbb{Q}$, considèrons une suite de rationnels tendant vers x. □

6.2.2 Maximum et minimum d'une fonction continue

Définition 6.7. Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in E$. La fonction f admet un maximum en x_0 si

$$\forall x \in E, \quad f(x) \leqslant f(x_0).$$

La fonction f admet un minimum en x_0 si

$$\forall x \in E, \quad f(x) \geqslant f(x_0).$$

Théorème 6.8. *Fixons $I = [a,b]$ un intervalle fermé. Une fonction continue $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ admet un maximum et un minimum.*

Ce théorème remonte à Bolzano et a été utilisé par Weiestrass (1861) et Cantor (1870).

Démonstration. Montrons que f admet un maximum (la même preuve s'applique pour le minimum). Soit $M = \sup\{f(x), x \in [a,b]\}$ possiblement infini si $\{f(x) : x \in [a,b]\}$ n'est pas borné. Si M est fini, la définition séquentielle du sup implique l'existence d'une suite (y_n) à valeurs dans $f([a,b])$ telle que (y_n) tend vers M. Si $M = +\infty$, la caractérisation des ensembles non bornés implique également l'existence d'une suite (y_n) à valeurs dans $f([a,b])$ telle que (y_n) tend vers ∞.

Dans les deux cas, puisque y_n est à valeurs dans $f([a,b])$, il existe (x_n) telle que $y_n = f(x_n)$ pour tout n. Maintenant, (x_n) est à valeurs dans $[a,b]$, le théorème de Bolzano-Weierstrass nous permet donc d'extraire une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})$. Soit x la limite de $(x_{\varphi(n)})$, nous avons $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_{\varphi(n)}) = \lim_{n\to\infty} y_{\varphi(n)} = M$. Ainsi, le supremum M est nécessairement fini et est atteint en x. □

6.2.3 Opérations sur les fonctions continues

Proposition 6.9 (opérations sur les fonctions continues)**.** *Soient $f, g \in \mathscr{C}^0(E, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ des fonctions continues (en x_0). Alors $f+g, \lambda f, fg$ et si g ne s'annule pas en x_0, alors $\frac{f}{g}$ sont continues (en x_0).*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition 6.2, qui garantit que $f+g$, fg et f/g convergent vers la somme, le produit et le quotient des limites de f et g, c'est-à-dire $f(x_0)+g(x_0)$, $f(x_0)g(x_0)$ et $f(x_0)/g(x_0)$. □

Remarquer que si une fonction continue est différente de zéro en un point, elle est non nulle autour de ce point (sur un petit intervalle de la forme $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ pour un certain $\delta > 0$ tout du moins).

Cette proposition permet de donner de nouveaux exemples de fonctions continues.

Exemple : Les fonctions polynomiales sont continues.

Démonstration. Ce sont des sommes et produits de fonctions constantes et identité. □

Exemple : Les fonctions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition. Une fonction $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *rationnelle* s'il existe des fonctions polynomiales P, Q avec Q ne s'annulant pas sur A tel que

$$\forall x \in A, \quad f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Démonstration. Les fonctions rationnelles sont des quotients de fonctions polynomiales. Elles sont donc continues. □

Proposition 6.10 (composition d'applications continues)**.** *Soient $f : E \longrightarrow F \subset \mathbb{R}$ et g : $F \longrightarrow \mathbb{R}$. Donnons nous $a \in E$. Si f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0. Ainsi, la composée de deux fonctions continues est continue.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. La continuité de g en $f(x_0)$ entraine l'existence de $\delta > 0$ tel que $|y - f(x_0)| < \delta$ implique $|g(y) - g(f(x_0))| < \varepsilon$. La continuité de f en x_0 force l'existence de $\eta > 0$ tel que $|x - x_0| < \eta$ implique $|f(x) - f(x_0)| < \delta$. Ainsi, pour tout x tel que $|x - x_0| < \eta$, $|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$. □

6.2.4 Théorème des valeurs intermédaires

Dans cette partie, E est un segment $[a, b]$.

Théorème 6.11 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Si $f(a)f(b) \leqslant 0$, alors il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = 0$.*

Nous ne pouvons pas souligner suffisamment l'importance de ce théorème intuitif ! Il aura de très nombreuses conséquences dans ce cours mais également dans d'autres cours de votre cursus. Il fut utilisé implicitement par Euler et Gauss, mais c'est Bolzano qui en produisit la première preuve rigoureuse.

Démonstration. Sans perte de généralité, supposons $f(a) \leq 0$ et $f(b) \geq 0$. Le cas $f(a) \geq 0$ et $f(b) \leq 0$ se traite similairement.

Construisons par récurrence deux suites adjacentes (u_n) et (v_n) telles que $f(u_n) \leq 0$ et $f(v_n) \geq 0$. Posons $u_0 = a$ et $v_0 = b$. Supposons $u_0 \leq u_1 \leq \cdots \leq u_N$ et $v_N \leq v_{N-1} \leq \cdots \leq v_0$ telles que $u_n \leq v_n = u_n + (b-a)2^{-n}$ et $f(u_n) \leq 0$ et $f(v_n) \geq 0$ pour tout $n \leq N$.

– Si $f(\frac{u_N + v_N}{2}) \geq 0$, posons $u_{N+1} = u_N$ et $v_{N+1} = \frac{u_N + v_N}{2}$. Nous avons alors
  1. $v_{N+1} \leq v_N$,
  2. $u_{N+1} \geq u_N$,
  3. $f(u_{N+1}) \leq 0$,
  4. $f(v_{N+1}) \geq 0$ et
  5. $v_{N+1} - u_{N+1} = (v_N - u_N)/2 = (b-a)2^{-N-1}$.

– Si $f(\frac{u_N+v_N}{2}) \leq 0$, posons $v_{N+1} = v_N$ et $u_{N+1} = \frac{u_N+v_N}{2}$. Nous avons alors
  1. $v_{N+1} \leq v_N$,
  2. $u_{N+1} \geq u_N$,
  3. $f(u_{N+1}) \leq 0$,
  4. $f(v_{N+1}) \geq 0$ et
  5. $v_{N+1} - u_{N+1} = (v_N - u_N)/2 = (b-a)2^{-N-1}$.

Puisque les deux suites sont adjacentes, elles convergent vers un même réel x. De plus, f étant continue et $f(u_n) \leq 0$ pour tout $n \geq 0$, nous obtenons $f(x) \leq 0$. D'autre part, $f(v_n) \geq 0$ pour tout $n \geq 0$ implique $f(x) \geq 0$. En conclusion, $f(x) = 0$. □

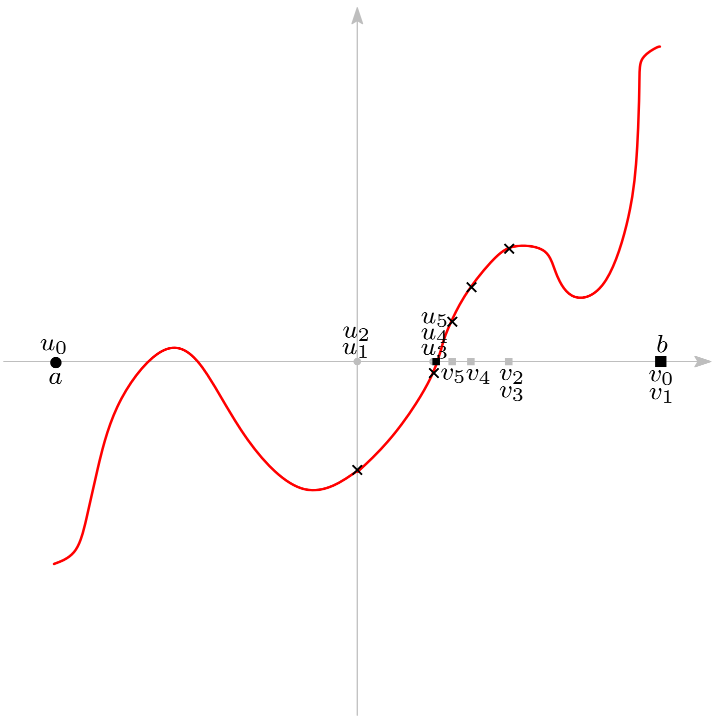
Nous utiliserons très souvent le corollaire suivant.

Corollaire 6.12. *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et λ entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors, il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = \lambda$.*

Démonstration. Posons la fonction g de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - \lambda$ pour tout $x \in [a,b]$. Nous avons bien que $g(a)g(b) \leq 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires implique l'existence de $c \in [a,b]$ tel que $g(c) = 0$. Puisque $g(c) = f(c) - \lambda$, nous obtenons le résultat. □

Le théorème des valeurs intermédiaires est faussement trivial : toute la difficulté de son utilisation est de l'appliquer à des fonctions f bien choisies !

Nous verrons de nombreuses applications du théorème des valeurs intermédiaires en exercice.



Corollaire 6.13 (Bolzano, 1817)**.** *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, alors $f([a,b])$ est un intervalle fermé.*

Démonstration. Soit M le maximum de $f([a,b])$, atteint en x, et m le minimum de $f([a,b])$ atteint en y. Soit $\lambda \in [m,M]$. Puisque $(f(x)-\lambda)(f(y)-\lambda) \leq 0$, le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction $g = f - \lambda$ implique l'existence de z entre x et y tel que $g(z) = 0$, i.e. $f(z) = \lambda$. Nous en déduisons que $\lambda \in f([a,b])$. Ainsi, $[m,M] \subset f([a,b]) \subset [m,M]$. □

6.2.5 Inverse d'une fonction continue

Commençons par une caractérisation des fonctions monotones continues. Dans cette section, l'ensemble de définition de f est un intervalle I. Rappelons qu'un intervalle peut contenir ou non certaines de ses bornes. De plus, comme prouvé précédemment, les intervalles sont exactement les ensembles I de $\mathbb{R}$ tels que $\forall \alpha, \beta \in I$, $[\alpha,\beta] \subset I$.

Lemme 6.14. *Fixons I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ monotone, les deux propositions suivantes sont équivalentes :*
(i) *f est continue.*
(ii) *$f(I)$ est un intervalle.*

Démonstration. Montrons que (i) implique (ii). Soit $\alpha < \beta$ dans $f(I)$. Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires implique que $[\alpha,\beta] \subset f(I)$. La caractérisation des intervalles implique que $f(I)$ est un intervalle.

Intéressons nous à (ii) implique (i). Supposons f croissante et $I = [a,b]$ (le cas f décroissante suit les mêmes lignes). Soit $\varepsilon > 0$. Donnons nous $a < x_0 < b$ (les cas $x_0 = a$ et $x_0 = b$ sont traités de la même façon). Comme $f(I)$ est un intervalle et f croissante, il existe $a \leq x < x_0 < y \leq b$ tel que

$$f(x_0) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(x_0) \leq f(y) \leq f(x_0) + \varepsilon.$$

Posons $\delta = \min\{x_0 - x, y - x_0\}$. Pour tout t tel que $|t - x_0| < \delta$, $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. □

Théorème 6.15. *Fixons I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement monotone, alors $f : I \longrightarrow f(I)$ est bijective et $f^{-1} : f(I) \to I$ est continue sur $f(I)$.*

Démonstration. Puisque f est strictement monotone, f est injective et donc bijective de I dans $f(I)$. Maintenant, $f(I)$ est un intervalle car f est continue (point (ii) du lemme précédent). Puisque f^{-1} est monotone et $f^{-1}(f(I)) = I$ est un intervalle, le point (i) du lemme précédent implique que f^{-1} est continue. □

Exemple : Soit $n \geqslant 1$. Définissons la réciproque de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$, que l'on notera $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt[n]{x} \end{array}$. Cette fonction est continue et strictement croissante.

Définition 6.16. Soit $f : E \longrightarrow F$ f est un *homéomorphisme* si
- f est continue.
- f bijective.
- f^{-1} continue.

Les ensembles E et F sont alors dits *homéomorphes.*

Il peut exister des fonctions bijectives continues, sans que la réciproque soit continue. D'après l'étude précédente, ces fonctions ne sont pas définies sur des intervalles. Par exemple,

$$f : \begin{array}{ccc} [0,1) \times \{2\} & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in [0,1) \\ 1 \text{ si } x = 2 \end{cases} \end{array}$$

6.2.6 Prolongement de fonctions continues

De nombreuses fonctions sont naturellement définies sur des sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Un exemple typique est la fonction sur $\mathbb{R}^*$ définie par $f(x) = x\sin(1/x)$. Cette fonction n'est a priori pas définie en 0, puisque la formule ne s'étend pas. Par contre, nous allons voir qu'il est possible d'étendre la fonction à $\mathbb{R}$ tout entier même sans étendre la formule.

Définition 6.17. Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \notin E$. Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$, la fonction

$$\overline{f} : \begin{array}{ccc} E \cup \{x_0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in E \\ \ell \text{ si } x = x_0 \end{cases} \end{array}$$

est continue. Cette fonction est appelée *prolongement* de f à $E \cup \{x_0\}$.

Exemple : $x \mapsto x\sin\frac{1}{x}$ se prolonge par 0 en 0.

Exercice 99. Définir la limite en $\pm\infty$, et la limite en x_0 étant égale à l'infini.

Exercice 100. Soient $M > 0$ et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue en 0 telle que $g(0) = 0$. Soient $f : E \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in E$. Montrer que chacune des assertions suivantes **implique** que f est continue en x_0 :

1. $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in E, [|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \le \varepsilon]$.
2. $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in E, [|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \le M\varepsilon]$.
3. $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in E, [|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \le g(\varepsilon)]$.

Nous en déduisons qu'il suffit de trouver $< M\varepsilon$, ou $\le \varepsilon$ au lieu de $< \varepsilon$. La dernière assertion en particulier est très intéressante car elle permet de se ramener à d'autres fonctions continues déjà connues, comme $\sqrt{\cdot}$ par exemple.

Exercice 101. Étudier les points de continuité des fonctions suivantes :

1. La fonction $f(x) = \frac{x-5}{x+3}$ de $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ dans $\mathbb{R}$.
2. La fonction $f(x) = \lfloor x \rfloor$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
3. La fonction $f(x) = x\chi_{\mathbb{Q}}(x)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
4. La fonction $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2|x|}{x} & \text{si } x \ne 0 \\ 3 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^n-1} & \text{si } x \ne 1 \\ \frac{1}{n} & \text{si } x = 1 \end{cases}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 102. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que si f est continue sur $\mathbb{R}$, alors $|f|$ est continue.
2. Donner un exemple de fonction f telle que $|f|$ est continue mais f est discontinue en tout point.
3. Exprimer $\max(x, y)$ et $\min(x, y)$ en utilisant la valeur absolue.
4. Montrer que si f et g sont continues sur $\mathbb{R}$, alors $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ sont également continues.

Les expressions de max et min en fonction de la valeur absolue sont très utiles.

Exercice 103. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, tendant vers $+\infty$ en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que $f(x) \ge f(0)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus [-M, M]$. Montrer que f est minorée et atteint son minimum.

Exercice 104. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, tendant vers $+\infty$ en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que f est minorée et atteint son minimum.

Exercice 105. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue telle que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Montrer que f admet un maximum (on pourra s'inspirer de l'exercice 103).

On suppose maintenant que f est à valeurs réelles et non pas nécessairement positives et l'on suppose toujours que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Montrer que f admet un maximum ou un minimum (le ou n'est pas exclusif).

Exercice 106. Soit $\alpha \in [-1,1]$, considérons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0, \\ \alpha & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que f n'est continue en 0 pour aucune valeur de α.

Exercice 107. Soit P un polynôme à coefficients réels de degré impair. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $P(c) = 0$ (*Indication :* on pourra utiliser le théorème des valeurs intermédiaires). Pour tout $d \in \mathbb{N}$, donner un exemple de polynôme de degré $2d$ qui n'admet pas de racine sur $\mathbb{R}$.

Exercice 108.

1. (Théorème de point fixe) Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue, montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = c$.
2. Soient deux fonctions $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues telles que $f(0) \leq g(0)$ et $f(1) \geq g(1)$, montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Indication : Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à une fonction bien choisie.

L'exercice précédent est typique, il s'agit d'utiliser le théorème des valeurs intermédaires appliqué à une fonction judicieusement choisie. Cette technique est utilisée fréquemment.

Mentionons également la définition suivante. Soit $f : I \to I$. Un point $\ell \in I$ est un *point fixe* de f si $f(\ell) = \ell$. Graphiquement ce sont les points d'intersection du graphe de f avec la première bissectrice.

Exercice 109 (Étude de suites définies par récurrence)**.** Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ continue. Nous étudions maintenant les suites définies par

$$(R) \qquad u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad u_0 \in [a,b].$$

La valeur u_0 est appelée condition initiale.

1. Un point $\ell \in [a,b]$ est un *point fixe* de f si $f(\ell) = \ell$. Montrer que si (u_n) converge vers ℓ, alors ℓ est un point fixe de f.
2. Supposons que f est croissante.
   (a) Montrer que (u_n) est monotone (*Indication :* on pourra montrer que si $u_0 \leq u_1$, alors (u_n) est croissante, et que si $u_0 \geq u_1$, alors (u_n) est décroissante).
   (b) Supposons que f admet un unique point fixe ℓ, montrer que (u_n) converge vers ℓ.
   (c) Soit ℓ un point fixe. Montrer que $u_0 \leq \ell$ implique $u_n \leq \ell$ pour tout n, et réciproquement $u_0 \geq \ell$ implique $u_n \geq \ell$.
3. ☠ Étudier le comportement asymptotique de (u_n) en fonction de la valeur initiale dans le cas de la fonction $x \mapsto x + \frac{1}{3\pi}\sin(3\pi x)$ de $[0,1]$ dans lui-même. (*Indication :* tracer le graphe, trouver les points fixes et veiller à dessiner la fonction du bon coté de la bissectrice. Comment trouve-t-on graphiquement u_1 en fonction de u_0).

Ce dernier exemple montre que la comportement de la suite (u_n) dépend fortement de la condition initiale. La richesse de ces suites définies par récurrence (on les appelle aussi systèmes dynamiques discrèts) provient de cette dépendance subtile. La théorie des systèmes dynamiques a rapidement mené à la formulation d'une théorie du chaos.

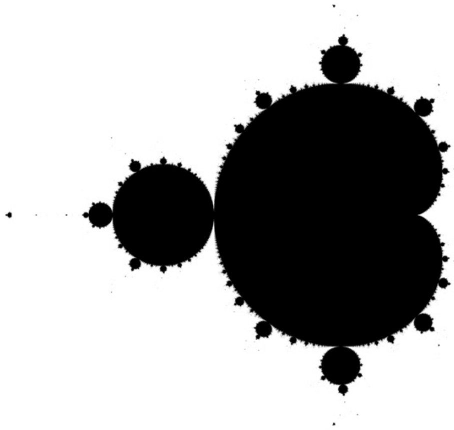
Donnons l'exemple intéressant de la fonction $f(z) = z^2 + c$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. L'ensemble des conditions initiales telles que (u_n) reste borné (cet ensemble est appelé ensemble de Mandelbrot, voir la figure ci-dessous) est fractal et dépend très fortement de c.

Exercice 110. ☠ Montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction croissante est au plus dénombrable.

Exercice 111. ☠ On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par la formule

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ est irrationnel,} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x \text{ est rationnel et s'écrit } x = \frac{p}{q} \text{ avec } p \text{ et } q \text{ premiers entre eux.} \end{cases}$$

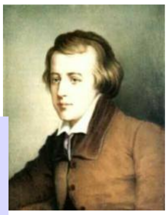
Montrer que f est discontinue en tout point rationnel et continue en tout point irrationnel.



6.3 Notions reliées à la (notion de) continuité

6.3.1 Continuité uniforme

Un défaut de la notion de continuité habituelle provient du fait que pour un ε fixé, le δ dépend a priori de x_0. La continuité uniforme corrige ce problème. Cette notion fut introduite par Heine (1870) bien après la continuité.



Heinrich Heine (allemand 1821-1881)

Définition 6.18. Une fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est *uniformément continue* si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in E, \left[|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\right].$$

1. Comme son nom l'indique la continuité uniforme est une propriété globale.
2. La quantité $\omega(f, \varepsilon) = \inf\left\{\delta > 0, \forall x, y \in E, [|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon]\right\}$ est appelé le *module d'uniforme continuité* associé à ε.

Proposition 6.19. *Une fonction uniformément continue est continue.*

Démonstration. Clair. □

Exemple : La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ de $[1, \infty)$ dans $\mathbb{R}_+$ est uniformément continue.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Nous avons pour tout $x, y \in [1, \infty)$, $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq \frac{1}{2}|x - y|$. Posons $\delta = 2\varepsilon$. Nous avons alors, pour tout $x, y \in [1, \infty)$ tel que $|x - y| < \delta$, $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \varepsilon$. □

Nous avons utilisé une technique classique : lorsque l'on travaille avec la différence de deux racines carrées, l'on multiplie et divise par la somme de ces racines. À retenir.

Rudolf Lipschitz (1832-1903)

Exemple : La fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est k-lipschitzienne si $\forall x, y \in E, |f(x)-f(y)| \leqslant k|x-y|$. (une fonction est Lipschitzienne s'il existe $k > 0$ tel que la fonction est k-lipschitzienne). Une fonction k-lipschitzienne est uniformément continue.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\delta = \varepsilon/k$. Pour tout $x, y \in E$ tel que $|x - y| < \delta$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| < k\varepsilon/k = \varepsilon$. □

Exemple : $x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ n'est pas uniformément continue.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Fixons $\varepsilon = 1$. Supposons qu'il existe $\delta > 0$ tel que $|x - y| \leq \delta$ implique $|x^2 - y^2| \leq 1(= \varepsilon)$. En prenant $y = x + \delta$, nous obtenons $|x^2 - y^2| = (x + y)|y - x| \geq 2x\delta$. Considérer $x \geq 1/(2\delta)$ mène à une contradiction. □

Exemple : $x \mapsto \frac{1}{x}$ de $(0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas uniformément continue.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Fixons $\varepsilon = 1$. Supposons qu'il existe $\delta > 0$ tel que $|x - y| \leq \delta$ implique $|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| \leq 1(= \varepsilon)$. En particulier, pour tout $x \leq \delta$, nous obtenons $|\frac{1}{x} - \frac{1}{\delta}| \leq 1$ ce qui implique $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{\delta} + 1$. Laisser x tendre vers 0 nous mène à une contradiction. □

Exemple : $x \mapsto \sin(1/x)$ de $(0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas uniformément continue.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous considérons $x_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$ et $y_n = \frac{1}{2\pi n + 3\frac{\pi}{2}}$. On a alors $\sin(1/x_n) - \sin(1/y_n) = 2$ et $x_n - y_n$ tend vers zéro. Ceci est en contradiction avec le fait que pour $\varepsilon = 1$, il existe $\delta > 0$ tel que pour $x, y \in (0, 1]$, $|x - y| \leq \delta$ implique $|\sin(1/x) - \sin(1/y)| \leq 1$. □

Les contre-exemples de fonctions continues mais non uniformément continues ne sont jamais sur des segments. Cela provient du fait que toute fonction continue sur un intervalle fermé est en fait uniformément continue, comme le montre le théorème suivant.

Théorème 6.20 (Heine, 1872)**.** *Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f est continue, alors f est uniformément continue.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Supposons $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue mais non uniformément continue. Il existe $\varepsilon > 0$ telle que pour tout $n \geq 1$, il existe $x_n, y_n \in [a, b]$ tels que $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Puisque (x_n) est bornée, le théorème de Bolzano-Weierstrass nous permet d'extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ convergente vers x dans $[a, b]$. Nous avons alors que $(y_{\varphi(n)})$ converge également vers x. Si f est continue en x, alors $f(x_{\varphi(n)})$ et $f(y_{\varphi(n)})$ convergent vers $f(x)$, ce qui est en contradiction avec $|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| \geq \varepsilon$ pour tout n. □

6.3.2 Continuité à droite et continuité à gauche (pour votre culture)

La notion de continuité peut être affaiblie en continuité à droite ou continuité à gauche.

Définition 6.21. Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$. La fonction f est *continue à droite* en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E, \left[x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\right].$$

On définit la continuité à gauche similairement.

Proposition 6.22. *Si $f : E \to \mathbb{R}$ est continue à droite et à gauche en x_0, alors f est continue en x_0.*

Démonstration. Soient $x_0 \in E$ et $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue à droite en x_0, il existe $\delta_1 > 0$ tel que $x_0 < x < x_0 + \delta_1$ implique $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. De même, f étant continue à gauche, il existe $\delta_2 > 0$ tel que $x_0 - \delta_2 < x < x_0$ implique $|f(x) = f(x_0)| < \varepsilon$. Nous en déduisons la propriété en posant $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. □

6.3.3 Fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

La notion de continuité s'étend aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Définition 6.23. Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ avec $x_0 \in E \subset \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. La fonction f tend vers ℓ en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E, |x - x_0| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

La fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue en x_0 si $f \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f(x_0)$. La fonction f est continue sur E si elle est continue en tout point de E. L'ensemble des fonctions continues de E dans $\mathbb{C}$ est noté $\mathscr{C}^0(E, \mathbb{C})$.

Dans la définition précédente, $|\cdot|$ désigne le module lorsqu'on l'applique aux nombres complexes.

Proposition 6.24. *Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*
(i) *f est continue en x_0.*
(ii) *$\mathsf{Re}(f) : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\mathsf{Im}(f) : E \longrightarrow \mathbb{R}$ sont continues en x_0.*

Démonstration. Montrons que (i) implique (ii). Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que $|x - x_0| < \delta$ implique $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Nous avons alors

$$|\mathsf{Re}(f)(x) - \mathsf{Re}(f)(x_0)| = |\mathsf{Re}(f(x) - f(x_0))| \leq |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

De même, $|\mathsf{Im}(f)(x) - \mathsf{Im}(f)(x_0)| \leq \varepsilon$.

Montrons que (ii) implique (i). Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que $|x - x_0| < \delta$ implique $|g(x) - g(x_0)| \leq \varepsilon$ et $|h(x) - h(x_0)| \leq \varepsilon$. Nous obtenons alors

$$|g(x) + ih(x) - g(x_0) - ih(x_0)| \leq |g(x) - g(x_0)| + |h(x) - h(x_0)| \leq 2\varepsilon.$$

□

La plupart des propriétés précédentes sont vraies, exceptée les théorèmes du maximum et des valeurs intermédiaires. Il est également possible de considérer des fonctions de la variable complexe z.

Définition 6.25. Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ où $U \subset \mathbb{C}$. La fonction f est continue en $z_0 \in U$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E, |x - x_0| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Exemple : Les fonctions $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & |z| \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & \overline{z} \end{array}$ sont continues.

Démonstration. Soit $z_0 \in U$ et $\varepsilon > 0$. Posons $\delta = \varepsilon$. Pour $z \in U$ tel que $|z - z_0| < \varepsilon$, ous avons $\big||z| - |z_0|\big| \leq |z - z_0| < \varepsilon$ par l'inégalité triangulaire et également $|\overline{z} - \overline{z_0}| = |\overline{z - z_0}| = |z - z_0| \leq \varepsilon$. □

La plupart des propriétés s'étendent à la variable complexe (par exemple si f est continue alors $f(\lim u_n) = \lim f(u_n)$), à l'exception de tout résultat utilisant l'ordre $\leq$ (en particulier le théorème des valeurs intermédiaires). Vous rencontrerez de nombreuses autres fonctions de la variable complexe dans les cours de deuxièmes, et nous ne nous attardons pas la-dessus.

Exercice 112. Soient deux réels a et b. Montrer que la fonction $x \mapsto ax+b$ est uniformément continue. Déterminer l'ensemble des $k>0$ pour lesquels cette fonction est k-Lipschitzienne.

Exercice 113. Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ est uniformément continue mais k-Lipschitzienne pour aucun $k>0$.

Otto hölder (allemand 1859-1937) fameux pour différents théorème d'analyse, ainsi que pour la classification des groupes finis simples de cardinal inférieur à 200.

Exercice 114 (Fonctions α-Hölderiennes)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non nécessairement borné. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est α-Hölderienne (où $\alpha > 0$) s'il existe $C>0$ tel que pour tout $x, y \in I$, $|f(x)-f(y)| \leq C|x-y|^{\alpha}$.

1. Montrer qu'une fonction Höldérienne est uniformément continue.
2. Montrer que $x \mapsto \sqrt{x}$ est $1/2$-Hölderienne sur $I = \mathbb{R}_+$. Prouver que $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est k-Lipschitzienne pour aucun k.

Exercice 115. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Supposons que f tend vers zéro en $+\infty$ et en $-\infty$.

1. Soit $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe $M>0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus [-M, M]$, on a $|f(x)| < \varepsilon/2$.
2. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in [-(M+1), M+1]$ tels que $|x-y| < \delta$ on a $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$.
3. Déduire des deux questions précédentes que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que f est bornée.

Exercice 116. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et périodique. Montrer que f est bornée et uniformément continue.

Exercice 117. Montrer que $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue à droite sur $\mathbb{R}$. Est-elle continue à gauche partout ?

Exercice 118 (Un autre exercice sur les fonctions périodiques)**.** Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $G = \{T \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)\}$.

1. Montrer que G est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, i.e. que $0 \in G$, $T \in G$ implique $-T \in G$ et que $T, T' \in G$ implique $T+T' \in G$.
2. Montrer que si f est continue mais pas constante, G est de la forme $a\mathbb{Z}$, où $a>0$.
3. Donner un exemple de fonction f (nécessairement non continue) pour laquelle $G = \mathbb{Q}$.

Exercice 119. ☠ Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f(x)| \leq ax+b$.

6.4 Fonctions usuelles

6.4.1 La fonction exponentielle

Nous sommes maintenant en mesure de définir la fonction exponentielle rigoureusement.

Définition 6.26. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, définisson l'exponentielle de z par la formule $\exp(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$.

Démonstration. Justifions cette définition. Tout d'abord, pour $z \in \mathbb{C}$, posons

$$u_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}.$$

Il est simple de montrer par récurrence que pour n_0 suffisamment grand,

$$\frac{2^n |z|^n}{n!} \leq \frac{2^{n_0} |z|^{n_0}}{n_0!}$$

lorsque $n \geq n_0$. Ainsi, il existe $M > 0$ tel que $\frac{|z|^n}{n!} \leq M2^{-n}$ pour tout n assez grand.

Soit $\varepsilon > 0$. Choissisons $N > 0$ tel que $2^{-N} \leq \varepsilon / M$. Nous en déduisons que pour tout $p \geq q > N$

$$|u_q(z) - u_p(z)| \leq M \sum_{k=p}^{q} 2^{-k} = \frac{M(2^{-p} - 2^{-q})}{1 - 1/2} = M2^{1-p} \leq M2^{-N} \leq \varepsilon.$$

La suite $(u_n(z))_{n\geq 0}$ est donc également de Cauchy et elle converge donc. $\square$

Listons quelques propriétés de la fonction exponentielle.

Théorème 6.27. *La fonction* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *vérifie pour tout* $z, w \in \mathbb{C}$*,*

$$\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w) \quad \textit{et} \ \exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}.$$

Démonstration. Soient $z, w \in \mathbb{C}$. On garde la définition de $u_n(z)$ et $u_n(w)$ comme dans la preuve précédente. Le binôme de Newton nous donne

$$\begin{aligned}
u_{2n}(z+w) := \sum_{k=0}^{2n} \frac{(z+w)^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k!}\left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} z^j w^{k-j}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{2n} \sum_{j=0}^{k} \frac{z^j w^{k-j}}{j!(k-j)!} \\
&= \sum_{j=0}^{2n} \sum_{j=k}^{2n} \frac{z^j w^{k-j}}{j!(k-j)!} \\
&= \sum_{j=0}^{2n} \sum_{\ell=0}^{2n-j} \frac{z^j w^\ell}{j!\ell!} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{n} \frac{z^j w^\ell}{j!\ell!} + \sum_{j=n+1}^{2n} \sum_{\ell=0}^{2n-j} \frac{z^j w^\ell}{j!\ell!} + \sum_{j=0}^{n} \sum_{\ell=n+1}^{2n-j} \frac{z^j w^\ell}{j!\ell!}
\end{aligned}$$

Dans la troisième ligne, nous avons échangé les deux sommes. Dans la quatrième ligne, nous avons effectué le changement de variable $\ell = k - j$, et nous avons écarté les termes pour lesquels j ou ℓ sont strictement plus grands que n. Maintenant, la première somme nous donne

$$\sum_{j=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{n} \frac{z^j w^\ell}{j!\ell!} = \Big(\sum_{j=0}^{n} \frac{z^j}{j!}\Big)\Big(\sum_{\ell=0}^{n} \frac{w^\ell}{\ell!}\Big) = u_n(z)u_n(w).$$

Ce terme tend donc vers $\exp(z)\exp(w)$.

Intéressons nous maintenant au second terme. Prenons $M > 0$ et n assez grand pour que $|\frac{z^j}{j!}| \leq M2^{-j}$ pour tout $j \geq n$ (l'existence de M et n suit triviallement par récurrence).

Nous avons donc

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{j=n+1}^{2n}\sum_{\ell=0}^{2n-j}\frac{z^j w^\ell}{j!\ell!}\Big| \leq \sum_{j=n+1}^{2n}\sum_{\ell=0}^{2n-j}\frac{|z|^j|w|^\ell}{j!\ell!} &\leq \sum_{j=n+1}^{2n}\frac{|z|^j}{j!}\sum_{\ell=0}^{2n-j}\frac{|w|^\ell}{\ell!}\\ &\leq \sum_{j=n+1}^{2n}\frac{|z|^j}{j!}\exp(|w|)\\ &\leq \sum_{j=n+1}^{2n}\frac{M\exp(|w|)}{2^j}\\ &= M\exp(|w|)\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}{1-\frac{1}{2}}\\ &\leq \frac{M\exp(|w|)}{2^n}.\end{aligned}$$

Nous en déduisons que ce terme tend vers 0. De même, nous pouvons montrer que le troisième terme tend également vers 0. En conclusion, $u_{2n}(z+w)$ tend vers $\exp(z)\exp(w)$. Mais par définition, ce terme tend également vers $\exp(z+w)$, et nous obtenons le résultat. □

La définition de l'exponentielle nous permet de dire que la restriction de exp à $\mathbb{R}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Théorème 6.28. *La fonction* $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ *est continue bijective.*

Démonstration. Nous savons que $\exp(0) = 1$. Montrons maintenant que exp est continue en 0. Prenons $|x| < 1$. Puisque $\frac{|x|^n}{n!} \leq |x|^n$, nous trouvons que

$$\Big|\exp(x) - \exp(0)\Big| = |\exp(x) - 1| \leq \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|x|^k = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|-|x|^{n+1}}{1-|x|} = \frac{|x|}{1-|x|}$$

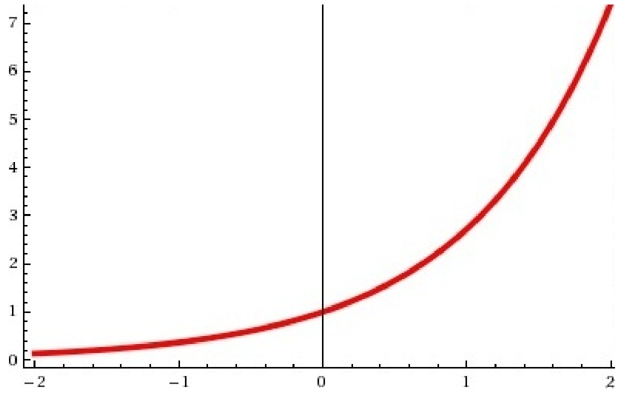
qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0. La fonction exp est donc continue en 0.

Par définition, $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. En particulier, si exp est continue en 0, alors exp est continue en tout point. De plus, puisque pour $x > 0$,

$$\exp(x) = 1 + x + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{x^k}{k!} \geq 1 + x > 1,$$

elle est donc strictement croissante.

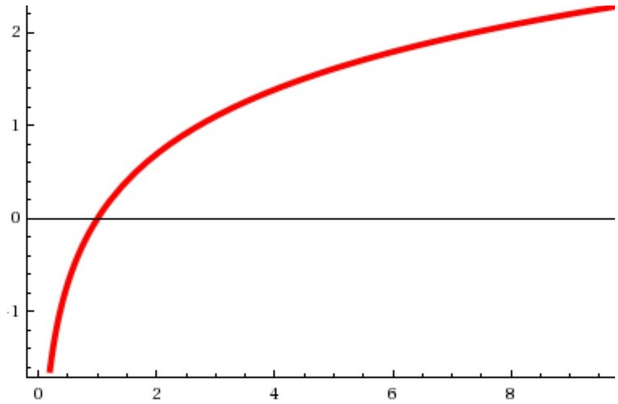
En particulier, $\exp(x) \neq 1$ pour $x \neq 0$. De plus, lorsque $x \geq 0$, $\exp(x) = [\exp(x/2)]^2 \geq 0$, et donc $\exp(x) > 1$ pour $x > 0$. De même, $\exp(x) < 1$ pour $x < 0$ puisque $\exp(-x) = 1/\exp(x)$. Nous en déduisons que $\exp(nx) = \exp(x)^n$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers l'infini et $\exp(-nx)$ tend vers 0 lorsque x tend vers l'infini. Puisque f est continue, son image est un intervalle et nous déduisons donc que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$. En particulier, f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$. □



John Napier (écossais 1550-1617) Inventeur du logarithme.

Définition 6.29 (logarithme néperien)**.** La réciproque de $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est appelée logarithme néperien $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$.

Attention, exp n'est pas injective ($\exp(2\pi i) = \exp(0) = 1$) de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$! On ne peut donc pas définir de logarithme directement sur $\mathbb{C}^*$.



Théorème 6.30. *La fonction* $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ *satisfait les propriétés suivantes*

1. $\ln$ *est continue bijective.*
2. $\ln$ *est croissant,* $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ *et* $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.
3. *Soient* $x, y \in \mathbb{R}$*, alors* $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.

Démonstration. Les propriétés 1 et 2 sont des conséquences de la croissance de exp et de sa bijectivité. De plus, pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\exp(\ln(x) + \ln(y)) = \exp(\ln x)\exp(\ln y) = xy = \exp(\ln(xy)).$$

Par l'injectivité de $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^*$, nous obtenons $\ln(x) + \ln(y) = \ln(xy)$. □

Fonctions exponentielles et puissances

Définition 6.31 (exponentielle)**.** Soient $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. "*a à la puissance x*" est définie par $a^x = e^{\ln(a)x}$.

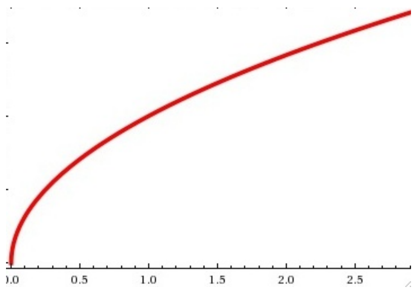
Proposition 6.32. *Soient* $a, b > 0$ *et* $x, y \in \mathbb{R}$*. Alors*

1. $a^0 = 1$ *et* $a^1 = a$
2. $a^{x+y} = a^x a^y$ *et* $(ab)^x = a^x b^x$,
3. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
4. $\ln(a^x) = \ln(a)x$ *et* $(a^x)^y = a^{xy}$.

Démonstration. Nous avons $a^{x+y} = e^{(x+y)\ln a} = e^{x \ln a} e^{y \ln a} = a^x a^y$. □

Définition 6.33 (puissance)**.** Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x > 0$. "*x à la puissance α*" est définie par $x^\alpha = e^{\ln(x)\alpha}$.

Ci-dessous, le graphe d'une application avec une puissance plus petite que 1. Pouvez-vous dessiner le graphe d'une fonction puissance avec $\alpha > 1$?



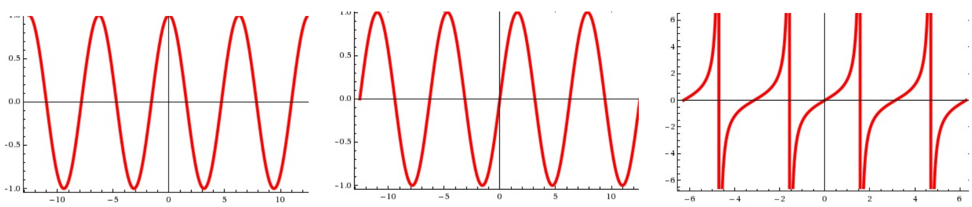
Définition 6.34 (logarithme en base a)**.** Soit $a \in \mathbb{R}$. "le *logarithme en base a* de x" est défini par $\frac{\log x}{\log a}$.

Fonctions trigonométriques

Les fonctions $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\tan : \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{R}$ ont été définies dans le chapitre sur les nombres complexes.

Théorème 6.35. *Les fonctions* cos*,* sin *et* tan *sont continues sur leur ensemble de définition.*

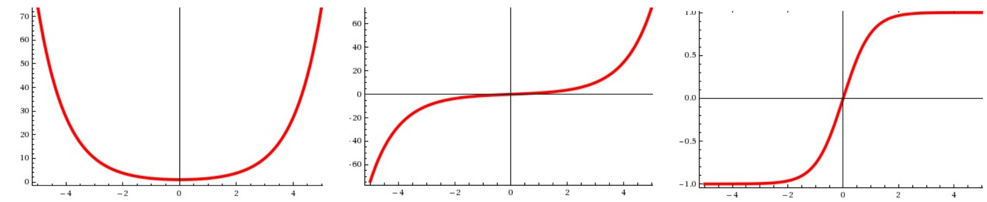
Démonstration. Les fonctions cos, sin et tan sont des combinaisons de fonctions continues (plus précisément les exponentielles). □



Fonctions trigonométriques hyperboliques

Définition 6.36. Définissons $\cosh : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array}$, $\sinh : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}$ et $\tanh : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \end{array}$.

Ces fonctions sont continues puisque ce sont des combinaisons de fonctions continues.



Exercice 120. Résoudre l'équation suivante d'inconnue $x > 0$, $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^{x}$ (*Indication :* utiliser le logarithme).

Dans l'exercice suivant, nous continuons l'analyse amorcée dans l'exercice 56. Nous identifions ces morphismes sous différentes hypothèses.

Exercice 121 (Classification des morphismes de $(\mathbb{R},+)$ dans lui-même (suite de l'exercice 56))**.** Un *morphisme* de $(\mathbb{R},+)$ dans lui-même est une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

(i) $f(1) = 1$

(ii) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Rappelons qu'aucune condition supplémentaire n'est nécessaire pour montrer qu'un morphisme de $(\mathbb{R},+)$ dans lui-même vérifie $f(r) = f(1)r$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$.

1. Soit f un morphisme de $(\mathbb{R},+)$ dans lui-même tel que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(xy) = f(x)f(y)$.
   (a) Montrer que $f(1) = 1$.
   (b) Montrer que $f(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$.
   (c) Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$.
   (d) En déduire que f est égale à l'identité.
2. Soit f un morphisme continue de $(\mathbb{R},+)$ dans lui-même. Montrer que $f(x) = f(1)x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Quels sont les morphismes de $(\mathbb{R},+)$ dans lui-même continus en 0 ? (*indication :* montrer que si f est continue en 0, alors f est continue en tout point de $\mathbb{R}$)
4. ☠ Quels sont les morphismes de $(\mathbb{R},+)$ dans lui-même bornés sur $[-1,1]$? (*indication :* montrez que si f est bornée, alors f est continue en 0)

Exercice 122. Il a été montré dans un exercice d'une série précédente qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$ satisfaisait $f(r) = f(1)r$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$.

1. On suppose de plus que f est continue. Montrer que $f(x) = f(1)x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. En utilisant le résultat de la question précédente et les fonctions exponentielle et logarithme, montrer que :
   – Si une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ satisfait $f(x+y) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$, alors il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \exp(bx)$.
   – Si une fonction continue $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ satisfait $f(xy) = f(x) + f(y), \forall x, y > 0$, alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = a \ln x$.
   – Si une fonction continue $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ satisfait $f(xy) = f(x)f(y), \forall x, y > 0$, alors il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = x^b$.

L'exercice précédent montre que les fonctions exponentielles sont les uniques morphismes bijectifs continus de $(\mathbb{R},+)$ dans $(\mathbb{R}_+^*,\times)$, et que les fonctions puissances sont les uniques morphismes bijectifs de $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ dans $(\mathbb{R}_+^*,\times)$.

Exercice 123. En utilisant la continuité de cos, montrer que $\exp : i\mathbb{R} \longrightarrow \{z : |z| = 1\}$ est surjective. En déduire que $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est surjective.

Chapitre 7: Dérivation des fonctions sur $\mathbb{R}$

Guillaume de l'Hôpital (français 1661-1704) Son ouvrage principal, "Analyse des infiniments petits", aurait probablement été écrit par Johann Bernoulli contre une somme de 300 Francs par an. Bien qu'il soit difficile de vérifier de telles allégations, des manuscrits retrouvés à l'université de Basel semblent corroborer cette légende.

> "L'étendue de ce calcul (le calcul infinitésimal) est immense : il convient aux courbes mécaniques, comme aux géométriques ; les signes radicaux luy sont indifferens, & même souvent commodes ; il s'étend à tant d'indéterminées qu'on voudra ; la comparaison des infiniments petits de tous les genres lui est également facile. Et de là naissent une infinité de découvertes surprenantes par rapport aux Tangentes tant courbes que droites, aux questions *De maximis & minimis*, aux points d'infléxion & de rebroussement des courbes, aux Dévelopés, aux Caustiques par réflexion ou par réfraction, &c. comme on le verra dans cet ouvrage. (Marquis de L'Hôpital 1696, *Analyse des infiniments petits*, introduction)"

René Descartes (français 1596-1650) philosophe (à qui l'ont doit le courant de pensée cartésien, et auteur de la phrase "je pense donc je suis") et mathématicien à l'origine de la préhistoire de l'analyse (il adopta de nombreux notations utiliées aujourd'hui) et des coordonnées cartésiennes.

Motivations. Le but de la notion de dérivée est d'étudier les problèmes suivants.

1. Le calcul de la pente d'une courbe, de sa tangente, de sa normale.
2. Le calcul de l'angle d'intersection de deux courbes (Descartes).
3. La construction de lunettes astronomiques (Galilée) et d'horloges (Huygens, 1673).
4. La recherche de maxima et minima d'une fonction (Fermat, 1638).
5. Le calcul de la vitesse et de l'accélération d'un mouvement (Galilée 1638, Newton 1686).
6. La vérification des lois de gravitation en astronomie (Kepler, Newton).

Dans la suite, I désigne un *intervalle ouvert non vide.*

7.1 Dérivée d'une fonction en un point

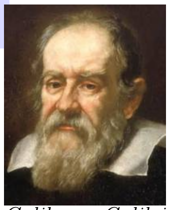
7.1.1 Définition

Définition 7.1 (Cauchy, 1821)**.** La fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est *dérivable* en $x_0 \in I$ de dérivée $\ell = f'(x_0)$ si

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell = f'(x_0)$$

existe. La fonction f est dérivable sur I si f est dérivable en chacun des points de I. L'ensemble des fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathscr{D}(I, \mathbb{R})$. La *(fonction) dérivée* de f est la fonction

$$f' : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$



Galileo Galilei (italien 1564-1642) Astronome de génie qui fut emprisonné par l'inquisition pour son fervent soutien à la théorie de heliocentrisme.

Exemple : Les fonctions constantes sont dérivables, de dérivée nulle.

Démonstration. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ constante et $x_0 \in I$. Puisque $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$ pour tout $x \neq x_0$, la limite existe et vaut 0. □

Exemple : La fonction identité $\mathbb{I}$ est dérivable, de dérivée la fonction constante égale à 1.

Démonstration. Soit $x_0 \in I$. Puisque $\dfrac{\mathbb{I}(x) - \mathbb{I}(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{x - x_0}{x - x_0} = 1$ pour tout $x \neq x_0$, la limite existe et vaut 1. □

Christiaan Huygens (hollandais 1629-1695)

Exemple : Nous avons $\exp' = \exp$.

Démonstration. Montrons d'abord le cas $x_0 = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{\exp(x) - 1}{x} &= \frac{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - 1}{x} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - 1}{x} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{k!} = 1 + x \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{x^{k-2}}{k!}. \end{aligned}$$

Johannes Kepler (allemand 1571-1630) inventa les lois qui portent son nom.

Maintenant, nous avons

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{x^{k-2}}{k!} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \leq \exp(1)$$

pour tout $n \geq 2$. Ainsi, nous pouvons prendre la limite lorsque x tend vers 0 pour montrer que $\frac{\exp(x)-1}{x}$ est 1. La dérivée en 0 existe et vaut donc 1.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Nous avons

$$\frac{\exp(x) - \exp(x_0)}{x - x_0} = \frac{\exp(x - x_0)\exp(x_0) - \exp(x_0)}{x - x_0} = \exp(x_0)\frac{\exp(x - x_0) - 1}{x - x_0} \longrightarrow \exp(x_0).$$

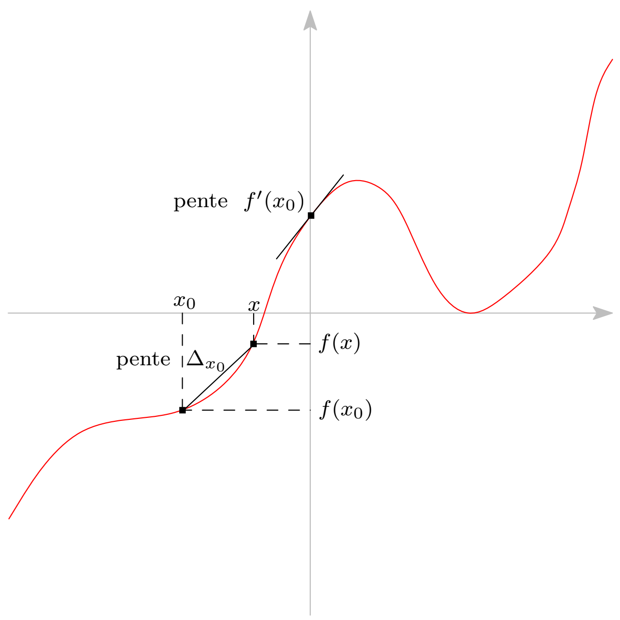
Ceci implique que la dérivée en x_0 vaut $\exp(x_0)$. □

Notons quelques remarques trivialles sur la notion de dérivée :

1. La dérivée en x_0 est une notion locale.
2. La droite d'équation $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ est la droite *tangente* à la courbe en $(x_0, f(x_0))$.
3. Pour $x \neq x_0$, la quantité

$$\Delta_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

est appelée *la pente de la sécante* à la courbe $\mathscr{C}_f$ aux points x et x_0, ou parfois *taux d'accroissement* de f entre x et x_0. Dire que f est dérivable en x_0 revient à dire que la pente de la sécante converge. La limite est alors appelée *pente en* x_0. Cette interprétation est la principale motivation pour l'introduction de la notion de dérivée.



4. D'autres notations existent pour la dérivée. Dans ce cours nous nous bornerons à celle utilisée ci-dessus. Afin d'être complèt, mentionons une autre notation. Supposons que $y = y(x)$. On pose parfois

$$\Delta_{x_0}(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Et si y est dérivable,

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_0} \quad \text{ou simplement } \frac{dy}{dx}$$

5. La notion de fonction dérivable s'étend naturellement aux fonctions de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$. Une fonction vectorielle est dérivable si chacune de ses composantes est dérivable et le vecteur dérivée est le vecteur des dérivées des fonctions coordonnées.
6. Nous verrons plus tard dans le cours qu'il existe des fonctions partout continues nulle part dérivables. Par contre, si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0. La notion de dérivée est donc plus contraignante que la notion de continuité.

Démonstration. Soit f dérivable en x_0,

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} f(x)-f(x_0) = \Big(\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\Big)\Big(\lim_{x\to x_0} x-x_0\Big) = f'(x_0)\times 0 = 0.$$

□

Proposition 7.2 (opération sur les dérivées)**.** *Soient $f,g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $\lambda\in\mathbb{R}$ et $x_0\in I$. Supposons que f et g sont dérivables en x_0.*

1. *$f+g$ est dérivable en x_0 et $(f+g)'(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0)$.*
2. *fg est dérivable en x_0 et $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$.*
3. *Supposons $g(x_0)\neq 0$, $\frac{1}{g}$ est dérivable en x_0 et $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.*
4. *Supposons $g(x_0)\neq 0$, $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-g'(x_0)f(x_0)}{g(x_0)^2}$.*

La proposition précédente implique facilement que λf est dérivable en x_0 et $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$.

Démonstration. Fixons $x_0\in I$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} &= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \longrightarrow f'(x_0)+g'(x_0)\\
\frac{(\lambda f)(x)-(\lambda f)(x_0)}{x-x_0} &= \lambda\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \longrightarrow \lambda f'(x_0)\\
\frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0} &= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x)+f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\\
&\longrightarrow f'(x_0)g(x_0)+g'(x_0)f(x_0)\\
\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(x_0)}}{x-x_0} &= \frac{1}{g(x)g(x_0)}\frac{g(x_0)-g(x)}{x-x_0} \longrightarrow -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}.
\end{aligned}$$

Dans les deux dernières convergences, nous avons utilisé le fait que g est continue car dérivable. La dernière implication suit de la formule pour le produit et pour l'inverse. □

Décrivons quelques conséquences de cette proposition. Nous n'incluons pas les preuves de ces conséquences car elles sont de simples récurrences.

Exemple : Pour $n\in\mathbb{N}$, f^n est dérivable en x_0 et $(f^n)'(x_0) = nf'(x_0)f(x_0)^{n-1}$ et en particulier $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Exemple : Soient $f_1,\ldots,f_n : I\longrightarrow\mathbb{R}$ dérivables. Alors $(f_1\ldots f_n)'$ existe et

$$(f_1\ldots f_n)' = \sum_{i=1}^{n} f_1\ldots f_i'\ldots f_n.$$

Exemple : Une fonction polynomiale

$$f : x\mapsto \sum_{k=0}^{d} a_k x^k$$

est dérivable, de dérivée

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{d-1}(k+1)x^k.$$

Exemple : Les fonctions rationnelles sont dérivables sur leurs ensembles de définition.

Proposition 7.3 (composition de dérivées)**.** *Soient I et J deux intervalles ouverts non vides. Soient $f : I \longrightarrow J$ dérivable en $x_0 \in I$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $f(x_0)$. La fonction $g \circ f$ est dérivable en x_0 et*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Démonstration. Pour tout $x \in I$ tel que $|x - x_0| < \delta$,

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) = f(x_0) \\ \dfrac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & \text{sinon} \end{cases}$$

Puisque $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ tend vers $f'(x_0)$ et $f(x)$ tend vers $f(x_0)$, nous obtenons

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \longrightarrow g'(f(x_0))f'(x_0).$$

□

Exemple : Nous avons $\cos' = -\sin$, $\sin' = \cos$, $\tan' = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$, $\cosh' = \sinh$, $\sinh' = \cosh$ and $\tanh' = 1 - \tanh^2$.

Démonstration. Il suffit d'utiliser $\cos = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $\sin = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ et $\exp' = \exp$. Le résultat est immédiat. De même, on utilise $\cosh = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ et $\sinh = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$. En utilisant $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ et la formule trigonométrique $\cos^2 + \sin^2 = 1$, nous trouvons

$$\left(\frac{\sin}{\cos}\right)' = \frac{\cos\cos - \sin(-\sin)}{\cos^2} = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \frac{\sin^2}{\cos^2} = 1 + \tan^2.$$

□

Proposition 7.4 (dérivée de la réciproque)**.** *Soient I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Si $f : I \longrightarrow J$ dérivable, bijective et telle que $f'(x) \neq 0, \forall x \in I$, alors f^{-1} est dérivable et pour tout $y \in J$,*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)}$$

On dit alors que f est un difféomorphisme *de I sur J.*

Démonstration. Soit $y_0 \in J$. Nous trouvons

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0))} \longrightarrow \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Nous avons utilisé le fait que f^{-1} est continue en y_0 pour affirmer que $f^{-1}(y)$ tend vers $f^{-1}(y_0)$. □

Remarquer qu'il est possible également d'utiliser la proposition précédente pour calculer la dérivée de la réciproque. En effet, $f^{-1} \circ f = \mathbf{I}$ et donc $(f^{-1} \circ f)' = 1$. On applique alors la proposition et on obtient $(f^{-1})'(f(x))f'(x) = 1$ ce qui donne le résultat.

Exemple : Nous avons $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.

Démonstration. En effet, $\ln'(x) = 1/\exp'(\ln(x)) = 1/\exp(\ln(x)) = 1/x$ pour $x > 0$. □

7.1.2 Accroissements et dérivées

L'application principale de la notion de dérivée est l'étude des accroissements d'une fonction. Rappelons que x_0 est un *extremum local* de $f : I \to \mathbb{R}$ s'il existe $\delta > 0$ tel que x_0 est un maximum ou un minimum pour la fonction $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$.

Proposition 7.5 (Caractérisation des extrema par la dérivée)**.** *Soit I un intervalle ouvert. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $x_0 \in I$ telle que f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.*

Michel Rolle (français 1652-1719).

Prêtez attention au fait que la réciproque est fausse comme nous le prouve l'exemple $x \mapsto x^3$ en 0.

Démonstration. Soit x_0 tel que f admet un maximum local en x_0 (le cas d'un minimum est identique). Puisque $f(x) \le f(x_0)$ pour tout $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, nous avons

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{est} \begin{cases} \le 0 & \text{si } x_0 < x < x_0 + \delta \\ \ge 0 & \text{si } x_0 - \delta < x < x_0 \end{cases}.$$

La limite est ainsi positive et négative, et donc nulle. □

Brook Taylor (anglais 1685-1731)

Lemme 7.6 (Rolle, 1690)**.** *Soient $a < b$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que*

- *f est continue sur $[a, b]$,*
- *f est dérivable sur (a, b),*
- *$f(a) = f(b)$*

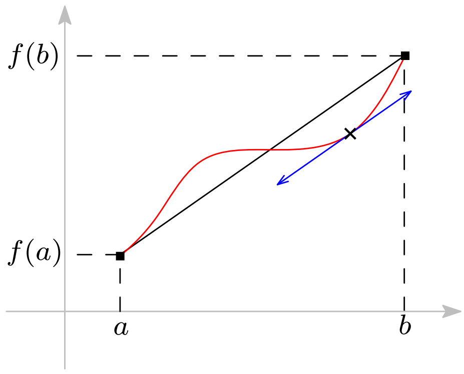
alors il existe $c \in (a, b)$ tel que $f'(c) = 0$.

Joseph-Louis Lagrange (italien 1736-1813) Contribua a de nombreux domaines des mathématiques. Premier professeur à l'école polytechnique. Enterré au Panthéon (son nom apparait parmi les 72 noms écrits sur la tour Eiffel).

Démonstration. Rappelons qu'un extremum $c \in (a, b)$ de f vérifie $f'(c) = 0$. D'après le corollaire 6.13, $f([a, b]) = [m, M]$. Si $m = M = f(a)$, alors f est constante et n'importe quel $c \in (a, b)$ est un maximum et un minimum de f. Si $m < f(a)$, alors $m = f(c)$ pour un certain $c \in (a, b)$. Ce c est un minimum et donc $f'(c) = 0$. Si $M > f(a)$, alors $M = f(c)$ pour un certain $c \in (a, b)$ et c est un maximum et donc $f'(c) = 0$. □

Attention : Il est nécessaire que f soit défini sur tout l'intervalle. En effet, par exemple la fonction $f : [-1, 1] \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = |x|$ est bien dérivable, satisfait $f(-1) = f(1) = 1$ mais n'a pas de minimum atteint sur $[-1, 1] \setminus \{0\}$. De même, il est nécessaire que f soit continue en a et b, comme le montre l'exemple de la fonction $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(0) = f(1) = 2$ et $f(x) = x$ pour $x \in (0, 1)$.

Théorème 7.7 (Égalité des accroissements finis, Lagrange, 1797)**.** *Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur (a, b), alors il existe $c \in (a, b)$ tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.*



Démonstration. Posons

$$g : \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \end{array}$$

La fonction g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur (a,b). De plus $g(a) = g(b) = 0$. Le lemme de Rolle implique qu'il existe $c \in (a,b)$ tel que $g'(c) = 0$. Mais

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

ce qui implique donc que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

Le théorème des accroissements finis n'est en fait qu'une application du théorème de Rolle à une fonction g bien choisie. C'est le cas de nombreux théorèmes, comme nous le verrons plus tard dans le cours avec l'égalité de Taylor-Lagrange et la règle de l'Hôpital par exemple.

Corollaire 7.8. *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur (a,b). La fonction f est croissante (décroissante) ssi $f' \geqslant 0$ ($f' \leq 0$).*

Démonstration. Commençons par le sens direct. Soit f croissante et soit $x_0 \in (a,b)$. Nous avons alors $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ pour tout $x \in I$, ce qui implique $f'(x_0) \geq 0$.

Montrons maintenant le sens réciproque (on utilise l'égalité des accroissements finis). Soient $y > x$ dans $[a,b]$, il existe $c \in (x,y)$ tel que

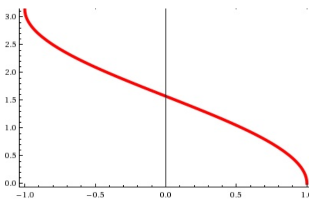
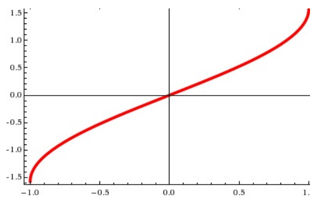
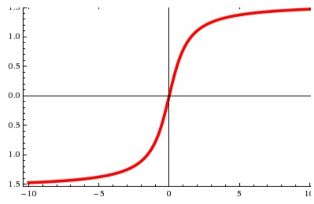
$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c) \geq 0.$$

Nous avons alors $f(y) \geq f(x)$. □

Corollaire 7.9. *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur (a,b). Si $f' > 0$ (resp. $f' < 0$), la fonction f est strictement croissante (resp. décroissante).*

Démonstration. C'est la même preuve. □

Exemple : (application à la définition de arccos, arcsin et arctan) La fonction cos : $[0,\pi] \times [-1,1]$ est strictement décroissante entre 0 et π. Elle est donc injective. Puisque $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$, le théorème des valeurs intermédiaires implique que cos est surjective. On définit la fonction arccosinus arccos : $[-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$ comme l'inverse de $\cos : [0,\pi] \times [-1,1]$. La dérivée vaut $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. De même on définit arcsin : $[-1,1] \longrightarrow [-\pi,\pi]$ et arctan : $\mathbb{R} \longrightarrow (-\pi/2,\pi/2)$, dont les dérivées sont $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\frac{1}{1+x^2}$.

Corollaire 7.10. *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur (a,b). La fonction f est constante ssi $f' = 0$.*

Démonstration. Montrons le sens direct. Si f est constante, alors f est croissante et décroissante, et le sens direct du corollaire précédent implique que $f' \geq 0$ et $f' \leq 0$. Ainsi, $f' = 0$.

Le sens réciproque provient du fait que l'application est croissante (car $f' \geq 0$) et décroissante (puisque $f' \leq 0$), donc constante. □

Corollaire 7.11 (Inégalité des accroissements finis)**.** *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur (a,b). S'il existe $M > 0$ tel que $|f'| \leqslant M$ sur (a,b), alors*

$$\forall x \neq y \in [a,b], \qquad \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} \leqslant M.$$

Parfois, cette inégalité est réécrite ainsi : $\dfrac{|f(b) - f(a)|}{|b-a|} \leq \sup\limits_{x\in(a,b)} |f'(x)|$.

Ce théorème est très important car il possède une généralisation pour la notion de différentielle que vous verrez l'année prochaine, tandis que ce n'est pas le cas de l'égalité des accroissements finis. On pourra penser à la fonction $f : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ qui à x associe e^{ix} qui vérifie l'inégalité des accroissements finis (ce n'est pas totalement évident à prouver) mais pas l'égalité (penser à regarder 0 et π).

Démonstration. Soient $x \neq y$, il existe $c \in (x,y)$ tel que $\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} = |f'(c)|$. Le corollaire suit immédiatement. □

Exemple : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leqslant |x|$.

Démonstration. Pour tout $x \neq 0$, nous avons $|\frac{\sin(x)-\sin(0)}{x}| = \sup_{t\in(0,x)} |\cos(t)| \leq 1$. □

Corollaire 7.12 (Prolongement des fonctions dérivables)**.** *Soient $x_0 \in [a,b]$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Supposons que*

- *f est continue sur $[a,b]$,*
- *f est dérivable sur $(a,b) \setminus \{x_0\}$,*
- $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$,

alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \ell$.

Ce corollaire est particulièrement utilse pour calculer la dérivée de fonctions qui ont été définies par prolongement par continuité. En effet, il suffit de dériver la fonciton en dehors du point qui pose problème, et ensuite de prendre la limite.

Démonstration. D'après le théorème des accroissements fini, f est continue sur $[x_0, x]$ et dérivable sur (x_0, x) et donc il existe $c \in (x_0, x)$ tel que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c)$$

Lorsque x tend vers x_0, c tend vers x_0, et f' tend vers ℓ lorsque x tend vers x_0, nous obtenons que $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ tend vers ℓ. Ainsi, $f'(x_0)$ existe et vaut ℓ.

□

Exercice 124. 1. Rappeler la définition des fonctions arccos : $[-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$, arcsin : $[-1,1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ et arctan : $\mathbb{R} \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ et calculer leur dérivée.

2. Montrer que $\lim_{x\to\pm\infty} \arctan(x) = \pm\frac{\pi}{2}$.
3. Dessiner $x \mapsto \arccos(\cos x)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
4. Calculer la dérivée de $x \mapsto \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. En déduire $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$.

Exercice 125. Étendre la notion de dérivée pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. En considérant $f : \mathbb{R} \to \{z : |z| = 1\}, x \mapsto \exp(ix)$, montrer que le lemme de Rolle et l'égalité des accroissements finis ne sont pas vrais dans ce cas.

Exercice 126 (Formulation de Weierstrass de la dérivée)**.** Montrer que $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur I et dérivable en x_0 ssi il existe $\phi : I \to \mathbb{R}$ continue sur I telle que

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\phi(x), \quad \forall x \in I.$$

Exercice 127. Déterminer les $a, b, c \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ si } 0 \le x \le 1 \text{ et } f(x) = ax^2 + bx + c \text{ si } x > 1$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 128. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que $f'(\alpha) = 0$ (*Indication :* On pourra s'inspirer des exercices sur le théorème des valeurs interédiaires et se ramener à une utilisation du lemme de Rolle).

Jean-Gaston Darboux (français 1842-1917)

Exercice 129 (Théorème de Darboux)**.** Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable et $a < b$ dans I.

1. Montrer que les deux fonctions de (a, b) dans $\mathbb{R}$

$$f_1(x) = \frac{f(a) - f(x)}{a - x} \text{ et } f_2(x) = \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$$

peuvent être prolongées sur $[a, b]$. Quelle est la valeur du prolongement de f_1 en a. Même question pour f_2 en b.

2. Supposons $f'(a) \le f'(b)$ (le cas symétrique fonctionne pareillement). Soit $\lambda \in [f'(a), f'(b)]$, montrer qu'il existe $d \in [a, b]$ tel que $f_1(d) = \lambda$ ou $f_2(d) = \lambda$ (*indication :* on pourra discuter en fonction de la position de $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ par rapport à $f'(a)$ et $f'(b)$).
3. Supposons que $f_1(d) = \lambda$. Utiliser la formule des accroissements finis pour montrer qu'il existe $c \in (a, d)$ tel que $f'(c) = f_1(d)$.
4. Que vient-on de montrer ?

Nous venons de démontrer le théorème de Darboux : La dérivée d'une fonction dérivable satisfait le théorème des valeurs intermédiaires. Notez que f' n'a aucune raison d'être continue. Ce théorème est donc tout à fait surprenant.

Exercice 130 (Fonctions trigonométriques et hyperboliques réciproques)**.**

1. Justifier la définition des fonctions arccos : $[-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$, arcsin : $[-1,1] \longrightarrow [-\pi,\pi]$ et arctan : $\mathbb{R} \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ et calculer leur dérivée.
2. Montrer que $\lim_{x\to\pm\infty} \arctan(x) = \pm\frac{\pi}{2}$.
3. Dessiner $x \mapsto \arccos(\cos x)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

4. Calculer la dérivée de $x \mapsto \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. En déduire $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$.

Exercice 131 (Des fonctions à contre-exemple).

1. Représenter l'ensemble E des couples de réels $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$ tels que la fonction f définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x^\alpha \sin(x^\beta)$ pour $x > 0$ est continue en 0.
2. Représenter l'ensemble $E' \subset E$ formé des couples (α, β) tels que f est dérivable en 0.
3. Donner un exemple de fonction dérivable sur $[-1, 1]$ dont la dérivée n'est pas bornée sur $[-1, 1]$.
4. Donner un exemple d'une fonction f dérivable en 0 avec $f'(0) = 1$ et telle que f n'est monotone sur aucun intervalle ouvert contenant 0.

7.2 Dérivées Successives.

Gottfried Leibniz (allemand 1646-1716) crédité de l'invention du calcul infinitésimal avec Newton. Également philosophe défendant le rationalisme avec Descartes et Spinoza. Il fut opposé au point de vue de Newton sur le développement du calcul infinitésimal, et en particulier la rigueur avec laquelle il fallait procéder (Johann Bernoulli fut l'un de ses principaux soutiens).

À nouveau, I est un intervalle ouvert.

Définition 7.13. La fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite n *fois dérivable* si f' est $n-1$ fois dérivable. La dérivée d'ordre n de f est notée $f^{(n)}$ (lorsqu'elle existe). Noter que $(f^{(n-1)})' = f^{(n)}$.

L'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ n fois dérivable est noté $\mathscr{D}^n(I, \mathbb{R})$. L'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ n fois dérivable et telles que $f^{(n)}$ est continue est noté $\mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$. Dans ce cas, f est dite de *classe* $\mathscr{C}^n$. Remarquer que f est de classe $\mathscr{C}^n$ si et seulement si f' est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$.

Une fonction *infiniment dérivable* $\mathscr{C}^\infty$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout n.

Proposition 7.14. *Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est de classe $\mathscr{C}^{m+n}$ ssi f est de classe $\mathscr{C}^n$ et $f^{(n)}$ est de classe $\mathscr{C}^m$.*

Démonstration. Ce résultat se montre aisément par récurrence sur n :

$$\mathscr{H}_n : \text{"pour tout } m \in \mathbb{N}, \text{ si } f \in \mathscr{C}^{m+n}, \text{ alors } f^{(n)} \text{ est de classe } \mathscr{C}^m\text{"}.$$

$\mathscr{H}_1$ est vraie par définition. Supposons $\mathscr{H}_n$ vraie et montrons $\mathscr{H}_{n+1}$. Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $f \in \mathscr{C}^{m+n+1}$, alors $f^{(n)}$ est de classe $\mathscr{C}^{m+1}$ par $\mathscr{H}_n$. Mais $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$ est alors de classe $\mathscr{C}^m$ par $\mathscr{H}_1$ et la définition même des fonctions de classe $\mathscr{C}^{m+1}$. □

Proposition 7.15. *Si tout est bien défini, la multiplication par un scalaire, l'addition, la multiplication, la division, la composition, l'inverse de fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ est de classe $\mathscr{C}^n$.*

Démonstration. Montrons le résultat par récurrence sur n. Définissons

$$\mathscr{H}_n : \text{"Pour tout } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } f, g \in \mathscr{C}^n, \ \lambda f, \ f+g, \ fg, \ f/g, \ f \circ g, \ f^{-1} \text{ sont de classe } \mathscr{C}^n.\text{"}$$

En utilisant le chapitre précédent, $\mathscr{H}_0$ est vraie. Supposons $\mathscr{H}_n$ et montrons $\mathscr{H}_{n+1}$. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, f, g de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, alors λf, $f+g$, fg, f/g, $f \circ g$ et f^{-1} sont de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. Nous avons $(\lambda f)' = \lambda f'$, $(f+g)' = f' + g'$, $(fg)' = f'g + fg'$, $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$, $(f \circ g)' = f'(g)g'$ et $(f^{-1})' = 1/f'(f^{-1})$. D'après $\mathscr{H}_n$, toutes ces fonctions sont de classe $\mathscr{C}^n$. Ainsi, les dérivées de λf, $f+g$, fg, f/g, $f \circ g$ et f^{-1} sont de classe $\mathscr{C}^n$. Nous en déduisons que λf, $f+g$, fg, f/g, $f \circ g$ et f^{-1} sont de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. □

Exemple : Les fonctions polynomiales, rationnelles, exp, ln, cos, sin, tan, arcsin, arccos, arctan sont $\mathscr{C}^\infty$ sur leur domaine de définition.

La formule suivante se révèle très utile pour calculer les dérivées n-ième de fonctions dans $\mathscr{D}^n$.

Proposition 7.16 (Formule de Leibniz)**.** *Soit $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ n fois dérivables alors fg est n fois dérivable et*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Démonstration. Montrons la formule de Leibniz par récurrence sur n.

$$\mathscr{H}_n \text{ :"Pour tout } f, g \text{ de classe } \mathscr{C}^n, \quad (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.\text{"}$$

$\mathscr{H}_0$ est évident. Supposons $\mathscr{H}_n$ et montrons $\mathscr{H}_{n+1}$. Soient f et g de classe $\mathscr{C}^{n+1}$,

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} = \left((fg)^{(n)}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n+1-k)}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n+1-(k+1))} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= f^{(n+1)} + g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}.
\end{aligned}$$

Dans la deuxième égalité, nous avons utilisé $\mathscr{H}_n$. Dans la troisième, nous avons utilisé la linéarité de la dérivée. Dans la cinquième, nous avons invoqué le triangle de Pascal. □

Théorème 7.17 (Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n)**.** *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a < b$ dans I. Supposons que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et $n+1$ fois dérivable sur (a, b). Alors il existe $c \in (a, b)$ tel que*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Nous utiliserons ce théorème à de maintes reprises dans l'avenir, mais nous nous reportons aux prochains chapitres pour une description plus précise des applications.

La démonstration revient simplement à utiliser le lemme de Rolle appliqué à une fonction bien choisie.

Démonstration. Définissons

$$g : \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k - \lambda \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \end{array}$$

où $\lambda = \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}}\Big[f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\Big]$.

Remarquer que $g(a) = g(b) = 0$ et que g est $\mathscr{C}^n$ sur $[a,b]$ et $\mathscr{D}^{n+1}$ sur (a,b). De plus, pour $\ell \in \{0,\dots,n\}$,

$$g^{(\ell)}(x) = f^{(\ell)}(x) - \sum_{k=\ell}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \frac{k!}{(k-\ell+1)!}(x-a)^{k-\ell} - \lambda \frac{(n+1)!}{(k-\ell+1)!}(x-a)^{n+1-\ell}.$$

En appliquant à $x = a$, nous obtenons

$$g^{(\ell)}(a) = f^{(\ell)}(a) - \frac{\ell!}{\ell!} f^{(\ell)}(a) = 0.$$

Enfin, le même calcul montre que $g^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - \lambda$ pour tout $x \in (a,b)$.

Puisque $g(a) = 0$, $g(b) = 0$ et g est dérivable sur (a,b), le lemme de Rolle montre qu'il existe $c_1 \in (a,b)$ tel que $g'(c_1) = 0$. De même, puisque $g'(a) = 0$ et $g'(c_1) = 0$ et g' est dérivable sur (a,c_1), il existe $c_2 \in (a,c_1)$ tel que $g''(c_2) = 0$. Ainsi, par récurrence, il existe $c_{n+1} \in (a,b)$ tel que $g^{(n+1)}(c_{n+1}) = 0$. Maintenant, $g^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - \lambda$, et il existe donc $c_{n+1} \in (a,b)$ tel que

$$0 = g^{(n+1)}(c_{n+1}) = f^{(n+1)}(c_{n+1}) - \lambda = f^{(n+1)}(c_{n+1}) - \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}}\Big[f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\Big].$$

Ceci implique le résultat. □

Exercice 132. Calculer la dérivée n-ième des fonctions suivantes :

1. $x \longmapsto \frac{1}{1-x}$
2. $x \longmapsto x^2(1+x)^n$
3. $x \longmapsto (x^2+2x+3)e^{2x}$
4. $x \longmapsto x^2 \sin x$
5. $x \longmapsto x^n(1+x)^n$.

Exercice 133. Soit $P(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$ un polynôme de degré $d \geq 1$. On désire montrer qu'on ne peut pas avoir $P(x) = \sin(x)$ pour une infinité de valeurs x. Posons $f(x) = P(x) - \sin(x)$ et supposons donc que $f(x) = 0$ pour une infinité de x.

1. Montrer que $\frac{P(x)}{x^d}$ tend vers a_d lorsque x tend vers l'infini. En déduire que P tend vers l'infini. En déduire qu'il existe $M > 0$ tel que $|f(x)| > 0$ pour $|x| > M$. Par conséquent, toute racine x de l'équation $f(x) = 0$ vérifie $|x| \leq M$.
2. Soient $a < b$ tels que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in (a,b)$ tel que $f'(c) = 0$.
3. En déduire qu'il existe une infinité de x entre $-M$ et M tels que $f'(x) = 0$.
4. En réitérant ce raisonnement, montrer qu'il existe une infinité de x entre $-M$ et M tels que $f^{(d+1)}(x) = 0$.
5. Calculer $f^{(d+1)}(x)$ et montrer qu'il existe seulement un nombre fini de x entre $-M$ et M tels que $f^{(d+1)}(x) = 0$.
6. Conclure.

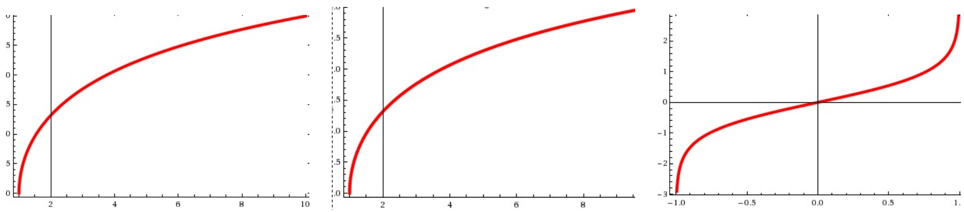
Exercice 134. Définissons la fonction *cotangente* par la formule

$$\text{cotan} \ : \ \begin{array}{ccc} (0,\pi) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\cos x}{\sin x} \end{array}$$

Calculer la dérivée de cotan et montrer qu'elle est $\mathscr{C}^\infty$.

Exercice 135. 1. Calculer la dérivée de cosh et sinh.

2. Montrer que cosh est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $(0,\infty)$.
3. Montrer que cosh est bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $[1,+\infty)$. L' application réciproque est appelée
$$\text{argcosh} : [1,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}_+.$$
4. Montrer que argcosh est continue sur $[1,\infty)$ et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $(1,\infty)$.
5. Calculer la dérivée de argcosh.
6. Montrer que $\text{argcosh}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$.
7. Effectuer la même étude pour sinh.
8. Que se passe-t-il pour tanh ?
9. Tracer toutes ces fonctions.



Exercice 136 (Étude de suites définies par récurrence)**.** Soit f une fonction $\mathscr{C}^1$ et soit ℓ un point fixe. Définissons la suite (u_n) par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Supposons $|f'(\ell)| < 1$.
   (a) Soit $\varepsilon > 0$ tel que $|f'(\ell)| < 1-\varepsilon < 1$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $|f'(x)| \leq 1-\varepsilon$ pour tout $x \in [\ell-\delta, \ell+\delta]$. Nous fixons maintenant δ possèdant cette propriété.
   (b) Montrer que si $u_N \in [\ell-\delta,\ell+\delta]$, alors $|u_{n+1}-\ell| \leq (1-\varepsilon)|u_n-\ell|$ pour tout $n \geq N$.
   (c) Montrer que $|u_n - \ell| \leq (1-\varepsilon)^n |u_0-\ell|$ si u_0 est assez proche de ℓ. En déduire que pour u_0 assez proche de ℓ, (u_n) tend vers ℓ. On dit que le point fixe est *attractif.*
2. Supposons $|f'(\ell)| > 1$. Montrer en raisonnant par l'absurde que (u_n) converge vers ℓ ssi $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $u_n = \ell$. Dans ce cas, le point fixe est dit *répulsif.*

Dans le premier cas, nous appelons le point fixe *attractif.* Si une itéré "tombe" suffisament proche de ce point, la suite est alors inexorablement attirée par ℓ. De plus, le théorème montre que la convergence est "géométrique". Dans le second, il est *répulsif.*

7.3 Applications

Décrivons maintenant quelques applications classiques de la notion de dérivée.

7.3.1 Applications aux fonctions convexes (pour votre culture)

Les fonctions convexes forment une classe importante de fonctions. L'analyse convexe trouve un grand nombre d'applications en physique, où les potentiels énergétiques sont souvent localement convexes (existence de solutions stables, de changements de phase). En homogénéisation, par exemple, les théories de type variationnel permettent d'estimer les solutions d'équations aux dérivées partielles elliptiques grâce à la représentation des potentiels énergétiques par transformée de Legendre. La transformée de Legendre, formulation mathématique qui représente une fonction convexe par l'ensemble de ses tangentes, permet le développement de méthodes de linéarisation. Pour toutes ces raisons et bien d'autres, les fonctions convexes sont primordiales. Mentionons quelques propriétés des fonctions convexes.

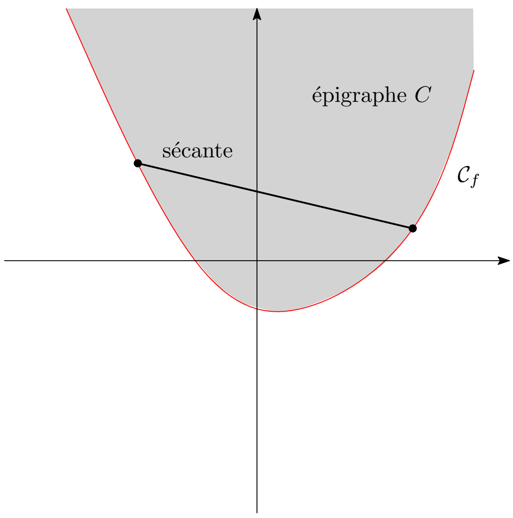
Définition 7.18. La fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est *convexe* si

$$\forall x, y \in I, \quad \forall \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Exemple : Les fonctions constantes, linéaires, affines, $x \mapsto x^2$.

Mentionons quelques remarques préliminaires.

1. Une fonction f est *concave* si $-f$ est convexe.
2. Une fonction est convexe si le graphe est au-dessous de chaque sécante.



3. L'*épigraphe* de f est la partie au-dessus de la courbe *ie*

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, x \in I \text{ et } y \geqslant f(x) \right\}$$

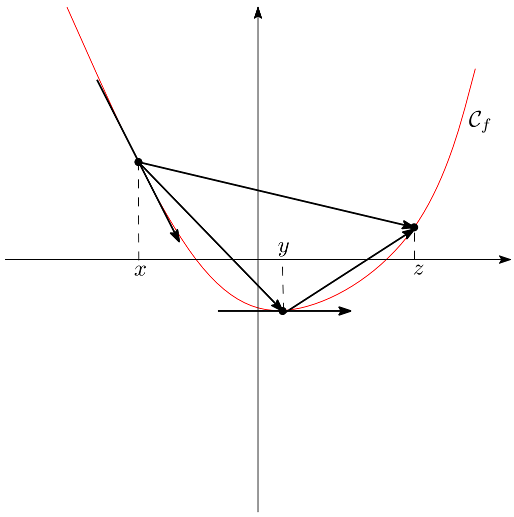
   Une fonction est convexe si tout segment dont les extrémités sont dans l'épicentre est inclus dans l'épicentre (l'ensemble C est dit *convexe*).
4. Par récurrence, nous obtenons que pour tout $x_1, \dots, x_n \in I$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geqslant 0$ avec $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$,

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n).$$

Proposition 7.19. *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe et $x < y < z \in I$, alors*

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

Les différentes inégalités entre pentes (voir aussi ci-dessous) sont illustrées dans la figure suivante.



Démonstration. En écrivant $y = x + \dfrac{y-x}{z-x}(z-x) = \dfrac{y-x}{z-x}z + \dfrac{z-y}{z-x}x$, la définition de la convexité donne

$$f(y) \leq \frac{y-x}{z-x}f(z) + \frac{z-y}{z-x}f(x)$$

ce qui est équivalent à

$$(z-x)f(y) \leq (y-x)f(z) + (z-y)f(x).$$

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned}(z-x)f(y) - (z-x)f(x) &\leq (y-x)f(z) - (y-x)f(x) \text{ et}\\ (z-y)f(z) - (z-y)f(x) &\leq (z-x)f(z) - (z-x)f(y)\end{aligned}$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

□

Les fonctions convexes sont relativement régulières, comme l'illustre le corollaire suivant.

Corollaire 7.20. *Toute fonction convexe sur $[a,b]$ est continue sur (a,b).*

Démonstration. Soit $x_0 \in (a,b)$. Pour tout $x_0 < x$,

$$\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a} \leq \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}$$

et donc

$$\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}(x-x_0) \leq f(x)-f(x_0) \leq \frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}(x-x_0).$$

Par conséquent, $f(x)$ tend vers x_0 lorsque x tend vers x_0 par valeurs supérieures. Ainsi, f est continue à droite en tout point de (a,b). De même, on montre que f est continue à gauche sur (a,b). Et donc f est continue sur (a,b). □

Proposition 7.21 (Fonctions convexes et dérivabilité)**.**

1. **(Fonctions dérivables)** *Soit* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction dérivable. Alors les trois propositions suivantes sont équivalentes*
   (i) f *est convexe*
   (ii) f' *est croissante*
   (iii) $\forall a, b \in I, f(b) \geqslant f'(a)(b-a) + f(a)$.
2. **(Fonctions deux fois dérivables)** *Soit* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction deux fois dérivable. Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes*
   (j) f *est convexe*
   (jj) $f'' \geq 0$.

La condition (iii) signifie que la courbe est au-dessus de sa tangente en tout point.

Démonstration. Montrons la première partie. Commençons par (i) implique (iii). Pour tout $x < y < z$ dans (a, b),

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

En laissant y tendre vers x, puis vers z, nous obtenons $f'(x) \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq f'(z)$ et nous obtenons (iii).

La propriété (iii) implique (ii) facilement. Soient $x < y$. En appliquant (iii) à $a = x$ et $b = y$ puis à $a = y$ et $b = x$, nous obtenons $f'(x) \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq f'(y)$.

Montrons que (ii) implique (i). Soient $x < y$, définissons la fonction $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ par la formule $\varphi(t) = tf(x) + (1-t)f(y) - f(tx + (1-t)y)$. Notre but est de montrer que φ est toujours négative. Notons tout d'abord que $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, et qu'il est donc suffisant de montrer que φ' est négative puis positive, ou plus simplement que φ' est croissante : cela impliquera immédiatement qu'elle est négative puis positive, possiblement seulement l'un ou l'autre (ceci est suffisant pour nous). Nous trouvons que $\varphi'(t) = f(x) - f(y) - (x-y)f'(tx + (1-t)y)$, qui est effectivement croissante puisque f' est croissante et $x - y < 0$.

Intéressons nous à la deuxième partie. Puisque f est deux fois dérivable, f est convexe ssi f' est croissante et donc ssi f'' est positive. □

Définition 7.22. Soit $x_0 \in I$. Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ admet une *dérivée à droite* si

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existe.}$$

La dérivée à gauche peut être définie de la même façon.

Si f est dérivable à droite en x_0, alors la courbe représentative de f admet une demi-tangente à droite en x_0.

Proposition 7.23. *Les fonctions convexes sur* $[a, b]$ *admettent des dérivées à gauche et à droite en tout point de* (a, b).

Démonstration. Soit $x_0 \in (a, b)$. Nous avons $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ décroit lorsque x tend vers x_0 et est minorée par $\frac{f(a)-f(x_0)}{a-x_0}$. Elle converge donc vers une limite. Ainsi, f est dérivable à droite. On montre de même que f est dérivable à gauche. □

7.3.2 Applications à l'étude des graphes de fonctions

Lorsque l'on étudie une fonction, la première chose à identifier est son domaine de définition. Nous étudions ensuite sa régularité, c'est à dire sa classe et son sens de variation. Il est en général important d'identifier les extrema de la courbe. Nous nous intéresserons aussi aux points auquel f'' s'annule. Ces points sont appelés *points d'inflexion*. Ces points correspondent aux endroits où la courbe traverse potentiellement (ce n'est pas toujours le cas) la tangente. Nous étudions ensuite les limites aux bornes du domaine. Nous utilisons en général un tableau de variation pour résumer les information obtenues jusqu'à présent.

Dans le cas où la fonction tend vers $\pm\infty$, il est utile d'identifier comment la courbe se comporte. On appelle cette partie *étude des branches infinies*.

Définition 7.24. Soit $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$. La fonction f admet une branche infinie en b si b est infini ou si b est fini et f admet une limite infinie en b.

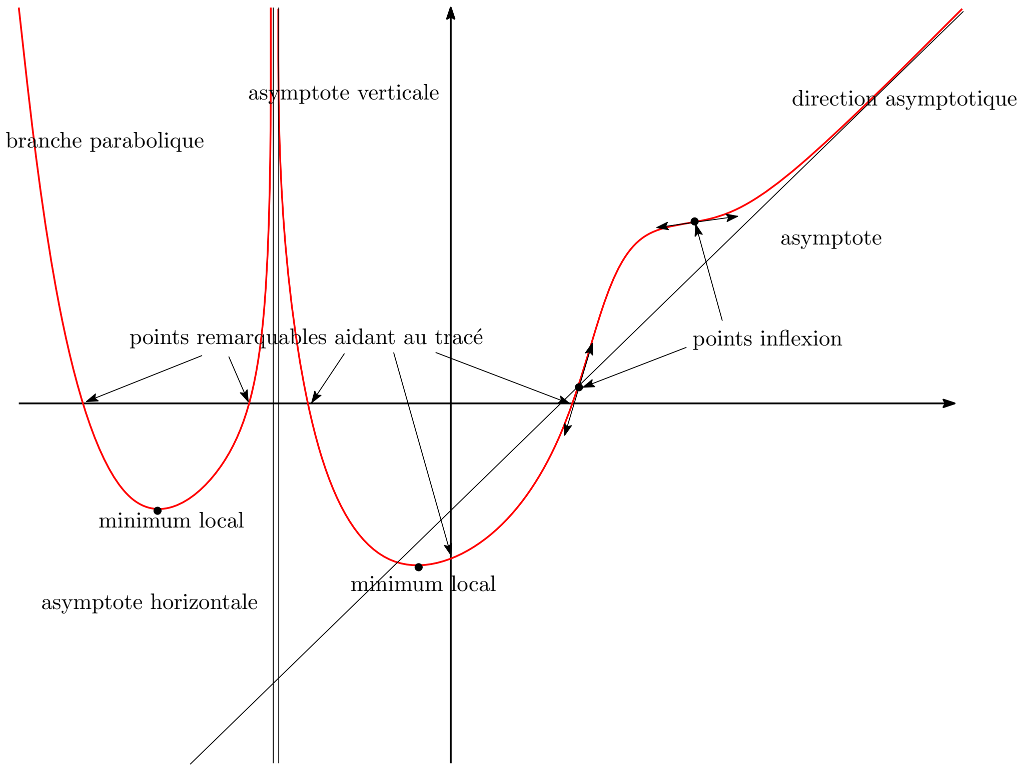
Si $b < \infty$, la courbe tend vers l'infini en se rapprochant de la droite verticale passant par le point de coordonnées $(b,0)$. On dit que la courbe a une asymptote verticale en b. Lorsque $b = \infty$, nous désirons savoir si la fonction tend plus lentement ou plus rapidement que les fonctions linéaires.

Définition 7.25. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Si $\ell \in \mathbb{R}$, la droite d'équation $y = \ell x$ est une *direction asymptotique* de la courbe en ∞. De plus, si $f(x) - \ell x$ tend vers $\pm\infty$, alors f admet une *branche parabolique* dans la direction de $y = \ell x$, sinon, on dit que la courbe admet une droite asymptotique.

L'étude se termine en regardant si la courbe est au-dessus ou au-dessous de cette branche lorsque x tend vers l'infini.

En conclusion, le plan d'étude d'une fonction suivra les étapes suivantes

D	Domaine de définition.
R	Régularité (continuité, dérivabilité, etc).
S	Sens de variation et tableau de Variation (extremums, points notables).
L	Limites au bornes du domaine.
B	Branches infinies, Tangentes et positions par rapport aux asymptotes.



Exemple : Étude de la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{D}_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x\exp\left(\frac{1}{1+x}\right) & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 + ex & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array}$$

Domaine de définition : Le seul point problématique est le cas de $x = -1$, nous avons donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Régularité : Sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$, la fonction est $\mathscr{C}^\infty$ et la dérivée vaut

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x+1}{(1+x)^2} \exp\left(\frac{1}{1+x}\right) & \text{si } x < 0 \\ e - 2x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Puisque nous en aurons besoin, dérivons une nouvelle fois :

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{(2x+1)(1+x)^2 - 2(1+x)(x^2+x+1) - (1+x^2+x)}{(1+x)^4} \exp\left(\frac{1}{1+x}\right) = \frac{-x-2}{(1+x)^4} \exp\left(\frac{1}{1+x}\right) & \text{si } x \leq 0 \\ -2 & \text{si } x > 0. \end{cases}.$$

La fonciton possède donc un point d'inflexion en -2.

Étudions la régularité en zéro : la fonction est clairement continue car $x^2 - ex$ tend vers 0, de même que $x\exp(1/(1+x))$. Les dérivées convergent vers e lorsque x tend vers zéro par valeurs positives et négatives et donc la proposition du cours implique que f est dérivable en zéro. En étudiant la limite de la deuxième dérivée, dérivable mais pas deux fois dérivable en zéro (la limite à gauche de la seconde dérivée vaut $-2e$, tandis que celle à droite vaut -2).

Sens de variation et tableau de variation : Lorsque $x \leq 0$, la dérivée est positive (car $x^2 + x + 1 \geq 0$ pour tout x) et donc f est croissante. Lorsque $x > 0$, nous obtenons qu'elle est croissante jusqueà $\sqrt{e}/2$ puis décroissante. On peut évaluer f à ses maximums locaux : $f(e/2) = e/4$. Notons également que $f(0) = f(e) = 0$.

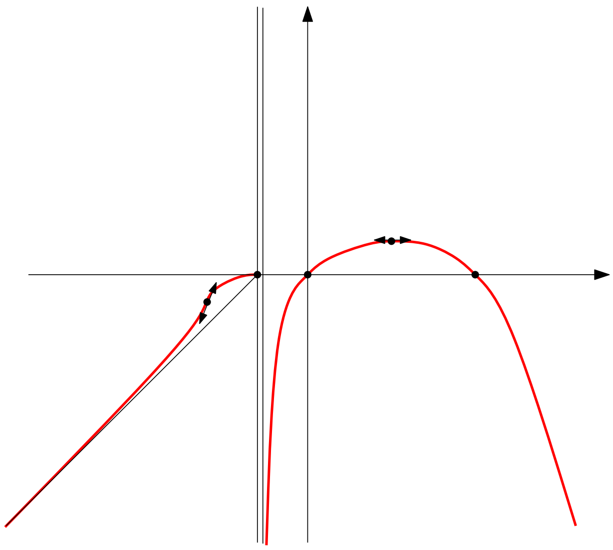
Limites au bornes du domaine : En $+\infty$ et $-\infty$, la fonction tend vers $-\infty$. En -1^- (à gauche), elle tend vers 0 et en -1^+ (à droite), vers $-\infty$.

Branches infinies et position par rapport à l'asymptote : Il y a une branche infinie en -1. En $+\infty$, $f(x)/x$ tend vers $-\infty$ et nous avons donc une branche infinie parabolique. En $-\infty$, $f(x)/x$ tend vers 1 et nous avons donc une direction asymptotique. Calculons

$$f(x) - x = x\big(\exp(1/(1+x)) - 1\big) \longrightarrow 1 \quad \text{(admis)}$$

par valeurs positives, la fonction est donc en dessous de l'asymptote.

Nous obtenons donc en conclusion



7.3.3 Applications aux inégalités

Dans ce paragraphe, nous expliquons quelques applications de la notion de dérivabilité permettant de montrer des inégalités. La première technique à retenir est l'étude de fonctions.

Proposition 7.26 (Inégalité classiques)**.**

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant 1 + x$
2. $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant x$
3. $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}],\ x - \frac{x^3}{3!} \leqslant \sin(x) \leqslant x$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.

La preuve consiste à dresser le tableau de variation d'une fonction bien choisie, et de vérifier qu'il implique la positivité de cette fonction.

Démonstration de la première inégalité. Posons $f(x) = e^x - 1 - x$. Nous avons alors $f''(x) = e^x \geq 0$ et donc f' est croissante. Puisque $f'(0) = e^0 - 1 = 0$, nous obtenons que $f'(x) \leq 0$ pour $x \leq 0$ et $f'(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$. Ainsi, f est décroissante pour $x \leq 0$ et croissante pour $x \geq 0$. Puisque $f(0) = e^0 - 1 - 0 = 0$, nous obtenons que $f(x) \geq f(0) = 0$ pour $x \leq 0$ et $f(x) \geq f(0) = 0$ pour $x \geq 0$. Nous avons donc $f(x) = e^x - 1 - x \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. □

7.3.4 Formes indéterminées

Let but de cette section est d'expliquer succinctement comment calculer des limites du type
$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x) - \sin(x)}{1 - \cos(x)^2}.$$

Il existe deux méthodes classiques.

Première méthode La première repose sur le lemme suivant.

Lemme 7.27 (règle de l'Hôpital)**.** *Soient $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in [a,b]$. Supposons*
- *f, g continues sur $[a,b]$*
- *f, g dérivables sur $[a,b] \setminus \{x_0\}$,*
- *$\forall x \in [a,b], g'(x) \neq 0$.*

Sous ces hypothèses, si $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ converge lorsque x tend vers x_0, alors
$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Démonstration. Supposons tout d'abord que $x > x_0$. Considérons
$$\varphi : t \in [a,b] \longmapsto (f(x) - f(x_0))(g(x) - g(x_0)) - (f(x) - f(x_0))(g(x) - g(x_0))$$
Nous avons $\varphi(x) = \varphi(x_0) = 0$. Ainsi, le lemme de Rolle implique l'existence de $c \in (x_0, x)$ tel que $\varphi'(c_c) = 0$, i.e.
$$(f(x) - f(x_0))g'(c_x) = (g(x) - g(x_0))f'(c_x).$$
c'est-à-dire
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$
et lorsque x tend vers x_0, alors c_x tend également vers x_0. Nous faisons de même avec $x < x_0$. □

Exemple : Appliquons cette méthode à la limite précédente. Dans ce cas
$$\begin{aligned} f(x) &= \log(1+x) - \sin(x) \quad \text{ et } f(0) = 0 \\ g(x) &= 1 - \cos(x)^2 \quad \text{ et } g(0) = 0. \end{aligned}$$

Nous avons donc
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} - \cos(x) \quad \text{ et } f'(0) = 0 \\ g(x) &= 2\sin(x)\cos(x) \quad \text{ et } g'(0) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Cette dernière limite est encore indéterminée. Nous continuons donc.

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} + \sin(x) \quad \text{et } f''(0) = -1$$
$$g(x) = 2(\cos^2(x) - \sin^2(x)) \quad \text{et } g''(0) = 2.$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)} = -\frac{1}{2}.$$

Il est souvent nécessaire d'itérer la règle de l'Hôpital.

Deuxième méthode (pour votre culture) La deuxième méthode repose sur le concept de développement limité.

Définition 7.28. Supposons que $0 \in I$. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est un "petit o" de x^n en 0 s'il existe une fonction $g : I \to \mathbb{R}$ telle que $g(x) \to 0$ en 0 et $f(x) = g(x)x^n$ pour tout $x \in I$.

En quelque sorte, cela signifie que f est beaucoup plus petit que x^n au voisinage de 0.

On parlera également de $o\big((x - x_0)^n\big)$ en x_0 lorsque f est beaucoup plus petit que $(x - x_0)^n$ au voisinage de x_0.

Exemple : $x = o(1)$, $x^2 = o(x)$, $x^3 = o(x^2)$ et plus généralement, $x^n = o(x^m)$ pour tout $n > m$.

Exemple : En x_0 quelconque, $x - x_0 = o(1)$, $(x-x_0)^2 = o(x-x_0)$, $(x-x_0)^3 = o((x-x_0)^2)$, et plus généralement $(x - x_0)^n = o((x - x_0)^m)$ pour tout $n > m$.

Exemple : $\frac{o(x^3)}{x} = o(x^2)$, plus généralement $\frac{o(x^n)}{x^m} = o(x^{n-m})$ pour tout $n \geq m$.

Exemple : Nous avons clairement $o(x^n) + o(x^n) = o(x^n)$.

Exemple : la limite d'une fonction $o(1)$ vaut 0.

Le but est de développer une fonction et l'approximer par un polynôme, en écrivant la correction comme un petit o. Par exemple,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n).$$

Démonstration. Il suffit de voir que $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$. Le dernier terme est bien un $o(x^n)$ ce qui permet de conclure. □

Dans cet exemple, nous voyons bien que $\frac{1}{1-x}$ est presque un polynôme, mais qu'il y a une correction qui est petite au voisinage de 0.

Noter que l'on peut remplacer x par $-x$ dans la formule précédente pour obtenir

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o((-x)^n).$$

Maintenant, un petit o de $(-x)^n$ est également un petit o de x^n et donc

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n).$$

Corollaire 7.29 (Formule de Taylor-Young)**.** *Soit $n \geq 0$. Soient $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ et $x_0 \in [a,b]$. Pour x tendant vers x_0,*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o\big((x - x_0)^n\big)$$

Démonstration. Utilisons la formule de Taylor-Lagrange. Nous obtenons qu'il existe c_x entre x_0 et x tel que

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c_x).$$

Ainsi,

$$\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c_x) = \frac{(x-x_0)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c_x)\cdot(x-x_0)^n.$$

Le terme $f^{(n+1)}(c_x)$ tend vers $f^{(n+1)}(x_0)$, le terme $x - x_0$ tend vers 0 et donc

$$\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c_x) = o\big((x-x_0)^n\big).$$

□

Exemple : $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$.

Exemple : $\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$.

Exemple : Soit $a \in \mathbb{R}$. $(1 - x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$.

Exemple : $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$.

Exemple : $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$.

Retournons donc à notre limite du départ

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-\sin(x)}{1-\cos(x)^2}.$$

Nous avons $\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ et $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$. Ainsi,

$$\log(1+x) - \sin(x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

et donc

$$\frac{\log(1+x)-\sin(x)}{x^2} = -\frac{1}{2} + o(1) \longrightarrow -\frac{1}{2}.$$

De même, $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Ainsi,

$$1-\cos(x)^2 = 1-(1-\tfrac{x^2}{2})^2-(o(x^2))^2-2(1-\tfrac{x^2}{2})o(x^2) = 2\tfrac{x^2}{2}+(\tfrac{x^2}{2})^2-(o(x^2))^2-2(1-\tfrac{x^2}{2})o(x^2).$$

En observant les différents termes attentivement, nous trouvons que seul le premier n'est pas un $o(x^2)$, et donc

$$1 - \cos(x)^2 = x^2 + o(x^2).$$

En conclusion, nous pouvons voir que

$$\frac{1-\cos(x)^2}{x^2} = 1 + o(1) \longrightarrow 1.$$

En faisant le rapport, nous tombons sur

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)-\sin(x)}{1-\cos(x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)-\sin(x)}{x^2} \cdot \frac{x^2}{1-\cos(x)^2} = -\frac{1}{2} \times 1 = -\frac{1}{2}.$$

On procède toujours comme décrit pr'ecédemment, on fait un développement du numérateur, puis on divise par le terme dominant pour avoir une limite. On fait de même avec le dénominateur, puis on divise les deux limites.

Exemple : Soit $t \in \mathbb{R}$ et $x > 0$,

$$\lim_{x\to 0} \Big(1 + xt\Big)^{1/x} = e^t.$$

En particulier, pour $x = \frac{1}{n}$, nous obtenons que

$$\lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{t}{n}\Big)^n = e^t.$$

Preuve Prenons le logarithme, il nous faut montrer que $\frac{1}{x}\log(1+tx) \longrightarrow t$. En posant $y = tx$, nous trouvons

$$\log(1+tx) = \log(1+y) = y + o(y) = tx + o(tx) = tx + o(x).$$

Ainsi,

$$\frac{1}{x}\log(1+tx) = t + o(1) \longrightarrow t.$$

□