



UNIVERSITÉ
PARIS-SUD 11



Faculté des
sciences
d'Orsay

N° d'ordre : 9637

THÈSE

Présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD XI

Spécialité : Mathématiques

par

Fanny KASSEL

Quotients compacts d'espaces homogènes réels ou p -adiques

Soutenue le 25 novembre 2009 devant la Commission d'examen :

| | | |
|-----|---------------------|----------------------|
| M. | Yves BENOIST | (Directeur de thèse) |
| M. | Emmanuel BREUILLARD | |
| M. | Étienne GHYS | (Président du jury) |
| Mme | Hee OH | (Rapporteur) |
| M. | Frédéric PAULIN | |
| M. | Bertrand RÉMY | (Rapporteur) |



Thèse préparée au
Département de Mathématiques d'Orsay
Laboratoire de Mathématiques (UMR 8628), Bât. 425
Université Paris-Sud 11
91 405 Orsay CEDEX

Remerciements

J'exprime toute ma reconnaissance à Yves Benoist, mon directeur de thèse, pour le temps qu'il a si généreusement consacré à mon apprentissage. Je le remercie pour la grande liberté qu'il m'a accordée durant la préparation de cette thèse, tout en me guidant par ses conseils et ses encouragements. J'admire sa façon de faire des mathématiques, de les partager, de les transmettre, et j'espère que je saurai m'inspirer de son art.

Un grand merci à tous les membres du jury. Je remercie particulièrement Hee Oh et Bertrand Rémy d'avoir accepté la tâche de rapporteur. Frédéric Paulin a suivi mon travail depuis la rédaction de mon mémoire de maîtrise : cette thèse lui doit indéniablement beaucoup. Je remercie également Emmanuel Breuillard pour les nombreux groupes de travail qu'il a animés, où j'ai tant appris. Enfin, je suis très honorée de la présence d'Étienne Ghys dans le jury.

Je remercie chaleureusement Françoise Dal'Bo, Thomas Delzant, Olivier Guichard et Nicolas Monod pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail. Olivier Guichard et Antonin Guilloux ont été des grands frères mathématiques formidables, répondant toujours avec gentillesse à mes questions. Je remercie également, à des titres mathématiques divers, Nalini Anantharaman, Nicolas Bergeron, Pierre-Emmanuel Caprace, Yves de Cornulier, Cyril Demarche, Boubacar Diallo, Lucia Di Vizio, Zindine Djadli, Frédéric Haglund, Harald Helfgott, Toshiyuki Kobayashi, Pierre Pansu, Jean-François Quint, Benoît Stroh et Andrzej Zuk.

Je remercie Hee Oh pour son accueil à Brown University à l'automne 2008, et Dominique Hulin pour sa chaleureuse hospitalité durant ce même séjour. Merci à tous les membres des départements de mathématiques d'Orsay et de l'ENS qui m'ont aidée d'une manière ou d'une autre, sans oublier mes camarades doctorants. Enfin, un grand merci à Valérie Lavigne qui m'a facilité les formalités administratives.

Sur un plan plus personnel, j'aimerais remercier mes familles d'adoption parisiennes pour leur accueil, et tous mes proches pour leur soutien. Une pensée particulière à tous ceux qui, à travers la musique, me font partager de beaux moments.

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Introduction | 1 |
| 0.1 Origines géométriques du problème des quotients compacts | 2 |
| 0.1.1 Formes de Clifford-Klein des espaces riemanniens symétriques | 3 |
| 0.1.2 Variétés pseudo-riemanniennes complètes de courbure constante | 4 |
| 0.1.3 Variétés anti-de Sitter compactes | 6 |
| 0.1.4 Variétés riemanniennes holomorphes | 8 |
| 0.1.5 Quotients compacts de $SL_n(\mathbb{R})/SL_m(\mathbb{R})$ | 9 |
| 0.2 Principaux résultats de cette thèse | 11 |
| 0.2.1 Actions propres | 12 |
| 0.2.2 Actions propres et cocompactes | 14 |
| 0.2.3 Déformation de quotients compacts ultramétriques | 15 |
| 0.2.4 Variétés anti-de Sitter compactes de dimension trois | 18 |
| 0.2.5 Déformation d'actions propres dans un cadre général | 21 |
| 1 Préliminaires : décompositions de Cartan | 25 |
| 1.1 Racines restreintes et chambres de Weyl | 25 |
| 1.2 Immeubles de Bruhat-Tits | 26 |
| 1.3 Décompositions et projections de Cartan | 28 |
| 1.3.1 Cas réel | 28 |
| 1.3.2 Cas ultramétrique | 28 |
| 1.4 Interprétation géométrique | 29 |
| 1.4.1 Cas réel | 29 |
| 1.4.2 Cas ultramétrique | 31 |
| 1.4.3 Égalité et inégalités | 32 |
| 2 Actions propres sur les espaces homogènes réductifs de corang un | 35 |
| 2.1 Introduction | 35 |
| 2.1.1 Actions propres et projection de Cartan | 35 |
| 2.1.2 Une application à $(G \times G)/\Delta_G$ | 36 |
| 2.1.3 Une application à $SL_n(\mathbf{k})/SL_{n-1}(\mathbf{k})$ | 38 |
| 2.2 Actions propres en corang un | 38 |
| 2.2.1 Démonstration du théorème 2.1.1 | 38 |
| 2.2.2 Sous-groupes discrets de torsion en caractéristique nulle | 40 |
| 2.3 Application à $SL_n(\mathbf{k})/SL_{n-1}(\mathbf{k})$ | 41 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 2.4 | Actions bilatérales en rang un | 43 |
| 2.4.1 | Démonstration du théorème 2.1.2 | 43 |
| 2.4.2 | Groupes de torsion infinis en caractéristique non nulle | 43 |
| 2.4.3 | Quadriques de dimension trois sur un corps local | 44 |
| 3 | Une condition nécessaire et suffisante de cocompacité | 47 |
| 3.1 | Introduction | 47 |
| 3.2 | Rappels : isométries d'un arbre réel simplicial | 49 |
| 3.2.1 | Isométries hyperboliques et elliptiques | 49 |
| 3.2.2 | Bord de l'arbre | 50 |
| 3.2.3 | Groupes discrets sans torsion d'isométries | 50 |
| 3.3 | La condition de cocompacité | 51 |
| 3.3.1 | Points de ∂X associés à la décomposition de Cartan $G = KZ^+K$ | 52 |
| 3.3.2 | Démonstration de l'implication directe du théorème 3.3.1 | 54 |
| 3.3.3 | Démonstration de l'implication réciproque du théorème 3.3.1 | 55 |
| 3.3.4 | Le cas de rang supérieur | 56 |
| 3.4 | Existence de quotients compacts par des groupes discrets Zariski-denses | 57 |
| 3.4.1 | Un voisinage formé de morphismes admissibles | 57 |
| 3.4.2 | Déformation de groupes discrets d'isométries d'arbres | 58 |
| 3.4.3 | Démonstration de la proposition 3.1.2 | 60 |
| 4 | Déformation de quotients compacts ultramétriques | 63 |
| 4.1 | Introduction | 63 |
| 4.1.1 | Stratégie de démonstration | 64 |
| 4.1.2 | Un résultat complémentaire | 65 |
| 4.2 | Longueurs de translation et constantes de Lipschitz | 66 |
| 4.2.1 | Applications équivariantes affines par morceaux | 67 |
| 4.2.2 | Une constante de Lipschitz minimale | 67 |
| 4.2.3 | Arêtes f -maximales | 71 |
| 4.2.4 | Un lacet d'étirement maximal | 72 |
| 4.3 | Déformation de quotients compacts | 75 |
| 4.3.1 | Démonstration du théorème 4.1.3 | 75 |
| 4.3.2 | Démonstration du théorème 4.1.1 | 76 |
| 4.4 | Lien avec l'outre-espace | 77 |
| 4.4.1 | Rappels | 78 |
| 4.4.2 | Une distance asymétrique sur l'outre-espace | 78 |
| 4.4.3 | Quotients de longueurs de lacets | 80 |
| 4.4.4 | Lien avec la distance asymétrique de Thurston | 80 |
| 4.4.5 | Absence de morphisme admissible injectif d'image discrète | 81 |
| 5 | Variétés anti-de Sitter compactes de dimension trois | 83 |
| 5.1 | Introduction | 83 |
| 5.1.1 | Stratégie de démonstration | 84 |
| 5.1.2 | Spectre des longueurs | 85 |

| | | |
|-------|---|-----|
| 5.1.3 | Généralisation d'un résultat de Thurston | 86 |
| 5.1.4 | Déformation des variétés anti-de Sitter compactes de dimension trois | 86 |
| 5.1.5 | Plan du chapitre | 87 |
| 5.2 | Rappels sur la construction de Kirzbraun et Valentine | 88 |
| 5.2.1 | Prolongement "optimal" d'une application continue en un point | 89 |
| 5.2.2 | Majoration de la constante de Kirzbraun-Valentine | 91 |
| 5.2.3 | Fin de la démonstration du théorème de Kirzbraun-Valentine | 92 |
| 5.3 | Un raffinement de la construction de Kirzbraun et Valentine | 92 |
| 5.3.1 | Idée de la démonstration du théorème 5.3.2 | 93 |
| 5.3.2 | Remarques sur les constantes de Lipschitz locales | 94 |
| 5.3.3 | Démonstration de la proposition 5.3.4 | 95 |
| 5.3.4 | Démonstration de la proposition 5.3.5 | 99 |
| 5.3.5 | Démonstration du théorème 5.3.2 | 99 |
| 5.4 | Une droite géodésique d'étirement maximal | 100 |
| 5.4.1 | Une première réduction du problème | 101 |
| 5.4.2 | Un lemme-clé | 102 |
| 5.4.3 | Démonstration de la proposition 5.4.2 | 104 |
| 5.5 | Une condition nécessaire et suffisante d'admissibilité | 105 |
| 5.5.1 | Une application équivariante de constante de Lipschitz minimale | 106 |
| 5.5.2 | Cas où $\rho(\Gamma_0)$ admet zéro ou deux points fixes dans $\partial\mathbb{H}^2$ | 108 |
| 5.5.3 | Cas où $\rho(\Gamma_0)$ admet un unique point fixe dans $\partial\mathbb{H}^2$ | 110 |
| 5.6 | Longueurs de translation | 112 |
| 5.6.1 | Démonstration du corollaire 5.1.4 | 112 |
| 5.6.2 | Distances asymétriques sur l'espace de Teichmüller | 113 |
| 5.7 | Déformation des variétés anti-de Sitter compactes de dimension trois | 114 |
| 5.7.1 | Le corollaire 5.1.7 du point de vue des (G, X) -structures | 114 |
| 5.7.2 | Le corollaire 5.1.7 comme conséquence du théorème 5.1.1 | 115 |
| 5.8 | Appendice : rappels et calculs de géométrie hyperbolique | 117 |
| 5.8.1 | Un peu de trigonométrie hyperbolique | 117 |
| 5.8.2 | Divergence des géodésiques en courbure négative | 118 |
| 5.8.3 | Un passage à la limite | 118 |
| 5.8.4 | Une minoration uniforme | 119 |
| 5.8.5 | Quelques remarques sur les applications lipschitziennes | 120 |

6 Déformation d'actions propres sur des espaces homogènes réductifs sur un corps local **123**

| | | |
|-------|---|-----|
| 6.1 | Introduction | 123 |
| 6.1.1 | Déformation de quotients compacts dans le cas réel | 123 |
| 6.1.2 | Déformation d'actions propres dans le cas général | 125 |
| 6.1.3 | Traduction en termes de projection de Cartan | 126 |
| 6.1.4 | Idées des démonstrations | 126 |
| 6.2 | Sous-groupes paraboliques maximaux et représentations | 127 |
| 6.2.1 | Sous-groupes paraboliques maximaux | 127 |

| | | |
|-------|---|-----|
| 6.2.2 | Représentations de \mathbf{G} | 128 |
| 6.2.3 | Exemple de \mathbf{SL}_n | 129 |
| 6.3 | Dynamique dans les espaces projectifs | 129 |
| 6.3.1 | Proximalité dans les espaces projectifs et estimation de normes | 130 |
| 6.3.2 | Projection de Cartan selon les poids fondamentaux | 132 |
| 6.4 | Produits transverses | 133 |
| 6.4.1 | Transversalité dans L | 133 |
| 6.4.2 | Transversalité dans G | 137 |
| 6.5 | Projection de Cartan et déformations | 138 |
| 6.5.1 | Normes sur E et ses sous-espaces vectoriels | 139 |
| 6.5.2 | Norme de la projection sur E_{Δ_L} | 140 |
| 6.5.3 | Démonstration de la proposition 6.5.1 | 142 |
| 6.5.4 | Propreté et déformations | 145 |
| 6.6 | Application aux quotients compacts de $\mathrm{SO}(2n, 2)/\mathrm{U}(n, 1)$ | 146 |
| 6.6.1 | Réseaux arithmétiques cocompacts de $\mathrm{SO}(m, 1)$ | 147 |
| 6.6.2 | Déformations dans le cas séparant | 148 |
| 6.6.3 | Déformations dans le cas non séparant | 149 |

Bibliographie

151

Introduction

Cette thèse s'inscrit dans la problématique générale des quotients compacts d'espaces homogènes G/H par des sous-groupes discrets Γ de G . Ici G désigne par exemple un groupe de Lie linéaire réel et H un sous-groupe fermé de G . On demande que l'action de Γ sur G/H soit propre afin que le quotient $\Gamma \backslash G/H$ soit séparé. Cette condition impose de fortes restrictions sur Γ lorsque H n'est pas compact : il suffit pour s'en convaincre de considérer l'exemple de $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et du sous-groupe H des matrices unipotentes triangulaires supérieures, pour lequel tout groupe discret agissant proprement sur G/H est fini. On demande souvent aussi que l'action de Γ soit libre pour que $\Gamma \backslash G/H$ soit une variété. Cette seconde condition n'est pas très contraignante. En effet, si le groupe Γ agit proprement et cocompactement sur G/H , il est de type fini¹ donc admet un sous-groupe d'indice fini sans torsion d'après le lemme de Selberg [Sel]. Autrement dit, $\Gamma \backslash G/H$ admet un revêtement fini par une variété compacte.

La théorie des quotients compacts d'espaces homogènes trouve ses origines dans l'étude des groupes discrets d'isométries d'espaces riemanniens symétriques et dans celle des variétés pseudo-riemanniennes complètes de courbure constante. À la fin des années 1980, T. Kobayashi a initié l'étude générale des quotients compacts d'espaces homogènes réels G/H où G et H sont réductifs. Dans cette thèse, nous nous plaçons dans le cadre plus large des espaces homogènes réductifs sur des corps locaux, ce qui comprend aussi bien les espaces homogènes réductifs réels et complexes que les espaces homogènes réductifs p -adiques ou les espaces homogènes réductifs sur des corps de caractéristique non nulle de la forme $\mathbb{F}_q((t))$. Nous obtenons deux types de résultats.

D'une part, nous décrivons les sous-groupes discrets infinis de G qui agissent proprement sur G/H . Sachant que de tels sous-groupes n'existent pas lorsque G et H ont même rang relatif (*cf.* paragraphe 0.1.2), nous considérons au chapitre 2 le cas d'existence où H est "le plus gros possible", c'est-à-dire de corang un. Le théorème général 2.1.1 que nous obtenons permet en particulier de décrire les actions propres de groupes discrets sur les espaces homogènes de la forme $(G \times G)/\Delta_G$, où G est un groupe semi-simple connexe de rang relatif un sur un corps local et Δ_G la diagonale de $G \times G$ (théorème 2.1.2). De manière équivalente, nous décrivons les sous-groupes discrets de $G \times G$ qui agissent proprement sur G par multiplication à gauche et

1. Le groupe Γ est un quotient du groupe fondamental de l'espace compact $\Gamma \backslash G/H$ privé d'un voisinage ouvert du lieu de ramification, qui est de type fini.

à droite. Nous donnons au chapitre 3 une condition nécessaire et suffisante pour que de telles actions soient cocompactes (théorème 3.1.1). Comprendre les quotients compacts de G par des sous-groupes discrets de $G \times G$ s'avère intéressant du point de vue de la géométrie lorentzienne pour $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ (cf. paragraphe 0.1.3) et du point de vue de la géométrie riemannienne holomorphe pour $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ (cf. paragraphe 0.1.4). Pour $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ par exemple, nous précisons la description connue des variétés anti-de Sitter compactes de dimension 3 (corollaire 5.1.2) et apportons des informations supplémentaires sur le spectre des longueurs de leurs groupes fondamentaux (corollaire 5.1.4). Nos résultats concernent également des groupes ultramétriques comme $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$, ce qui nous permet de faire de la géométrie p -adique en décrivant par exemple les quotients compacts des quadriques de \mathbb{Q}_p^4 (théorème 3.1.1 et paragraphe 2.4.3).

D'autre part, nous nous intéressons à la déformation des quotients compacts d'espaces homogènes réductifs G/H . Dans tous les exemples connus, lorsque G/H admet des quotients compacts, il en admet des "standard", par des sous-groupes discrets de G qui sont des réseaux dans un sous-groupe réductif L de G agissant proprement et cocompactement sur G/H . Il est naturel de chercher à déformer ces sous-groupes dans G pour obtenir des quotients compacts non standard, plus "génériques". Par rigidité du rang supérieur, on se ramène au cas où L est de rang relatif un. Au chapitre 6, nous montrons que dans ce cas, si l'on déforme légèrement dans G des réseaux cocompacts sans torsion de L , ils restent discrets dans G et leur action sur G/H reste propre (théorème 6.1.3). De plus, on sait que leur action reste cocompacte si l'espace homogène G/H est réel ou complexe, ce qui nous permet d'obtenir de nouveaux exemples de quotients compacts d'espaces homogènes réductifs par des sous-groupes Zariski-denses (corollaire 6.1.2). Pour les espaces homogènes p -adiques de la forme $(G \times G)/\Delta_G$ où G est semi-simple de rang relatif un, nous établissons au chapitre 4 un résultat plus fort : si l'on déforme légèrement dans $G \times G$ un sous-groupe discret quelconque de $G \times G$ agissant librement, proprement et cocompactement sur G par multiplication à gauche et à droite, il reste discret dans $G \times G$ et son action sur G reste libre, propre et cocompacte (théorème 4.1.1). *Via* la théorie de Bruhat-Tits, c'est une conséquence d'un résultat général sur les groupes d'isométries d'arbres réels simpliciaux (proposition 4.2.1). Au chapitre 5 nous adaptons cette approche au cas de $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$: nous donnons une nouvelle démonstration de l'analogie pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ du théorème 4.1.1, sans utiliser la complétude des variétés anti-de Sitter compactes, et nous généralisons la conservation de la propriété à une classe plus grande de sous-groupes discrets de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ (corollaire 5.1.6). Nous nous appuyons pour cela sur l'étude du prolongement d'applications lipschitziennes équivariantes de \mathbb{H}^2 .

0.1 Origines géométriques du problème des quotients compacts

Voyons d'abord comment l'étude de certaines variétés riemanniennes, pseudo-riemanniennes ou riemanniennes holomorphes est liée à l'étude de quotients compacts

d'espaces homogènes. Ce faisant, nous présentons quelques développements récents et questions ouvertes qui motivent cette thèse. Il ne s'agit pas de dresser la liste exhaustive des résultats connus à ce jour ; le lecteur pourra consulter à ce sujet les articles de synthèse [KY] et [Ko6].

0.1.1 Formes de Clifford-Klein des espaces riemanniens symétriques

Dès la fin du dix-neuvième siècle s'est posée la question de classifier les variétés riemanniennes de courbure sectionnelle constante. En effet, suite aux travaux de Clifford de 1873 sur les plongements isométriques de tores plats dans l'espace projectif $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, Klein s'est demandé dès 1890 si l'on pouvait trouver toutes les surfaces de courbure de Gauss constante. Ce problème, généralisé en 1891 par Killing en dimension quelconque et appelé le problème des *formes de Clifford-Klein*, doit sa formulation moderne à Hopf en 1925. D'après les travaux de Killing et Hopf, les variétés riemanniennes connexes de dimension $n \geq 2$, géodésiquement complètes et de courbure sectionnelle constante nulle (resp. strictement positive, resp. strictement négative) sont, à une isométrie et à la renormalisation de la métrique près, les quotients de \mathbb{R}^n (resp. de \mathbb{S}^n , resp. de \mathbb{H}^n) par un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^n \rtimes O(n)$ (resp. de $O(n+1)$, resp. de $O(n,1)$) agissant librement et proprement sur \mathbb{R}^n (resp. sur \mathbb{S}^n , resp. sur \mathbb{H}^n). Ces variétés sont appelées respectivement formes de Clifford-Klein *euclidiennes*, *sphériques* et *hyperboliques*.

Parallèlement s'est développée, à la fin du dix-neuvième siècle, la théorie des pavages de l'espace affine euclidien \mathbb{R}^n , motivée par des questions de cristallographie. En 1911 et 1912, Bieberbach a posé les bases de la théorie des *groupes cristallographiques*, c'est-à-dire des groupes de symétries de pavages cocompacts de \mathbb{R}^n euclidien [Bie] ; son premier théorème affirme par exemple que tout groupe cristallographique de \mathbb{R}^n est une extension d'un groupe fini de rotations par un groupe de translations isomorphe à \mathbb{Z}^n . C'est Nowacki [Now] qui, en 1934, a mis en évidence le lien entre la théorie de Bieberbach et les formes de Clifford-Klein euclidiennes compactes : sachant que toute variété riemannienne compacte est complète d'après le théorème de Hopf et Rinow de 1931, les formes de Clifford-Klein euclidiennes compactes de dimension n ne sont autres que les quotients de \mathbb{R}^n par des groupes cristallographiques.

Les formes de Clifford-Klein euclidiennes, sphériques et hyperboliques sont des cas particuliers d'espaces riemanniens localement symétriques, c'est-à-dire de variétés riemanniennes dont le tenseur de courbure est invariant par transport parallèle ou, de manière équivalente, dont la symétrie géodésique en tout point est une isométrie locale, comme l'a remarqué É. Cartan à la fin des années 1920. En s'appuyant sur des idées d'Ehresmann, Borel et Lichnerowicz [BoL] ont montré en 1952 qu'un revêtement universel d'un espace riemannien localement symétrique est un espace riemannien (globalement) symétrique : ainsi, les espaces riemanniens localement symétriques compacts sont des quotients, ou *formes de Clifford-Klein*, d'espaces riemanniens symétriques.

Le problème de l'existence de formes de Clifford-Klein compactes des espaces riemanniens symétriques a été résolu en toute généralité par Borel [Bo1] en 1963. Depuis les travaux de Cartan, on savait que tout espace riemannien symétrique simplement connexe est le produit de ses composantes euclidienne, de type compact et de type non compact. Le problème précédent se ramenait donc à celui de l'existence de formes de Clifford-Klein compactes des espaces riemanniens symétriques de type non compact, ces derniers étant essentiellement des espaces homogènes de la forme G/K où G est un groupe de Lie semi-simple réel et K un sous-groupe compact maximal de G . Par compacité de K , le problème se ramenait finalement à la question de l'existence de réseaux cocompacts sans torsion des groupes de Lie semi-simples réels. Cette question a été résolue de manière arithmétique par Borel : suite aux travaux de Borel et Harish-Chandra [BHC] d'une part, Mostow et Tamagawa [MT] d'autre part, sur les points entiers des \mathbb{Q} -groupes algébriques, il lui a suffi d'établir en 1963 l'existence de certaines \mathbb{Q} -formes d'algèbres de Lie semi-simples réelles.

Notons que les formes de Clifford-Klein des espaces riemanniens symétriques ne sont pas toutes arithmétiques, du moins en ce qui concerne les formes de Clifford-Klein hyperboliques : des réseaux cocompacts non arithmétiques de $O(n, 1)$ ont été construits par Vinberg [Vin], puis Gromov et Piatetski-Shapiro [GPS] (*cf.* aussi l'appendice C de [Ma3]).

0.1.2 Variétés pseudo-riemanniennes complètes de courbure constante

Soient $p, q \in \mathbb{N}$ deux entiers. Rappelons que, tout comme les variétés riemanniennes, les variétés pseudo-riemanniennes de signature (p, q) admettent une unique connexion affine sans torsion dont le transport parallèle préserve la métrique pseudo-riemannienne ; cette *connexion de Levi-Civita* permet, exactement comme en géométrie riemannienne, de définir les notions de géodésique, de tenseur de courbure et de courbure sectionnelle. On dispose de trois espaces modèles de variétés pseudo-riemanniennes de signature (p, q) et de courbure sectionnelle constante : $\mathbb{R}^{p,q}$, $\mathbb{S}^{p,q}$ et $\mathbb{H}^{p,q}$. La variété $\mathbb{R}^{p,q} \simeq (\mathbb{R}^{p+q} \rtimes O(p, q))/O(p, q)$, de courbure constante nulle, n'est autre que \mathbb{R}^{p+q} muni de la métrique pseudo-riemannienne $g_{p,q}$ obtenue par translation de la forme quadratique $Q_{p,q}(x_1, \dots, x_{p+q}) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2$; son groupe d'isométries est $\mathbb{R}^{p+q} \rtimes O(p, q)$. La pseudo-sphère $\mathbb{S}^{p,q} \simeq O(p+1, q)/O(p, q)$, de courbure constante égale à 1, est la quadrique d'équation $Q_{p+1,q} = 1$ de $\mathbb{R}^{p+1,q}$, munie de la métrique pseudo-riemannienne induite par $g_{p+1,q}$; son groupe d'isométries est $O(p+1, q)$. Elle est difféomorphe à $\mathbb{S}^p \times \mathbb{R}^q$, donc simplement connexe dès que $p \geq 2$. Enfin, l'espace pseudo-hyperbolique $\mathbb{H}^{p,q} \simeq O(p, q+1)/O(p, q)$, de courbure constante égale à -1 , est la quadrique d'équation $Q_{p,q+1} = -1$ de $\mathbb{R}^{p,q+1}$, munie de la métrique pseudo-riemannienne induite par $g_{p,q+1}$; son groupe d'isométries est $O(p, q+1)$. Notons que $\mathbb{H}^{p,q}$ est difféomorphe à $\mathbb{S}^{q,p}$ par un simple échange de coordonnées dans \mathbb{R}^{p+q+1} . Pour $q = 0$ on retrouve bien les variétés riemanniennes modèles mentionnées ci-dessus : $\mathbb{R}^{p,0}$ est un espace euclidien, $\mathbb{S}^{p,0}$ est la sphère \mathbb{S}^p et $\mathbb{H}^{p,0}$ est formé de deux copies de l'espace hyperbolique \mathbb{H}^p . Pour $q = 1$ (cas lorentzien), on

trouve l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{p,1}$, l'espace de Sitter $dS^{p+1} = \mathbb{S}^{p,1}$ et l'espace anti-de Sitter $AdS^{p+1} = \mathbb{H}^{p,1}$; les variétés lorentziennes de courbure constante strictement positive (resp. strictement négative) sont appelées *variétés de Sitter* (resp. *variétés anti-de Sitter*).

Par analogie avec le cas riemannien, les variétés pseudo-riemanniennes connexes, géodésiquement complètes, de signature (p, q) pour $p \neq 1$ et $q \neq 1$ et de courbure sectionnelle constante nulle (resp. strictement positive, resp. strictement négative) sont, à une isométrie et à la renormalisation de la métrique près, les quotients de $\mathbb{R}^{p,q}$ (resp. de $\mathbb{S}^{p,q}$, resp. de $\mathbb{H}^{p,q}$) par un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^{p+q} \times O(p, q)$ (resp. de $O(p+1, q)$, resp. de $O(p, q+1)$) agissant librement et proprement sur $\mathbb{R}^{p,q}$ (resp. sur $\mathbb{S}^{p,q}$, resp. sur $\mathbb{H}^{p,q}$) (cf. [Wol])². Pour $p = 1$ (resp. $q = 1$) il suffit de remplacer $\mathbb{S}^{p,q} = O(p+1, q)/O(p, q)$ (resp. $\mathbb{H}^{p,q} = O(p, q+1)/O(p, q)$) par un revêtement universel $\tilde{\mathbb{S}}^{p,q} = \tilde{O}(p+1, q)/\tilde{O}(p, q)$ (resp. $\tilde{\mathbb{H}}^{p,q} = \tilde{O}(p, q+1)/\tilde{O}(p, q)$).

Pour tout couple (p, q) il existe bien sûr des variétés pseudo-riemanniennes complètes plates de signature (p, q) qui sont compactes, puisque le groupe \mathbb{Z}^{p+q} agit librement, proprement et cocompactement sur $\mathbb{R}^{p,q}$. Se pose alors la question de décrire ces variétés et leurs groupes fondamentaux. Comme généralisation du premier théorème de Bieberbach, Auslander [Aus] a proposé en 1964 que tout sous-groupe discret de $\mathbb{R}^n \rtimes GL_n(\mathbb{R})$ agissant proprement et cocompactement sur \mathbb{R}^n soit virtuellement résoluble; en particulier, toute variété pseudo-riemannienne complète, plate et compacte admettrait un revêtement fini dont le groupe fondamental est résoluble. La conjecture d'Auslander reste ouverte, même si des résultats partiels sont connus : elle a été démontrée par exemple pour les variétés lorentziennes plates compactes [GK], pour les variétés pseudo-riemanniennes complètes, plates et compactes de signature $(2, q)$ [AMS3] ou en dimension ≤ 6 [Tom], [AMS2]. La conjecture est mise en défaut si l'on remplace "virtuellement résoluble" par "virtuellement abélien" ou même "virtuellement nilpotent" (cf. [Abe]), ou bien si l'on supprime l'hypothèse de cocompacité, comme l'a proposé Milnor [Mil] : citons à ce sujet les célèbres contre-exemples de Margulis [Ma1], [Ma2].

Contrairement au cas plat, en courbure constante non nulle l'existence de variétés pseudo-riemanniennes complètes compactes de signature donnée n'a rien d'évident. Par exemple, Calabi et Markus [CM] ont démontré en 1962 que le groupe fondamental d'une variété de Sitter complète est toujours fini; en particulier, il n'existe pas de variété de Sitter complète compacte. En termes de groupes, cela se traduit par le fait que tout sous-groupe discret de $O(p+1, 1)$ agissant proprement sur $\mathbb{S}^{p,1} = O(p+1, 1)/O(p, 1)$ est fini. Wolf [Wol] a généralisé ce résultat aux sous-groupes discrets de $O(p+1, q)$ agissant proprement sur $\mathbb{S}^{p,q} = O(p+1, q)/O(p, q)$ pour $p \geq q$. Le *phénomène de Calabi-Markus* a été formalisé en 1989 par Kobayashi [Ko1], qui a démontré que pour tout groupe de Lie réductif réel G et tout sous-groupe fermé réductif H de même rang réel que G , les sous-groupes discrets de G agissant proprement sur G/H sont finis; en particulier, G/H n'admet pas de quotient compact, à moins d'être lui-même compact. Le résultat de Kobayashi est également une consé-

2. Pour $p = 0$ (resp. $q = 0$) il faut bien sûr remplacer $\mathbb{S}^{p,q}$ (resp. $\mathbb{H}^{p,q}$) par l'une de ses deux composantes connexes.

quence du *critère de propreté* établi par Benoist [Be1] en 1994, qui s'applique plus généralement aux groupes réductifs sur un corps local.

La conjecture générale est que l'espace homogène $\mathbb{S}^{p,q} = \mathrm{O}(p+1, q)/\mathrm{O}(p, q)$ (ou, de manière équivalente, l'espace homogène $\mathbb{H}^{q,p} = \mathrm{O}(q, p+1)/\mathrm{O}(q, p)$) admet un quotient compact si et seulement si le couple (p, q) appartient à la liste suivante [KY] :

1. $p = 0$ et $q \in \mathbb{N}$,
2. $p \in \mathbb{N}$ et $q = 0$,
3. $p = 1$ et $q \in 2\mathbb{N}$,
4. $p = 3$ et $q \in 4\mathbb{N}$,
5. $p = 7$ et $q = 8$.

Cette conjecture reste largement ouverte : à l'heure actuelle, l'absence de quotients compacts de $\mathbb{S}^{p,q}$ n'est connue que pour $p \geq q \geq 1$, pour $p + 1 = q$ impair ≥ 3 et pour pq impair (*cf.* [KY]).

0.1.3 Variétés anti-de Sitter compactes

La conjecture précédente stipule notamment qu'il existe des variétés anti-de Sitter compactes complètes de dimension n si et seulement si n est impair. Le fait qu'il n'existe pas de variété anti-de Sitter compacte complète de dimension paire est bien connu : les théorèmes de Gauss-Bonnet et de Poincaré-Hopf donneraient des valeurs contradictoires pour la caractéristique d'Euler d'une telle variété. D'autre part, Kulkarni [Kul] a fourni en 1981 les premiers exemples de variétés anti-de Sitter compactes complètes de dimension impaire en observant que l'espace anti-de Sitter $\mathbb{H}^{2m,1}$ fibre en cercles au-dessus de l'espace hyperbolique complexe $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^m = \mathrm{U}(m, 1)/(\mathrm{U}(m) \times \mathrm{U}(1))$ (*cf.* partie 6.6), ce dernier admettant des quotients compacts en tant qu'espace riemannien symétrique (*cf.* paragraphe 0.1.1). On obtient ainsi un plongement du groupe $\mathrm{U}(m, 1)$ dans $\mathrm{O}(2m, 2)$, et les variétés anti-de Sitter compactes construites par Kulkarni sont les quotients de $\mathbb{H}^{2m,1}$ par les réseaux cocompacts sans torsion de $\mathrm{U}(m, 1)$; de telles variétés sont dites *standard*.

Bien que l'analogie du théorème de Hopf-Rinow ne soit pas vrai en général pour les variétés pseudo-riemanniennes, Klingler [Kli] a montré en 1996 que toutes les variétés lorentziennes compactes de courbure constante sont complètes, généralisant un résultat de Carrière [Car] sur les variétés lorentziennes compactes plates. En particulier, il n'existe pas de variété de Sitter compacte, et les variétés anti-de Sitter compactes sont, à une isométrie et à la renormalisation de la métrique près, les quotients de la forme $\Gamma \backslash \tilde{\mathbb{H}}^{2m,1}$, où $m \geq 1$, où $\tilde{\mathbb{H}}^{2m,1} = \tilde{\mathrm{O}}(2m, 2)/\tilde{\mathrm{O}}(2m, 1)$ désigne un revêtement universel de $\mathbb{H}^{2m,1}$ et où Γ est un sous-groupe discret de $\tilde{\mathrm{O}}(2m, 2)$ agissant librement, proprement et cocompactement sur $\tilde{\mathbb{H}}^{2m,1}$. D'après les résultats de Kulkarni et Raymond [KR] pour $m = 1$ et de Zeghib [Zeg] pour $m \geq 2$, on peut se contenter de revêtements finis de $\mathbb{H}^{2m,1}$ à la place d'un revêtement universel. Les variétés anti-de Sitter compactes sont donc, à une isométrie et à la renormalisation de la métrique près, les revêtements finis des quotients compacts de $\mathbb{H}^{2m,1} = \mathrm{O}(2m, 2)/\mathrm{O}(2m, 1)$.

Les variétés anti-de Sitter compactes prennent des formes très différentes selon qu'elles sont de dimension 3 ou ≥ 5 . En effet, Zeghib a démontré en 1998 que pour $m \geq 2$ tout sous-groupe discret de $O(2m, 2)$ agissant librement, proprement et cocompactement sur $\mathbb{H}^{2m,1}$ est soit conjugué à un réseau cocompact de $U(m, 1)$, soit Zariski-dense dans $O(2m, 2)$ [Zeg]. Il a de plus conjecturé que la seconde situation ne se produit pas, c'est-à-dire que toutes les variétés anti-de Sitter compactes de dimension ≥ 5 sont standard [Zeg]; cette conjecture reste ouverte. Il existe par contre des variétés anti-de Sitter compactes de dimension 3 qui ne sont pas standard : les premiers exemples furent construits par Goldman [Gol] en 1985 en déformant des variétés standard. La possibilité de déformer des variétés standard en des variétés non standard n'existe qu'en dimension 3 (*cf.* paragraphe 6.1.1); elle est liée au fait que le groupe $O(2, 2)$ n'est pas quasi-simple, contrairement aux groupes $O(2m, 2)$ pour $m \geq 2$.

L'étude des variétés anti-de Sitter compactes de dimension 3 est particulièrement riche. Remarquons que l'espace anti-de Sitter $\mathbb{H}^{2,1}$ s'identifie à la variété $SL_2(\mathbb{R})$ munie de la métrique lorentzienne induite par sa forme de Killing (*cf.* [Sa2] par exemple); à des groupes finis près, son groupe d'isométries est $SL_2(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{R})$, qui agit sur $SL_2(\mathbb{R})$ par multiplication à gauche et à droite. En 1985, Kulkarni et Raymond ont décrit les groupes fondamentaux des variétés anti-de Sitter compactes de dimension 3 : à la permutation près des deux facteurs de $SL_2(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{R})$, les sous-groupes discrets sans torsion de $SL_2(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{R})$ agissant proprement et cocompactement sur $SL_2(\mathbb{R})$ sont des graphes de la forme

$$\Gamma_0^\rho = \{(\gamma, \rho(\gamma)), \gamma \in \Gamma_0\},$$

où Γ_0 est un réseau cocompact de $SL_2(\mathbb{R})$ et $\rho : \Gamma_0 \rightarrow SL_2(\mathbb{R})$ un morphisme de groupes. À Γ_0 fixé, tous les groupes Γ_0^ρ n'agissent pas proprement sur $SL_2(\mathbb{R})$: la propriété de l'action de Γ_0^ρ impose une restriction forte sur ρ , souvent appelée *admissibilité*. Le critère de propriété démontré en 1994 par Benoist [Be1] a permis d'exprimer l'admissibilité en termes d'une projection de Cartan de $SL_2(\mathbb{R})$ (voir plus loin). Pour tout réseau cocompact sans torsion Γ_0 de $SL_2(\mathbb{R})$ et tout morphisme admissible $\rho : \Gamma_0 \rightarrow SL_2(\mathbb{R})$, l'action libre et propre de Γ_0^ρ sur $SL_2(\mathbb{R})$ est toujours cocompacte par un argument de dimension cohomologique (*cf.* paragraphe 0.2.2). Ainsi, décrire les variétés anti-de Sitter compactes de dimension 3 se ramène essentiellement à un problème de représentations de groupes de surfaces : il s'agit de décrire, pour tout réseau cocompact sans torsion Γ_0 de $SL_2(\mathbb{R})$, l'ensemble des morphismes admissibles de Γ_0 dans $SL_2(\mathbb{R})$.

Remarquons d'abord qu'à Γ_0 fixé, l'ensemble des morphismes admissibles est ouvert dans $\text{Hom}(\Gamma_0, SL_2(\mathbb{R}))$. Pour le voir, une bonne approche est celle des (G, X) -structures (*cf.* paragraphe 5.7.1). Les variétés anti-de Sitter de dimension 3 sont les $(O(2, 2), \mathbb{H}^{2,1})$ -variétés, ou encore les $(SL_2(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{R}), SL_2(\mathbb{R}))$ -variétés. Le fait que l'ensemble des morphismes admissibles est ouvert dans $\text{Hom}(\Gamma_0, SL_2(\mathbb{R}))$ résulte alors du résultat de complétude de Klingler [Kli] et du fameux *principe d'Ehresmann*, qui affirme que si M est une variété compacte munie d'une (G, X) -structure d'holonomie $h \in \text{Hom}(\pi_1(M), G)$, tout morphisme $h' \in \text{Hom}(\pi_1(M), G)$ suffisamment proche de h

est l'holonomie d'une certaine (G, X) -structure sur M . Nous renvoyons au chapitre 5 pour plus de détails.

À la fin des années 1990, Salein [Sa2] a construit, pour certains réseaux co-compacts Γ_0 , des exemples de morphismes admissibles dans toutes les composantes connexes de l'espace $\text{Hom}(\Gamma_0, \text{PSL}_2(\mathbb{R}))$, hormis les deux composantes de nombre d'Euler extrémal. Ces dernières ne sont pas atteintes car un morphisme admissible ne peut être injectif d'image discrète; ceci résulte de la positivité de la distance asymétrique de Thurston sur l'espace de Teichmüller de la surface $\Gamma_0 \backslash \mathbb{H}^2$ (cf. [Sa2] et le chapitre 4). La non-connexité de l'ouvert des morphismes admissibles pose de nombreuses questions encore ouvertes à l'heure actuelle, par exemple le nombre de composantes connexes de cet ouvert.

0.1.4 Variétés riemanniennes holomorphes

Si M est une variété complexe, on appelle parfois *métrique riemannienne holomorphe* sur M un champ holomorphe de formes bilinéaires non dégénérées sur le fibré tangent TM . Comme pour les métriques riemanniennes ou pseudo-riemanniennes, à toute métrique riemannienne holomorphe sur M est associée une connexion de Levi-Civita complexe, qui permet de définir les notions de géodésique (holomorphe), de complétude géodésique (les géodésiques sont définies sur \mathbb{C} tout entier), de tenseur de courbure et de courbure sectionnelle. Pour tout entier $n \geq 1$, la sphère complexe

$$\mathbb{S}_{\mathbb{C}}^n = \{(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}, z_1^2 + \dots + z_{n+1}^2 = 1\} \simeq \text{O}(n+1, \mathbb{C})/\text{O}(n, \mathbb{C})$$

est naturellement munie d'une métrique riemannienne holomorphe complète de courbure constante non nulle, pour laquelle son groupe d'isométries est $\text{O}(n+1, \mathbb{C})$. Par analogie avec le cas pseudo-riemannien, les variétés complexes de dimension complexe $n \geq 2$ munies d'une métrique riemannienne holomorphe complète de courbure constante non nulle sont les quotients de $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}^n = \text{O}(n+1, \mathbb{C})/\text{O}(n, \mathbb{C})$ par un sous-groupe discret de $\text{O}(n+1, \mathbb{C})$ agissant librement et proprement sur $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}^n$.

On conjecture qu'il existe des variétés compactes complexes de dimension complexe n munies d'une métrique riemannienne holomorphe complète de courbure constante non nulle si et seulement si $n \in \{1, 3, 7\}$ [KY]. Le fait que la sphère $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}^1$ admette des quotients compacts est évident car elle s'identifie à \mathbb{C}^* . Pour $n = 7$ une preuve a été donnée par Kobayashi et Yoshino [KY] en utilisant l'action de groupes spinoriels. Enfin, pour $n = 3$ la situation est un analogue complexe de celle des variétés anti-de Sitter de dimension 3 : la sphère complexe $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}^3$ s'identifie à la variété $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ munie de la métrique lorentzienne induite par sa forme de Killing (cf. [Ghy]); son groupe d'isométries est $\text{SL}_2(\mathbb{C}) \times \text{SL}_2(\mathbb{C})$, agissant sur $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ par multiplication à gauche et à droite. On obtient des variétés compactes complexes de dimension 3 munies d'une métrique riemannienne holomorphe complète de courbure constante non nulle comme quotients de $\text{SL}_2(\mathbb{C})$, d'un seul côté, par un réseau cocompact sans torsion; ces variétés sont dites *standard*.

Comme dans le cas des variétés anti-de Sitter compactes de dimension 3, la première étape dans la description des variétés compactes complexes de dimension 3

munies d'une métrique riemannienne holomorphe complète de courbure constante non nulle consiste à décrire celles qui sont obtenues par déformation de variétés standard ; la question est ici plus difficile car l'on ne dispose pas de résultat analogue à la complétude de Klingler [Kli]. Autrement dit, étant donné un réseau cocompact sans torsion Γ_0 de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, on aimerait savoir si le groupe $\varphi(\Gamma_0)$ agit librement, proprement et cocompactement sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ pour tout morphisme de groupes $\varphi : \Gamma_0 \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ suffisamment proche du morphisme trivial $(i, 1)$; on note ici i l'inclusion naturelle de Γ_0 dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ et 1 le morphisme constant. Le groupe Γ_0 est localement rigide dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ d'après un résultat de Calabi, généralisé par Weil [We1]. Par conséquent, la question qui se pose est la suivante : étant donné un réseau cocompact sans torsion Γ_0 de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, le sous-groupe discret

$$\Gamma_0^\rho = \{(\gamma, \rho(\gamma)), \gamma \in \Gamma_0\}$$

de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ agit-il librement, proprement et cocompactement sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ pour tout morphisme de groupes $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ suffisamment proche de 1 ?

En 1995, Ghys [Ghy] a répondu affirmativement à cette question, et en a déduit un résultat intéressant concernant la déformation des structures complexes sur une variété compacte de la forme $M = \Gamma_0 \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ où Γ_0 est un réseau cocompact sans torsion de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Il a démontré que les structures complexes sur M proches de la structure naturelle sont celles qui sont obtenues en identifiant M avec le quotient de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ par un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ de la forme Γ_0^ρ pour un morphisme $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ proche de 1 . De plus, deux telles structures complexes sont biholomorphes si et seulement si les morphismes ρ correspondants sont conjugués par un élément de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

0.1.5 Quotients compacts de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_m(\mathbb{R})$

Terminons cette première partie d'introduction en évoquant le cas des espaces homogènes de la forme $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_m(\mathbb{R})$, où $n \geq m$. Ceux-ci sont naturellement munis d'une structure de variété pseudo-riemannienne de signature

$$\left(\frac{n(n+1) - m(m+1)}{2}, \frac{n(n-1) - m(m-1)}{2} \right)$$

(cf. [KY]), de courbure sectionnelle non constante.

La question de l'existence de quotients compacts de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_m(\mathbb{R})$ illustre la grande diversité des méthodes développées pour traiter le problème des quotients compacts. La conjecture générale est que pour tous entiers $n > m \geq 2$, l'espace homogène $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_m(\mathbb{R})$ n'admet pas de quotient compact.

Le premier résultat dans le sens de cette conjecture est l'absence de quotients compacts de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_m(\mathbb{R})$ pour $n > \lceil 3m/2 \rceil$ (où $\lceil \cdot \rceil$ désigne la partie entière supérieure), comme conséquence des travaux de Kobayashi [Ko2] de 1992. L'obstruction découverte par Kobayashi est en fait très générale, l'idée étant que lorsque G et H sont réductifs, l'existence de quotients compacts de G/H implique une certaine

forme de maximalité pour H . Plus précisément, supposons H stable par une involution de Cartan θ de G , fixons une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{a} de $\text{Lie}(G)$ associée à θ et notons W le groupe de Weyl correspondant. Kobayashi a montré que s’il existe un sous-groupe réductif G' de G , stable par θ , tel que $(\mathfrak{a} \cap \text{Lie}(G')) \subset W \cdot (\mathfrak{a} \cap \text{Lie}(H))$ et tel que l’espace symétrique de G' soit de dimension strictement supérieure à celui de H , alors G/H n’admet pas de quotient compact. Il suffit d’appliquer ceci à $G = \text{SL}_n(\mathbb{R})$, à $H = \text{SL}_m(\mathbb{R})$ et à $G' = \text{SO}(\lfloor m/2 \rfloor, n - \lfloor m/2 \rfloor)$, où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière.

Une autre approche au problème des quotients compacts de $\text{SL}_n(\mathbb{R})/\text{SL}_m(\mathbb{R})$ a été développée par Zimmer dans les cas où le centralisateur de $\text{SL}_m(\mathbb{R})$ dans $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ est “suffisamment gros”. Cette approche est liée aux travaux de Benoist et Labourie [BeL], qui ont montré en 1992 que pour tout groupe de Lie réel semi-simple connexe G et tout sous-groupe réductif connexe H de G , la non-compacité du centre de H implique l’absence de quotients compacts de G/H .³ En 1994, Zimmer [Zim] a prouvé que sous ces hypothèses, si H est non compact et si le centralisateur de H dans G contient un groupe de Lie quasi-simple connexe G' de rang réel ≥ 2 tel que tout morphisme de G' dans H soit trivial, alors G/H n’admet pas de quotient compact. Sa démonstration s’appuie sur des arguments de rigidité de cocycles en rang supérieur. On en déduit l’absence de quotients compacts de $\text{SL}_n(\mathbb{R})/\text{SL}_m(\mathbb{R})$ pour $n > 2m$. En collaboration avec Labourie et Mozes, Zimmer a ensuite amélioré ce résultat en remplaçant $n > 2m$ par $n \geq 2m$ [LMZ], puis par $n \geq m + 3$ [LZ].

Le cas difficile où $n = m + 1$ est impair a été traité par Benoist [Be1] en 1994 grâce à son critère de propreté, que nous énonçons précisément au paragraphe 2.2.1. Ce critère exprime la propreté de l’action d’un sous-groupe Γ de G sur G/H en termes d’une projection de Cartan de G . En utilisant ce critère et en étudiant l’ensemble des points fixes de l’involution d’opposition, Benoist a montré que pour n impair ≥ 3 , tout sous-groupe discret de $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ agissant proprement sur $\text{SL}_n(\mathbb{R})/\text{SL}_{n-1}(\mathbb{R})$ est virtuellement abélien ; on voit facilement que l’action d’un tel sous-groupe ne peut être cocompacte.

Les résultats mentionnés jusqu’ici concernent le plongement standard de $\text{SL}_m(\mathbb{R})$ dans $\text{SL}_n(\mathbb{R})$. En 1997, Margulis a introduit une nouvelle méthode permettant de démontrer l’absence de quotients compacts de $\text{SL}_n(\mathbb{R})/\alpha_n(\text{SL}_2(\mathbb{R}))$ pour le plongement $\alpha_n : \text{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \text{SL}_n(\mathbb{R})$ donné par la représentation irréductible de dimension n de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$. Sa méthode consiste, pour certains espaces homogènes G/H , à contrôler la décroissance de la restriction à H des coefficients des représentations unitaires sans vecteur invariant de G . Plus précisément, dans l’exemple de $\text{SL}_n(\mathbb{R})/\alpha_n(\text{SL}_2(\mathbb{R}))$ pour $n \geq 4$, Margulis prouve l’existence d’une application $f \in L^1(\alpha_n(\text{SL}_2(\mathbb{R})))$ telle que pour toute représentation unitaire (π, \mathcal{H}) de $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ sans vecteur invariant non trivial et pour tous vecteurs unitaires $v, w \in \mathcal{H}$ invariants par $\text{SO}(n)$, on ait $|\langle \pi(h)(v), w \rangle| \leq f(h)$ pour tout $h \in H$. Il en déduit que pour un sous-groupe discret Γ de $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ de covolume infini, le groupe $\alpha_n(\text{SL}_2(\mathbb{R}))$ ne peut agir proprement et cocompactement sur $\Gamma \backslash \text{SL}_n(\mathbb{R})$; par dualité, Γ ne peut agir proprement

3. Benoist et Labourie ont en fait montré que sous ces hypothèses, il n’existe pas même de variété compacte localement modelée sur G/H .

et cocompactement sur $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\alpha_n(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$. L'absence de quotients compacts de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\alpha_n(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$ en découle aisément.

En estimant lui aussi des vitesses de décroissance de coefficients de représentations unitaires, mais en procédant d'une manière différente de Margulis, Shalom [Sha] a retrouvé en 2000 l'absence de quotients compacts de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ pour $n \geq 4$ et pour le plongement standard de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Enfin, D. Constantine a annoncé cette année avoir redémontré ce résultat pour $n = 4$ en raffinant les méthodes de Zimmer.

Ainsi, les cas qui restent ouverts sont ceux de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_{n-1}(\mathbb{R})$ pour n pair ≥ 4 et de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_{n-2}(\mathbb{R})$ pour $n \geq 5$.

0.2 Principaux résultats de cette thèse

Nous avons vu en 0.1 l'intérêt géométrique de l'étude des quotients compacts d'espaces homogènes réels, en particulier des espaces homogènes de la forme $(G \times G)/\Delta_G$ pour un groupe de Lie semi-simple réel G de rang un, Δ_G désignant la diagonale de $G \times G$. En effet, nous avons vu que l'étude de certaines variétés lorentziennes ou complexes riemanniennes holomorphes se ramène à l'étude des sous-groupes discrets de $G \times G$ agissant librement, proprement et cocompactement sur G par multiplication à gauche et à droite pour $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Des problèmes géométriques analogues se posent dans le monde p -adique et motivent l'étude des quotients compacts d'espaces homogènes p -adiques, notamment des quotients compacts de $(G \times G)/\Delta_G$ pour un groupe semi-simple p -adique G de rang un. Pour $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ par exemple, on obtient ainsi les quotients compacts de la quadrique de \mathbb{Q}_p^4 d'équation $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 1$ (cf. paragraphe 2.4.3). Les chapitres 3 et 4 sont entièrement consacrés aux quotients compacts des groupes de rang un sur une extension finie de \mathbb{Q}_p (et plus généralement sur un corps local ultramétrique) et dans les chapitres 2 et 6, qui présentent des résultats plus généraux, nous traitons aussi bien le cas des espaces homogènes réels et complexes que celui des espaces homogènes ultramétriques.

Soit \mathbf{k} un corps local, c'est-à-dire \mathbb{R} , \mathbb{C} , un corps p -adique ou un corps de séries de Laurent formelles à coefficients dans un corps fini. Soit G un groupe de Lie réel linéaire semi-simple connexe de rang réel un ou l'ensemble des \mathbf{k} -points d'un \mathbf{k} -groupe algébrique semi-simple connexe de \mathbf{k} -rang un. Comme on l'a observé pour $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ avec l'exemple de certaines variétés anti-de Sitter ou riemanniennes holomorphes *standard*, l'espace homogène $(G \times G)/\Delta_G$ admet toujours des quotients compacts. En effet, pour tout réseau cocompact sans torsion Γ_0 de G , les groupes $\Gamma_0 \times \{1\}$ et $\{1\} \times \Gamma_0$ agissent librement, proprement et cocompactement sur $(G \times G)/\Delta_G$; de tels réseaux existent d'après Borel et Harder [BH] (cas de caractéristique nulle) et Lubotzky [Lub] (cas général), et d'après le lemme de Selberg [Sel]. Une grande partie de notre travail consiste à décrire les quotients compacts de $(G \times G)/\Delta_G$ et à étudier leurs déformations. Nous sommes guidés par les questions suivantes, que nous avons déjà entrevues plus haut pour d'autres espaces homogènes.

- Questions 0.2.1.** 1. Décrire les sous-groupes discrets sans torsion de $G \times G$ qui agissent proprement sur $(G \times G)/\Delta_G$.
2. Parmi ces sous-groupes, décrire ceux qui agissent cocompactement sur $(G \times G)/\Delta_G$.
3. Établir l'existence de déformations non triviales de tels sous-groupes dans $G \times G$.
4. Déterminer si une petite déformation d'un tel sous-groupe dans $G \times G$ préserve le caractère propre et cocompact de l'action sur $(G \times G)/\Delta_G$.
5. Étudier l'adhérence de Zariski des sous-groupes discrets sans torsion de $G \times G$ agissant proprement et cocompactement sur $(G \times G)/\Delta_G$.

Comme nous l'avons déjà évoqué dans un cadre général, les sous-groupes discrets de $G \times G$ sont loin de tous agir proprement sur $(G \times G)/\Delta_G$. En effet, comme Δ_G n'est pas compact, la situation est très différente de celle des espaces riemanniens symétriques par exemple. En 1994, Benoist [Be1] a montré, à travers son critère de propreté, que la propreté de l'action d'un sous-groupe de $G \times G$ sur $(G \times G)/\Delta_G$ se lit sur le facteur A^+ ou Z^+ d'une décomposition de Cartan de G .

Rappelons que si G est un groupe de Lie linéaire réel semi-simple connexe, il admet une *décomposition de Cartan* de la forme $G = KA^+K$, où K est un sous-groupe compact maximal de G et A^+ une chambre de Weyl d'un sous-groupe de Cartan de G . Ceci permet de définir une application continue, propre et surjective μ de G dans un certain cône convexe fermé E^+ de $E = \mathbb{R}^{\text{rang}_{\mathbb{R}}(G)}$, appelée *projection de Cartan*; lorsque G est de rang réel un, on a $E^+ = \mathbb{R}^+$. Par exemple, pour $G = \text{SL}_2(\mathbb{R})$ (resp. $G = \text{SL}_2(\mathbb{C})$) on peut prendre $K = \text{SO}(2)$ (resp. $K = \text{SU}(2)$) et $A^+ = \{\text{diag}(a, a^{-1}), a \geq 1\}$; le réel $\mu(g)$ est alors égal au logarithme de la plus grande valeur propre de ${}^t\bar{g}g$. Si G est l'ensemble des \mathbf{k} -points d'un groupe algébrique semi-simple connexe \mathbf{G} de \mathbf{k} -rang un sur un corps local ultramétrique \mathbf{k} , Bruhat et Tits [BT1] ont montré que G admet encore une décomposition de Cartan, qui en général est de la forme $G = KZ^+K$, où K est un sous-groupe compact maximal de G et Z^+ une chambre de Weyl du centralisateur d'un tore déployé maximal de G . Ceci permet de définir une projection de Cartan μ de G dans un certain cône convexe fermé E^+ de $E = \mathbb{R}^{\text{rang}_{\mathbf{k}}(\mathbf{G})}$, qui est continue et propre; lorsque G est de rang relatif un on a $E^+ = \mathbb{R}^+$ et $\mu(G)$ est un multiple réel de \mathbb{N} . Par exemple, pour $G = \text{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ on peut prendre $K = \text{SL}_2(\mathbb{Z}_p)$ et $Z^+ = A^+ = \{\text{diag}(a, a^{-1}), |a|_p \geq 1\}$; on a alors $\mu(\text{diag}(a, a^{-1})) = 2|v_p(a)|$, où $v_p : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{Z}$ désigne la valuation p -adique.

Rappelons encore que tout groupe de Lie linéaire réel semi-simple connexe est la composante neutre (pour la topologie réelle) de l'ensemble des \mathbb{R} -points d'un groupe algébrique réel semi-simple connexe. Aussi pouvons-nous nous contenter d'énoncer les résultats pour les groupes algébriques sur un corps local; les énoncés restent valables pour les groupes de Lie linéaires réels.

0.2.1 Actions propres

Au chapitre 2 nous répondons à la question 0.2.1.1 par le résultat suivant.

Théorème 0.2.2 (chapitre 2). Soient \mathbf{k} un corps local, G l'ensemble des \mathbf{k} -points d'un \mathbf{k} -groupe algébrique semi-simple connexe \mathbf{G} de \mathbf{k} -rang un, Δ_G la diagonale de $G \times G$ et $\mu : G \rightarrow \mathbb{R}^+$ une projection de Cartan de G . À la permutation près des deux facteurs de $G \times G$, les sous-groupes discrets sans torsion de $G \times G$ agissant proprement sur $(G \times G)/\Delta_G$ sont les graphes de la forme

$$\Gamma_0^\rho = \{(\gamma, \rho(\gamma)), \gamma \in \Gamma_0\},$$

où Γ_0 est un sous-groupe discret de G et $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$ un morphisme de groupes admissible, au sens où pour tout $R > 0$ on a $\mu(\rho(\gamma)) \leq \mu(\gamma) - R$ pour presque tout $\gamma \in \Gamma_0$.

Ce résultat avait déjà été démontré pour $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ par Kulkarni et Raymond [KR], mais sans la condition sur ρ , qui est due à Salein [Sa2] dans ce cas. Kobayashi [Ko3] a ensuite considéré le cas des groupes réels de rang un en général : il a montré que tout sous-groupe discret sans torsion de $G \times G$ agissant proprement sur $(G \times G)/\Delta_G$ est un graphe, et a posé la question de la discrétude d'une des projections sur G d'un tel sous-groupe. Le théorème 0.2.2 répond affirmativement à la question de Kobayashi et généralise son résultat à tous les corps locaux.

La condition d'admissibilité sur ρ signifie que l'ensemble $(\mu \times \mu)(\Gamma)$ est essentiellement situé sous la diagonale de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ (à un nombre fini de points près) et qu'il "s'éloigne de la diagonale à l'infini".

On déduit du théorème 0.2.2 quelques exemples très simples de sous-groupes discrets de $G \times G$ qui agissent proprement sur $(G \times G)/\Delta_G$ et dont les deux projections sur G sont non triviales.

Exemples 0.2.3. Soient Γ_0 un sous-groupe discret sans torsion de G et $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$ un morphisme de groupes. Le groupe $\Gamma_0^\rho = \{(\gamma, \rho(\gamma)), \gamma \in \Gamma_0\}$ agit proprement sur $(G \times G)/\Delta_G$ dès que l'une des conditions suivantes est vérifiée :

1. le groupe $\rho(\Gamma_0)$ est borné dans G ,
2. Γ_0 est engendré par un élément $a \in A^+$ et $\rho(a) = a^m$, où $m \geq 2$,
3. Γ_0 est engendré par un élément $a \in A^+$ et $\rho(\Gamma_0)$ est unipotent.

Notons que la description donnée par le théorème 0.2.2 est spécifique au rang un. En effet, si \mathbf{G} est de \mathbf{k} -rang ≥ 2 , il existe toujours des sous-groupes discrets de $G \times G$ agissant proprement sur $(G \times G)/\Delta_G$ qui sont des produits de deux sous-groupes infinis de G (cf. [Ko3] et les paragraphes 2.1.2 et 3.3.4); en particulier, ces sous-groupes sont loin d'être des graphes !

Pour démontrer le théorème 0.2.2, nous établissons le résultat plus général suivant sur les espaces homogènes réductifs de corang un.

Théorème 0.2.4 (chapitre 2). Soient \mathbf{k} un corps local, G l'ensemble des \mathbf{k} -points d'un \mathbf{k} -groupe algébrique semi-simple connexe \mathbf{G} et H l'ensemble des \mathbf{k} -points d'un \mathbf{k} -sous-groupe algébrique réductif connexe \mathbf{H} de \mathbf{G} tel que $\mathrm{rang}_{\mathbf{k}}(\mathbf{H}) = \mathrm{rang}_{\mathbf{k}}(\mathbf{G}) - 1$. Soient $\mu : G \rightarrow E^+$ une projection de Cartan, C_H le cône asymptote à $\mu(H)$ et

$\iota : E^+ \rightarrow E^+$ l'involution d'opposition. Pour tout sous-groupe discret Γ de G agissant proprement sur G/H et qui n'est pas un groupe de torsion, il existe une composante connexe \mathcal{C} de $E^+ \setminus C_H$ telle que $\mu(\gamma) \in \mathcal{C} \cup \iota(\mathcal{C})$ pour presque tout $\gamma \in \Gamma$ et telle que $\iota(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ si Γ n'est pas virtuellement monogène.

Rappelons que l'involution d'opposition ι est définie par $\mu(g^{-1}) = \iota(\mu(g))$ pour tout $g \in G$. Le cône asymptote C_H est le sous-cône vectoriel de E^+ engendré par les limites de suites $(\mu(h_n)/\|\mu(h_n)\|)_{n \in \mathbb{N}}$, où $(h_n) \in H^{\mathbb{N}}$ et où $\|\mu(h_n)\| \rightarrow +\infty$. Comme $\text{rang}_{\mathbf{k}}(\mathbf{H}) = \text{rang}_{\mathbf{k}}(\mathbf{G}) - 1$, le cône C_H sépare E^+ en un nombre fini de composantes connexes permutées par ι (cf. paragraphe 2.2.1).

Le théorème 0.2.4 nous permet de retrouver le résultat suivant, dû à Benoist [Be1].

Corollaire 0.2.5 (chapitre 2). *Si $n \geq 3$ est un entier impair, tout sous-groupe discret de $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ agissant proprement sur $\text{SL}_n(\mathbb{R})/\text{SL}_{n-1}(\mathbb{R})$ est virtuellement abélien.*

Nous affinons en fait le résultat de Benoist en démontrant que les sous-groupes de $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ agissant proprement sur $\text{SL}_n(\mathbb{R})/\text{SL}_{n-1}(\mathbb{R})$ pour n impair sont virtuellement monogènes. Une conséquence du corollaire 0.2.5 est l'absence de quotients compacts de $\text{SL}_n(\mathbb{R})/\text{SL}_{n-1}(\mathbb{R})$ pour n impair ≥ 3 , que nous avons déjà mentionnée au paragraphe 0.1.5.

0.2.2 Actions propres et cocompactes

Dans les chapitres 3 et 4 nous considérons à nouveau les quotients compacts des espaces homogènes $(G \times G)/\Delta_G$ où G est semi-simple de rang relatif un, mais en nous plaçant spécifiquement sur un corps local ultramétrique. Comme nous l'avons déjà mentionné, l'une de nos motivations est le fait que pour $G = \text{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$, l'espace homogène $(G \times G)/\Delta_G$ s'identifie à la quadrique de \mathbb{Q}_p^4 d'équation $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 1$. Cette dernière est la seule quadrique de \mathbb{Q}_p^4 dont la description des quotients compacts n'était pas encore connue (cf. paragraphe 2.4.3).

Au chapitre 3 nous répondons à la question 0.2.1.2 en montrant que sous les hypothèses du théorème 0.2.2 et pour Γ_0 de type fini, le quotient $\Gamma_0^{\rho} \backslash (G \times G)/\Delta_G$ est compact si et seulement si le quotient $\Gamma_0 \backslash G$ l'est (théorème 3.3.1). Nous obtenons ainsi la description suivante.

Théorème 0.2.6 (chapitre 3). *Soient \mathbf{k} un corps local ultramétrique, G l'ensemble des \mathbf{k} -points d'un \mathbf{k} -groupe algébrique semi-simple connexe de \mathbf{k} -rang un, Δ_G la diagonale de $G \times G$ et $\mu : G \rightarrow \mathbb{R}^+$ une projection de Cartan de G . À la permutation près des deux facteurs de $G \times G$, les sous-groupes discrets de type fini sans torsion de $G \times G$ agissant proprement et cocompactement sur $(G \times G)/\Delta_G$ sont les graphes de la forme*

$$\Gamma_0^{\rho} = \{(\gamma, \rho(\gamma)), \gamma \in \Gamma_0\},$$

où Γ_0 est un réseau cocompact sans torsion de G et $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$ un morphisme de groupes admissible.

Pour $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , le théorème 0.2.6 est également vrai, par un argument de dimension cohomologique développé par Kobayashi [Ko1] d'après des idées de Serre. Plus précisément, Kobayashi a montré que si G est un groupe de Lie réel réductif, H un sous-groupe fermé réductif de G et Γ un sous-groupe discret virtuellement sans torsion de G agissant proprement sur G/H , alors Γ agit cocompactement sur G/H si et seulement si l'on a

$$\mathrm{vcd}_{\mathbb{R}}(\Gamma) = \dim(X_G) - \dim(X_H),$$

où $\mathrm{vcd}_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ désigne la dimension cohomologique virtuelle de Γ et $\dim(X_G)$ (resp. $\dim(X_H)$) la dimension de l'espace symétrique de G (resp. de H). Rappelons que pour tout groupe Γ , la dimension cohomologique (réelle) de Γ est par définition la borne supérieure des entiers $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels il existe un $\mathbb{R}[\Gamma]$ -module M vérifiant $H^n(\Gamma, M) \neq \{0\}$. Si Γ est virtuellement sans torsion, tous ses sous-groupes d'indice fini sans torsion ont même dimension cohomologique; on note $\mathrm{vcd}_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ cette dimension cohomologique, appelée dimension cohomologique virtuelle de Γ . Le résultat de Kobayashi s'applique aux sous-groupes discrets Γ qui sont de type fini, car ceux-ci sont virtuellement sans torsion d'après le lemme de Selberg [Sel].

L'argument de dimension cohomologique ci-dessus ne s'applique pas lorsque \mathbf{k} est ultramétrique. Dans ce cas en effet, tout sous-groupe discret sans torsion de G est libre, donc de dimension cohomologique un [Se2]. Pour démontrer le théorème 0.2.6, nous étudions au chapitre 3 l'action de Γ_0 sur l'arbre de Bruhat-Tits de G , qui est un arbre simplicial biparti sur lequel G agit proprement par isométries, avec un domaine fondamental compact.

Le théorème 0.2.6 nous permet de démontrer le résultat suivant, en réponse à la question 0.2.1.5 et en complément des exemples 0.2.3.

Proposition 0.2.7 (chapitre 3). *Soient \mathbf{k} un corps local ultramétrique, G l'ensemble des \mathbf{k} -points d'un \mathbf{k} -groupe algébrique semi-simple connexe de \mathbf{k} -rang un et Δ_G la diagonale de $G \times G$. Il existe des sous-groupes discrets Γ de $G \times G$ agissant librement, proprement et cocompactement sur $(G \times G)/\Delta_G$ et qui sont Zariski-denses dans $G \times G$. On peut de plus choisir Γ de telle sorte qu'aucune de ses projections naturelles sur G ne soit bornée.*

0.2.3 Déformation de quotients compacts ultramétriques

Au chapitre 4, nous nous plaçons sur un corps local ultramétrique comme au chapitre 3, et nous montrons que de petites déformations préservent la propriété des actions décrites par le théorème 0.2.2 pour des groupes discrets de type fini sans torsion.

Théorème 0.2.8 (chapitre 4). *Soient \mathbf{k} un corps local ultramétrique, G l'ensemble des \mathbf{k} -points d'un \mathbf{k} -groupe algébrique semi-simple connexe de \mathbf{k} -rang un et Γ un sous-groupe discret de type fini sans torsion de $G \times G$ agissant proprement sur $(G \times G)/\Delta_G$. Il existe un voisinage $\mathcal{U} \subset \mathrm{Hom}(\Gamma, G \times G)$ de l'inclusion naturelle formé de morphismes injectifs et tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{U}$, le groupe $\varphi(\Gamma)$ soit discret dans $G \times G$ et agisse proprement sur $(G \times G)/\Delta_G$.*

Notons que les groupes discrets Γ du théorème 0.2.8 sont libres puisque ce sont des graphes décrits par le théorème 0.2.2 et que tout sous-groupe discret sans torsion de G est libre lorsque \mathbf{k} est ultramétrique. Ils admettent donc des déformations non triviales dans $G \times G$: il suffit de déformer indépendamment chaque élément d'une partie génératrice libre. Ceci répond en particulier à la question 0.2.1.3 lorsque \mathbf{k} est ultramétrique.

En utilisant le théorème 0.2.6 et le fait qu'après une déformation suffisamment petite tout réseau cocompact sans torsion de G reste un réseau cocompact sans torsion, on obtient le résultat suivant, qui répond à la question 0.2.1.4.

Corollaire 0.2.9 (chapitre 4). *Sous les hypothèses du théorème 0.2.8, si Γ agit proprement et cocompactement sur $(G \times G)/\Delta_G$, il existe un voisinage $\mathcal{U} \subset \text{Hom}(\Gamma, G \times G)$ de l'inclusion naturelle formé de morphismes injectifs et tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{U}$, le groupe $\varphi(\Gamma)$ soit discret dans $G \times G$ et agisse proprement et cocompactement sur $(G \times G)/\Delta_G$.*

L'étape principale de la démonstration du théorème 0.2.8 consiste à prouver que pour tout sous-groupe discret de type fini sans torsion Γ_0 de G , l'ensemble des morphismes admissibles est ouvert dans $\text{Hom}(\Gamma_0, G)$. Lorsque Γ_0 est un réseau cocompact sans torsion de G , c'est l'analogie ultramétrique du résultat mentionné à la fin du paragraphe 0.1.3. Nous démontrons en fait le résultat plus précis suivant.

Théorème 0.2.10 (chapitre 4). *Soient \mathbf{k} un corps local ultramétrique, G l'ensemble des \mathbf{k} -points d'un \mathbf{k} -groupe algébrique semi-simple connexe de \mathbf{k} -rang un et Γ_0 un sous-groupe discret de type fini sans torsion de G . Pour tout morphisme de groupes $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$, notons $C_\rho^\mu \geq 0$ la borne inférieure des réels $C \geq 0$ tels que l'ensemble $\{\mu(\rho(\gamma)) - C\mu(\gamma), \gamma \in \Gamma_0\} \subset \mathbb{R}$ soit majoré.*

1. *Il existe une partie finie F de $\Gamma_0 \setminus \{1\}$ telle que pour tout morphisme $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$ on ait*

$$C_\rho^\mu = \sup_{\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}} \frac{\lambda(\rho(\gamma))}{\lambda(\gamma)} = \max_{\gamma \in F} \frac{\lambda(\rho(\gamma))}{\lambda(\gamma)},$$

où $\lambda : G \rightarrow \mathbb{R}^+$ est la longueur de translation de G sur son arbre de Bruhat-Tits.

2. *Un morphisme $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$ est admissible si et seulement si $C_\rho^\mu < 1$.*

Rappelons que pour toute isométrie $g \in \text{Isom}(X)$ d'un arbre réel simplicial X , la longueur de translation de g sur X est définie par

$$\lambda(g) = \inf_{x \in X} d(x, g \cdot x) \geq 0.$$

L'application $\lambda : \text{Isom}(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$ est continue pour la topologie compacte-ouverte. Pour $G = \text{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ par exemple, l'arbre de Bruhat-Tits X de G est un arbre infini régulier de valence $p+1$ et la longueur de translation $\lambda(g)$ sur X d'un élément $g \in G$ est la valeur absolue (réelle) de la valuation p -adique du quotient des deux valeurs propres

de g . Notons que tout groupe discret sans torsion Γ_0 d'isométries d'un arbre réel simplicial X agit librement sur X , ce qui implique $\lambda(\gamma) > 0$ pour tout $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$.

Le théorème 0.2.10 dit que l'admissibilité d'un morphisme $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$ est déterminée par un nombre fini de conditions ouvertes; ceci prouve que l'ensemble des morphismes admissibles est ouvert dans $\text{Hom}(\Gamma_0, G)$.

Ce théorème est un cas particulier d'un résultat plus général que nous démontrons pour les groupes d'isométries d'arbres réels simpliciaux (théorème 4.3.1). Notre preuve consiste à étudier le lien entre les constantes de Lipschitz de certaines applications équivariantes entre deux arbres réels simpliciaux et certains quotients de longueurs de translation d'isométries de ces arbres. Plus précisément, nous démontrons le résultat suivant.

Proposition 0.2.11 (chapitre 4). *Soient X et X' deux arbres réels simpliciaux de valence ≥ 2 , soit Γ_0 un sous-groupe discret sans torsion de $\text{Isom}(X)$ tel que le quotient $\Gamma_0 \backslash X$ soit un graphe fini, et soit $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \text{Isom}(X')$ un morphisme de groupes.*

1. *Il existe une application ρ -équivariante $f : X \rightarrow X'$ qui est lipschitzienne. La borne inférieure $C_\rho \geq 0$ des constantes de Lipschitz de telles applications est atteinte.*
2. *Fixons un point $x_0 \in X$ et soit F le sous-ensemble fini de $\Gamma_0 \setminus \{1\}$ formé des éléments γ tels que $d(x_0, \gamma \cdot x_0) \leq 4L_0$, où L_0 désigne la longueur totale des arêtes de $\Gamma_0 \backslash X$. Pour toute application ρ -équivariante et C_ρ -lipschitzienne $f : X \rightarrow X'$, il existe $\gamma \in F$ tel que f soit affine de constante C_ρ sur l'axe de translation de γ dans X . On a*

$$\sup_{\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}} \frac{\lambda(\rho(\gamma))}{\lambda(\gamma)} = \max_{\gamma \in F} \frac{\lambda(\rho(\gamma))}{\lambda(\gamma)} = C_\rho.$$

Rappelons qu'une application $f : X \rightarrow X'$ est dite ρ -équivariante si $f(\gamma \cdot x) = \rho(\gamma) \cdot f(x)$ pour tout $\gamma \in \Gamma_0$ et tout $x \in X$.

Dans le cas particulier où ρ est injectif d'image discrète et cocompacte, la proposition 0.2.11 implique l'existence d'une "distance asymétrique" sur l'*oultre-espace* OS_n de rang n égal au rang du groupe libre Γ_0 , ainsi que l'équivalence entre deux définitions différentes de cette distance asymétrique. Rappelons que OS_n est défini comme un ensemble de classes d'équivalence de graphes métriques connexes finis normalisés et marqués par un groupe libre \mathbb{F}_n à n générateurs (*cf.* paragraphe 4.4.1). La distance asymétrique sur OS_n que nous venons de mentionner est un analogue de la distance asymétrique de Thurston sur l'espace de Teichmüller (*cf.* paragraphe 4.4.4).

Nous déduisons de la proposition 0.2.11 un résultat général sur les isométries d'arbres réels simpliciaux (corollaire 4.4.3) qui, dans le cadre des quotients compacts de $(G \times G)/\Delta_G$, s'énonce de la manière suivante.

Corollaire 0.2.12 (chapitre 4). *Soient \mathbf{k} un corps local ultramétrique, G l'ensemble des \mathbf{k} -points d'un \mathbf{k} -groupe algébrique semi-simple connexe de \mathbf{k} -rang un et Γ_0 un réseau cocompact sans torsion de G . Il n'existe pas de morphisme de groupes admissible $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$ qui soit injectif d'image discrète.*

Ceci fait écho à l'absence de morphisme admissible dans les composantes connexes de $\text{Hom}(\Gamma_0, \text{SL}_2(\mathbb{R}))$ de nombre d'Euler extrémal lorsque Γ_0 est un réseau cocompact sans torsion de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ (cf. paragraphe 0.1.3).

0.2.4 Variétés anti-de Sitter compactes de dimension trois

Au chapitre 5 nous adaptons les idées du chapitre 4 au cas de $G = \text{SL}_2(\mathbb{R})$. Par analogie avec le point 2 du théorème 0.2.10, nous démontrons le résultat suivant.

Théorème 0.2.13 (chapitre 5). *Posons $G = \text{SL}_2(\mathbb{R})$, soient $\mu : G \rightarrow \mathbb{R}^+$ une projection de Cartan et Γ_0 un sous-groupe convexe cocompact de G . Un morphisme de groupes $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$ est admissible si et seulement s'il existe des constantes $C < 1$ et $C' \geq 0$ telles que $\mu(\rho(\gamma)) \leq C\mu(\gamma) + C'$ pour tout $\gamma \in \Gamma_0$.*

Rappelons qu'un sous-groupe Γ_0 de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ est dit *convexe cocompact* s'il est discret, infini, non élémentaire, et s'il agit cocompactement sur l'enveloppe convexe $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$ de son ensemble limite dans le plan hyperbolique \mathbb{H}^2 . Cette notion généralise celle de réseau cocompact de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$.

Dans le cas où Γ_0 est un réseau cocompact de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$, l'existence d'une constante $C < 1$ comme dans le théorème 0.2.13 avait été conjecturée par Salein [Sa2] en 2000. Nous précisons ainsi la description des variétés anti-de Sitter qui était connue jusqu'à présent, suite aux travaux de Kulkarni et Raymond [KR], Klingler [Kli] et Salein [Sa2].

Corollaire 0.2.14. *Soit $\mu : \text{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ une projection de Cartan. Les variétés anti-de Sitter compactes de dimension 3 sont, à une isométrie, à la renormalisation de la métrique, à un quotient fini et à un revêtement fini près, les quotients de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ par un sous-groupe discret de $\text{SL}_2(\mathbb{R}) \times \text{SL}_2(\mathbb{R})$ de la forme*

$$\Gamma_0^\rho = \{(\gamma, \rho(\gamma)), \gamma \in \Gamma_0\},$$

où Γ_0 est un réseau cocompact sans torsion de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ et $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{R})$ un morphisme de groupes pour lequel il existe des constantes $C < 1$ et $C' \geq 0$ telles que pour tout $\gamma \in \Gamma_0$ on ait

$$\mu(\rho(\gamma)) \leq C\mu(\gamma) + C'.$$

Pour démontrer le théorème 0.2.13, nous fixons un sous-groupe convexe cocompact Γ_0 de $G = \text{SL}_2(\mathbb{R})$ et un morphisme de groupes $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$, et nous étudions les applications lipschitziennes ρ -équivariantes de $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$ dans \mathbb{H}^2 . Nous remplaçons ainsi les arbres de Bruhat-Tits du chapitre 4 par l'espace symétrique de $G = \text{SL}_2(\mathbb{R})$.

La proposition 0.2.11 ne se transpose pas telle quelle à $G = \text{SL}_2(\mathbb{R})$. Pour commencer, il n'existe pas toujours d'application ρ -équivariante $f : \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ de constante de Lipschitz minimale. Cependant c'est le cas la plupart du temps, à savoir dès que $\rho(\Gamma_0)$ est Zariski-dense dans G , ou borné, ou encore virtuellement abélien mais non virtuellement unipotent (lemme 5.5.1). Plaçons-nous dans cette situation et fixons une application ρ -équivariante $f : \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ de constante de Lipschitz

minimale $C_\rho \geq 0$. Contrairement au cas des groupes ultramétriques, il n'existe pas non plus toujours d'élément hyperbolique $\gamma \in \Gamma_0$ tel que f soit affine de constante C_ρ sur l'axe de translation de γ . Cependant, nous démontrons le résultat suivant.

Théorème 0.2.15 (chapitre 5). *Soit Γ_0 un sous-groupe convexe cocompact de $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, soit $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$ un morphisme de groupes et soit $f : \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ une application lipschitzienne ρ -équivariante de constante de Lipschitz C_ρ minimale. Si $C_\rho \geq 1$, il existe une droite géodésique de $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$ sur laquelle f est affine de constante C_ρ .*

La démonstration du théorème 0.2.15 fait appel à des techniques de prolongement d'applications lipschitziennes de \mathbb{H}^2 . Nous affinons des résultats anciens de Kirzbraun [Kir] et Valentine [Val] pour contrôler la constante de Lipschitz *locale* de tels prolongements (théorème 5.3.2).

Le théorème 0.2.15 implique facilement que s'il existe une application lipschitzienne ρ -équivariante $f : \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ de constante de Lipschitz minimale $C_\rho \geq 1$, alors ρ n'est pas admissible. C'est le cas par exemple si Γ_0 est cocompact dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et ρ injectif d'image discrète (cf. [Thu]); nous avons déjà mentionné cette absence de morphisme admissible injectif d'image discrète pour Γ_0 cocompact au paragraphe 0.1.3.

Nous en déduisons le théorème 0.2.13 en traitant séparément le cas où $\rho(\Gamma_0)$ admet un unique point fixe dans $\partial\mathbb{H}^2$, c'est-à-dire où $\rho(\Gamma_0)$ est soit virtuellement unipotent, soit résoluble mais non virtuellement abélien. Pour traiter ce cas, nous utilisons un résultat démontré au chapitre 6 (proposition 6.5.1), qui nous permet d'établir les deux exemples suivants.

Exemples 0.2.16. *Soient Γ_0 un sous-groupe convexe cocompact de $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$ un morphisme de groupes.*

1. *Si $\rho(\Gamma_0)$ est unipotent, alors ρ est toujours admissible.*
2. *Si $\rho(\Gamma_0)$ est résoluble, inclus dans le groupe des matrices triangulaires supérieures, alors ρ est admissible et seulement si sa projection sur le groupe des matrices diagonales l'est.*

Dans le cas où Γ_0 est cocompact dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, nous retrouvons ainsi des résultats de Salein [Sa1]. Notre démonstration a l'avantage de ne pas utiliser la complétude des variétés anti-de Sitter, et s'applique aux groupes de Lie linéaires semi-simples réels G de rang réel un.

Citons trois conséquences des théorèmes 0.2.13 et 0.2.15. La première concerne en particulier le spectre des longueurs des groupes fondamentaux des variétés anti-de Sitter compactes de dimension 3. On note ici $\lambda : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ la longueur de translation pour l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur \mathbb{H}^2 ; pour tout $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, le réel $\lambda(g)$ est la valeur absolue du logarithme du quotient des deux valeurs propres de g .

Corollaire 0.2.17 (chapitre 5). *Soit Γ_0 un sous-groupe convexe cocompact sans torsion de $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Un morphisme de groupes $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$ est admissible si et seulement si il existe une constante $C < 1$ telle que $\lambda(\rho(\gamma)) \leq C\lambda(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \Gamma_0$.*

Le corollaire 0.2.17 est une conséquence du théorème 0.2.13 et du fait que pour tout sous-groupe convexe cocompact sans torsion Γ_0 de $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et tout morphisme de groupes $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$, la borne supérieure des quotients $\lambda(\rho(\gamma))/\lambda(\gamma)$, où $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$, est égale à la borne inférieure des réels $C \geq 0$ tels que l'ensemble $\{\mu(\rho(\gamma)) - C\mu(\gamma), \gamma \in \Gamma_0\} \subset \mathbb{R}$ soit majoré (proposition 5.6.1).

En utilisant ce lien entre λ et μ , on voit par ailleurs que le théorème 0.2.15 implique le résultat suivant.

Corollaire 0.2.18 (chapitre 5). *Soient Γ_0 un sous-groupe convexe cocompact sans torsion de $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$ un morphisme de groupes tel que $\rho(\Gamma_0)$ soit Zariski-dense dans G , ou borné, ou encore virtuellement abélien mais non virtuellement unipotent. Si la borne inférieure des constantes de Lipschitz d'applications lipschitziennes ρ -équivariantes de $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$ dans \mathbb{H}^2 est ≥ 1 , elle est égale à la borne supérieure des quotients $\lambda(\rho(\gamma))/\lambda(\gamma)$, où $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$.*

Pour Γ_0 cocompact dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, le corollaire 0.2.18 généralise un résultat de Thurston [Thu], qui stipule l'équivalence entre deux définitions d'une même distance asymétrique sur l'espace de Teichmüller de la surface $\Gamma_0 \backslash \mathbb{H}^2$ (cf. paragraphe 5.6.2). Plus précisément, le résultat de Thurston correspond au corollaire 0.2.18 dans le cas particulier où Γ_0 est cocompact et ρ injectif d'image discrète.

Enfin, voici une dernière conséquence du théorème 0.2.13.

Corollaire 0.2.19 (chapitre 5). *Soient Γ_0 un sous-groupe convexe cocompact sans torsion de $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$ un morphisme admissible. Il existe des voisinages $\mathcal{V} \subset \mathrm{Hom}(\Gamma_0, G)$ de l'inclusion naturelle et $\mathcal{W} \subset \mathrm{Hom}(\Gamma_0, G)$ de ρ tels que pour tout $(\sigma, \tau) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W}$,*

- le morphisme σ soit injectif,
- le groupe $\sigma(\Gamma_0)$ soit discret dans G , et cocompact si Γ_0 l'est,
- le morphisme $\tau \circ \sigma^{-1} : \sigma(\Gamma_0) \rightarrow G$ soit admissible.

En particulier, pour tout sous-groupe convexe cocompact Γ_0 de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, l'ensemble des morphismes admissibles est ouvert dans $\mathrm{Hom}(\Gamma_0, \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$.

Dans le cas où Γ_0 est cocompact dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, nous obtenons ainsi une nouvelle démonstration du fait suivant, déjà mentionné au paragraphe 0.1.3 et analogue au corollaire 0.2.9.

Corollaire 0.2.20 (chapitre 5). *Posons $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et soit Γ un sous-groupe discret sans torsion de $G \times G$ agissant proprement et cocompactement sur $(G \times G)/\Delta_G$. Il existe un voisinage $\mathcal{U} \subset \mathrm{Hom}(\Gamma, G \times G)$ de l'inclusion naturelle formé de morphismes injectifs et tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{U}$, le groupe $\varphi(\Gamma)$ soit discret dans $G \times G$ et agisse proprement et cocompactement sur $(G \times G)/\Delta_G$.*

Notre démonstration s'appuie sur un résultat démontré au chapitre 6 (proposition 6.5.1). Elle a l'avantage de ne pas utiliser la complétude des variétés anti-de Sitter, ce qui nourrit l'espoir de l'adapter un jour à d'autres situations où l'on ne dispose pas de résultat de complétude.

0.2.5 Déformation d'actions propres dans un cadre général

Dans le chapitre 6 nous nous plaçons dans un cadre plus général et démontrons le résultat suivant.

Théorème 0.2.21 (chapitre 6). *Soient \mathbf{k} un corps local, G l'ensemble des \mathbf{k} -points d'un \mathbf{k} -groupe algébrique réductif \mathbf{G} et H (resp. L) l'ensemble des \mathbf{k} -points d'un sous-groupe fermé réductif \mathbf{H} (resp. \mathbf{L}) de \mathbf{G} . Supposons que $\text{rang}_{\mathbf{k}}(\mathbf{L}) = 1$ et que L agit proprement sur G/H . Soit Γ un sous-groupe discret de type fini sans torsion de L ; si $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , supposons Γ convexe cocompact. Alors il existe un voisinage $\mathcal{U} \subset \text{Hom}(\Gamma, G)$ de l'inclusion naturelle formé de morphismes injectifs et tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{U}$, le groupe $\varphi(\Gamma)$ soit discret dans G et agisse proprement sur G/H .*

Rappelons que pour $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} un sous-groupe discret Γ de L est dit *convexe cocompact* s'il agit cocompactement sur l'enveloppe convexe de son ensemble limite dans l'espace symétrique de L , cette enveloppe convexe étant supposée non vide. C'est le cas si Γ est un réseau cocompact de L . Sous ces hypothèses, le fait que $\varphi(\Gamma)$ reste discret dans G pour tout $\varphi \in \text{Hom}(\Gamma, G)$ suffisamment proche de l'inclusion naturelle est un résultat général de Guichard ([Gui], th. 2).

Dans le cas réel, l'argument de dimension cohomologique du paragraphe 0.2.2 montre que si le quotient $\Gamma \backslash G/H$ est compact, le quotient $\varphi(\Gamma) \backslash G/H$ l'est aussi pour tout $\varphi \in \mathcal{U}$. On obtient en particulier le résultat suivant.

Théorème 0.2.22 (chapitre 6). *Soient G un groupe de Lie réel linéaire réductif, H et L deux sous-groupes fermés réductifs de G . Supposons que $\text{rang}_{\mathbb{R}}(L) = 1$ et que L agit proprement et cocompactement sur G/H . Pour tout réseau cocompact sans torsion Γ de L , il existe un voisinage $\mathcal{U} \subset \text{Hom}(\Gamma, G)$ de l'inclusion naturelle formé de morphismes injectifs et tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{U}$, le groupe $\varphi(\Gamma)$ soit discret dans G et agisse proprement et cocompactement sur G/H .*

La situation des théorèmes 0.2.21 et 0.2.22 est naturelle. En effet, dans tous les exemples connus, lorsque G est un groupe de Lie réel réductif, H un sous-groupe fermé réductif de G , et lorsque l'espace homogène G/H admet un quotient compact, il existe un sous-groupe fermé réductif L de G qui agit proprement et cocompactement sur G/H . Tout réseau cocompact sans torsion Γ de L fournit alors un quotient compact de G/H ; nous qualifierons ce type de quotients compacts de *standard*. Par exemple, on a vu au paragraphe 0.1.3 que le groupe $U(m, 1)$ se plonge dans $O(2m, 2)$ et agit proprement et cocompactement sur l'espace anti-de Sitter $\mathbb{H}^{2m,1} = O(2m, 2)/O(2m, 1)$; il en est de même de $Sp(m, 1)$ et $O(4m, 4)/O(4m, 3)$ d'une part, de $Spin(8, 1)$ et $O(8, 8)/O(8, 7)$ d'autre part.

Kobayashi et Yoshino [KY] ont conjecturé que pour tout groupe de Lie réel réductif G et tout sous-groupe fermé réductif H , l'existence de quotients compacts de G/H implique l'existence de quotients compacts standard. Notons toutefois qu'il peut exister des quotients compacts non standard; nous avons rencontré cette situation pour les variétés anti-de Sitter de dimension 3 (cf. paragraphes 0.1.3 et 0.2.4).

Partant d'une situation "standard", quand un sous-groupe fermé réductif L de G agit proprement et cocompactement sur G/H , il est naturel de chercher à déformer

dans G les réseaux cocompacts sans torsion de L et à démontrer que l'action reste libre et propre. En pratique on se ramène au cas où L est de rang réel un, car pour L semi-simple de rang supérieur, sans facteur compact, et Γ irréductible dans L , le théorème de super-rigidité de Margulis [Ma3] implique la rigidité locale de Γ dans G , du moins en caractéristique nulle.

Jusqu'ici, le seul résultat connu dans la direction du théorème 0.2.22 était un résultat de Kobayashi [Ko5] traitant des déformations de la forme $\gamma \mapsto \gamma\psi(\gamma)$, où ψ est un morphisme de groupes à valeurs dans le centralisateur de L dans G . Le principal exemple auquel s'applique le résultat de Kobayashi est celui des espaces homogènes de la forme $(G \times G)/\Delta_G$ où G est un groupe réel réductif : on obtient l'existence, pour tout réseau cocompact Γ de G , d'un voisinage $\mathcal{U} \subset \text{Hom}(\Gamma, G)$ du morphisme constant tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{U}$ le groupe $\{(\gamma, \varphi(\gamma)), \gamma \in \Gamma\}$ soit discret dans G , sans torsion, et agisse proprement et cocompactement sur $(G \times G)/\Delta_G$. Pour $G = \text{SL}_2(\mathbb{R})$ c'est un cas particulier du théorème 0.2.20, pour $G = \text{SL}_2(\mathbb{C})$ cela avait déjà été démontré par Ghys (*cf.* paragraphe 0.1.4).

Le théorème 0.2.22 améliore le résultat de Kobayashi en traitant toutes les déformations dans G des réseaux cocompacts sans torsion Γ de L , sans restriction. Quant au théorème 0.2.21, il généralise au cas des corps locaux la conservation de la propriété par déformation, en assouplissant l'hypothèse que Γ est un réseau cocompact sans torsion de L .

Voici, d'après [KY], une liste de triplets (G, H, L) auxquels le théorème 0.2.22 s'applique :

1. $(\text{SO}(2n, 2), \text{U}(n, 1), \text{SO}(2n, 1))$ pour $n \geq 1$,
2. $(\text{SO}(2n, 2), \text{SO}(2n, 1), \text{U}(n, 1))$ pour $n \geq 1$,
3. $(\text{U}(2n, 2), \text{Sp}(n, 1), \text{U}(2n, 1))$ pour $n \geq 1$,
4. $(\text{SO}(8, 8), \text{SO}(8, 7), \text{Spin}(8, 1))$,
5. $(\text{SO}(8, \mathbb{C}), \text{SO}(7, \mathbb{C}), \text{Spin}(7, 1))$,
6. $(\text{SO}^*(8), \text{U}(1, 3), \text{Spin}(6, 1))$,
7. $(\text{SO}^*(8), \text{Spin}(6, 1), \text{U}(1, 3))$,
8. $(\text{SO}^*(8), \text{SO}^*(2) \times \text{SO}^*(6), \text{Spin}(6, 1))$,
9. $(\text{SO}(4, 4), \text{Spin}(4, 3), \text{SO}(4, 1))$,
10. $(\text{SO}(4, 3), \text{G}_{2(2)}, \text{SO}(4, 1))$.

Notons que dans l'exemple de $(G, H, L) = (\text{SO}(2n, 2), \text{SO}(2n, 1), \text{U}(n, 1))$, il existe des déformations non triviales de réseaux cocompacts Γ de L dans G , mais elles ne permettent pas d'obtenir de quotient compact non standard car elles sont toutes de la forme $\gamma \mapsto \gamma\psi(\gamma)$, où $\psi : \Gamma \rightarrow \text{SO}(2, 2n)$ est un morphisme à valeurs dans le centre de $\text{U}(n, 1)$ (*cf.* paragraphe 6.1.1).

Cependant, Johnson et Millson [JM] ont prouvé l'existence de déformations Zariski-denses de certains réseaux arithmétiques cocompacts de $\text{SO}(2n, 1)$ dans $\text{SO}(2n, 2)$, par un procédé de *bending*. Nous en déduisons le résultat suivant sur les quotients compacts de $\text{SO}(2n, 2)/\text{U}(n, 1)$, qui est d'après [KY] un espace symétrique pseudo-riemanien de signature $(n^2 - 1, 2n)$.

Corollaire 0.2.23 (chapitre 6). *Pour tout $n \geq 1$, il existe des sous-groupes discrets Γ de $\mathrm{SO}(2n, 2)$ agissant librement, proprement et cocompactement sur $\mathrm{SO}(2n, 2)/\mathrm{U}(n, 1)$ et qui sont Zariski-denses dans $\mathrm{SO}(2n, 2)$.*

Jusqu'à présent, l'existence de quotients compacts d'espaces homogènes réductifs par des sous-groupes Zariski-denses n'était connue que pour les espaces homogènes de la forme $(G \times G)/\Delta_G$ où G est un groupe réel réductif.

Pour démontrer les théorèmes 0.2.21 et 0.2.22 nous établissons le résultat suivant.

Théorème 0.2.24 (chapitre 6). *Soient \mathbf{k} un corps local, G l'ensemble des \mathbf{k} -points d'un \mathbf{k} -groupe algébrique réductif connexe \mathbf{G} et L l'ensemble des \mathbf{k} -points d'un sous-groupe fermé réductif de \mathbf{G} de \mathbf{k} -rang un. Fixons une projection de Cartan $\mu : G \rightarrow E^+$ et une norme $\|\cdot\|$ sur E . Soit Γ un sous-groupe discret de type fini de L ; si $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , supposons Γ convexe cocompact. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $\mathcal{U}_\varepsilon \subset \mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ de l'inclusion naturelle tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{U}_\varepsilon$ et tout $\gamma \in \Gamma$ on ait*

$$\|\mu(\varphi(\gamma)) - \mu(\gamma)\| \leq \varepsilon \|\mu(\gamma)\|.$$

Le théorème 0.2.21 est une conséquence du théorème 0.2.24 et du critère de propriété de Benoist [Be1] cité plus haut. Quant au théorème 0.2.24, pour le démontrer nous considérons certaines représentations V_α de \mathbf{G} , où α parcourt une base de racines restreintes, et étudions la dynamique proximale de G agissant sur les espaces projectifs $\mathbb{P}(V_\alpha)$ (cf. paragraphe 6.1.4).

Le théorème 0.2.24 permet de construire de nouveaux exemples de groupes libres agissant librement et proprement, mais pas cocompactement, sur $(G \times G)/\Delta_G$.

Exemple 0.2.25. *Soient \mathbf{k} un corps local, G l'ensemble des \mathbf{k} -points d'un \mathbf{k} -groupe algébrique semi-simple connexe de \mathbf{k} -rang un et $\gamma_1, \dots, \gamma_r \in G$ engendrant un groupe de Schottky Γ_0 qui n'est pas un réseau de G . Il existe une constante $R > 0$ telle que pour tout morphisme de groupes $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$ vérifiant $\mu(\rho(\gamma_i)) \leq R$ pour tout $1 \leq i \leq r$, le groupe*

$$\Gamma_0^\rho = \{(\gamma, \rho(\gamma)), \gamma \in \Gamma_0\}$$

agisse librement et proprement sur $(G \times G)/\Delta_G$, mais pas cocompactement.

On peut construire de tels exemples où $\rho(\Gamma_0)$ est lui aussi un groupe de Schottky.

Les résultats du chapitre 2 font l'objet de l'article [Ka1], ceux des chapitres 3 et 4 de l'article [Ka2].

Chapitre 1

Préliminaires : décompositions de Cartan

Dans cette thèse, \mathbf{k} désigne un corps local, c'est-à-dire \mathbb{R} , \mathbb{C} , une extension finie de \mathbb{Q}_p ou le corps $\mathbb{F}_q((t))$ des séries de Laurent formelles à coefficients dans un corps fini \mathbb{F}_q . Si $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , on note $|\cdot|$ la valeur absolue usuelle de \mathbf{k} . Si \mathbf{k} est ultramétrique, on note \mathcal{O} son anneau des entiers, q le cardinal du corps résiduel, ω une valuation (additive) sur \mathbf{k} valant 1 sur les uniformisantes et $|\cdot| = q^{-\omega(\cdot)}$ la valeur absolue (multiplicative) correspondante.

Un groupe algébrique est toujours noté par une lettre majuscule grasse (par exemple \mathbf{G}) et l'ensemble de ses \mathbf{k} -points par la même lettre majuscule non grasse (par exemple G).

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques faits bien connus sur les groupes réductifs sur \mathbf{k} et leurs décompositions de Cartan.

1.1 Racines restreintes et chambres de Weyl

Soit \mathbf{G} un groupe algébrique réductif connexe sur \mathbf{k} . Le groupe dérivé $\mathbf{D}(\mathbf{G})$ est semi-simple, la composante neutre $\mathbf{Z}(\mathbf{G})^\circ$ du centre $\mathbf{Z}(\mathbf{G})$ est un tore, trivial si \mathbf{G} est semi-simple, et \mathbf{G} est le quasi-produit de $\mathbf{D}(\mathbf{G})$ et de $\mathbf{Z}(\mathbf{G})^\circ$ ([BoT], prop. 2.2). Rappelons que les \mathbf{k} -tores \mathbf{k} -déployés maximaux de \mathbf{G} sont tous conjugués sur \mathbf{k} ([BoT], th. 4.21). Fixons un tel tore \mathbf{A} et notons \mathbf{N} (resp. \mathbf{Z}) son normalisateur (resp. son centralisateur) dans \mathbf{G} . Les groupes $X(\mathbf{A})$ des \mathbf{k} -caractères de \mathbf{A} et $Y(\mathbf{A})$ des \mathbf{k} -cocaractères de \mathbf{A} sont des \mathbb{Z} -modules libres dont le rang r_G est par définition le \mathbf{k} -rang de \mathbf{G} , noté $\text{rang}_{\mathbf{k}}(\mathbf{G})$. On a un accouplement parfait

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X(\mathbf{A}) \times Y(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

donné par $\langle \chi, \psi \rangle = \chi \circ \psi \in \text{Hom}(\mathbb{G}_m, \mathbb{G}_m) \simeq \mathbb{Z}$, qui induit une forme bilinéaire non dégénérée $\langle \cdot, \cdot \rangle : (X(\mathbf{A}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}) \times (Y(\mathbf{A}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$.

Le tore \mathbf{A} est le quasi-produit de ses sous-tores $(\mathbf{A} \cap \mathbf{D}(\mathbf{G}))^\circ$ et $(\mathbf{A} \cap \mathbf{Z}(\mathbf{G}))^\circ$ ([BoT], prop. 4.27). Par conséquent, les espaces vectoriels $X((\mathbf{A} \cap \mathbf{D}(\mathbf{G}))^\circ) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ et

$X((\mathbf{A} \cap \mathbf{Z}(\mathbf{G}))^\circ) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ s'identifient à des sous-espaces vectoriels de $X(\mathbf{A}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, dont $X(\mathbf{A}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ est la somme directe. En particulier, on a $r_G = r_D + r_Z$, où $r_D = \text{rang}_{\mathbf{k}}(\mathbf{D}(\mathbf{G}))$ et $r_Z = \text{rang}_{\mathbf{k}}(\mathbf{Z}(\mathbf{G}))$.

L'ensemble $\Phi = \Phi(\mathbf{A}, \mathbf{G})$ des racines restreintes de \mathbf{A} dans \mathbf{G} , c'est-à-dire des poids non triviaux de \mathbf{A} dans la représentation adjointe de \mathbf{G} , est un système de racines de $X((\mathbf{A} \cap \mathbf{D}(\mathbf{G}))^\circ) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ ([BoT], cor. 5.8). Pour tout $\alpha \in \Phi$, notons $\check{\alpha}$ la coracine associée à α , définie par $\langle \alpha, \check{\alpha} \rangle = 2$ et $s_\alpha(\Phi) = \Phi$, où s_α désigne l'application de $X(\mathbf{A}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ dans lui-même qui à x associe $x - \langle x, \check{\alpha} \rangle \alpha$. Le groupe $W = N/Z$ est fini et s'identifie au groupe de Weyl du système de racines Φ , engendré par les réflexions s_α , où $\alpha \in \Phi$ ([BoT], § 5.1 et th. 5.3).

De même, l'espace vectoriel $E = Y(\mathbf{A}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ est la somme directe de ses sous-espaces vectoriels $E_D = Y((\mathbf{A} \cap \mathbf{D}(\mathbf{G}))^\circ) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ et $E_Z = Y((\mathbf{A} \cap \mathbf{Z}(\mathbf{G}))^\circ) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. L'ensemble $\check{\Phi} = \{\check{\alpha}, \alpha \in \Phi\}$ des coracines restreintes de \mathbf{A} dans \mathbf{G} est un système de racines de E_D . Pour tout $\alpha \in \Phi$, notons $s_{\check{\alpha}}$ l'application de E dans lui-même qui à y associe $y - \langle \alpha, y \rangle \check{\alpha}$. Le groupe W agit trivialement sur E_Z et s'identifie au groupe de Weyl du système de racines $\check{\Phi}$, engendré par les réflexions $s_{\check{\alpha}}$, où $\check{\alpha} \in \check{\Phi}$. Nous renvoyons à [BoT] et à [Se1], ch. 5, pour des démonstrations et plus de détails.

Si \mathbf{k} est ultramétrique, posons $A^\circ = A$; si $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , posons

$$A^\circ = \{a \in A, \quad \chi(a) \in]0, +\infty[\quad \forall \chi \in X(\mathbf{A})\}.$$

Choisissons une base Δ de Φ et notons

$$\begin{aligned} A^+ &= \{a \in A^\circ, \quad |\alpha(a)| \geq 1 \quad \forall \alpha \in \Delta\} \\ (\text{resp. } E^+ &= \{y \in E, \quad \langle \alpha, y \rangle \geq 0 \quad \forall \alpha \in \Delta\}) \end{aligned}$$

la chambre de Weyl fermée positive associée à Δ dans A° (resp. dans E); l'ensemble E^+ est un cône convexe fermé de l'espace vectoriel E .

Si $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , et si l'on note \mathfrak{a} l'algèbre de Lie de A , alors l'application qui à un cocaractère $\psi \in Y(\mathbf{A})$ associe l'élément $\log \psi(e) \in \mathfrak{a}$ induit un isomorphisme d'espaces vectoriels entre E et \mathfrak{a} , qui identifie E^+ à $\log A^+ \subset \mathfrak{a}$. On munit E d'une norme euclidienne $\|\cdot\|$ invariante par W dont la restriction à E_D est induite par la forme de Killing de l'algèbre de Lie de G . Si \mathbf{k} est ultramétrique, on munit E de n'importe quelle norme euclidienne $\|\cdot\|$ invariante par W .

Pour tout $\alpha \in \Delta$, la réflexion $s_{\check{\alpha}}$ est orthogonale pour $\|\cdot\|$; en particulier, comme E_Z est inclus dans le noyau de $s_{\check{\alpha}}$, il est orthogonal à la droite $\mathbb{R}\check{\alpha}$. On en déduit que E_Z est orthogonal à E_D .

1.2 Immeubles de Bruhat-Tits

Dans ce paragraphe nous supposons \mathbf{k} ultramétrique. Nous rappelons brièvement la construction de l'immeuble de Bruhat-Tits de G , qui est un espace métrique sur lequel G agit proprement par isométries avec un domaine fondamental compact. Nous renvoyons le lecteur aux articles originaux [BT1] et [BT2], ainsi qu'à [Rou].

Notons Res le morphisme de restriction de $X(\mathbf{Z})$ à $X(\mathbf{A})$, où $X(\mathbf{Z})$ désigne le groupe des \mathbf{k} -caractères de \mathbf{Z} . Il existe un unique morphisme de groupes $\nu : Z \rightarrow E$ tel que

$$\langle \text{Res}(\chi), \nu(z) \rangle = -\omega(\chi(z))$$

pour tout $\chi \in X(\mathbf{Z})$ et tout $z \in Z$. L'ensemble $\nu(Z)$ est un réseau dans E , et $\nu(A)$ est un sous-réseau d'indice fini de $\nu(Z)$. L'action de Z sur E par translation selon $\nu(Z)$ se prolonge en une action de N sur E par isométries affines ; un tel prolongement est unique à translation près.

Pour toute racine $\alpha \in \Phi$, notons \mathbf{U}_α le sous-groupe unipotent de \mathbf{G} associé à α : c'est l'unique sous-groupe fermé unipotent normalisé par \mathbf{Z} d'algèbre de Lie $\mathfrak{u}_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$, où

$$\mathfrak{g}_{i\alpha} = \{X \in \mathfrak{g}, \quad \text{Ad}(a)(X) = \alpha(a)^i X \quad \forall a \in A\}$$

pour $i \in \{1, 2\}$ et où \mathfrak{g} désigne l'algèbre de Lie de \mathbf{G} ([Bo2], prop. 21.9). Pour tout $u \in U_\alpha \setminus \{1\}$, l'ensemble $N \cap U_{-\alpha} u U_{-\alpha}$ possède un unique élément ; cet élément agit sur E par réflexion orthogonale par rapport à un hyperplan affine \mathcal{H}_u défini par une équation de la forme $\langle \alpha, x \rangle + \psi_\alpha(u) = 0$, où $\psi_\alpha(u) \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in E$, posons

$$U_{\alpha, x} = \{u \in U_\alpha, \quad u = 1 \text{ ou } \langle \alpha, x \rangle + \psi_\alpha(u) \geq 0\} ;$$

d'après [BT2] c'est un sous-groupe de U_α . Posons $N_x = \{n \in N, n \cdot x = x\}$ et notons K_x le sous-groupe de G engendré par N_x et par les sous-groupes $U_{\alpha, x}$, où $\alpha \in \Phi$. Le groupe K_x est un sous-groupe compact ouvert maximal de G .

Avec ces notations, l'immeuble de Bruhat-Tits X de G est l'ensemble des classes d'équivalence de $G \times E$ pour la relation

$$(g, x) \sim (g', x') \iff \exists n \in N \text{ tel que } x' = n \cdot x \text{ et } g^{-1}g'n \in K_x.$$

On munit X de la topologie quotient induite par la topologie discrète de G et celle d'espace vectoriel réel de E . Par construction, E se plonge dans X ; on l'identifie à son image. Le groupe G agit sur X par

$$g' \cdot \overline{(g, x)} = \overline{(g'g, x)},$$

où $\overline{(g, x)}$ désigne l'image de $(g, x) \in G \times E$ dans X . Cette action est propre, avec un domaine fondamental compact. Par construction, le stabilisateur d'un point $x \in E$ est K_x . Les appartements de X sont les ensembles de la forme $g \cdot E$, où $g \in G$; les murs de X sont les ensembles de la forme $g \cdot \mathcal{H}_u$, où $g \in G$ et $u \in U_\alpha$ pour un certain $\alpha \in \Phi$. Une chambre de X (ou alcôve) est une composante connexe de X privé de ses murs. L'espace X possède la propriété suivante : pour tout couple (x, x') de points de X , il existe un appartement contenant à la fois x et x' , et la distance euclidienne entre x et x' est la même dans tout appartement. On peut donc munir X de la distance d dont la restriction à tout appartement est la distance euclidienne. Le groupe G agit sur X par isométries pour cette distance.

Lorsque $\text{rang}_{\mathbf{k}}(\mathbf{G}) = 1$, l'immeuble de Bruhat-Tits X de G est un arbre simplicial biparti appelé *arbre de Bruhat-Tits* de G . Il est de valence ≥ 3 si \mathbf{G} est de \mathbf{k} -rang

semi-simple un ; sinon c'est une droite. Toutes les arêtes de X ont la même longueur pour la distance d . Les chambres sont les sommets et les appartements les droites géodésiques de X . Nous renvoyons à [Se3], § II.1, pour plus de détails sur l'arbre de Bruhat-Tits de $G = \mathrm{SL}_2(\mathbf{k})$, par exemple.

1.3 Décompositions et projections de Cartan

1.3.1 Cas réel

Lorsque $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , il existe un sous-groupe compact maximal K de G tel qu'on ait la décomposition de Cartan $G = KA^+K$: tout élément $g \in G$ s'écrit $g = k_1 a k_2$, où $k_1, k_2 \in K$ et $a \in A^+$, et l'élément $a \in A^+$ est déterminé de manière unique ([Hel], ch. 9, th. 1.1). En posant $\mu(g) = \log a$ on définit une application $\mu : G \rightarrow E^+ \simeq \log A^+$ qui est continue, propre et surjective. On l'appelle la *projection de Cartan* associée à la décomposition de Cartan $G = KA^+K$.

Par exemple, pour $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ (resp. pour $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$), on peut prendre $K = \mathrm{SO}(n)$ (resp. $K = \mathrm{SU}(n)$) et

$$A^+ = \{ \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n) \in G, a_i \in]0, +\infty[\forall i \text{ et } a_1 \geq \dots \geq a_n \}.$$

La décomposition de Cartan $G = KA^+K$ résulte dans ce cas de la décomposition polaire de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ (resp. de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$) et de la théorie de la réduction des matrices symétriques (resp. hermitiennes). La projection de Cartan associée est l'application μ , à valeurs dans

$$E^+ = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n x_i = 0 \text{ et } x_1 \geq \dots \geq x_n \right\},$$

qui à $g \in G$ associe les demi-logarithmes des valeurs propres de ${}^t \bar{g} g$, comptées avec multiplicité et classées par ordre décroissant.

1.3.2 Cas ultramétrique

Supposons à présent \mathbf{k} ultramétrique. Notons x_0 le sommet du cône fermé E^+ , défini par $\langle \alpha, x_0 \rangle = 0$ pour tout $\alpha \in \Delta$, et posons $K = K_{x_0}$. Notons $Z^+ \subset Z$ l'image réciproque de E^+ par ν . D'après [BT1], le groupe G agit transitivement sur l'ensemble des couples $(\mathcal{A}, \mathcal{C})$, où \mathcal{A} est un appartement de X et \mathcal{C} une chambre de X contenue dans \mathcal{A} . Ceci se traduit en termes algébriques par l'existence d'une *décomposition de Cartan* $G = KZ^+K$: pour tout $g \in G$ il existe des éléments $k_1, k_2 \in K$ et $z \in Z^+$ tels que $g = k_1 z k_2$, et $\nu(z)$ est déterminé de manière unique. En posant $\mu(g) = \nu(z)$ on définit une application $\mu : G \rightarrow E^+$ qui est continue et propre ; son image $\mu(G)$ est l'intersection de E^+ avec un réseau de E . L'application μ s'appelle la *projection de Cartan* associée à la décomposition de Cartan $G = KZ^+K$. Contrairement au cas des groupes réels, on n'a pas de décomposition de la forme $G = KA^+K$ en général, sauf par exemple lorsque \mathbf{G} est déployé sur \mathbf{k} .

Pour $\mathbf{G} = \mathbf{SL}_n$ sur \mathbf{k} , on peut prendre $K = \mathbf{SL}_n(\mathcal{O})$ et

$$A^+ = \left\{ \text{diag}(a_1, \dots, a_n) \in G, |a_1| \geq \dots \geq |a_n| \right\}.$$

La décomposition de Cartan $G = KA^+K$ est dans ce cas équivalente au théorème de la base adaptée pour les sous- \mathcal{O} -modules libres de rang n de \mathcal{O}^n . La projection de Cartan associée est l'application μ , à valeurs dans

$$E^+ = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n x_i = 0 \text{ et } x_1 \geq \dots \geq x_n \right\},$$

définie de la manière suivante. Soit π une uniformisante de \mathbf{k} . Pour tout $g \in G$ il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $\pi^m g \in M_n(\mathcal{O})$; l'élément $\mu(g) \in E^+$ est égal au n -uplet formé des valuations des facteurs invariants de $\pi^m g$ auxquelles on a retranché m .

1.4 Interprétation géométrique

Rappelons une interprétation géométrique de la projection de Cartan μ en termes de distances sur l'espace riemannien symétrique ou l'immeuble de Bruhat-Tits de G .

1.4.1 Cas réel

Supposons $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Notons \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de G et soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan de \mathfrak{g} associée à la décomposition de Cartan $G = KA^+K$. Si $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ (resp. $\mathfrak{d}(\mathfrak{g})$) désigne l'algèbre de Lie du centre (resp. du groupe dérivé) de G , alors l'espace vectoriel \mathfrak{p} admet la décomposition en somme directe $\mathfrak{p} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) + \mathfrak{p} \cap \mathfrak{d}(\mathfrak{g})$. La forme de Killing κ de \mathfrak{g} est définie positive sur $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{d}(\mathfrak{g})$, nulle sur $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, et $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{d}(\mathfrak{g})$ et $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ sont orthogonaux pour κ . Soit $\|\cdot\|$ une norme euclidienne sur \mathfrak{p} dont la restriction à $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{d}(\mathfrak{g})$ coïncide avec κ et pour laquelle $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{d}(\mathfrak{g})$ et $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ sont orthogonaux. Notons π la surjection canonique de G sur $X = G/K$, et posons $x_0 = \pi(1) \in X$. L'application $d\pi_1$ réalise un isomorphisme entre \mathfrak{p} et l'espace tangent à X en x_0 ; par conséquent $\|\cdot\|$ induit une métrique riemannienne G -invariante sur X . Notons d la distance correspondante sur X . Le résultat suivant est probablement bien connu; nous en donnons une démonstration pour la commodité du lecteur.

Lemme 1.4.1 ($\mathbf{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). *L'application $\rho : X \rightarrow E^+$ qui à $x = g \cdot x_0 \in X$ associe $\mu(g)$ est 1-lipschitzienne, i.e. pour tous $x, x' \in X$ on a*

$$\|\rho(x) - \rho(x')\| \leq d(x, x').$$

De plus, la restriction de ρ à $A^+ \cdot x_0$ est une isométrie.

Démonstration. On identifie E^+ à $\log A^+ \subset \mathfrak{a}$. Notons $\text{Exp} : \mathfrak{p} \rightarrow X$ l'exponentielle de X , qui à $Y \in \mathfrak{p}$ associe $\gamma_Y(1)$, où γ_Y désigne l'unique géodésique de X telle

que $\gamma_Y(0) = x_0$ et $\gamma'_Y(0) = d\pi_1(Y)$. Pour tout $x \in X$, il existe $k \in K$ tel que $x = k \exp(\rho(x)) \cdot x_0$; d'après [Hel], ch. 4, th. 3.3, on a

$$x = \text{Exp}((\text{Ad } k)(\rho(x))). \quad (1.4.1)$$

Fixons deux points $x, x' \in X$ et soit $\gamma = (y_t)_{t \in [0,1]}$ le segment géodésique de $y_0 = x$ à $y_1 = x'$. D'après [Hel], p. 295, et (1.4.1), l'application $t \mapsto \rho(y_t)$ est C^∞ et il existe une application $C^\infty t \mapsto k_t$ de $[0, 1]$ dans K telle que $y_t = \text{Exp}((\text{Ad } k_t)(\rho(y_t)))$ pour tout $t \in [0, 1]$. Comme la variété riemannienne X est de courbure sectionnelle négative ([Hel], ch. 5, th. 3.1), la longueur de γ dans X est supérieure à celle de $\text{Exp}^{-1}(\gamma)$ dans \mathfrak{p} ([Hel], ch. 1, th. 13.1). Autrement dit, on a

$$d(x, x') \geq \int_0^1 \left\| \frac{d((\text{Ad } k_t)(\rho(y_t)))}{dt}(t') \right\| dt'. \quad (1.4.2)$$

Or, pour tout $t' \in [0, 1]$ on a

$$\frac{d((\text{Ad } k_t)(\rho(y_t)))}{dt}(t') = (\text{Ad } k_{t'}) \left(\frac{d(\rho(y_t))}{dt}(t') \right) + \left(\frac{d(\text{Ad } k_t)}{dt}(t') \right) (\rho(y_{t'})),$$

où

$$(\text{Ad } k_{t'}) \left(\frac{d(\rho(y_t))}{dt}(t') \right) \in (\text{Ad } k_{t'}) (\mathfrak{a})$$

et

$$\begin{aligned} \left(\frac{d(\text{Ad } k_t)}{dt}(t') \right) (\rho(y_{t'})) &= (\text{Ad } k_{t'}) \left(\text{ad} \left(\frac{d(k_{t'}^{-1} k_{t'+t})}{dt}(0) \right) (\rho(y_{t'})) \right) \\ &\in (\text{Ad } k_{t'}) ([\mathfrak{k}, \mathfrak{a}]). \end{aligned}$$

De plus, les sous-espaces vectoriels \mathfrak{a} et $[\mathfrak{k}, \mathfrak{a}]$ de \mathfrak{p} sont orthogonaux pour $\| \cdot \|$. En effet, comme \mathfrak{p} est la somme directe orthogonale de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ et $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{d}(\mathfrak{g})$, il suffit de voir que $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{d}(\mathfrak{g})$ est orthogonal à $[\mathfrak{k}, \mathfrak{a}]$, ce qui résulte du fait que la décomposition de $\mathfrak{d}(\mathfrak{g})$ en sous-espaces propres sous l'action adjointe de $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{d}(\mathfrak{g})$ est orthogonale pour κ ([Hel], ch. 3, th. 4.2). Or, la norme $\| \cdot \|$ est invariante par $\text{Ad } G$, car κ l'est ([Hel], p. 131) et l'action adjointe de G sur \mathfrak{g} préserve globalement $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{d}(\mathfrak{g})$ et est triviale sur $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Par conséquent, les sous-espaces $(\text{Ad } k_{t'}) (\mathfrak{a})$ et $(\text{Ad } k_{t'}) ([\mathfrak{k}, \mathfrak{a}])$ sont orthogonaux pour $\| \cdot \|$ et l'on a

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d((\text{Ad } k_t)(\rho(y_t)))}{dt}(t') \right\| &\geq \left\| (\text{Ad } k_{t'}) \left(\frac{d(\rho(y_t))}{dt}(t') \right) \right\| \\ &= \left\| \frac{d(\rho(y_t))}{dt}(t') \right\|. \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

Ainsi, on a

$$d(x, x') \geq \int_0^1 \left\| \frac{d(\rho(y_t))}{dt}(t') \right\| dt' = \|\rho(x) - \rho(x')\|.$$

Si $x, x' \in A^+ \cdot x_0$, alors $k_t = 1$ pour tout $t \in [0, 1]$, et l'inégalité (1.4.3) est une égalité. De plus, dans ce cas l'inégalité (1.4.2) est elle aussi une égalité puisque la sous-variété totalement géodésique $A \cdot x_0 = \text{Exp}(\mathfrak{a})$ est de courbure sectionnelle nulle ([Hel], ch. 5, § 3, rem. 2). On en déduit $d(x, x') = \|\rho(x) - \rho(x')\|$. \square

Comme K fixe x_0 et comme G agit sur X par isométries, le lemme 1.4.1 implique que pour tout $a \in A^+$ et tout $g \in KaK$ on a

$$d(x_0, g \cdot x_0) = d(x_0, a \cdot x_0) = \|\rho(x_0) - \rho(a \cdot x_0)\| = \|\mu(g)\|. \quad (1.4.4)$$

1.4.2 Cas ultramétrique

Supposons à présent \mathbf{k} ultramétrique, et notons X l'immeuble de Bruhat-Tits de G , muni de la distance d définie dans la partie 1.2. Rappelons que $K = K_{x_0}$ est le stabilisateur dans G du point $x_0 \in E$ défini par $\langle \alpha, x_0 \rangle = 0$ pour tout $\alpha \in \Delta$. Comme G agit sur X par isométries et comme E se plonge isométriquement dans X , pour tout $z \in Z^+$ et tout $g \in KzK$ on a

$$d(x_0, g \cdot x_0) = d(x_0, z \cdot x_0) = d(x_0, \mu(g)) = \|\mu(g)\|, \quad (1.4.5)$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne de E . Le lemme 1.4.1 est également valable dans ce cadre.

Lemme 1.4.2 (\mathbf{k} ultramétrique). *L'application $\rho : X \rightarrow E^+$ qui à $x = g \cdot x_0 \in X$ associe $\mu(g)$ est 1-lipschitzienne, i.e. pour tous $x, x' \in X$ on a*

$$\|\rho(x) - \rho(x')\| \leq d(x, x').$$

Démonstration. Soit \mathcal{C} l'unique chambre de E^+ contenant x_0 . Commençons par rappeler la construction de la rétraction $\rho_{E, \mathcal{C}} : X \rightarrow E$ définie dans [BT1], § 2.3. Pour tout $x \in X$, il existe un appartement \mathcal{A} contenant à la fois x et \mathcal{C} ([BT1], prop. 2.3.1), et il existe un élément $k \in K$ fixant \mathcal{C} (point par point) et envoyant \mathcal{A} sur E ([BT1], prop. 2.3.2). Le point $k \cdot x \in E$ ne dépend pas des choix de \mathcal{A} et k . En posant $\rho_{E, \mathcal{C}}(x) = k \cdot x$ on définit une application $\rho_{E, \mathcal{C}} : X \rightarrow E$ qui est 1-lipschitzienne, i.e. telle que pour tous $x, x' \in X$ on ait

$$\|\rho_{E, \mathcal{C}}(x) - \rho_{E, \mathcal{C}}(x')\| \leq d(x, x')$$

([BT1], prop. 2.5.3). Montrons que pour tous $x, x' \in X$ on a

$$\|\rho(x) - \rho(x')\| \leq \|\rho_{E, \mathcal{C}}(x) - \rho_{E, \mathcal{C}}(x')\|. \quad (1.4.6)$$

Il résulte des définitions de ρ et $\rho_{E, \mathcal{C}}$ que $\rho_{E, \mathcal{C}}(x) \in W \cdot \rho(x)$ pour tout $x \in X$. Comme la norme $\|\cdot\|$ est invariante par W , il suffit de montrer que

$$\|y - y'\| \leq \|y - w \cdot y'\| \quad (1.4.7)$$

pour tous $y, y' \in E^+$ et tout $w \in W$. Rappelons que W est engendré par l'ensemble S des réflexions orthogonales s_α par rapport aux hyperplans de E d'équation $\langle \alpha, \cdot \rangle = 0$,

où $\alpha \in \Delta$. Écrivons $w = s_m \dots s_1$, où $s_j \in S$ pour tout j . On raisonne par récurrence sur m . Si $(s_m \dots s_1) \cdot y'$ appartient à l'hyperplan \mathcal{H} fixé par s_m , alors $(s_m \dots s_1) \cdot y' = (s_{m-1} \dots s_1) \cdot y'$ et l'hypothèse de récurrence permet de conclure. Supposons donc $(s_m \dots s_1) \cdot y' \notin \mathcal{H}$. Si $(s_m \dots s_1) \cdot y' \in E^+$, alors $s_m \dots s_1 \cdot y' = y'$ et (1.4.7) est évident. Sinon les points y et $(s_m \dots s_1) \cdot y'$ appartiennent à deux composantes connexes distinctes de $E \setminus \mathcal{H}$. Soit y'' le point d'intersection de \mathcal{H} avec le segment d'extrémités y et $(s_m \dots s_1) \cdot y'$. Comme s_m est une réflexion orthogonale, on a

$$\begin{aligned} \|y - (s_m \dots s_1) \cdot y'\| &= \|y - y''\| + \|y'' - (s_m \dots s_1) \cdot y'\| \\ &= \|y - y''\| + \|y'' - (s_{m-1} \dots s_1) \cdot y'\| \\ &\geq \|y - (s_{m-1} \dots s_1) \cdot y'\|. \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, on a $\|y - (s_m \dots s_1) \cdot y'\| \geq \|y - y'\|$. Ceci prouve (1.4.6) et achève la démonstration du lemme 1.4.2. \square

1.4.3 Égalité et inégalités

Si $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , notons X l'espace symétrique G/K , muni de la distance d définie au paragraphe 1.4.1, et x_0 l'image de K dans X . Si \mathbf{k} est ultramétrique, notons X l'immeuble de Bruhat-Tits de G , muni de la distance d définie dans la partie 1.2, et x_0 l'image dans X du sommet du cône E^+ défini au paragraphe 1.3.2. Nous avons vu que pour tout $g \in G$ on a

$$\|\mu(g)\| = d(x_0, g \cdot x_0).$$

En particulier, comme G agit sur X par isométries on a

$$\|\mu(g^{-1})\| = \|\mu(g)\| \tag{1.4.8}$$

et

$$\|\mu(gg')\| \leq \|\mu(g)\| + \|\mu(g')\| \tag{1.4.9}$$

pour tous $g, g' \in G$. Le lemme suivant raffine l'inégalité (1.4.9); il nous sera utile pour démontrer les théorèmes 2.1.1 et 6.1.4.

Lemme 1.4.3. *Soient \mathbf{k} un corps local, G l'ensemble des \mathbf{k} -points d'un \mathbf{k} -groupe algébrique semi-simple connexe et $\mu : G \rightarrow E^+$ une projection de Cartan. Pour tous $g, g' \in G$ on a les deux inégalités suivantes :*

$$\|\mu(gg') - \mu(g)\| \leq \|\mu(g')\|, \tag{1.4.10}$$

$$\|\mu(gg') - \mu(g')\| \leq \|\mu(g)\|. \tag{1.4.11}$$

Démonstration. Comme G agit sur X par isométries, l'inégalité (1.4.10) résulte immédiatement des lemmes 1.4.1 et 1.4.2, en utilisant les formules (1.4.4) et (1.4.5). Montrons que (1.4.10) implique (1.4.11). Si $w \in W$ désigne l'élément "le plus long" de W , défini par $w \cdot z^{-1} \in Z^+$ pour tout $z \in Z^+$, on a $\mu(g^{-1}) = w \cdot (-\mu(g))$ pour

tout $g \in G$. Comme la norme $\|\cdot\|$ de E est invariante par W , l'involution d'opposition $\iota : \mu(G) \rightarrow \mu(G)$, qui à $\mu(g)$ associe $\mu(g^{-1})$ pour tout $g \in G$, est une isométrie. En utilisant (1.4.10) on en déduit

$$\|\mu(gg') - \mu(g')\| = \|\mu(g'^{-1}g^{-1}) - \mu(g'^{-1})\| \leq \|\mu(g^{-1})\| = \|\mu(g)\|.$$

□

On en déduit qu'à une constante additive près, l'application μ ne dépend pas du choix de \mathbf{A} .

Remarque 1.4.4. *Si $\mu' : G \rightarrow E'^+$ est une autre projection de Cartan de G , il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels $i : E' \rightarrow E$ vérifiant $i(E'^+) = E^+$, ainsi qu'une constante $C > 0$, tels que*

$$\|i \circ \mu'(g) - \mu(g)\| \leq C$$

pour tout $g \in G$.

En effet, soit $\mu' : G \rightarrow E'^+$ une projection de Cartan associée à une décomposition de Cartan $G = K'A'^+K'$ ou $G = K'Z'^+K'$, où K' est un sous-groupe compact maximal de G et \mathbf{A}' un \mathbf{k} -tore \mathbf{k} -déployé maximal de \mathbf{G} , de centralisateur \mathbf{Z}' . D'après [BoT], th. 4.21, il existe un élément $g_0 \in G$ tel que $\mathbf{A}' = g_0\mathbf{A}g_0^{-1}$. Quitte à multiplier g_0 à droite par un élément du groupe de Weyl W , on peut supposer $A'^+ = g_0A^+g_0^{-1}$. L'application de $X(\mathbf{A}')$ dans $X(\mathbf{A})$ qui à χ associe $\chi(g_0^{-1} \cdot g_0)$ identifie l'ensemble Φ' des racines restreintes de \mathbf{A}' dans \mathbf{G} à Φ ; l'image réciproque de Δ est la base Δ' de Φ' définissant A'^+ . L'application de $Y(\mathbf{A}')$ dans $Y(\mathbf{A})$ qui à ψ associe $g_0^{-1}\psi g_0$ induit un isomorphisme i entre les espaces vectoriels $E' = Y(\mathbf{A}') \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ et $E = Y(\mathbf{A}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, tel que $i(E'^+) = E^+$. Par construction, on a

$$i \circ \mu'(k'(g_0zg_0^{-1})\ell') = i \circ \mu'(g_0zg_0^{-1}) = \mu(z)$$

pour tous $k', \ell' \in K'$ et $z \in Z$. D'après le lemme 1.4.3, ceci implique

$$\|i \circ \mu'(g) - \mu(g)\| \leq \|\mu(g_0)\| + \|\mu(g_0^{-1})\| + 2 \max_{k' \in K'} \|\mu(k')\|$$

pour tout $g \in G$.

Chapitre 2

Actions propres sur les espaces homogènes réductifs de corang un

2.1 Introduction

Soit \mathbf{k} un corps local. Dans ce chapitre, nous étudions les groupes discrets qui agissent proprement sur G/H , où G est l'ensemble des \mathbf{k} -points d'un \mathbf{k} -groupe algébrique semi-simple connexe et H l'ensemble des \mathbf{k} -points d'un \mathbf{k} -sous-groupe algébrique réductif connexe de corang un sur \mathbf{k} . Notre résultat principal concerne l'image de ces groupes discrets par une projection de Cartan de G . Nous en déduisons notamment une description des sous-groupes discrets sans torsion de $G \times G$ qui agissent proprement sur G par multiplication à gauche et à droite en \mathbf{k} -rang un.

2.1.1 Actions propres et projection de Cartan

Soient \mathbf{k} un corps local, G l'ensemble des \mathbf{k} -points d'un \mathbf{k} -groupe algébrique semi-simple connexe \mathbf{G} de \mathbf{k} -rang un et H l'ensemble des \mathbf{k} -points d'un \mathbf{k} -sous-groupe algébrique réductif connexe \mathbf{H} de \mathbf{G} tel que $\text{rang}_{\mathbf{k}}(\mathbf{H}) = \text{rang}_{\mathbf{k}}(\mathbf{G}) - 1$. On sait que G contient un sous-groupe discret infini qui agit proprement sur G/H si et seulement si $\text{rang}_{\mathbf{k}}(\mathbf{H}) < \text{rang}_{\mathbf{k}}(\mathbf{G})$: c'est le phénomène de Calabi-Markus ([Ko1], cor. 4.4). Dans ce chapitre nous considérons le cas où $\text{rang}_{\mathbf{k}}(\mathbf{H}) = \text{rang}_{\mathbf{k}}(\mathbf{G}) - 1$.

Soient $\mu : G \rightarrow E^+$ une projection de Cartan de G et $\iota : \mu(G) \rightarrow \mu(G)$ l'involution d'opposition, qui à $\mu(g)$ associe $\mu(g^{-1})$. Notons C_H le cône asymptote à $\mu(H)$, c'est-à-dire le sous-cône vectoriel de E^+ engendré par les limites de suites $(\mu(h_n)/\|\mu(h_n)\|)_{n \in \mathbb{N}}$, où $(h_n) \in H^{\mathbb{N}}$ et où $\|\mu(h_n)\| \rightarrow +\infty$. Si $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , on a $\mu(G) = E^+$, et d'après l'hypothèse sur les rangs l'ensemble $\mu(H)$ (tout comme C_H) sépare E^+ en un nombre fini de composantes connexes permutées par ι . Si \mathbf{k} est ultramétrique, l'ensemble $\mu(H)$ est discret, mais C_H sépare E^+ en un nombre fini de composantes connexes et ι se prolonge en une involution de E^+ , encore notée ι , qui préserve C_H et permute les composantes connexes de $E^+ \setminus C_H$ (cf. paragraphe 2.2.1).

Nous démontrons le résultat suivant.

Théorème 2.1.1. *Soient \mathbf{k} un corps local, G l'ensemble des \mathbf{k} -points d'un \mathbf{k} -groupe algébrique semi-simple connexe \mathbf{G} et H l'ensemble des \mathbf{k} -points d'un \mathbf{k} -sous-groupe algébrique réductif connexe \mathbf{H} de \mathbf{G} tel que $\text{rang}_{\mathbf{k}}(\mathbf{H}) = \text{rang}_{\mathbf{k}}(\mathbf{G}) - 1$. Soient $\mu : G \rightarrow E^+$ une projection de Cartan de G et $\iota : E^+ \rightarrow E^+$ l'involution d'opposition. Pour tout sous-groupe discret Γ de G agissant proprement sur G/H et qui n'est pas un groupe de torsion, il existe une composante connexe \mathcal{C} de $E^+ \setminus C_H$ telle que $\mu(\gamma) \in \mathcal{C} \cup \iota(\mathcal{C})$ pour presque tout $\gamma \in \Gamma$ et telle que $\iota(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ si Γ n'est pas virtuellement monogène.*

Selon la terminologie usuelle, on dit qu'un groupe Γ satisfait *virtuellement* une propriété s'il contient un sous-groupe d'indice fini satisfaisant la propriété. On dit qu'une propriété est vraie pour *presque tout* $\gamma \in \Gamma$ si elle est vraie pour tout $\gamma \in \Gamma$ en dehors d'un ensemble fini.

Lorsque \mathbf{k} est de caractéristique nulle, le théorème 2.1.1 reste vrai en supprimant l'hypothèse que Γ n'est pas un groupe de torsion : en effet, dans ce cas tout sous-groupe discret de torsion de G est fini (lemme 2.2.1). En revanche, lorsque $\mathbf{k} = \mathbb{F}_q((t))$ pour un certain corps fini \mathbb{F}_q , il existe des sous-groupes de torsion infinis qui sont discrets dans G et agissent proprement sur G/H , mais qui ne satisfont pas les conclusions du théorème 2.1.1. Nous en donnons un exemple au paragraphe 2.4.2.

Enfin, notons que le théorème 2.1.1 reste valable dans le cadre des groupes de Lie linéaires réels. En effet, d'après Chevalley ([Che], ch. 2, th. 14 et 15), si G est un groupe de Lie linéaire semi-simple réel connexe et H un sous-groupe fermé réductif connexe de G , alors G (resp. H) est la composante neutre (pour la topologie réelle) de l'ensemble des \mathbb{R} -points d'un \mathbb{R} -groupe algébrique semi-simple connexe \mathbf{G} (resp. d'un \mathbb{R} -sous-groupe algébrique réductif connexe \mathbf{H} de \mathbf{G}).

2.1.2 Une application à $(G \times G)/\Delta_G$

Citons deux applications du théorème 2.1.1. La première, qui en constitue la motivation principale, concerne les espaces homogènes de la forme $(G \times G)/\Delta_G$ où G est l'ensemble des \mathbf{k} -points d'un \mathbf{k} -groupe algébrique semi-simple connexe de \mathbf{k} -rang un et Δ_G la diagonale de $G \times G$. Dans cette situation, si μ est une projection de Cartan de G , alors $\mu \times \mu$ est une projection de Cartan de $G \times G$; on identifie E^+ à $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ et $C_H = C_{\Delta_G}$ à la diagonale de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

Théorème 2.1.2. *Soient \mathbf{k} un corps local, G l'ensemble des \mathbf{k} -points d'un \mathbf{k} -groupe algébrique semi-simple connexe \mathbf{G} de \mathbf{k} -rang un, Δ_G la diagonale de $G \times G$ et $\mu : G \rightarrow \mathbb{R}^+$ une projection de Cartan de G .*

1. *À la permutation près des deux facteurs de $G \times G$, les sous-groupes discrets sans torsion de $G \times G$ agissant proprement sur $(G \times G)/\Delta_G$ sont les graphes de la forme*

$$\Gamma_0^\rho = \{(\gamma, \rho(\gamma)), \gamma \in \Gamma_0\},$$

où Γ_0 est un sous-groupe discret de G et $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$ un morphisme de groupes admissible, au sens où pour tout $R > 0$ on a $\mu(\rho(\gamma)) \leq \mu(\gamma) - R$ pour presque tout $\gamma \in \Gamma_0$.

2. Soit Γ un sous-groupe discret résiduellement fini de $G \times G$ qui n'est pas un groupe de torsion. Alors Γ agit proprement sur $(G \times G)/\Delta_G$ si et seulement s'il admet un sous-groupe d'indice fini Γ' qui est un graphe de la forme Γ_0^p précédente, à la permutation près des deux facteurs de $G \times G$.

Notons que l'application $(g, h)\Delta_{\mathbf{G}} \mapsto gh^{-1}$ définit un isomorphisme $(\mathbf{G} \times \mathbf{G})$ -équivariant entre $(\mathbf{G} \times \mathbf{G})/\Delta_{\mathbf{G}}$ et \mathbf{G} , où $\mathbf{G} \times \mathbf{G}$ agit sur \mathbf{G} par multiplication à gauche et à droite : $(g_1, g_2) \cdot g = g_1 g g_2^{-1}$. Ainsi, le théorème 2.1.2 décrit les sous-groupes discrets sans torsion de $G \times G$ qui agissent proprement sur G par multiplication à gauche et à droite.

Rappelons qu'un groupe est dit *résiduellement fini* si l'intersection de ses sous-groupes distingués d'indice fini est triviale. On sait que tout sous-groupe Γ de type fini de $G \times G$ est résiduellement fini (cf. [Alp], cor. 1) ; si de plus \mathbf{k} est de caractéristique nulle, Γ admet un sous-groupe d'indice fini sans torsion d'après le lemme de Selberg ([Sel], lem. 8).

Pour $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, le point 1 du théorème 2.1.2 avait déjà été démontré par Kulkarni et Raymond ([KR], th. 5.2), mais sans la condition sur ρ , qui est due à Salein dans ce cas ([Sa2], lem. 3.4.1). Dans [Ko3], Kobayashi a considéré le cas plus général où G est un groupe de Lie linéaire semi-simple réel connexe de rang réel un : il a montré dans ce cas que tout sous-groupe discret sans torsion de $G \times G$ agissant proprement sur $(G \times G)/\Delta_G$ est un graphe, et a posé la question de savoir si l'une des deux projections de ce graphe était toujours discrète dans G . Le théorème 2.1.2 ci-dessus répond affirmativement à cette question et généralise le résultat de Kobayashi à tous les corps locaux.

Pour $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, le théorème 2.1.2 s'applique aux variétés *anti-de Sitter* compactes de dimension 3, c'est-à-dire aux variétés lorentziennes compactes de dimension 3 de courbure constante strictement négative. En effet, à la renormalisation près de leur métrique, ces variétés sont modélées sur

$$\mathrm{AdS}^3 = \mathbb{H}^{2,1} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, \quad x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 1\}$$

muni de la métrique lorentzienne induite par $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$, qui s'identifie à $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))/\Delta_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ (cf. paragraphe 2.4.3). Comme les variétés anti-de Sitter compactes de dimension 3 sont complètes [Kli], ce sont des quotients d'un revêtement universel de AdS^3 . D'après [KR], on peut se contenter d'un revêtement fini de AdS^3 au lieu d'un revêtement universel. Ainsi, à une isométrie, à la renormalisation de la métrique, à un quotient fini et à un revêtement fini près, les variétés anti-de Sitter compactes de dimension 3 sont les quotients de la forme

$$\Gamma \backslash (\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))/\Delta_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})},$$

où Γ est un sous-groupe discret sans torsion de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ agissant proprement sur $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))/\Delta_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$. Nous renvoyons à l'introduction et au chapitre 5 pour plus de détails.

Plus généralement, pour un corps local \mathbf{k} quelconque et pour une forme quadratique Q d'indice de Witt deux sur \mathbf{k}^4 , la quadrique

$$S(Q) = \{x \in \mathbf{k}^4, \quad Q(x) = 1\}$$

s'identifie à $(\mathrm{SL}_2(\mathbf{k}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbf{k}))/\Delta_{\mathrm{SL}_2(\mathbf{k})}$ (cf. paragraphe 2.4.3). Le théorème 2.1.2 s'applique donc aux sous-groupes discrets de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{k}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbf{k})$ qui agissent proprement sur $S(Q)$. Au paragraphe 2.4.3 nous décrivons les quotients des quadriques de dimension 3 sur \mathbf{k} en général.

Notons que le théorème 2.1.2 ne se transpose pas en rang supérieur. En effet, si $\mathrm{rang}_{\mathbf{k}}(\mathbf{G}) \geq 2$, il existe toujours des sous-groupes discrets infinis Γ_1 et Γ_2 de G tels que $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ agisse proprement sur $(G \times G)/\Delta_G$. En prenant par exemple pour G le groupe $\mathrm{SO}(2, 2n)$ et pour Γ_1 (resp. Γ_2) un réseau cocompact sans torsion de $\mathrm{SO}(1, 2n)$ (resp. de $\mathrm{U}(1, n)$), vu comme sous-groupe de G , on obtient même une action libre, propre et cocompacte de $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ sur $(G \times G)/\Delta_G$ (cf. paragraphes 0.1.3 et 6.1.1).

2.1.3 Une application à $\mathrm{SL}_n(\mathbf{k})/\mathrm{SL}_{n-1}(\mathbf{k})$

Comme seconde application du théorème 2.1.1, nous donnons une démonstration plus simple du résultat suivant, dû à Benoist [Be1].

Corollaire 2.1.3. *Soit \mathbf{k} un corps local de caractéristique nulle. Pour n impair ≥ 3 , tout sous-groupe discret de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{k})$ agissant proprement sur $\mathrm{SL}_n(\mathbf{k})/\mathrm{SL}_{n-1}(\mathbf{k})$ est virtuellement abélien.*

En fait, le théorème 2.1.1 implique une version légèrement plus forte du corollaire 2.1.3 : on peut remplacer “virtuellement abélien” par “virtuellement monogène”.

On déduit du corollaire 2.1.3 qu'en caractéristique nulle, pour n impair ≥ 3 , l'espace homogène $\mathrm{SL}_n(\mathbf{k})/\mathrm{SL}_{n-1}(\mathbf{k})$ n'admet pas de quotient compact par un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{k})$ agissant proprement sur $\mathrm{SL}_n(\mathbf{k})/\mathrm{SL}_{n-1}(\mathbf{k})$ (cf. [Be1]).

Pour terminer, quelques mots sur le plan du chapitre. La partie 2.2 est consacrée à la démonstration du théorème 2.1.1 et à la question des groupes de torsion en caractéristique nulle. Dans la partie 2.3 nous montrons comment le théorème 2.1.1 implique le corollaire 2.1.3. Enfin, dans la partie 2.4 nous prouvons le théorème 2.1.2, montrons que l'hypothèse que Γ n'est pas de torsion est indispensable en caractéristique non nulle, et appliquons le théorème 2.1.2 aux quadriques de dimension 3.

2.2 Actions propres en corang un

Reprenons les notations des préliminaires; en particulier, on note tout groupe algébrique par une lettre majuscule grasse (par exemple \mathbf{G}) et l'ensemble de ses \mathbf{k} -points par la même lettre majuscule non grasse (par exemple G).

2.2.1 Démonstration du théorème 2.1.1

Soit $G = KA^+K$ ou $G = KZ^+K$ la décomposition de Cartan associée à μ , où K est un sous-groupe compact maximal de G , où \mathbf{A} est un \mathbf{k} -tore \mathbf{k} -déployé maximal de \mathbf{G} et où \mathbf{Z} est le centralisateur de \mathbf{A} dans \mathbf{G} . Rappelons que pour tout $g \in G$ les ensembles $\mu(H)$ et $\mu(gHg^{-1})$ sont à distance de Hausdorff finie

d'après le lemme 1.4.3; ils ont en particulier le même cône asymptote dans E^+ , ce qui permet de remplacer \mathbf{H} par l'un de ses conjugués par G . On peut ainsi supposer que \mathbf{H} admet un \mathbf{k} -tore \mathbf{k} -déployé maximal $\mathbf{A}_{\mathbf{H}}$ inclus dans \mathbf{A} . Soit $H = K_H A_H^+ K_H$ ou $H = K_H Z_H^+ K_H$ une décomposition de Cartan de H , où K_H est un sous-groupe compact maximal de H et $Z_{\mathbf{H}}$ le centralisateur de $\mathbf{A}_{\mathbf{H}}$ dans \mathbf{H} . Quitte à conjuguer \mathbf{H} par un élément de G , on peut supposer $K_H \subset K$: ce résultat est dû à Mostow [Mos] et Karpelevich [Kar] dans le cas réel, à Landvogt [Lan] dans le cas ultramétrique. On a alors $\mu(H) = \mu(Z_H)$, et $\mu(H)$ est inclus dans son cône asymptote C_H , qui est l'intersection de E^+ avec une union finie d'hyperplans vectoriels de E paramétrés par le groupe de Weyl W . Munissons E d'une norme $\|\cdot\|$ invariante par W comme dans la partie 1.1. L'involution d'opposition $\iota : \mu(G) \rightarrow \mu(G)$, qui à $\mu(g)$ associe $\mu(g^{-1})$ pour tout $g \in G$, se prolonge en une isométrie de E^+ , encore notée ι . Cette isométrie préserve $\mu(H)$ et C_H , et permute les composantes connexes de $E^+ \setminus C_H$.

Notre démonstration du théorème 2.1.1 s'appuie sur le *critère de propreté* de Benoist ([Be1], cor. 5.2; cf. aussi [Ko5], th. 1.1), qui affirme qu'un sous-groupe Γ de G agit proprement sur G/H si et seulement si l'ensemble $\mu(\Gamma) \cap (\mu(H) + \mathcal{C})$ est borné pour tout compact \mathcal{C} de E . Cette condition est équivalente au fait que l'ensemble $\mu(\Gamma) \cap (C_H + \mathcal{C})$ soit borné pour tout compact \mathcal{C} de E . Autrement dit, Γ agit proprement sur G/H si et seulement si $\mu(\Gamma)$ "s'éloigne de C_H à l'infini".

Notre démonstration s'appuie également sur l'observation (*) suivante : si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de points de E^+ dont la distance à C_H est strictement plus grande qu'un certain $R > 0$, et si $\|x_{n+1} - x_n\| \leq R$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors les points x_n appartiennent tous à une même composante connexe de $E^+ \setminus C_H$.

Démontrons à présent le théorème 2.1.1. Notons C_1, \dots, C_s les composantes connexes de $E^+ \setminus C_H$ et soit Γ un sous-groupe discret de G agissant proprement sur G/H . L'ensemble $\mu(\Gamma)$ est globalement stable par l'involution d'opposition ι .

Supposons que Γ n'est pas un groupe de torsion et fixons un élément $\gamma \in \Gamma$ d'ordre infini. Comme le groupe Γ est discret et comme l'application μ est propre, la suite $(\|\mu(\gamma^n)\|)_{n \in \mathbb{Z}}$ tend vers l'infini quand n tend vers $\pm\infty$. D'après le critère de propreté, comme Γ est discret et μ propre, l'ensemble F des éléments $\gamma' \in \Gamma$ tels que $\mu(\gamma')$ soit situé à distance $\leq \|\mu(\gamma)\|$ de C_H est fini. De plus, d'après le lemme 1.4.3 on a

$$\|\mu(\gamma^{n+1}) - \mu(\gamma^n)\| \leq \|\mu(\gamma)\|$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. D'après l'observation (*) ci-dessus, il existe des entiers $1 \leq i, j \leq s$ tels que $\mu(\gamma^n) \in C_i$ (resp. $\mu(\gamma^{-n}) \in C_j$) pour presque tout $n \in \mathbb{N}$. L'involution d'opposition ι échange C_i et C_j .

Notons que pour tout $\gamma' \in \Gamma$, le lemme 1.4.3 implique

$$\|\mu(\gamma'\gamma^n) - \mu(\gamma^n)\| \leq \|\mu(\gamma')\|$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. D'après le critère de propreté, on a $\mu(\gamma'\gamma^n) \in C_i$ et $\mu(\gamma'\gamma^{-n}) \in C_j$ pour presque tout $n \in \mathbb{N}$.

Considérons tout d'abord le cas où $i = j$, et montrons que l'ensemble F' des éléments $\gamma' \in \Gamma$ tels que $\mu(\gamma') \notin C_i$ est fini. Soit $\gamma' \in F'$. D'après le lemme 1.4.3 on a

$$\|\mu(\gamma'\gamma^{n+1}) - \mu(\gamma'\gamma^n)\| \leq \|\mu(\gamma)\|$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. De plus, on a $\mu(\gamma') \notin C_i$, et l'on vient de voir que $\mu(\gamma'\gamma^n) \in C_i$ pour presque tout $n \in \mathbb{Z}$. D'après l'observation (*) ci-dessus, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\gamma'\gamma^n \in F$. Ainsi on a $F' \subset F\gamma^{\mathbb{Z}}$. Comme F est fini et comme pour tout $f \in F$ on a $f\gamma^n \in C_i$ pour presque tout $n \in \mathbb{Z}$, l'ensemble F' est fini.

Considérons à présent le cas où $i \neq j$, et montrons que le sous-groupe engendré par γ est d'indice fini dans Γ . Soit $\gamma' \in \Gamma$. D'après le lemme 1.4.3 on a

$$\|\mu(\gamma'\gamma^{n+1}) - \mu(\gamma'\gamma^n)\| \leq \|\mu(\gamma)\|$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. De plus, on a vu que $\mu(\gamma'\gamma^n) \in C_i$ et $\mu(\gamma'\gamma^{-n}) \in C_j$ pour presque tout $n \in \mathbb{N}$. D'après l'observation (*) ci-dessus, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\gamma'\gamma^n \in F$. On en déduit que $\Gamma = F\gamma^{\mathbb{Z}}$. Comme F est fini, $\gamma^{\mathbb{Z}}$ est d'indice fini dans Γ . Ceci achève la démonstration du théorème 2.1.1.

2.2.2 Sous-groupes discrets de torsion en caractéristique nulle

Dans ce paragraphe, nous montrons que lorsque \mathbf{k} est de caractéristique nulle on peut supprimer l'hypothèse que Γ n'est pas de torsion dans le théorème 2.1.1. Lorsque l'on sait que Γ est de type fini, cela résulte du lemme de Selberg ([Sel], lem. 8). C'est également vrai en général d'après le lemme facile suivant.

Lemme 2.2.1. *Soient \mathbf{k} un corps local de caractéristique nulle et \mathbf{G} un \mathbf{k} -groupe algébrique linéaire. Si \mathbf{k} est un corps p -adique, tout sous-groupe de torsion de G est fini. Si $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , tout sous-groupe discret de torsion de G est fini.*

Démonstration. Plongeons \mathbf{G} dans un groupe linéaire \mathbf{GL}_n , où $n \geq 1$. Soit Γ un sous-groupe de torsion de G . D'après un résultat de Schur ([CR], th. 36.14), Γ contient un sous-groupe abélien Γ' d'indice fini dont tous les éléments sont semi-simples. Pour montrer que Γ est fini, il suffit de montrer que Γ' l'est.

Supposons que \mathbf{k} est un corps p -adique. Les éléments de Γ' sont diagonalisables dans une base commune sur une clôture algébrique de \mathbf{k} . Pour tout $\gamma \in \Gamma'$, les valeurs propres de γ sont des racines de l'unité; elles engendrent une extension cyclotomique \mathbf{k}_γ de \mathbf{k} , et $[\mathbf{k}_\gamma : \mathbf{k}] \leq n$ puisque le polynôme caractéristique de γ est de degré n . Or il n'existe qu'un nombre fini d'extensions cyclotomiques de \mathbf{k} de degré $\leq n$ ([Neu], ch. 2, th. 7.12 et prop. 7.13). Par conséquent, le corps \mathbf{k}' engendré par les extensions \mathbf{k}_γ , où $\gamma \in \Gamma'$, est de degré fini sur \mathbf{k} , donc ne contient qu'un nombre fini de racines de l'unité ([Neu], ch. 2, prop. 5.7). On en déduit que Γ' est fini.

Supposons $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , et Γ discret dans G . Les éléments de Γ' sont diagonalisables dans une base commune sur \mathbb{C} , et leurs valeurs propres sont des racines de l'unité. Comme le groupe \mathbb{U} des nombres complexes de module un est compact, tout sous-groupe discret de \mathbb{U}^n est fini. On en déduit que Γ' est fini. \square

Lorsque \mathbf{k} est de caractéristique non nulle, il existe des sous-groupes discrets de torsion de G qui sont infinis. Ils sont tous virtuellement unipotents (cela résulte de [Ti3], prop. 2.8, par exemple). Certains d'entre eux ne satisfont pas les conclusions du théorème 2.1.1; nous en donnons un exemple au paragraphe 2.4.2.

2.3 Application à $\mathrm{SL}_n(\mathbf{k})/\mathrm{SL}_{n-1}(\mathbf{k})$

Dans ce paragraphe nous considérons le cas où $G = \mathrm{SL}_n(\mathbf{k})$ et $H = \mathrm{SL}_{n-1}(\mathbf{k})$. Nous montrons comment le théorème 2.1.1 implique le corollaire 2.1.3.

Soient \mathbf{k} un corps local et $n \geq 2$ un entier. Notons \mathbf{G} le groupe \mathbf{SL}_n sur \mathbf{k} . Le groupe \mathbf{A} des matrices diagonales de déterminant un est un \mathbf{k} -tore \mathbf{k} -déployé maximal de \mathbf{G} ; il est égal à son propre centralisateur, *i.e.* $\mathbf{Z} = \mathbf{A}$. Les racines associées sont les formes linéaires $\varepsilon_i - \varepsilon_j$, $1 \leq i \neq j \leq n$, où l'on a posé

$$\varepsilon_i(\mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n)) = a_i.$$

Une base du système de racines de \mathbf{A} dans \mathbf{G} est formée des racines $\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$, où $1 \leq i \leq n-1$. Si $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} (resp. si \mathbf{k} est ultramétrique), la chambre de Weyl positive associée est

$$\begin{aligned} A^+ &= \{ \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n) \in A, a_i \in]0, +\infty[\forall i \text{ et } a_1 \geq \dots \geq a_n \} \\ (\text{resp. } A^+ &= \{ \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n) \in A, |a_1| \geq \dots \geq |a_n| \}). \end{aligned}$$

Posons $K = \mathrm{SO}(n)$ (resp. $K = \mathrm{SU}(n)$, resp. $K = \mathrm{SL}_n(\mathcal{O})$) si $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ (resp. si $\mathbf{k} = \mathbb{C}$, resp. si \mathbf{k} est ultramétrique). On a la décomposition de Cartan $G = KA^+K$ (*cf.* partie 1.3). L'espace vectoriel réel

$$E = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 + \dots + x_n = 0 \} \simeq \mathbb{R}^{n-1}$$

et son cône convexe fermé

$$E^+ = \{ (x_1, \dots, x_n) \in E, x_1 \geq \dots \geq x_n \}$$

ne dépendent pas de \mathbf{k} . Notons $\mu : G \rightarrow E^+$ la projection de Cartan associée à la décomposition de Cartan $G = KA^+K$.

Posons $\mathbf{H} = \mathbf{SL}_{n-1}$, vu comme sous-groupe de \mathbf{G} en plongeant les matrices de taille $(n-1) \times (n-1)$ dans le coin supérieur gauche des matrices de taille $n \times n$. On a

$$C_H = \bigcup_{1 \leq i \leq n} \{ (x_1, \dots, x_n) \in E^+, x_i = 0 \},$$

et les composantes connexes de $E^+ \setminus C_H$ sont les ensembles

$$C_i = \{ (x_1, \dots, x_n) \in E^+, x_i > 0 > x_{i+1} \},$$

où $1 \leq i \leq n-1$. L'involution d'opposition $\iota : E^+ \rightarrow E^+$ est donnée par

$$\iota(x_1, \dots, x_n) = (-x_n, \dots, -x_1);$$

elle envoie C_i sur C_{n-i} pour tout $1 \leq i \leq n-1$. Voici une reformulation du théorème 2.1.1 dans ce cas.

Proposition 2.3.1. *Soit Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{k})$ agissant proprement sur $\mathrm{SL}_n(\mathbf{k})/\mathrm{SL}_{n-1}(\mathbf{k})$ et qui n'est pas un groupe de torsion. Il existe un entier $1 \leq i \leq n-1$ tel que $\mu(\gamma) \in C_i \cup C_{n-i}$ pour presque tout $\gamma \in \Gamma$ et tel que $C_i = C_{n-i}$ si Γ n'est pas virtuellement monogène.*

Notons que si n est impair, on a $C_i \neq C_{n-i}$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$, ce qui implique le corollaire 2.1.3. Une autre conséquence de la proposition 2.3.1 est la suivante.

Corollaire 2.3.2. *Supposons n pair ≥ 4 . Soit Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{k})$ agissant proprement sur $\mathrm{SL}_n(\mathbf{k})/\mathrm{SL}_{n-1}(\mathbf{k})$ et qui n'est pas virtuellement monogène. Tout élément $\gamma \in \Gamma$ d'ordre infini admet $n/2$ valeurs propres de module strictement supérieur à 1 et $n/2$ valeurs propres de module strictement inférieur à 1, comptées avec multiplicité.*

Pour tout $g \in \mathrm{SL}_n(\mathbf{k})$, les valeurs propres de g appartiennent à une extension finie \mathbf{k}_g de \mathbf{k} ; dans le corollaire 2.3.2 on note encore $|\cdot|$ l'unique valeur absolue de \mathbf{k}_g prolongeant la valeur absolue de \mathbf{k} . En remplaçant \mathbf{k} par \mathbf{k}_g , on obtient comme ci-dessus une décomposition de Cartan $\mathrm{SL}_n(\mathbf{k}_g) = K_g A_g^+ K_g$ où $K = K_g \cap \mathrm{SL}_n(\mathbf{k})$ et $A^+ = A_g^+ \cap \mathrm{SL}_n(\mathbf{k})$. La projection de Cartan $\mu_g : \mathrm{SL}_n(\mathbf{k}_g) \rightarrow E^+$ correspondante prolonge μ .

Démonstration du corollaire 2.3.2. On peut supposer que Γ n'est pas un groupe de torsion. L'unique composante connexe de $E^+ \setminus C_H$ stable par ι est $C_{n/2}$; d'après la proposition 2.3.1, on a donc $\mu(\gamma) \in C_{n/2}$ pour presque tout $\gamma \in \Gamma$. Soit $\gamma \in \Gamma$ un élément d'ordre infini. Comme Γ est discret et comme l'application μ est propre, on a $\|\mu(\gamma^m)\| \rightarrow +\infty$ quand $m \rightarrow +\infty$. On en déduit

$$\frac{1}{m} \mu(\gamma^m) \in C_{n/2}$$

pour presque tout $m \geq 1$. Soit $\lambda : \mathrm{SL}_n(\mathbf{k}) \rightarrow E^+$ la projection de Lyapounov de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{k})$; par définition, pour tout $g \in \mathrm{SL}_n(\mathbf{k})$ on a $\lambda(g) = \mu_g(a_g)$, où $a_g \in \mathrm{SL}_n(\mathbf{k}_g)$ est une matrice diagonale dont les coefficients sont les valeurs propres de g , comptées avec multiplicité. D'après [Be2], cor. 2.5, on a

$$\lambda(\gamma) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \mu(\gamma^m).$$

Par conséquent, $\lambda(\gamma)$ appartient à l'adhérence de $C_{n/2}$ dans E^+ . Montrons que $\lambda(\gamma) \notin C_H$. D'après [Be2], lem. 4.6, il existe une constante $C_\gamma > 0$ telle que pour tout $m \geq 1$ on ait

$$\|\lambda(\gamma^m) - \mu(\gamma^m)\| \leq C_\gamma. \quad (2.3.1)$$

Si l'on avait $\lambda(\gamma) \in C_H$, on aurait $\lambda(\gamma^m) = m\lambda(\gamma) \in C_H$ pour tout $m \geq 1$, et (2.3.1) contredirait le critère de propreté (cf. paragraphe 2.2.1). Par conséquent, on a $\lambda(\gamma) \in C_{n/2}$, ce qui signifie que γ admet $n/2$ valeurs propres de module strictement supérieur à 1 et $n/2$ valeurs propres de module strictement inférieur à 1, comptées avec multiplicité. \square

2.4 Actions bilatérales en rang un

Dans cette partie, nous prouvons le théorème 2.1.2, montrons que l'hypothèse que Γ n'est pas de torsion est indispensable dans le cas d'un corps local de caractéristique non nulle, et décrivons une application aux quadriques de dimension 3 sur un corps local.

2.4.1 Démonstration du théorème 2.1.2

Supposons \mathbf{G} de \mathbf{k} -rang un et notons $\Delta_{\mathbf{G}}$ la diagonale de $\mathbf{G} \times \mathbf{G}$. Soit $\mu : G \rightarrow E^+$ une projection de Cartan de G ; comme \mathbf{G} est semi-simple de \mathbf{k} -rang un, E^+ s'identifie à \mathbb{R}^+ . L'application $\mu_{\bullet} = \mu \times \mu$, à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, est une projection de Cartan de $G \times G$. Le cône C_{Δ_G} asymptote à $\mu_{\bullet}(\Delta_G)$ est la diagonale de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Le complémentaire $E^+ \setminus C_{\Delta_G}$ admet deux composantes connexes; notons C_+ (resp. C_-) celle formée des points de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ situés strictement au-dessus (resp. strictement en-dessous) de la diagonale. L'involution d'opposition ι est l'identité de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

Démontrons à présent le théorème 2.1.2. Soit Γ un sous-groupe discret de $G \times G$ agissant proprement sur $(G \times G)/\Delta_G$ et qui n'est pas un groupe de torsion. D'après le théorème 2.1.1, comme ι est l'identité, on a soit $\mu_{\bullet}(\gamma) \in C_+$ pour presque tout $\gamma \in \Gamma$, soit $\mu_{\bullet}(\gamma) \in C_-$ pour presque tout $\gamma \in \Gamma$. Quitte à échanger les deux facteurs de $G \times G$, on peut supposer que $\mu_{\bullet}(\gamma) \in C_-$ pour presque tout $\gamma \in \Gamma$.

Notons pr_1 (resp. pr_2) la projection de Γ sur le premier (resp. second) facteur de $G \times G$. Le noyau F de pr_1 est fini. Si Γ est résiduellement fini, il admet un sous-groupe distingué Γ' d'indice fini tel que $\Gamma' \cap F$ soit trivial. Si Γ est sans torsion, F est déjà trivial et l'on pose $\Gamma' = \Gamma$. Dans les deux cas, si l'on pose $\Gamma_0 = \text{pr}_1(\Gamma')$, alors $\rho = \text{pr}_2 \circ \text{pr}_1^{-1} : \Gamma_0 \rightarrow G$ est un morphisme de groupes et

$$\Gamma' = \Gamma_0^{\rho} = \{(g, \rho(g)), g \in \Gamma_0\}.$$

Le groupe Γ_0 est discret dans G . En effet, sinon il existerait une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points deux à deux distincts de Γ_0 tendant vers 1. Comme Γ est discret dans $G \times G$ et comme μ est propre, la suite $(\mu(\rho(g_n)))_{n \in \mathbb{N}}$ tendrait vers l'infini avec n . On aurait donc une infinité d'éléments $(g, \rho(g)) \in \Gamma$ tels que $\mu(\rho(g)) \geq \mu(g)$, ce qui contredirait l'hypothèse que $\mu_{\bullet}(\gamma) \in C_-$ pour presque tout $\gamma \in \Gamma$. Ainsi, Γ_0 est bien discret dans G . Comme $\mu(\rho(g)) < \mu(g)$ pour presque tout $g \in \Gamma_0$, le critère de propreté (cf. paragraphe 2.2.1) assure que pour tout $R > 0$, on a $\mu(\rho(g)) \leq \mu(g) - R$ pour presque tout $g \in \Gamma_0$.

Réciproquement, s'il existe un sous-groupe discret Γ_0 de G et un morphisme de groupes $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$ vérifiant les conditions du théorème 2.1.2, alors Γ agit proprement sur $(G \times G)/\Delta_G$ d'après le critère de propreté.

2.4.2 Groupes de torsion infinis en caractéristique non nulle

Soit $\mathbf{G} = \mathbf{SL}_2$ sur $\mathbf{k} = \mathbb{F}_q((t))$, où \mathbb{F}_q est un corps fini de caractéristique p . Donnons un exemple de sous-groupe de torsion discret infini de $G \times G$ qui agit proprement sur $(G \times G)/\Delta_G$ sans satisfaire les conclusions des théorèmes 2.1.1 et 2.1.2.

On a la décomposition de Cartan $G = KA^+K$, où $K = \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[[t]])$ et où A^+ est l'ensemble des matrices diagonales $\mathrm{diag}(a_1, a_2)$ de G telles que $|a_1| \geq |a_2|$ (cf. partie 2.3). Notons $\mu : G \rightarrow \mathbb{R}^+$ la projection de Cartan correspondante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$g_n = \begin{pmatrix} 1 & t^{-n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notons que pour $1 \leq r \leq p-1$ on a

$$\mu(g_n^r) = 2n,$$

comme on le voit par exemple en écrivant

$$g_n^r = \begin{pmatrix} 1 & rt^{-n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ t^n & r^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{-n} & 0 \\ 0 & t^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^{-1}t^n & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons Γ le sous-groupe de $G \times G$ engendré par les éléments (g_n, g_{2n}) et (g_{2n}, g_n) , où $n \in \mathbb{N}$. C'est un sous-groupe discret infini de G , résiduellement fini, de torsion (tous ses éléments non triviaux sont d'ordre p), qui agit proprement sur $(G \times G)/\Delta_G$ d'après le critère de propreté (cf. paragraphe 2.2.1). Il n'est pas virtuellement mono-gène, pourtant les composantes connexes de $E^+ \setminus C_{\Delta_G}$ contiennent toutes deux une infinité de points de la forme $\mu(\gamma)$, où $\gamma \in \Gamma$.

2.4.3 Quadriques de dimension trois sur un corps local

Comme nous l'avons indiqué au paragraphe 2.1.2, l'une des motivations pour notre étude de $(G \times G)/\Delta_G$ en rang un est son application aux quadriques de dimension 3 sur un corps local. Précisons ce point.

Soient \mathbf{k} un corps local et Q une forme quadratique sur \mathbf{k}^4 . D'après le théorème de Witt, la sphère unité

$$S(Q) = \{x \in \mathbf{k}^4, Q(x) = 1\}$$

s'identifie à l'espace homogène $\mathrm{SO}(Q)/H$, où $\mathbf{SO}(Q)$ est le groupe spécial orthogonal de Q et \mathbf{H} un \mathbf{k} -sous-groupe algébrique de $\mathbf{SO}(Q)$ défini comme le stabilisateur d'un certain point $x \in S(Q)$.

Si Q est anisotrope sur \mathbf{k} , le groupe $\mathrm{SO}(Q)$ est compact ([BoT], § 4.24) et tout sous-groupe discret de $\mathrm{SO}(Q)$ est fini et agit proprement sur $S(Q)$.

Supposons Q d'indice de Witt un, c'est-à-dire $\mathbf{SO}(Q)$ de \mathbf{k} -rang un. Si \mathbf{H} est anisotrope sur \mathbf{k} , alors H est compact et tout sous-groupe discret de $\mathrm{SO}(Q)$ agit proprement sur $S(Q)$. En revanche, si \mathbf{H} est de \mathbf{k} -rang un, les seuls sous-groupes discrets de $\mathrm{SO}(Q)$ qui agissent proprement sur $S(Q)$ sont les groupes finis : c'est le phénomène de Calabi-Markus ([Ko1], cor. 4.4). Par exemple, si $\mathbf{k} = \mathbb{R}$, toute forme quadratique Q d'indice de Witt un sur \mathbf{k}^4 est équivalente à $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$ ou à $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$. Dans le premier cas, $\mathrm{SO}(Q)$ (resp. H) est isomorphe à $\mathrm{SO}(1, 3)$ (resp. à $\mathrm{SO}(3)$), et tout sous-groupe discret de $\mathrm{SO}(Q)$ agit proprement sur $S(Q)$.

Dans le second cas, $\mathrm{SO}(Q)$ (resp. H) est isomorphe à $\mathrm{SO}(3, 1)$ (resp. à $\mathrm{SO}(2, 1)$), et les seuls sous-groupes discrets de $\mathrm{SO}(Q)$ qui agissent proprement sur $S(Q)$ sont les groupes finis.

Supposons maintenant Q d'indice de Witt deux, c'est-à-dire $\mathbf{SO}(Q)$ de \mathbf{k} -rang deux. Par exemple, si $\mathbf{k} = \mathbb{R}$, alors $\mathrm{SO}(Q)$ (resp. H) est isomorphe à $\mathrm{SO}(2, 2)$ (resp. à $\mathrm{SO}(1, 2)$). On peut supposer que Q est donnée par

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_4 - x_2x_3$$

et que \mathbf{H} est le stabilisateur de $x = (1, 0, 0, 1) \in S(Q)$. Notons que $S(Q)$ est naturellement munie d'une action transitive du groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbf{k}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbf{k})$. En effet, $\mathrm{SL}_2(\mathbf{k}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbf{k})$ agit sur $M_2(\mathbf{k})$ par multiplication à gauche et à droite, c'est-à-dire par $(g_1, g_2) \cdot u = g_1 u g_2^{-1}$ pour tout $(g_1, g_2) \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{k}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbf{k})$ et tout $u \in M_2(\mathbf{k})$. En identifiant $M_2(\mathbf{k})$ à \mathbf{k}^4 , on obtient une action linéaire de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{k}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbf{k})$ sur \mathbf{k}^4 qui préserve Q et est transitive sur $S(Q)$. Le stabilisateur de $x = (1, 0, 0, 1)$ dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{k}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbf{k})$ est $\Delta_{\mathrm{SL}_2(\mathbf{k})}$, donc la quadrique $S(Q)$ s'identifie à l'espace homogène $(\mathrm{SL}_2(\mathbf{k}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbf{k})) / \Delta_{\mathrm{SL}_2(\mathbf{k})}$. D'après le théorème 2.1.2, à la permutation près des deux facteurs de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{k}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbf{k})$, les sous-groupes discrets sans torsion de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{k}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbf{k})$ qui agissent proprement sur $S(Q)$ sont les graphes de la forme

$$\Gamma_0^\rho = \{(\gamma, \rho(\gamma)), \gamma \in \Gamma_0\},$$

où Γ_0 est un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{k})$ et $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbf{k})$ un morphisme de groupes tel que pour tout $R > 0$, on ait $\mu(\rho(\gamma)) \leq \mu(\gamma) - R$ pour presque tout $\gamma \in \Gamma_0$.

Chapitre 3

Une condition nécessaire et suffisante de cocompacité

3.1 Introduction

Soient \mathbf{k} un corps local et G l'ensemble des \mathbf{k} -points d'un \mathbf{k} -groupe algébrique semi-simple connexe de \mathbf{k} -rang un. Au chapitre 2, nous avons décrit les sous-groupes discrets sans torsion Γ de $G \times G$ qui agissent proprement sur G par multiplication à gauche et à droite ou, de manière équivalente, sur $(G \times G)/\Delta_G$. Dans ce chapitre, nous supposons \mathbf{k} ultramétrique et considérons, parmi ces sous-groupes Γ , ceux pour lesquels le quotient $\Gamma \backslash (G \times G)/\Delta_G$ est compact. Dans un premier temps, nous en donnons une description ; pour $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ par exemple, cela revient à décrire les quotients compacts de la quadrique de \mathbb{Q}_p^4 d'équation $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 1$, comme on l'a vu au paragraphe 2.4.3. Dans un second temps, nous établissons l'existence de quotients compacts $\Gamma \backslash (G \times G)/\Delta_G$ tels que Γ soit Zariski-dense dans $G \times G$. Précisons un peu ces deux points.

Supposons \mathbf{k} ultramétrique et soit $\mu : G \rightarrow E^+$ une projection de Cartan de G , où E est muni d'une norme euclidienne $\|\cdot\|$ comme dans les préliminaires. Comme \mathbf{G} est semi-simple de \mathbf{k} -rang un, E est une droite réelle et la norme $\|\cdot\|$ permet d'identifier E^+ à \mathbb{R}^+ ; on note encore μ l'application de G dans \mathbb{R}^+ ainsi obtenue. Par exemple, si $G = \mathrm{SL}_2(\mathbf{k})$, on a $G = KZ^+K$ où $K = \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ est l'ensemble des matrices de déterminant un à coefficients dans l'anneau des entiers de \mathbf{k} et Z^+ l'ensemble des matrices diagonales $\mathrm{diag}(a, a^{-1}) \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{k})$ telles que a soit de valeur absolue ≥ 1 ; la projection de Cartan associée $\mu : G \rightarrow \mathbb{R}^+$ envoie la matrice $\mathrm{diag}(a, a^{-1})$ sur $2|\omega(a)|$, où ω désigne une valuation (additive) fixée de \mathbf{k} .

Le résultat principal de ce chapitre est que pour tout sous-groupe discret de type fini sans torsion Γ_0 de G et pour tout morphisme de groupes $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$ admissible au sens du chapitre 2, le quotient $\Gamma \backslash (G \times G)/\Delta_G$ est compact si et seulement si le quotient $\Gamma_0 \backslash G$ l'est (théorème 3.3.1). Combiné au théorème 2.1.2, ceci nous donne une description des quotients compacts de $(G \times G)/\Delta_G$ par un sous-groupe discret de type fini sans torsion.

Théorème 3.1.1. *Soient \mathbf{k} un corps local ultramétrique, G l'ensemble des \mathbf{k} -points d'un \mathbf{k} -groupe algébrique semi-simple connexe de \mathbf{k} -rang un, Δ_G la diagonale de $G \times G$ et $\mu : G \rightarrow \mathbb{R}^+$ une projection de Cartan de G . À la permutation près des deux facteurs de $G \times G$, les sous-groupes discrets de type fini sans torsion de $G \times G$ agissant proprement et cocompactement sur $(G \times G)/\Delta_G$ sont les graphes de la forme*

$$\Gamma_0^\rho = \{(\gamma, \rho(\gamma)), \gamma \in \Gamma_0\},$$

où Γ_0 est un réseau cocompact sans torsion de G et $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$ un morphisme de groupes admissible, i.e. tel que pour tout $R > 0$ on ait $\mu(\rho(\gamma)) \leq \mu(\gamma) - R$ pour presque tout $\gamma \in \Gamma_0$.

Cette description est spécifique au rang un : nous donnons au paragraphe 3.3.4 un exemple de quotient compact $\Gamma \backslash (G \times G)/\Delta_G$ où $\text{rang}_{\mathbf{k}}(\mathbf{G}) \geq 2$ et où Γ est le produit de deux sous-groupes infinis de G .

Le fait que $\Gamma \backslash (G \times G)/\Delta_G$ soit compact si et seulement si Γ_0 est un réseau cocompact de G est également valable pour $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , par un argument de dimension cohomologique ([Ko1], cor. 5.5). Un tel argument ne convient pas lorsque \mathbf{k} est ultramétrique, car dans ce cas tout sous-groupe discret sans torsion de G est libre, donc de dimension cohomologique un.

Dans le cas ultramétrique, nous remplaçons l'argument cohomologique par un raisonnement géométrique sur l'arbre de Bruhat-Tits de G . Plus précisément, soit $G = KZ^+K$ la décomposition de Cartan de G associée à μ . Nous associons à tout élément $g \in G \setminus K$ un point ζ_g^- du bord de l'arbre de Bruhat-Tits de G , obtenu à partir d'une décomposition de Cartan de g . L'étude des points ζ_g^- nous permet de montrer que pour tout sous-groupe discret de type fini sans torsion Γ_0 de G et tout morphisme de groupes admissible $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$, si le groupe $\Gamma_0^\rho = \{(\gamma, \rho(\gamma)), \gamma \in \Gamma_0\}$ agit proprement et cocompactement sur $(G \times G)/\Delta_G$, alors Γ_0 est un réseau cocompact de G . Il s'agit du point le plus délicat de la démonstration du théorème 3.1.1.

Pour tout réseau cocompact sans torsion Γ_0 , les groupes $\Gamma_0 \times \{1\}$ et $\{1\} \times \Gamma_0$ agissent bien sûr librement, proprement et cocompactement sur $(G \times G)/\Delta_G$: les quotients compacts correspondants sont dits *standard*. Le théorème 3.1.1 permet de donner des exemples de quotients compacts non standard de $(G \times G)/\Delta_G$. Concernant leur adhérence de Zariski, nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 3.1.2. *Soient \mathbf{k} un corps local ultramétrique, G l'ensemble des \mathbf{k} -points d'un \mathbf{k} -groupe algébrique semi-simple connexe de \mathbf{k} -rang un et Δ_G la diagonale de $G \times G$. Il existe des sous-groupes discrets Γ de $G \times G$ agissant librement, proprement et cocompactement sur $(G \times G)/\Delta_G$ et qui sont Zariski-denses dans $G \times G$. On peut de plus choisir Γ de telle sorte qu'aucune de ses deux projections naturelles sur G ne soit bornée.*

La partie 3.2 est consacrée à des rappels sur les isométries d'arbres réels simpliciaux ; ces rappels nous seront également utiles au chapitre 4. Dans la partie 3.3, nous démontrons le théorème 3.1.1 en étudiant les points ζ_g^- du bord de l'arbre de Bruhat-Tits de G mentionnés ci-dessus. Enfin, la partie 3.4 est consacrée à la démonstration de la proposition 3.1.2.

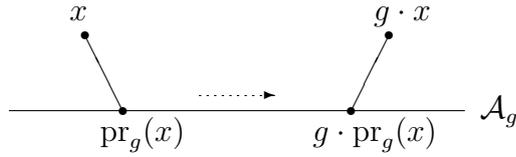


FIGURE 1 – Action d'un élément hyperbolique

3.2 Rappels : isométries d'un arbre réel simplicial

Nous considérons ici des arbres simpliciaux au sens de [Se3], déf. 6. Rappelons qu'un *arbre réel simplicial*, ou \mathbb{R} -*arbre simplicial*, est un arbre simplicial muni d'une distance pour laquelle l'image de tout chemin injectif est isométrique à un segment réel. Toutes les arêtes n'ont pas nécessairement la même longueur pour cette distance.

Fixons un arbre réel simplicial X de valence ≥ 2 , notons d la distance sur X et $\text{Isom}(X)$ le groupe des isométries bijectives de X envoyant sommet sur sommet et arête sur arête. Cette dernière condition est toujours vérifiée si X est de valence ≥ 3 . On munit $\text{Isom}(X)$ de la topologie pour laquelle les fixateurs (point par point) des parties compactes de X forment une base de voisinages compacts ouverts de l'identité. Le groupe $\text{Isom}(X)$ est localement compact pour cette topologie.

3.2.1 Isométries hyperboliques et elliptiques

Un élément $g \in \text{Isom}(X)$ est sans point fixe dans X si et seulement s'il existe une droite géodésique \mathcal{A}_g , stable par g , sur laquelle g agit par une translation non triviale ([Ti1], prop. 3.2, ou [Se3], prop. 25); on note alors $\lambda(g) > 0$ la longueur de cette translation et l'on dit que g est *hyperbolique*, d'*axe de translation* \mathcal{A}_g . La figure 1 illustre l'action de g sur X dans ce cas. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a bien sûr

$$\lambda(g^n) = |n| \lambda(g). \quad (3.2.1)$$

Comme X est un arbre, pour tout $x \in X$, le projeté $\text{pr}_g(x)$ de x sur \mathcal{A}_g est bien défini : c'est l'unique point de \mathcal{A}_g dont la distance à x est minimale. On a

$$\text{pr}_g(g \cdot x) = g \cdot \text{pr}_g(x) \quad \text{et} \quad d(g \cdot x, \mathcal{A}_g) = d(x, \mathcal{A}_g).$$

Les points x , $\text{pr}_g(x)$, $g \cdot \text{pr}_g(x)$ et $g \cdot x$ sont alignés dans cet ordre sur une même droite géodésique de X , d'où

$$\begin{aligned} d(x, g \cdot x) &= d(x, \text{pr}_g(x)) + d(\text{pr}_g(x), g \cdot \text{pr}_g(x)) + d(g \cdot \text{pr}_g(x), g \cdot x) \\ &= \lambda(g) + 2d(x, \mathcal{A}_g). \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

En particulier on a

$$\lambda(g) = \min_{x \in X} d(x, g \cdot x) > 0.$$

Un élément $g \in \text{Isom}(X)$ qui admet un point fixe dans X est dit *elliptique*; l'ensemble X_g de ses points fixes est alors un sous-arbre de X . La figure 2 illustre

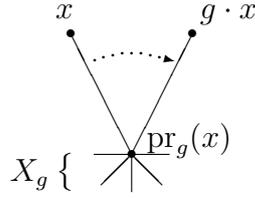


FIGURE 2 – Action d'un élément elliptique

l'action de g sur X dans ce cas. Si pour tout $x \in X$ on note $\text{pr}_g(x)$ le projeté de x sur X_g , alors $d(\text{pr}_g(x), x) = d(\text{pr}_g(x), g \cdot x)$. De plus, l'intersection des segments géodésiques $[\text{pr}_g(x), x]$ et $[\text{pr}_g(x), g \cdot x]$ est réduite à $\{\text{pr}_g(x)\}$, d'où

$$d(x, g \cdot x) = d(x, \text{pr}_g(x)) + d(\text{pr}_g(x), g \cdot x) = 2d(x, X_g). \quad (3.2.3)$$

Par analogie avec le cas hyperbolique, on pose

$$\lambda(g) = \min_{x \in X} d(x, g \cdot x) = 0.$$

3.2.2 Bord de l'arbre

Comme tout espace hyperbolique au sens de Gromov, l'arbre X admet un bord ∂X , défini comme l'ensemble des classes d'équivalence de demi-droites géodésiques de X pour la relation "être à distance de Hausdorff finie" ou, de manière équivalente ici, "être égales en dehors d'un compact". Si $\xi \in \partial X$ désigne la classe d'une demi-droite géodésique D , nous dirons que ξ est l'*extrémité à l'infini* de D . Fixons un point $x_0 \in X$ et un réel $q > 1$. Comme X est un arbre, pour tout $\xi \in \partial X$ il existe une unique demi-droite géodésique $D_{x_0}(\xi)$ d'extrémités $x_0 \in X$ et $\xi \in \partial X$. Pour tous $\xi, \xi' \in \partial X$ on pose $\underline{d}(\xi, \xi') = q^{-r}$, où

$$r = \sup \{d(x_0, x), x \in D_{x_0}(\xi) \cap D_{x_0}(\xi')\} \in [0, +\infty].$$

Ceci définit une distance \underline{d} sur ∂X . L'action naturelle de $\text{Isom}(X)$ sur ∂X est continue pour cette distance. Le fixateur de x_0 agit sur ∂X par isométries. Un élément $g \in \text{Isom}(X)$ est hyperbolique si et seulement s'il agit sur ∂X avec exactement deux points fixes, l'un attractif, noté ξ_g^+ , et l'autre répulsif, noté ξ_g^- ; ces points fixes sont les deux extrémités de l'axe de translation \mathcal{A}_g . Si $g \in \text{Isom}(X)$ est elliptique et fixe $\xi \in \partial X$, alors g fixe (point par point) toute une demi-droite de X d'extrémité ξ .

3.2.3 Groupes discrets sans torsion d'isométries

Un sous-groupe discret Γ_0 de $\text{Isom}(X)$ agit librement sur X si et seulement s'il est sans torsion. Dans ce cas Γ_0 est un groupe libre ([Se3], th. 4) et tous ses éléments non triviaux sont hyperboliques. Plus précisément, pour tout domaine fondamental connexe \mathcal{D} de X pour l'action de Γ_0 , si l'on pose

$$\mathcal{F} = \{\gamma \in \Gamma_0, \gamma \cdot \mathcal{D} \cap \mathcal{D} \neq \emptyset\}$$

et si \mathcal{F}' désigne une partie de \mathcal{F} telle que \mathcal{F} soit l'union disjointe de $\{1\}$, de \mathcal{F}' et de \mathcal{F}'^{-1} , alors \mathcal{F}' est une partie génératrice libre de Γ_0 ([Se3], th. 4'). Si Γ_0 est de type fini, c'est un groupe de Schottky au sens de [Lub], déf. 1.4.

L'union X_{Γ_0} des axes de translations \mathcal{A}_γ , où $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$, est un sous-arbre fermé de X , globalement stable par l'action de Γ_0 . On dit que l'action de Γ_0 sur X est *minimale* si $X_{\Gamma_0} = X$. Lorsque Γ_0 est de type fini, son action sur X est minimale si et seulement si le quotient $\Gamma_0 \backslash X$ est un graphe fini ([Bas], prop. 7.9, et [BaL], th. 9.7). Dans cette thèse, on appellera X_{Γ_0} le *sous-arbre Γ_0 -minimal* de X . Rappelons que l'ensemble limite de Γ_0 dans ∂X est par définition l'adhérence dans ∂X de l'ensemble des points fixes ξ_γ^+ , où $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$. Si l'action de Γ_0 sur X n'est pas minimale, l'ensemble limite de Γ_0 dans ∂X est un fermé strict de ∂X ; ceci nous sera utile dans la démonstration du lemme 3.3.5.

3.3 La condition de cocompacité

Cette partie est consacrée à la démonstration du théorème 3.1.1. Dans toute la partie, nous notons \mathbf{k} un corps local ultramétrique, G l'ensemble des \mathbf{k} -points d'un \mathbf{k} -groupe algébrique semi-simple connexe de \mathbf{k} -rang un et Δ_G la diagonale de $G \times G$. Nous fixons une décomposition de Cartan $G = KZ^+K$ et notons $\mu : G \rightarrow \mathbb{R}^+$ la projection de Cartan associée.

D'après le théorème 2.1.2, les sous-groupes discrets sans torsion de $G \times G$ agissant proprement sur $(G \times G)/\Delta_G$ sont, à la permutation près des deux facteurs de $G \times G$, les graphes de la forme

$$\Gamma_0^\rho = \{(\gamma, \rho(\gamma)), \gamma \in \Gamma_0\},$$

où Γ_0 est un sous-groupe discret sans torsion de G et $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$ un morphisme de groupes admissible (au sens du théorème 3.1.1). Pour démontrer le théorème 3.1.1, il suffit donc d'établir le résultat suivant.

Théorème 3.3.1. *Soient \mathbf{k} un corps local ultramétrique, G l'ensemble des \mathbf{k} -points d'un \mathbf{k} -groupe algébrique semi-simple connexe de \mathbf{k} -rang un et Δ_G la diagonale de $G \times G$. Soient Γ_0 un sous-groupe discret de type fini sans torsion de G et $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$ un morphisme de groupes admissible. Notons*

$$\Gamma_0^\rho = \{(\gamma, \rho(\gamma)), \gamma \in \Gamma_0\}$$

le graphe de ρ . Le quotient $\Gamma_0^\rho \backslash (G \times G)/\Delta_G$ est compact si et seulement si le quotient $\Gamma_0 \backslash G$ l'est.

Pour établir le théorème 3.3.1, nous utilisons l'existence d'un isomorphisme

$$\begin{aligned} (\mathbf{G} \times \mathbf{G})/\Delta_{\mathbf{G}} &\longrightarrow \mathbf{G} \\ (g, h) \Delta_{\mathbf{G}} &\longmapsto gh^{-1} \end{aligned}$$

de $(\mathbf{G} \times \mathbf{G})$ -variétés algébriques sur \mathbf{k} , où $\mathbf{G} \times \mathbf{G}$ agit sur $(\mathbf{G} \times \mathbf{G})/\Delta_{\mathbf{G}}$ par multiplication à gauche et sur \mathbf{G} par

$$(g_1, g_2) \cdot g = g_1 g g_2^{-1}.$$

Cet isomorphisme induit un isomorphisme de $(G \times G)$ -ensembles sur les \mathbf{k} -points.

Notons X l'arbre de Bruhat-Tits de G , muni de la distance d définie au paragraphe 1.2, et $x_0 \in X$ le point donné par (1.4.5). Notons également ∂X le bord de X , muni de la distance \underline{d} définie au paragraphe 3.2.2. Pour démontrer l'implication directe du théorème 3.3.1, nous introduisons certains points $\zeta_g^- \in \partial X$ obtenus à partir de la décomposition de Cartan $G = KZ^+K$.

3.3.1 Points de ∂X associés à la décomposition de Cartan $G = KZ^+K$

Pour tout élément hyperbolique $g \in G$, notons ξ_g^+ (resp. ξ_g^-) son point fixe attractif (resp. répulsif) dans ∂X . Notons $\xi_{Z^+}^-$ le point fixe répulsif commun à tous les éléments hyperboliques de Z^+ .

Pour tout $g \in G$, nous choisissons une décomposition de Cartan $g = k_g z_g \ell_g$, où $k_g, \ell_g \in K$ et $z_g \in Z^+$, et posons

$$\zeta_g^- = \ell_g^{-1} \cdot \xi_{Z^+}^- \in \partial X. \quad (3.3.1)$$

Le lemme suivant montre que lorsque g est hyperbolique et $\mu(g)$ grand, le point ζ_g^- est proche du point fixe répulsif ξ_g^- .

Lemme 3.3.2. *Pour tout élément hyperbolique $g \in G$, on a*

$$\underline{d}(\xi_g^-, \zeta_g^-) \leq q^{-\mu(g)/2}.$$

Démonstration. Soit $g \in G$ un élément hyperbolique. Les points $x_0, \text{pr}_{g^{-1}}(x_0), g^{-1} \cdot \text{pr}_{g^{-1}}(x_0)$ et $g^{-1} \cdot x_0$ sont alignés dans cet ordre, donc $g^{-1} \cdot \text{pr}_{g^{-1}}(x_0) \in D_{x_0}(\xi_g^-)$. D'autre part, comme K fixe x_0 , on a

$$g^{-1} \cdot x_0 = \ell_g^{-1} z_g^{-1} \cdot x_0 \in \ell_g^{-1} \cdot D_{x_0}(\xi_{Z^+}^-) = D_{x_0}(\zeta_g^-),$$

donc $g^{-1} \cdot \text{pr}_{g^{-1}}(x_0) \in D_{x_0}(\zeta_g^-)$ car X est un arbre. On en déduit

$$\underline{d}(\xi_g^-, \zeta_g^-) \leq q^{-d(x_0, g^{-1} \cdot \text{pr}_{g^{-1}}(x_0))}.$$

Or, d'après (1.4.5), (1.4.8) et (3.2.2) on a

$$\begin{aligned} d(x_0, g^{-1} \cdot \text{pr}_{g^{-1}}(x_0)) &= d(x_0, g^{-1} \cdot x_0) - d(g^{-1} \cdot x_0, g^{-1} \cdot \text{pr}_{g^{-1}}(x_0)) \\ &= \mu(g) - d(x_0, \mathcal{A}_g) \geq \frac{\mu(g)}{2}, \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

L'intérêt d'introduire les points ζ_g^- est de contrôler la projection de Cartan de certains éléments de G , comme dans le lemme suivant.

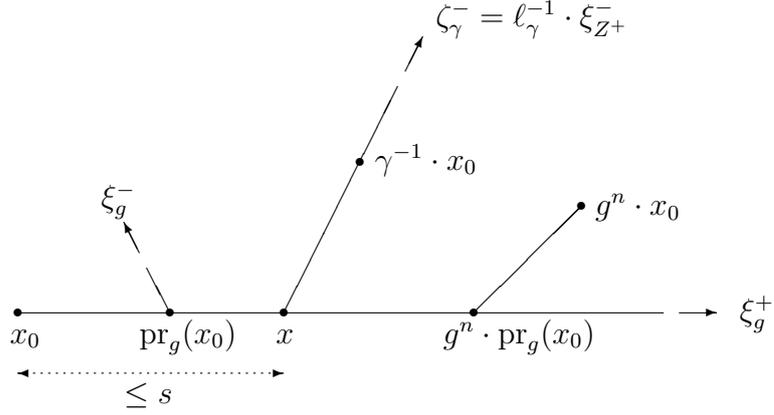


FIGURE 3 – Illustration du lemme 3.3.3

Lemme 3.3.3. *Pour tout élément hyperbolique $g \in G$ et tout réel $\varepsilon > 0$, il existe des constantes $C, N \geq 0$ telles que pour tout $\gamma \in G$ vérifiant $\underline{d}(\xi_g^+, \zeta_\gamma^-) \geq \varepsilon$ on ait*

$$\mu(\gamma g^n) \geq \mu(\gamma) + \mu(g^n) - C$$

pour tout entier $n > N$.

Démonstration. Soient $\varepsilon \in]0, 1]$ un réel et $g \in G$ un élément hyperbolique. Posons

$$s = -\log_q \varepsilon \geq 0$$

et montrons que $C = 2s$ et $N = s/\lambda(g)$ conviennent. La figure 3 illustre notre raisonnement. Pour tout $n \geq 1$, les points $x_0, \text{pr}_g(x_0)$ et $g^n \cdot \text{pr}_g(x_0)$ sont alignés dans cet ordre sur la demi-droite géodésique $D_{x_0}(\xi_g^+)$, d'où

$$d(x_0, g^n \cdot \text{pr}_g(x_0)) \geq d(\text{pr}_g(x_0), g^n \cdot \text{pr}_g(x_0)) = n \lambda(g). \quad (3.3.2)$$

Soit $\gamma \in G$ tel que $\underline{d}(\xi_g^+, \zeta_\gamma^-) \geq \varepsilon$. L'intersection $D_{x_0}(\xi_g^+) \cap D_{x_0}(\zeta_\gamma^-)$ est un segment géodésique dont l'une des extrémités est x_0 ; notons $x \in X$ son autre extrémité. On a $d(x_0, x) \leq s$ par hypothèse. Soit $n > s/\lambda(g)$ un entier. D'après (3.3.2) on a

$$d(x_0, g^n \cdot \text{pr}_g(x_0)) > d(x_0, x),$$

donc les points x_0, x et $g^n \cdot x_0$ sont alignés dans cet ordre et par (1.4.5) on a

$$d(x, g^n \cdot x_0) = \mu(g^n) - d(x_0, x). \quad (3.3.3)$$

Comme K fixe x_0 , on a $\gamma^{-1} \cdot x_0 = \ell_\gamma^{-1} z_\gamma^{-1} \cdot x_0$, et ce point appartient à $\ell_\gamma^{-1} \cdot D_{x_0}(\xi_{Z^+}^-) = D_{x_0}(\zeta_\gamma^-)$. Le point x appartient lui aussi à $D_{x_0}(\zeta_\gamma^-)$, donc

$$d(\gamma^{-1} \cdot x_0, x) = |d(x_0, \gamma^{-1} \cdot x_0) - d(x_0, x)|.$$

En utilisant (1.4.5) et (1.4.8), on obtient

$$d(\gamma^{-1} \cdot x_0, x) \geq \mu(\gamma) - d(x_0, x). \quad (3.3.4)$$

Or, x est le projeté de $g^n \cdot x_0$ sur $D_{x_0}(\zeta_\gamma^-)$, donc les points $\gamma^{-1} \cdot x_0$, x et $g^n \cdot x_0$ sont alignés dans cet ordre, d'où

$$d(\gamma^{-1} \cdot x_0, g^n \cdot x_0) = d(\gamma^{-1} \cdot x_0, x) + d(x, g^n \cdot x_0). \quad (3.3.5)$$

En utilisant (1.4.5), (3.3.3), (3.3.4), (3.3.5) et le fait que G agit sur X par isométries, on trouve

$$\begin{aligned} \mu(\gamma g^n) &= d(x_0, \gamma g^n \cdot x_0) \\ &= d(\gamma^{-1} \cdot x_0, g^n \cdot x_0) \\ &\geq \mu(\gamma) + \mu(g^n) - 2d(x_0, x), \end{aligned}$$

d'où le résultat puisque $d(x_0, x) \leq s$. □

3.3.2 Démonstration de l'implication directe du théorème 3.3.1

Pour obtenir l'implication directe du théorème 3.3.1, nous raisonnons par contradiction : il suffit de démontrer la proposition suivante.

Proposition 3.3.4. *Soient Γ_0 un sous-groupe discret de type fini sans torsion de G et $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$ un morphisme de groupes admissible. Si Γ_0 n'est pas cocompact dans G , alors pour tout $R > 0$ il existe un élément $g_R \in G$ tel que $\mu(\gamma g_R \rho(\gamma)^{-1}) \geq R$ pour tout $\gamma \in \Gamma_0$.*

Pour démontrer la proposition 3.3.4, nous établissons l'existence d'un élément hyperbolique $g \in G$ tel que pour presque tout $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$, le point $\zeta_\gamma^- \in \partial X$ donné par (3.3.1) soit suffisamment éloigné du point fixe attractif ξ_g^+ (lemme 3.3.5). Nous utilisons ensuite le lemme 3.3.3.

Lemme 3.3.5. *Soit Γ_0 un sous-groupe discret de type fini sans torsion de G , non cocompact dans G . Il existe un élément hyperbolique $g \in G$ et un réel $\varepsilon > 0$ tels que $\underline{d}(\xi_g^+, \zeta_\gamma^-) \geq \varepsilon$ pour presque tout $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$.*

Démonstration. Comme Γ_0 est discret, sans torsion, de type fini et non cocompact dans G , son ensemble limite dans ∂X est un fermé strict de ∂X (cf. paragraphe 3.2.3). Notons \mathcal{U} le complémentaire dans ∂X de cet ensemble limite. Soit $g \in G$ un élément hyperbolique tel que $\xi_g^+ \in \mathcal{U}$. Il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que

$$\{\xi \in \partial X, \underline{d}(\xi_g^+, \xi) < 2\varepsilon\} \subset \mathcal{U}.$$

Par définition on a alors $\underline{d}(\xi_g^+, \xi_\gamma^-) \geq 2\varepsilon$ pour tout $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$. Le lemme 3.3.2 implique

$$\underline{d}(\xi_g^+, \zeta_\gamma^-) \geq \underline{d}(\xi_g^+, \xi_\gamma^-) - \underline{d}(\xi_\gamma^-, \zeta_\gamma^-) \geq 2\varepsilon - q^{-\mu(\gamma)/2}$$

pour tout $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$. Or, l'application μ est propre et le groupe Γ_0 discret dans G , donc $q^{-\mu(\gamma)/2} \leq \varepsilon$ pour presque tout $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$. \square

Nous pouvons à présent démontrer la proposition 3.3.4.

Démonstration de la proposition 3.3.4. Supposons Γ_0 non cocompact dans G . D'après les lemmes 3.3.3 et 3.3.5, il existe un élément hyperbolique $g \in G$ et des réels $C, N \geq 0$ tels que pour tout $\gamma \in \Gamma_0$ en dehors d'un certain ensemble fini F , on ait

$$\mu(\gamma g^n) \geq \mu(\gamma) + \mu(g^n) - C \quad (3.3.6)$$

pour tout entier $n > N$. Soit $R > 0$. Comme ρ est admissible, on a

$$\mu(\rho(\gamma)) \leq \mu(\gamma) - R - C \quad (3.3.7)$$

pour tout $\gamma \in \Gamma_0$ en dehors d'un certain ensemble fini F' . Posons

$$R' = \max_{\gamma \in F \cup F'} (\mu(\gamma^{-1}) + \mu(\rho(\gamma))).$$

Comme g est hyperbolique, la suite $(\mu(g^n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers l'infini avec n d'après (1.4.5), (3.2.1) et (3.2.2). En particulier, il existe un entier $n > N$ tel que $\mu(g^n) \geq R + R'$. Fixons un tel $n > N$ et montrons que l'élément $g_R = g^n$ convient. D'après (1.4.9), (3.3.6) et (3.3.7), pour tout $\gamma \notin (F \cup F')$ on a

$$\begin{aligned} \mu(\gamma g^n \rho(\gamma)^{-1}) &\geq \mu(\gamma g^n) - \mu(\rho(\gamma)) \\ &\geq (\mu(\gamma) + \mu(g^n) - C) - (\mu(\gamma) - R - C) \\ &\geq R \end{aligned}$$

et pour tout $\gamma \in F \cup F'$ on a

$$\begin{aligned} \mu(\gamma g^n \rho(\gamma)^{-1}) &\geq \mu(g^n) - \mu(\gamma^{-1}) - \mu(\rho(\gamma)) \\ &\geq \mu(g^n) - R' \geq R. \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration de la proposition 3.3.4. \square

3.3.3 Démonstration de l'implication réciproque du théorème 3.3.1

Pour terminer la démonstration du théorème 3.3.1 (et donc du théorème 3.1.1), il suffit d'établir le résultat suivant.

Proposition 3.3.6. *Soient Γ_0 un réseau cocompact sans torsion de G et $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$ un morphisme de groupes admissible. Il existe une partie compacte \mathcal{C} de G telle que*

$$G = \{\gamma g \rho(\gamma)^{-1}, \gamma \in \Gamma_0, g \in \mathcal{C}\}.$$

Démonstration. Par cocompacité de Γ_0 dans G et continuité de μ , il existe un réel $R > 0$ tel que

$$G = \Gamma_0 \cdot \{g \in G, \mu(g) \leq R\}.$$

Comme ρ est admissible, on a

$$\mu(\rho(\gamma)) \leq \mu(\gamma) - 2R - 1$$

pour tout $\gamma \in \Gamma_0$ en dehors d'un certain ensemble fini F . Posons $R' = \max_{\gamma \in F} \mu(\gamma)$ et montrons que la partie

$$\mathcal{C} = \{g \in G, \mu(g) \leq R + R'\}$$

(qui est compacte par propriété de μ) convient. Pour cela, il suffit d'établir que pour tout $g \in G$ vérifiant $\mu(g) > R + R'$ il existe $\gamma \in \Gamma_0$ tel que $\mu(\gamma g \rho(\gamma)^{-1}) \leq \mu(g) - 1$; on peut alors conclure par récurrence.

Soit $g \in G$ tel que $\mu(g) > R + R'$. D'après ce qui précède, il existe $\gamma \in \Gamma_0$ tel que $\mu(\gamma g) \leq R$. Montrons que $\mu(\gamma g \rho(\gamma)^{-1}) \leq \mu(g) - 1$. D'après (1.4.9) on a

$$\mu(\gamma^{-1}) \geq \mu(g) - \mu(\gamma g) > R',$$

donc $\gamma^{-1} \notin F$, ce qui implique $\mu(\rho(\gamma)^{-1}) \leq \mu(\gamma^{-1}) - 2R - 1$. En utilisant (1.4.8) et (1.4.9), on trouve

$$\mu(\gamma^{-1}) \leq \mu(g) + \mu(g^{-1}\gamma^{-1}) \leq \mu(g) + R$$

et

$$\mu(\gamma g \rho(\gamma)^{-1}) \leq \mu(\gamma g) + \mu(\rho(\gamma)^{-1}) \leq \mu(\gamma^{-1}) - R - 1 \leq \mu(g) - 1.$$

Ceci achève la démonstration de la proposition 3.3.6. □

3.3.4 Le cas de rang supérieur

La description donnée par le théorème 3.1.1 est spécifique au rang un. En effet, voici un exemple de quotient compact $\Gamma \backslash (G \times G) / \Delta_G$ où $\text{rang}(\mathbf{G}) \geq 2$ et où Γ est le produit de deux sous-groupes infinis de G . Fixons un élément non carré $\beta \in \mathbf{k} \setminus \mathbf{k}^2$. Soient Q la forme quadratique sur \mathbf{k}^4 donnée par

$$Q(x_1, y_1, x_2, y_2) = (x_1^2 - \beta y_1^2) - (x_2^2 - \beta y_2^2)$$

et $\mathbf{G} = \mathbf{SO}(Q)$ le groupe spécial orthogonal de Q . Notons Q_1 la restriction de Q à $\mathbf{k}^3 \times \{0\}$ et soit $\mathbf{H}_1 = \mathbf{SO}(Q_1)$ le groupe spécial orthogonal de Q_1 , vu comme sous-groupe de \mathbf{G} . Choisissons une racine carrée $\sqrt{\beta}$ de β dans une clôture algébrique de \mathbf{k} et notons σ l'élément non trivial du groupe de Galois de l'extension quadratique $\mathbf{k}(\sqrt{\beta})/\mathbf{k}$. Soient h la forme hermitienne sur $\mathbf{k}(\sqrt{\beta})^2$ donnée par

$$h(z_1, z_2) = z_1 \sigma(z_1) - z_2 \sigma(z_2)$$

et $\mathbf{H}_2 = \mathbf{U}(h)$ le groupe unitaire de h . En identifiant $\mathbf{k}(\sqrt{\beta})$ à \mathbf{k}^2 par l'application qui à tout $x + \sqrt{\beta}y$ associe (x, y) , on voit \mathbf{H}_2 comme un sous-groupe de \mathbf{G} . Par un analogue ultramétrique de [Ko1], prop. 4.9, le groupe H_1 agit proprement et cocompactement sur G/H_2 , donc $H_1 \times H_2$ agit proprement et cocompactement sur $(G \times G)/\Delta_G$. Or, pour $i \in \{1, 2\}$ le groupe H_i admet un réseau cocompact sans torsion Γ_i ([Lub], th. A, et [Sel], lem. 8). Le groupe $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ agit alors librement, proprement et cocompactement sur $(G \times G)/\Delta_G$.

3.4 Existence de quotients compacts par des sous-groupes discrets Zariski-denses

Soient \mathbf{k} un corps local ultramétrique et G l'ensemble des \mathbf{k} -points d'un \mathbf{k} -groupe algébrique semi-simple connexe de \mathbf{k} -rang un. Dans cette partie, nous démontrons la proposition 3.1.2, qui affirme l'existence de sous-groupes discrets de $G \times G$ agissant librement, proprement et cocompactement sur $(G \times G)/\Delta_G$ et qui sont Zariski-denses dans $G \times G$.

3.4.1 Un voisinage formé de morphismes admissibles

Soient X et X' deux arbres réels simpliciaux de valence ≥ 2 et Γ_0 un sous-groupe de $\text{Isom}(X)$. Fixons des points $x_0 \in X$ et $x'_0 \in X'$. Nous dirons qu'un morphisme de groupes $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \text{Isom}(X')$ est *admissible* si pour tout $R > 0$ on a $d(x'_0, \rho(\gamma) \cdot x'_0) \leq d(x_0, \gamma \cdot x_0) - R$ pour presque tout $\gamma \in \Gamma_0$. Cette condition ne dépend pas du choix de x_0 et x'_0 .

Pour démontrer la proposition 3.1.2, nous utilisons le résultat suivant en prenant pour X et X' l'arbre de Bruhat-Tits de G .

Lemme 3.4.1. *Soient X et X' deux arbres réels simpliciaux de valence ≥ 2 et Γ_0 un sous-groupe discret de type fini sans torsion de $\text{Isom}(X)$. Fixons un domaine fondamental connexe \mathcal{D} de X pour l'action de Γ_0 , posons*

$$\mathcal{F} = \{\gamma \in \Gamma_0, \gamma \cdot \mathcal{D} \cap \mathcal{D} \neq \emptyset\}$$

et notons $\delta > 0$ la distance de \mathcal{D} au complémentaire de $\bigcup_{\gamma \in \mathcal{F}} \gamma \cdot \mathcal{D}$ dans X . Pour qu'un morphisme de groupes $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \text{Isom}(X')$ soit admissible, il suffit qu'il existe $x'_0 \in X'$ tel que $d(x'_0, \rho(\gamma) \cdot x'_0) < \delta$ pour tout $\gamma \in \mathcal{F}$.

Le lemme 3.4.1 transpose dans le cadre des arbres réels simpliciaux un raisonnement de Kobayashi sur les espaces riemanniens symétriques ([Ko5], th. 2.4), que nous reproduisons ici pour la commodité du lecteur.

Démonstration. Fixons un point x_0 dans l'intérieur de \mathcal{D} . Soit $\gamma \in \Gamma_0$. Notons n la partie entière de $d(x_0, \gamma \cdot x_0)/\delta$ et choisissons une suite $(x_i)_{i=1, \dots, n+1}$ de points du segment géodésique $[x_0, \gamma \cdot x_0]$ telle que $x_{n+1} = \gamma \cdot x_0$ et telle que pour tout $0 \leq i \leq n$ on ait $d(x_i, x_{i+1}) < \delta$. Par récurrence, on construit une suite $(\gamma_i)_{i=0, \dots, n}$ d'éléments

de Γ_0 telle que $x_{i+1} \in \gamma_0 \dots \gamma_i \cdot \mathcal{D}$ pour tout $0 \leq i \leq n$; par définition de δ et comme $d(x_i, x_{i+1}) < \delta$, on a $\gamma_i \in \mathcal{F}$ pour tout i . D'autre part, on a $x_{n+1} = \gamma \cdot x_0 \in \gamma_0 \dots \gamma_n \cdot \mathcal{D}$, donc x_0 appartient à la fois à l'intérieur de \mathcal{D} et à $(\gamma^{-1}\gamma_0 \dots \gamma_n) \cdot \mathcal{D}$. Comme \mathcal{D} est un domaine fondamental de X pour Γ_0 , on a $\gamma^{-1}\gamma_0 \dots \gamma_n = 1$, *i.e.* $\gamma = \gamma_0 \dots \gamma_n$. Si $\ell_{\mathcal{F}} : \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{N}$ désigne la longueur des mots associée à \mathcal{F} , on a

$$\ell_{\mathcal{F}}(\gamma) \leq n + 1 \leq \frac{d(x_0, \gamma \cdot x_0)}{\delta} + 1. \quad (3.4.1)$$

Soit $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \text{Isom}(X')$ un morphisme de groupes. Supposons qu'il existe $x'_0 \in X'$ tel que

$$M := \max \{d(x'_0, \rho(\gamma) \cdot x'_0), \gamma \in \mathcal{F}\} < \delta$$

et montrons que ρ est admissible. Pour tout $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$, on peut écrire $\gamma = \gamma_0 \dots \gamma_n$, où $\gamma_i \in \mathcal{F}$ pour tout i et où $\ell_{\mathcal{F}}(\gamma) = n + 1$; on a alors

$$\begin{aligned} d(x'_0, \rho(\gamma) \cdot x'_0) &= d(x'_0, \rho(\gamma_0 \dots \gamma_n) \cdot x'_0) \\ &\leq \sum_{i=0}^n d(\rho(\gamma_0 \dots \gamma_{i-1}) \cdot x'_0, \rho(\gamma_0 \dots \gamma_i) \cdot x'_0) \\ &= \sum_{i=0}^n d(x'_0, \rho(\gamma_i) \cdot x'_0), \end{aligned}$$

où l'on a posé $\gamma_{-1} = 1$ et utilisé le fait que les éléments de $\rho(\Gamma_0)$ sont des isométries de X' . Avec (3.4.1), on obtient

$$d(x'_0, \rho(\gamma) \cdot x'_0) \leq M \cdot \ell_{\mathcal{F}}(\gamma) \leq \frac{M}{\delta} d(x_0, \gamma \cdot x_0) + M$$

pour tout $\gamma \in \Gamma_0$. Or, pour tout $R > 0$ on a $\frac{M}{\delta} d(x_0, \gamma \cdot x_0) + M > d(x_0, \gamma \cdot x_0) - R$ si et seulement si $d(x_0, \gamma \cdot x_0) < \frac{M+R}{1-M/\delta}$. L'ensemble des éléments $\gamma \in \Gamma_0$ vérifiant cette inégalité est fini car Γ_0 est discret dans $\text{Isom}(X)$ et l'action de $\text{Isom}(X)$ sur X est propre par définition de la topologie sur $\text{Isom}(X)$. Ainsi, ρ est admissible. \square

3.4.2 Déformation de groupes discrets d'isométries d'arbres

Soient \mathbf{k} un corps local ultramétrique et G l'ensemble des \mathbf{k} -points d'un \mathbf{k} -groupe algébrique semi-simple connexe de \mathbf{k} -rang un. Il est bien connu que pour tout réseau cocompact sans torsion Γ_0 de G , il existe un voisinage $\mathcal{V}_0 \subset \text{Hom}(\Gamma_0, G)$ de l'inclusion naturelle tel que pour tout $\sigma \in \mathcal{V}_0$, le groupe $\sigma(\Gamma_0)$ soit un réseau cocompact sans torsion de G ([Lub], prop. 1.7 et th. 2.1). De plus, comme les applications λ et μ sont continues à valeurs discrètes, pour toute partie finie F de Γ_0 il existe un voisinage $\mathcal{V}_F \subset \text{Hom}(\Gamma_0, G)$ de l'inclusion naturelle tel que pour tout $\sigma \in \mathcal{V}_F$ on ait $\lambda(\sigma(\gamma)) = \lambda(\gamma)$ et $\mu(\sigma(\gamma)) = \mu(\gamma)$ pour tout $\gamma \in F$.

Dans ce paragraphe, nous remarquons qu'il existe un voisinage $\mathcal{V} \subset \text{Hom}(\Gamma_0, G)$ de l'inclusion naturelle tel que pour tout $\sigma \in \mathcal{V}$ on ait $\lambda(\sigma(\gamma)) = \lambda(\gamma)$ et $\mu(\sigma(\gamma)) =$

$\mu(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \Gamma_0$, sans restriction à une partie finie F . Nous nous plaçons dans le cadre plus général des groupes discrets de type fini sans torsion d'isométries d'arbres réels simpliciaux ; pour démontrer la proposition 3.1.2 nous prendrons pour X l'arbre de Bruhat-Tits de G .

Lemme 3.4.2. *Soit X un arbre réel simplicial de valence ≥ 2 , soit Γ_0 un sous-groupe discret de type fini sans torsion de $\text{Isom}(X)$ et soit X_{Γ_0} le sous-arbre Γ_0 -minimal de X . Pour tout domaine fondamental connexe \mathcal{D} de X_{Γ_0} pour l'action de Γ_0 , et pour tout point $x_0 \in \mathcal{D}$, il existe un voisinage $\mathcal{V} \subset \text{Hom}(\Gamma_0, G)$ de l'inclusion naturelle tel que pour tout $\sigma \in \mathcal{V}$,*

- le morphisme σ soit injectif,
- le groupe $\sigma(\Gamma_0)$ soit discret dans $\text{Isom}(X)$,
- l'action de $\sigma(\Gamma_0)$ sur X soit cocompacte si celle de Γ_0 l'est, avec \mathcal{D} comme domaine fondamental,
- on ait $\lambda(\sigma(\gamma)) = \lambda(\gamma)$ et $d(x_0, \sigma(\gamma) \cdot x_0) = d(x_0, \gamma \cdot x_0)$ pour tout $\gamma \in \Gamma_0$.

Rappelons que le sous-arbre Γ_0 -minimal X_{Γ_0} est l'union des axes de translation des éléments non triviaux de Γ_0 . Il est stable par Γ_0 , et l'action de Γ_0 sur X_{Γ_0} est libre, propre et cocompacte. On a $X_{\Gamma_0} = X$ si et seulement si l'action de Γ_0 sur X est cocompacte (cf. paragraphe 3.2.3).

Démonstration. Soit \mathcal{D} un domaine fondamental connexe (donc compact) de X_{Γ_0} pour l'action de Γ_0 et soit $x_0 \in \mathcal{D}$. L'ensemble \mathcal{F} des éléments $\gamma \in \Gamma_0$ tels que $\gamma \cdot \mathcal{D} \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$ est fini, donc

$$\mathcal{D}_1 = \bigcup_{\gamma \in \mathcal{F}} \gamma \cdot \mathcal{D}$$

est un compact de X . Le fixateur (point par point) $K_{\mathcal{D}_1}$ de \mathcal{D}_1 dans $\text{Isom}(X)$ est un voisinage de l'identité dans $\text{Isom}(X)$, en tant qu'intersection des fixateurs des extrémités des arêtes de X rencontrant \mathcal{D}_1 . Par conséquent, l'ensemble

$$\mathcal{V} = \{ \sigma \in \text{Hom}(\Gamma_0, \text{Isom}(X)), \quad \sigma(\gamma) \in \gamma K_{\mathcal{D}_1} \quad \forall \gamma \in \mathcal{F} \}$$

est un voisinage de l'inclusion naturelle dans $\text{Hom}(\Gamma_0, \text{Isom}(X))$.

Pour voir que \mathcal{V} vérifie les propriétés du lemme 3.4.2, il suffit de montrer que pour tout $\sigma \in \mathcal{V}$ il existe une isométrie σ -équivariante $f_\sigma : X_{\Gamma_0} \rightarrow X$ fixant x_0 , qui soit de plus surjective si l'action de Γ_0 sur X est cocompacte. En effet, si une telle isométrie f_σ existe, alors σ est injectif, et $\sigma(\Gamma_0)$ est discret dans $\text{Isom}(X)$ et agit librement, proprement et cocompactement sur $f_\sigma(X_{\Gamma_0})$, avec $f_\sigma(\mathcal{D})$ comme domaine fondamental. Pour tout $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$, l'image par f_σ de l'axe de translation \mathcal{A}_γ de γ est l'axe de translation $\mathcal{A}_{\sigma(\gamma)}$ de $\sigma(\gamma)$, et $\lambda(\sigma(\gamma)) = \lambda(\gamma)$. En particulier, le sous-arbre $\sigma(\Gamma_0)$ -minimal $X_{\sigma(\Gamma_0)}$ de X est $f_\sigma(X_{\Gamma_0})$. Enfin, comme f_σ est une isométrie σ -équivariante fixant x_0 , on a

$$d(x_0, \sigma(\gamma) \cdot x_0) = d(f_\sigma(x_0), f_\sigma(\gamma \cdot x_0)) = d(x_0, \gamma \cdot x_0)$$

pour tout $\gamma \in \Gamma_0$. Si l'action de Γ_0 sur X est cocompacte, on a $X_{\Gamma_0} = X$, et si de plus f_σ est surjective, on a $X_{\sigma(\Gamma_0)} = f_\sigma(X_{\Gamma_0}) = X$, donc l'action de $\sigma(\Gamma_0)$ sur X est cocompacte.

Fixons donc un morphisme $\sigma \in \mathcal{V}$ et établissons l'existence d'une isométrie σ -équivariante $f_\sigma : X_{\Gamma_0} \rightarrow X$ fixant x_0 , qui soit de plus surjective si l'action de Γ_0 sur X est cocompacte. Pour tout $x \in \mathcal{D}$ et tout $\gamma \in \Gamma_0$ tels que $\gamma \cdot x \in \mathcal{D}$, on a $\sigma(\gamma) \cdot x = \gamma \cdot x$; on peut donc définir une application $f_\sigma : X_{\Gamma_0} \rightarrow X$ en posant $f_\sigma(\gamma \cdot x) = \sigma(\gamma) \cdot x$ pour tout $\gamma \in \Gamma_0$ et tout $x \in \mathcal{D}$. Par construction, f_σ est σ -équivariante et fixe x_0 . Montrons que c'est une isométrie. Comme la restriction de f_σ à \mathcal{D}_1 est l'identité, comme f_σ est σ -équivariante et comme Γ_0 et $\sigma(\Gamma_0)$ sont des groupes d'isométries, la restriction de f_σ à tout translaté $\gamma \cdot \mathcal{D}_1$, où $\gamma \in \Gamma_0$, est une isométrie. Comme les translatsés par Γ_0 de l'intérieur de \mathcal{D}_1 recouvrent X_{Γ_0} , on en déduit que f_σ est une isométrie locale. Comme X_{Γ_0} est un arbre, c'est une isométrie globale (cf. remarque 4.2.7). Supposons l'action de Γ_0 sur X cocompacte, c'est-à-dire $X_{\Gamma_0} = X$, et montrons que f_σ est surjective. La réunion $X_{\mathcal{D}}$ des translatsés par $\sigma(\Gamma_0)$ de \mathcal{D} est ouverte dans X , en tant que réunion des translatsés par $\sigma(\Gamma_0)$ de l'intérieur de \mathcal{D}_1 . Elle est également fermée car toute suite de points de $X_{\mathcal{D}}$ qui converge dans X est contenue à partir d'un certain rang dans une boule de X de diamètre $\leq r$, où $r > 0$ désigne la distance de \mathcal{D} à $X \setminus \mathcal{D}_1$, donc dans un translaté par $\sigma(\Gamma_0)$ de \mathcal{D}_1 (car $\sigma(\Gamma_0)$ est un groupe d'isométries). Par connexité de X , on a $X_{\mathcal{D}} = X$, et donc

$$f_\sigma(X) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_0} f_\sigma(\gamma \cdot \mathcal{D}) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_0} \sigma(\gamma) \cdot f_\sigma(\mathcal{D}) = X_{\mathcal{D}} = X.$$

Ainsi, $f_\sigma : X \rightarrow X$ est bien surjective dans ce cas. Ceci termine la démonstration. \square

Soient \mathbf{k} un corps local et G l'ensemble des \mathbf{k} -points d'un \mathbf{k} -groupe algébrique semi-simple connexe \mathbf{G} . Si $\text{rang}_{\mathbf{k}}(\mathbf{G}) = 1$, le lemme 3.4.2 s'applique aux déformations des réseaux cocompacts sans torsion de G en prenant pour X l'arbre de Bruhat-Tits de G . Notons que pour \mathbf{k} de caractéristique nulle, l'existence de telles déformations non triviales est spécifique au rang un : si $\text{rang}_{\mathbf{k}}(\mathbf{G}) \geq 2$, le théorème de super-rigidité de Margulis implique la rigidité locale des réseaux cocompacts irréductibles de G ([Ma3], th. VII.5.25.A).

3.4.3 Démonstration de la proposition 3.1.2

Soient X l'arbre de Bruhat-Tits de G et $\ell > 0$ la longueur commune des arêtes de X . En s'inspirant de la démonstration du théorème 2.1 de [Lub], par exemple, on construit facilement un réseau cocompact sans torsion Γ_0 de G admettant un domaine fondamental connexe \mathcal{D} dans X qui contient dans son intérieur le point x_0 donné par (1.4.5) et tel que, en posant

$$\mathcal{F} = \{\gamma \in \Gamma_0, \gamma \cdot \mathcal{D} \cap \mathcal{D} \neq \emptyset\},$$

la distance δ de \mathcal{D} au complémentaire de $\bigcup_{\gamma \in \mathcal{F}} \gamma \cdot \mathcal{D}$ dans X soit supérieure à 2ℓ . Soit \mathcal{F}' une partie de \mathcal{F} telle que \mathcal{F} soit l'union disjointe de $\{1\}$, de \mathcal{F}' et de \mathcal{F}'^{-1} . Le groupe Γ_0 est libre, librement engendré par \mathcal{F}' , donc tout morphisme de Γ_0 dans G est entièrement déterminé par son image sur \mathcal{F}' .

Soient $\gamma_1 \neq \gamma_2$ deux éléments de \mathcal{F}' . Rappelons qu'un élément de G est dit *régulier* si la composante neutre de son centralisateur dans \mathbf{G} est un tore maximal de \mathbf{G} . L'ensemble des éléments réguliers de G est un ouvert de Zariski de G ([Bo2], th. 12.3). Par conséquent, si l'on note $\mathcal{V} \subset \text{Hom}(\Gamma_0, G)$ le voisinage de l'inclusion naturelle donné par le lemme 3.4.2, alors $\mathcal{V} \cdot \gamma_1$ contient un élément régulier γ'_1 . Comme $\delta \geq 2\ell$, l'ensemble des éléments $g \in G$ tels que $0 < \lambda(g) \leq \mu(g) < \delta$ est un ouvert non vide de G ; il contient donc un élément régulier γ''_1 . Par un résultat de Tits ([Ti3], prop. 4.4), la réunion des sous-groupes stricts de $G \times G$ qui contiennent (γ'_1, γ''_1) et qui sont Zariski-fermés et Zariski-connexes est incluse dans un fermé de Zariski strict F_1 de $G \times G$. Comme précédemment, l'ouvert de Zariski $(G \times G) \setminus F_1$ contient un élément régulier (γ'_2, γ''_2) tel que $\gamma'_2 \in \mathcal{V} \cdot \gamma_2$ et $0 < \lambda(\gamma''_2) \leq \mu(\gamma''_2) < \delta$. Par construction, le groupe engendré par (γ'_1, γ''_1) et (γ'_2, γ''_2) est Zariski-dense dans $G \times G$ et sa projection sur chacun des facteurs de $G \times G$ est non bornée.

Soit $\sigma : \Gamma_0 \rightarrow G$ le morphisme de groupes défini par $\sigma(\gamma_i) = \gamma'_i$ pour $i \in \{1, 2\}$ et $\sigma(\gamma) = \gamma$ pour $\gamma \in \mathcal{F}' \setminus \{\gamma_1, \gamma_2\}$. Par construction, on a $\sigma \in \mathcal{V}$. Pour tout $\gamma \in \mathcal{F}' \setminus \{\gamma_1, \gamma_2\}$, choisissons un élément $g_\gamma \in G$ tel que $\mu(g_\gamma) < \delta$. Soit $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$ le morphisme de groupes défini par $\rho(\gamma_i) = \gamma''_i$ pour $i \in \{1, 2\}$ et $\rho(\gamma) = g_\gamma$ pour $\gamma \in \mathcal{F}' \setminus \{\gamma_1, \gamma_2\}$. Le groupe

$$\Gamma = \{(\sigma(\gamma), \rho(\gamma)), \gamma \in \Gamma_0\}$$

est Zariski-dense dans $G \times G$ et sa projection sur chacun des facteurs de $G \times G$ est non bornée. Comme $\sigma \in \mathcal{V}$, le morphisme σ est injectif, le groupe $\sigma(\Gamma_0)$ est un réseau cocompact sans torsion de G de domaine fondamental \mathcal{D} dans X et δ est la distance de \mathcal{D} au complémentaire de $\bigcup_{\gamma \in \mathcal{F}} \sigma(\gamma) \cdot \mathcal{D}$ dans X . Par construction on a $\mu(\rho(\gamma)) < \delta$ pour tout $\gamma \in \mathcal{F}'$, donc le morphisme $\rho \circ \sigma^{-1} : \sigma(\Gamma_0) \rightarrow G$ est admissible d'après le lemme 3.4.1 et les égalités (1.4.5) et (1.4.8). Le théorème 3.1.1 assure que le groupe Γ agit librement, proprement et cocompactement sur $(G \times G)/\Delta_G$, ce qui termine la démonstration de la proposition 3.1.2.

Chapitre 4

Déformation de quotients compacts ultramétriques

4.1 Introduction

Soit \mathbf{k} un corps local ultramétrique. Dans ce chapitre, nous nous intéressons encore une fois aux quotients compacts des espaces homogènes de la forme $(G \times G)/\Delta_G$ où G est l'ensemble des \mathbf{k} -points d'un \mathbf{k} -groupe algébrique semi-simple connexe de \mathbf{k} -rang un. Au chapitre 3 nous avons donné une description de ces quotients compacts. De plus, en établissant l'existence de sous-groupes discrets Zariski-denses de $G \times G$ agissant librement, proprement et cocompactement sur $(G \times G)/\Delta_G$, nous avons vu qu'en déformant légèrement dans $G \times G$ un sous-groupe discret de type fini sans torsion de la forme $\Gamma_0 \times \{1\}$, son action restait libre, propre et cocompacte (lemmes 3.4.1 et 3.4.2). Dans ce chapitre, nous généralisons ce résultat aux déformations de tous les sous-groupes discrets de type fini sans torsion de $G \times G$ agissant proprement sur $(G \times G)/\Delta_G$.

Théorème 4.1.1. *Soient \mathbf{k} un corps local ultramétrique, G l'ensemble des \mathbf{k} -points d'un \mathbf{k} -groupe algébrique semi-simple connexe de \mathbf{k} -rang un et Γ un sous-groupe discret de type fini sans torsion de $G \times G$ agissant proprement sur $(G \times G)/\Delta_G$. Il existe un voisinage $\mathcal{U} \subset \text{Hom}(\Gamma, G \times G)$ de l'inclusion naturelle formé de morphismes injectifs et tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{U}$, le groupe $\varphi(\Gamma)$ soit discret dans $G \times G$ et agisse proprement sur $(G \times G)/\Delta_G$.*

On note ici $\text{Hom}(\Gamma, G \times G)$ l'ensemble des morphismes de groupes de Γ dans $G \times G$, muni de la topologie compacte-ouverte. Pour toute partie génératrice finie F de Γ , une suite $(\varphi_n) \in \text{Hom}(\Gamma, G \times G)^{\mathbb{N}}$ converge vers un élément $\varphi \in \text{Hom}(\Gamma, G \times G)$ si et seulement si $\varphi_n(\gamma) \rightarrow \varphi(\gamma)$ pour tout $\gamma \in F$.

En utilisant la condition nécessaire et suffisante de cocompacité donnée par le théorème 3.3.1 et le fait qu'en déformant légèrement un réseau cocompact sans torsion de G on obtient encore un réseau cocompact sans torsion (lemme 3.4.2), on en déduit le résultat suivant.

Corollaire 4.1.2. *Sous les hypothèses du théorème 4.1.1, si Γ agit proprement et cocompactement sur $(G \times G)/\Delta_G$, il existe un voisinage $\mathcal{U} \subset \text{Hom}(\Gamma, G \times G)$ de l’inclusion naturelle formé de morphismes injectifs et tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{U}$, le groupe $\varphi(\Gamma)$ soit discret dans $G \times G$ et agisse proprement et cocompactement sur $(G \times G)/\Delta_G$.*

Rappelons qu’en caractéristique nulle, tout sous-groupe de type fini de $G \times G$ est virtuellement sans torsion d’après le lemme de Selberg ([Sel], lem. 8); l’hypothèse “sans torsion” dans le théorème 4.1.1 et le corollaire 4.1.2 n’est donc pas très contraignante lorsque \mathbf{k} est un corps p -adique.

Le corollaire 4.1.2 est un analogue ultramétrique d’un résultat connu pour $\text{SL}_2(\mathbb{R})$, dont nous donnons une nouvelle démonstration au chapitre 5. Notons que pour $\text{SL}_2(\mathbb{C})$, ou plus généralement pour un groupe réel semi-simple G de rang réel un non localement isomorphe à $\text{SL}_2(\mathbb{R})$, le corollaire 4.1.2 n’est connu que dans le cas très particulier où Γ est contenu dans l’un des deux facteurs de $G \times G$. Ceci est dû à Ghys ([Ghy], lem. 2.1) pour $G = \text{SL}_2(\mathbb{C})$, à Kobayashi ([Ko5], th. 2.4) pour G réel semi-simple quelconque de rang réel un; c’est également une conséquence du théorème 6.1.1 que nous démontrons au chapitre 6.

4.1.1 Stratégie de démonstration

Le théorème 4.1.1 découle d’un résultat général sur les groupes d’isométries d’arbres réels simpliciaux (proposition 4.2.1). Plus précisément, pour tout arbre réel simplicial X et toute isométrie $g \in \text{Isom}(X)$, notons

$$\lambda(g) = \inf_{x \in X} d(x, g \cdot x) \geq 0 \quad (4.1.1)$$

la *longueur de translation* de g , où d désigne la distance de X . L’application $\lambda : \text{Isom}(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$ ainsi définie est continue pour la topologie compacte-ouverte. Par exemple, si X est l’arbre de Bruhat-Tits de $G = \text{SL}_2(\mathbf{k})$, on a $\lambda(g) = |\omega(a_g) - \omega(a'_g)|$ pour tout $g \in G$, où a_g et a'_g désignent les deux valeurs propres de g et ω une valuation (additive) fixée sur \mathbf{k} . Pour tout arbre réel simplicial X et tout sous-groupe discret sans torsion Γ_0 de $\text{Isom}(X)$, on a $\lambda(\gamma) > 0$ pour tout $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$. Quitte à remplacer X par le sous-arbre formé des axes de translation des éléments non triviaux de Γ_0 , on peut supposer que le quotient $\Gamma_0 \backslash X$ est compact. Dans la partie 4.2, nous montrons que dans ce cas, pour tout arbre réel simplicial X' et tout morphisme de groupes $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \text{Isom}(X')$, la borne supérieure des quotients $\lambda(\rho(\gamma))/\lambda(\gamma)$, où $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$, est égale à la plus petite constante de Lipschitz d’une application $f : X \rightarrow X'$ qui est ρ -équivariante, au sens où

$$f(\gamma \cdot x) = \rho(\gamma) \cdot f(x)$$

pour tout $\gamma \in \Gamma_0$ et tout $x \in X$. Nous montrons que cette borne supérieure est atteinte sur une partie finie F de $\Gamma_0 \setminus \{1\}$ indépendante de X' et de ρ , ce qui généralise un résultat non publié de T. White sur l’outre-espace, dont une preuve a été donnée par Francaviglia et Martino [FM]. Nous en déduisons le résultat suivant.

Théorème 4.1.3. *Soient \mathbf{k} un corps local ultramétrique, G l'ensemble des \mathbf{k} -points d'un \mathbf{k} -groupe algébrique semi-simple connexe de \mathbf{k} -rang un et Γ_0 un sous-groupe discret de type fini sans torsion de G . Pour tout morphisme de groupes $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$, notons $C_\rho^\mu \geq 0$ la borne inférieure des réels $C \geq 0$ tels que l'ensemble $\{\mu(\rho(\gamma)) - C\mu(\gamma), \gamma \in \Gamma_0\} \subset \mathbb{R}$ soit majoré.*

1. *Il existe une partie finie F de $\Gamma_0 \setminus \{1\}$ telle que pour tout morphisme $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$ on ait*

$$C_\rho^\mu = \sup_{\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}} \frac{\lambda(\rho(\gamma))}{\lambda(\gamma)} = \max_{\gamma \in F} \frac{\lambda(\rho(\gamma))}{\lambda(\gamma)},$$

où $\lambda : G \rightarrow \mathbb{R}^+$ désigne l'application définie par (4.1.1) pour l'action de G sur son arbre de Bruhat-Tits.

2. *Un morphisme $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$ est admissible si et seulement si $C_\rho^\mu < 1$.*

Ainsi, le caractère admissible d'un morphisme $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$ dépend d'un nombre fini de conditions ouvertes, ce qui prouve que l'ensemble des morphismes admissibles est ouvert dans $\text{Hom}(\Gamma_0, G)$. Ceci implique le théorème 4.1.1 grâce à une propriété des déformations des sous-groupes discrets de type fini sans torsion de G déjà vue au chapitre 3 (lemme 3.4.2).

Notons que la condition suffisante du point 2 est immédiate sachant que μ est propre et Γ_0 discret : le morphisme ρ est admissible dès que $C_\rho^\mu < 1$. Réciproquement, si ρ est admissible on a l'inégalité large $C_\rho^\mu \leq 1$. Toute la difficulté du point 2 tient au fait que nous voulons obtenir une inégalité stricte.

4.1.2 Un résultat complémentaire

Une autre application du théorème 4.1.3 est la suivante.

Corollaire 4.1.4. *Soient \mathbf{k} un corps local ultramétrique, G l'ensemble des \mathbf{k} -points d'un \mathbf{k} -groupe algébrique semi-simple connexe de \mathbf{k} -rang un et Γ_0 un réseau cocompact sans torsion de G . Il n'existe pas de morphisme de groupes admissible $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$ qui soit injectif d'image discrète.*

Le corollaire 4.1.4 est également valable pour $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ et $G = \text{SL}_2(\mathbb{R})$ comme conséquence de l'existence, due à Thurston [Thu], d'une "distance asymétrique" sur l'espace de Teichmüller de $\Gamma_0 \setminus \mathbb{H}^2$ (cf. chapitre 5). Pour démontrer le corollaire 4.1.4 pour un corps local \mathbf{k} ultramétrique, nous remplaçons l'espace de Teichmüller de $\Gamma_0 \setminus \mathbb{H}^2$ par l'outre-espace OS_n de rang n égal au rang du groupe libre Γ_0 (cf. partie 4.4).

Voici le plan du chapitre. La partie 4.2 établit le résultat général sur les groupes d'isométries d'arbres réels simpliciaux que nous avons évoqué ci-dessus (proposition 4.2.1). Nous en déduisons les théorèmes 4.1.3 puis 4.1.1 dans la partie 4.3. Enfin, dans la partie 4.4 nous décrivons le lien entre la proposition 4.2.1 et l'outre-espace et démontrons le corollaire 4.1.4.

4.2 Longueurs de translation et constantes de Lipschitz

Reprenons les notations du paragraphe 3.2. Le but de cette partie est de démontrer le résultat suivant.

Proposition 4.2.1. *Soient X et X' deux arbres réels simpliciaux de valence ≥ 2 , soit Γ_0 un sous-groupe discret sans torsion de $\text{Isom}(X)$ tel que le quotient $\Gamma_0 \backslash X$ soit un graphe fini, et soit $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \text{Isom}(X')$ un morphisme de groupes.*

1. *Il existe une application ρ -équivariante et lipschitzienne de X dans X' .*
2. *La borne inférieure $C_\rho \geq 0$ des constantes de Lipschitz de telles applications est atteinte.*
3. *Fixons un point $x_0 \in X$ et soit F le sous-ensemble fini de $\Gamma_0 \setminus \{1\}$ formé des éléments γ tels que $d(x_0, \gamma \cdot x_0) \leq 4L_0$, où L_0 désigne la somme des longueurs des arêtes de $\Gamma_0 \backslash X$. On a*

$$\sup_{\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}} \frac{\lambda(\rho(\gamma))}{\lambda(\gamma)} = \max_{\gamma \in F} \frac{\lambda(\rho(\gamma))}{\lambda(\gamma)} = C_\rho.$$

On dit ici que $f : X \rightarrow X'$ est ρ -équivariante si $f(\gamma \cdot x) = \rho(\gamma) \cdot f(x)$ pour tout $\gamma \in \Gamma_0$ et tout $x \in X$. On note d la distance sur X ou X' .

Remarquons que l'hypothèse que Γ_0 est un sous-groupe discret sans torsion de $\text{Isom}(X)$ tel que $\Gamma_0 \backslash X$ soit un graphe fini est équivalente à l'hypothèse que Γ_0 est un groupe libre de type fini agissant sur X librement, minimalement, par isométries (cf. paragraphe 3.2.3).

Notons que pour tout élément $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$, tout point $x \in X$ sur l'axe de translation \mathcal{A}_γ et toute application ρ -équivariante et C -lipschitzienne $f : X \rightarrow X'$, on a

$$\lambda(\rho(\gamma)) \leq d(f(x), \rho(\gamma) \cdot f(x)) = d(f(x), f(\gamma \cdot x)) \leq C d(x, \gamma \cdot x) = C \lambda(\gamma).$$

L'inégalité

$$\sup_{\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}} \frac{\lambda(\rho(\gamma))}{\lambda(\gamma)} \leq C_\rho \tag{4.2.1}$$

en résulte immédiatement. Le point 3 de la proposition 4.2.1 affirme que cette inégalité est une égalité et que la borne supérieure dans le terme de gauche est atteinte sur un sous-ensemble fini F indépendant de ρ .

Dans le cas particulier où ρ est injectif d'image discrète et cocompacte, ce résultat est équivalent à un résultat de T. White obtenu en étudiant une certaine "distance asymétrique" sur l'outre-espace ([FM], prop. 3.15) : nous renvoyons à la partie 4.4 pour plus de détails. Nous nous inspirons de la preuve de White, qui nous a été aimablement communiquée par Mladen Bestvina.

4.2.1 Applications équivariantes affines par morceaux

Pour démontrer la proposition 4.2.1, il nous suffira de considérer des applications ρ -équivariantes $f : X \rightarrow X'$ qui sont *affines par morceaux*, au sens où pour toute arête e de X il existe une constante $C_e \geq 0$ telle que

$$d(f(x_1), f(x_2)) = C_e d(x_1, x_2) \quad (4.2.2)$$

pour tous $x_1, x_2 \in e$.

Remarque 4.2.2. *Une application $f : X \rightarrow X'$ affine par morceaux est entièrement déterminée par les images par f des sommets de X .*

Le point 1 de la proposition 4.2.1 est facile.

Démonstration du point 1 de la proposition 4.2.1. Montrons qu'il existe une application ρ -équivariante et affine par morceaux de X dans X' . Comme $\Gamma_0 \backslash X$ est un graphe fini, il existe un système fini S de représentants de l'ensemble des sommets de X modulo l'action de Γ_0 . Pour tout $s \in S$, choisissons un point $x'_s \in X'$. D'après la remarque 4.2.2, il existe une unique application affine par morceaux $f : X \rightarrow X'$ telle que $f(\gamma \cdot s) = \rho(\gamma) \cdot x'_s$ pour tout $\gamma \in \Gamma_0$ et tout $s \in S$. Cette application est ρ -équivariante.

D'autre part, toute application ρ -équivariante et affine par morceaux $f : X \rightarrow X'$ est lipschitzienne. En effet, comme $\Gamma_0 \backslash X$ est un graphe fini, il existe un système fini E de représentants de l'ensemble des arêtes de X modulo l'action de Γ_0 . L'application f est lipschitzienne de constante $\max_{e \in E} C_e$, où C_e est donnée par (4.2.2). \square

4.2.2 Une constante de Lipschitz minimale

Dans le cas particulier où ρ est injectif d'image discrète et cocompacte, le quotient $\rho(\Gamma_0) \backslash X'$ est un graphe fini. Toute application ρ -équivariante et lipschitzienne de X dans X' induit une application lipschitzienne de $\Gamma_0 \backslash X$ dans $\rho(\Gamma_0) \backslash X'$, et réciproquement toute application lipschitzienne de $\Gamma_0 \backslash X$ dans $\rho(\Gamma_0) \backslash X'$ se relève en une application ρ -équivariante et lipschitzienne de X dans X' ; les constantes de Lipschitz sont préservées. Le point 2 de la proposition 4.2.1 est alors une conséquence immédiate du théorème d'Ascoli.

Le cas général est plus compliqué : un argument supplémentaire est nécessaire pour montrer que l'on peut se ramener à des applications à valeurs dans un compact de X' et appliquer le théorème d'Ascoli. Nous allons distinguer plusieurs cas selon le nombre de points fixes du groupe $\rho(\Gamma_0)$ dans $\partial X'$. Commençons par un lemme.

Lemme 4.2.3. *Soient X' un arbre réel simplicial, $g_1, \dots, g_n \in \text{Isom}(X')$ des isométries sans point fixe commun dans X' et $R' \geq 0$ un réel. Posons*

$$\mathcal{C} = \{x' \in X', \quad d(x', g_i \cdot x') \leq R' \quad \forall i\}.$$

– Si les g_i n'admettent pas de point fixe commun dans $\partial X'$, alors \mathcal{C} est compact.

- Si les g_i admettent un unique point fixe commun ξ' dans $\partial X'$, il existe un entier $1 \leq i_0 \leq n$ tel que g_{i_0} soit hyperbolique ainsi qu'une sous-demi-droite géodésique D de l'axe de translation $\mathcal{A}_{g_{i_0}}$, d'extrémité ξ' , telle que $d(x', D) \leq R'/2$ pour tout $x' \in \mathcal{C}$.
- Si les g_i admettent deux points fixes communs dans $\partial X'$, il existe un entier $1 \leq i_0 \leq n$ tel que g_{i_0} soit hyperbolique et l'on a $d(x', \mathcal{A}_{g_{i_0}}) \leq R'/2$ pour tout $x' \in \mathcal{C}$.

Démonstration. Pour tout i , si g_i est hyperbolique, notons X'_i l'axe de translation de g_i dans X' . Si g_i est elliptique, notons X'_i l'ensemble des points fixes de g_i dans X' ; c'est un sous-arbre de X' et les points fixes de g_i dans $\partial X'$ sont exactement les extrémités à l'infini des demi-droites géodésiques incluses dans X'_i . D'après (3.2.2) et (3.2.3), on a $d(x', X'_i) \leq R'/2$ pour tout $x' \in \mathcal{C}$ et tout $1 \leq i \leq n$.

Supposons que les g_i n'admettent pas de point fixe commun dans $\partial X'$ et qu'ils soient tous elliptiques. Alors l'intersection des X'_i est vide car les g_i n'admettent pas de point fixe commun dans X' par hypothèse. Comme X' est un arbre, il existe deux entiers i_1 et i_2 tels que $X'_{i_1} \cap X'_{i_2} = \emptyset$. Pour tout $x' \in \mathcal{C}$, nous avons vu que $d(x', X'_i) \leq R'/2$ pour tout i . On en déduit facilement que $d(x', x'') \leq R'/2$ pour tout $x' \in \mathcal{C}$, où x'' désigne le projeté de X'_{i_1} sur X'_{i_2} . Ainsi, le fermé \mathcal{C} est borné, donc compact.

Supposons que les g_i n'admettent pas de point fixe commun dans $\partial X'$ et qu'il existe un entier $1 \leq i_0 \leq n$ tel que g_{i_0} soit hyperbolique. Alors l'intersection des X'_i est un sous-ensemble convexe fermé de la droite géodésique X'_{i_0} . Il ne contient pas de demi-droite géodésique par hypothèse, donc c'est un segment géodésique I , défini comme l'intersection de deux sous-demi-droites géodésiques D_1 et D_2 de X'_{i_0} . Comme X' est un arbre, il existe deux entiers i_1 et i_2 tels que $X'_{i_0} \cap X'_{i_1} \subset D_1$ et $X'_{i_0} \cap X'_{i_2} \subset D_2$. Pour tout $x' \in \mathcal{C}$, nous avons vu que $d(x', X'_i) \leq R'/2$ pour tout i . Si l'on avait $d(x', D_1) > R'/2$, le projeté de x' sur X'_{i_1} serait l'extrémité dans X' de la demi-droite D_1 et l'on aurait $d(x', X'_{i_1}) = d(x', D_1) > R'/2$, d'où une contradiction. Par conséquent, on a $d(x', D_1) \leq R'/2$ pour tout $x' \in \mathcal{C}$, et de même $d(x', D_2) \leq R'/2$ pour tout $x' \in \mathcal{C}$. Comme X' est un arbre, on en déduit $d(x', I) \leq R'/2$ pour tout $x' \in \mathcal{C}$. Ainsi, le fermé \mathcal{C} est borné, donc compact.

Supposons que les g_i admettent un unique point fixe commun ξ' dans $\partial X'$. Si tous les g_i étaient elliptiques, il existerait une demi-droite géodésique d'extrémité ξ' fixée (point par point) par tous les g_i , ce qui contredirait le fait que les g_i n'ont pas de point fixe commun dans X' . Par conséquent, il existe un entier $1 \leq i_0 \leq n$ tel que g_{i_0} soit hyperbolique. L'intersection des X'_i est un sous-ensemble convexe de la droite géodésique X'_{i_0} ; comme les g_i admettent ξ' comme unique point fixe commun dans $\partial X'$, cette intersection est une sous-demi-droite géodésique D de X'_{i_0} d'extrémité ξ' . Considérons un entier $1 \leq i_1 \leq n$ tel que $X'_{i_0} \cap X'_{i_1} = D$. Pour tout $x' \in \mathcal{C}$, nous avons vu que $d(x', X'_i) \leq R'/2$ pour tout i . Si l'on avait $d(x', D) > R'/2$, le projeté de x' sur X'_{i_1} serait l'extrémité dans X' de la demi-droite D et l'on aurait $d(x', X'_{i_1}) = d(x', D) > R'/2$, d'où une contradiction. Ainsi, on a $d(x', D) \leq R'/2$ pour tout $x' \in \mathcal{C}$.

Supposons que les g_i admettent deux points fixes communs dans $\partial X'$. Par le même argument que ci-dessus, il existe un entier $1 \leq i_0 \leq n$ tel que g_{i_0} soit hyperbolique. D'après ce qui précède, on a $d(x', X'_{i_0}) \leq R'/2$ pour tout $x' \in \mathcal{C}$. \square

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le point 2 de la proposition 4.2.1.

Démonstration du point 2 de la proposition 4.2.1. Si le groupe $\rho(\Gamma_0)$ admet un point fixe x' dans X' , alors l'application constante $f : X \rightarrow X'$ d'image $\{x'\}$ est ρ -équivariante, de constante de Lipschitz nulle donc minimale. *Dans tout le reste de la démonstration, nous supposons donc $\rho(\Gamma_0)$ sans point fixe dans X' .* Soit \mathcal{D} un domaine fondamental connexe pour l'action de Γ_0 sur X . L'ensemble

$$\mathcal{F} = \{\gamma \in \Gamma_0, \gamma \cdot \mathcal{D} \cap \mathcal{D} \neq \emptyset\}$$

est un système générateur fini de Γ_0 . Comme X est un arbre, pour tout $\gamma \in \mathcal{F} \setminus \{1\}$ il existe un unique couple (x_γ, y_γ) de points de \mathcal{D} tels que $\gamma \cdot x_\gamma = y_\gamma$. Fixons un réel $C > C_\rho$. La restriction de X à \mathcal{D} induit une bijection entre l'ensemble \mathcal{S} des applications ρ -équivariantes et C -lipschitziennes $f : X \rightarrow X'$ et l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$ des applications C -lipschitziennes $f' : \mathcal{D} \rightarrow X'$ telles que $f'(y_\gamma) = \rho(\gamma) \cdot f'(x_\gamma)$ pour tout $\gamma \in \mathcal{F} \setminus \{1\}$. Cette bijection préserve les constantes de Lipschitz. Notons que $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$ est fermé dans l'ensemble des applications continues de \mathcal{D} dans X' et uniformément équicontinu pour la topologie de la convergence uniforme. Pour pouvoir appliquer le théorème d'Ascoli, nous allons nous ramener à un sous-ensemble de $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$ formé d'applications à valeurs dans un compact fixé de X' , en distinguant plusieurs cas selon le nombre de points fixes de $\rho(\Gamma_0)$ dans $\partial X'$. Commençons par remarquer que si l'on pose

$$R = \max \{d(x, \gamma \cdot x), x \in \mathcal{D}, \gamma \in \mathcal{F}\} > 0,$$

alors pour tout $f' \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}}$ l'image $f'(\mathcal{D})$ est incluse dans le fermé

$$\mathcal{C} = \{x' \in X', d(x', \rho(\gamma) \cdot x') \leq CR \quad \forall \gamma \in \mathcal{F}\}.$$

Si $\rho(\Gamma_0)$ n'a pas de point fixe dans $\partial X'$, alors \mathcal{C} est compact d'après le lemme 4.2.3. On peut donc appliquer directement le théorème d'Ascoli, qui affirme que l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$ est compact pour la topologie de la convergence uniforme. On en déduit l'existence d'un élément $f' \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}}$, et donc d'un élément $f \in \mathcal{S}$, de constante de Lipschitz C_ρ minimale.

Supposons que $\rho(\Gamma_0)$ admette un unique point fixe ξ' dans $\partial X'$. D'après le lemme 4.2.3, il existe une isométrie hyperbolique $g \in \rho(\mathcal{F})$ et une sous-demi-droite géodésique D de l'axe de translation \mathcal{A}_g , d'extrémité ξ' , telle que $d(f'(x), D) \leq CR/2$ pour tout $f' \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}}$ et tout $x \in \mathcal{D}$. Quitte à remplacer g par g^{-1} , on peut supposer que ξ' est le point fixe répulsif de g dans $\partial X'$. Soit $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$ dont la constante de Lipschitz tend vers C_ρ . Si l'on note x'_0 l'extrémité de D dans X' , alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un entier $m_n \in \mathbb{N}$ tel que $g^{m_n} \cdot f'_n(\mathcal{D})$ soit inclus dans le compact

$$\mathcal{C}' = \left\{ x' \in X', d(x', x'_0) \leq \lambda(g) + \frac{CR}{2} \right\}.$$

Pour tout $\gamma \in \Gamma_0$, la suite $(g^{m_n} \rho(\gamma) g^{-m_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée : en effet, comme $\rho(\gamma)$ fixe $\xi' \in \partial X'$ par hypothèse, il existe une demi-droite D_γ incluse dans D telle que $\rho(\gamma) \cdot D_\gamma \subset D$; pour tout $x' \in D_\gamma$ on a $g^{m_n} \rho(\gamma) g^{-m_n} \cdot x' = \rho(\gamma) \cdot x'$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $(g^{m_n} \rho(\gamma) g^{-m_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée par définition de la topologie sur $\text{Isom}(X')$ (cf. partie 3.2). Quitte à extraire une sous-suite, on peut donc supposer que pour tout $\gamma \in \mathcal{F}$ la suite $(g^{m_n} \rho(\gamma) g^{-m_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge. En particulier, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et tout $\gamma \in \mathcal{F}$, les isométries $g^{m_n} \rho(\gamma) g^{-m_n}$ et $g^{m_N} \rho(\gamma) g^{-m_N}$ coïncident sur le compact \mathcal{C}' . Pour tout $n \geq N$ et tout $\gamma \in \mathcal{F} \setminus \{1\}$ on a alors

$$\begin{aligned} (g^{m_n - m_N} \cdot f'_n)(y_\gamma) &= g^{m_n - m_N} \rho(\gamma) \cdot f'_n(x_\gamma) \\ &= g^{-m_N} (g^{m_n} \rho(\gamma) g^{-m_n}) \cdot (g^{m_n} \cdot f'_n(x_\gamma)) \\ &= g^{-m_N} (g^{m_N} \rho(\gamma) g^{-m_N}) \cdot (g^{m_n} \cdot f'_n(x_\gamma)) \\ &= \rho(\gamma) \cdot (g^{m_n - m_N} \cdot f'_n)(x_\gamma). \end{aligned}$$

Comme de plus g est une isométrie de X' , l'application $g^{m_n - m_N} \cdot f'_n$ a même constante de Lipschitz que f'_n ; elle appartient donc à $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$ pour tout $n \geq N$. L'image de $g^{m_n - m_N} \cdot f'_n$ étant incluse dans le compact $g^{-m_N} \cdot \mathcal{C}'$, on peut appliquer le théorème d'Ascoli, qui affirme que la suite $(g^{m_n - m_N} \cdot f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est d'adhérence compacte dans le fermé $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$ pour la topologie de la convergence uniforme. En particulier, cette suite admet une sous-suite qui converge vers un certain $f' \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}}$. Comme la constante de Lipschitz de f'_n tend vers C_ρ , celle de $g^{m_n - m_N} \cdot f'_n$ aussi, et f' est de constante de Lipschitz C_ρ minimale.

Le cas où $\rho(\Gamma_0)$ admet deux points fixes ξ'_1 et ξ'_2 dans $\partial X'$ se traite de manière analogue. Plus précisément, d'après le lemme 4.2.3, il existe une isométrie hyperbolique $g \in \rho(\mathcal{F})$ telle que $d(f'(x), \mathcal{A}_g) \leq CR/2$ pour tout $f' \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}}$ et tout $x \in \mathcal{D}$. Soit $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$ dont la constante de Lipschitz tend vers C_ρ . Si x'_0 désigne un point quelconque fixé de \mathcal{A}_g , alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un entier $m_n \in \mathbb{Z}$ tel que $g^{m_n} \cdot f'_n(\mathcal{D})$ soit inclus dans le compact

$$\mathcal{C}' = \left\{ x' \in X', \quad d(x', x'_0) \leq \lambda(g) + \frac{CR}{2} \right\}.$$

Pour tout $\gamma \in \Gamma_0$, la suite $(g^{m_n} \rho(\gamma) g^{-m_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée : en effet, la droite \mathcal{A}_g est (globalement) stable par $\rho(\gamma)$ car $\rho(\gamma)$ fixe ses extrémités $\xi'_1, \xi'_2 \in \partial X'$ par hypothèse; pour tout $x' \in \mathcal{A}_g$ on a $g^{m_n} \rho(\gamma) g^{-m_n} \cdot x' = \rho(\gamma) \cdot x'$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $(g^{m_n} \rho(\gamma) g^{-m_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée par définition de la topologie sur $\text{Isom}(X')$ (cf. partie 3.2). On conclut comme dans le cas où $\rho(\Gamma_0)$ n'admet qu'un seul point fixe dans $\partial X'$. \square

Remarque 4.2.4. *La constante de Lipschitz minimale C_ρ est atteinte par une application affine par morceaux.*

En effet, si $f : X \rightarrow X'$ est une application ρ -équivariante et C_ρ -lipschitzienne, alors l'application affine par morceaux $f_a : X \rightarrow X'$ telle que $f_a(s) = f(s)$ pour tout sommet s de X (donnée par la remarque 4.2.2) est encore ρ -équivariante et C_ρ -lipschitzienne.

4.2.3 Arêtes f -maximales

Fixons désormais deux arbres réels simpliciaux X et X' de valence ≥ 2 , un sous-groupe discret sans torsion Γ_0 de $\text{Isom}(X)$ tel que le quotient $\Gamma_0 \backslash X$ soit un graphe fini, et un morphisme de groupes $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \text{Isom}(X')$. Soit $C_\rho \geq 0$ la constante de Lipschitz minimale donnée par le point 2 de la proposition 4.2.1. Fixons une application ρ -équivariante, affine par morceaux et C_ρ -lipschitzienne $f : X \rightarrow X'$.

Nous dirons qu'une arête e de X est f -maximale si la restriction de f à e est affine de constante C_ρ . Comme f est ρ -équivariante et comme Γ_0 et $\rho(\Gamma_0)$ sont des groupes d'isométries, une arête e de X est f -maximale si et seulement si l'arête $\gamma \cdot e$ est f -maximale pour tout $\gamma \in \Gamma_0$. En particulier, la notion d'arête f -maximale passe au quotient $\Gamma_0 \backslash X$.

Pour toutes arêtes e_1 et e_2 de X incidentes en un sommet s , notons $e_1 \sim_f e_2$ si $f(e_1) \cap f(e_2)$ est d'intérieur non vide dans X' . Ceci définit une relation d'équivalence \sim_f sur l'ensemble des arêtes de X d'extrémité s . Comme précédemment, cette relation induit une relation d'équivalence \sim_f sur l'ensemble des arêtes de $\Gamma_0 \backslash X$ incidentes en \bar{s} , où \bar{s} désigne l'image de s dans $\Gamma_0 \backslash X$.

Pour démontrer le point 3 de la proposition 4.2.1, nous aimerions prouver l'existence d'un élément $\gamma \in F$ tel que f soit affine de constante C_ρ sur l'axe de translation \mathcal{A}_γ . Pour cela, nous verrons qu'il suffit de prouver l'existence d'un lacet de $\Gamma_0 \backslash X$ passant au plus deux fois par chaque sommet de $\Gamma_0 \backslash X$, entièrement formé d'arêtes f -maximales et dont deux arêtes consécutives appartiennent toujours à des classes d'équivalence différentes pour la relation \sim_f . L'existence d'un tel lacet sera assurée si f vérifie une certaine condition de minimalité : il suffira que le nombre d'arêtes f -maximales dans le graphe fini $\Gamma_0 \backslash X$ soit minimal (au sens où pour toute application ρ -équivariante, affine par morceaux et C_ρ -lipschitzienne $g : X \rightarrow X'$, le nombre d'arêtes g -maximales de $\Gamma_0 \backslash X$ est supérieur au nombre d'arêtes f -maximales). Avant de démontrer l'existence d'un tel lacet (lemme 4.2.6), commençons par établir qu'une condition nécessaire est vérifiée.

Lemme 4.2.5. *Supposons que le nombre d'arêtes f -maximales de $\Gamma_0 \backslash X$ est minimal. En tout sommet de X qui est extrémité d'une arête f -maximale, il existe au moins deux classes d'équivalence d'arêtes f -maximales pour la relation \sim_f .*

Démonstration. Soit s_0 un sommet de X . Supposons par l'absurde que toutes les arêtes f -maximales d'extrémité s_0 appartiennent à la même classe d'équivalence pour la relation \sim_f : cela signifie qu'il existe un segment géodésique I d'intérieur non vide dans X' , d'extrémité $f(s_0)$, qui est contenu dans l'image $f(e)$ de toute arête f -maximale e d'extrémité s_0 . D'après la remarque 4.2.2, pour tout $x' \in I$ il existe une unique application affine par morceaux $f_{x'} : X \rightarrow X'$ telle que $f_{x'}(\gamma \cdot s_0) = \rho(\gamma) \cdot x'$ pour tout $\gamma \in \Gamma_0$ et $f_{x'}(s) = f(s)$ pour tout sommet $s \notin \Gamma_0 \cdot s_0$; elle est ρ -équivariante. Montrons que pour $x' \in I \setminus \{f(s_0)\}$ suffisamment proche de $f(s_0)$, l'application $f_{x'}$ est C_ρ -lipschitzienne et l'ensemble des arêtes $f_{x'}$ -maximales est strictement inclus dans l'ensemble des arêtes f -maximales, ce qui contredira la minimalité de C_ρ et du nombre d'arêtes f -maximales de $\Gamma_0 \backslash X$.

Si e est une arête de X dont les extrémités n'appartiennent pas à l'orbite $\Gamma_0 \cdot s_0$, alors la restriction de $f_{x'}$ à e est égale à la restriction de f à e . En particulier, e est $f_{x'}$ -maximale si et seulement si elle est f -maximale.

Soit e une arête de X d'extrémités s_0 et $s \notin \Gamma_0 \cdot s_0$. La restriction de f (resp. de $f_{x'}$) à e est affine de constante

$$\frac{d(f(s_0), f(s))}{d(s_0, s)} \quad \left(\text{resp.} \quad \frac{d(x', f(s))}{d(s_0, s)} \right).$$

Si e n'est pas f -maximale, alors e n'est pas $f_{x'}$ -maximale pour x' suffisamment proche de $f(s_0)$, par continuité de l'application $x' \mapsto d(x', f(s))$. Si e est f -maximale, alors pour $x' \in I \setminus \{f(s_0)\}$ on a $d(x', f(s)) < d(f(s_0), f(s))$ donc e n'est pas $f_{x'}$ -maximale.

Soit e une arête de X d'extrémités s_0 et $\gamma \cdot s_0$, où $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$. La restriction de f (resp. de $f_{x'}$) à e est affine de constante

$$\frac{d(f(s_0), \rho(\gamma) \cdot f(s_0))}{d(s_0, \gamma \cdot s_0)} \quad \left(\text{resp.} \quad \frac{d(x', \rho(\gamma) \cdot x')}{d(s_0, \gamma \cdot s_0)} \right).$$

Si e n'est pas f -maximale, alors e n'est pas $f_{x'}$ -maximale pour x' suffisamment proche de $f(s_0)$, par continuité de l'application $x' \mapsto d(x', \rho(\gamma) \cdot x')$. Supposons que e est f -maximale et montrons que e n'est pas $f_{x'}$ -maximale pour $x' \in I \setminus \{f(s_0)\}$. Comme e est f -maximale, $\gamma^{-1} \cdot e$ l'est aussi, donc l'intersection $f(\gamma^{-1} \cdot e) \cap f(e)$ contient I . Or,

$$f(\gamma^{-1} \cdot e) \cap f(e) = [\rho(\gamma)^{-1} \cdot f(s_0), f(s_0)] \cap [f(s_0), \rho(\gamma) \cdot f(s_0)]$$

est le plus court chemin entre $f(s_0)$ et $X'_{\rho(\gamma)}$, où $X'_{\rho(\gamma)}$ désigne soit l'axe de translation, soit l'ensemble des points fixes de $\rho(\gamma)$ dans X' , selon que $\rho(\gamma)$ est hyperbolique ou elliptique (cf. paragraphe 3.2.1). Pour tout $x' \in I \setminus \{f(s_0)\}$ on a donc $d(x', X'_{\rho(\gamma)}) < d(f(s_0), X'_{\rho(\gamma)})$. D'après (3.2.2) et (3.2.3), ceci implique

$$\begin{aligned} d(x', \rho(\gamma) \cdot x') &= \lambda(\rho(\gamma)) + 2d(x', X'_{\rho(\gamma)}) \\ &< \lambda(\rho(\gamma)) + 2d(f(s_0), X'_{\rho(\gamma)}) \\ &= d(f(s_0), \rho(\gamma) \cdot f(s_0)). \end{aligned}$$

Ainsi, e n'est pas $f_{x'}$ -maximale, ce qui termine la démonstration du lemme 4.2.5. \square

4.2.4 Un lacet d'étirement maximal

Démontrons à présent, sous l'hypothèse de minimalité précédente, l'existence d'un élément $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$ tel que f soit affine de constante C_ρ sur l'axe de translation \mathcal{A}_γ et tel que le lacet image de \mathcal{A}_γ dans $\Gamma_0 \setminus X$ passe au plus deux fois par chaque sommet.

Lemme 4.2.6. *Supposons que le nombre d'arêtes f -maximales de $\Gamma_0 \setminus X$ est minimal. Il existe un élément $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$ dont l'image dans $\Gamma_0 \setminus X$ de l'axe de translation \mathcal{A}_γ est un lacet passant au plus deux fois par chaque sommet de $\Gamma_0 \setminus X$, dont toutes les arêtes sont f -maximales et dont deux arêtes consécutives appartiennent toujours à des classes d'équivalence différentes pour la relation \sim_f .*

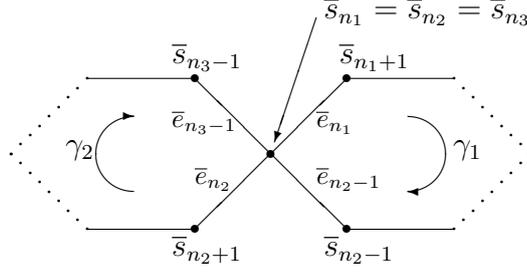


FIGURE 4 – Illustration du lemme 4.2.6, dans $\Gamma_0 \backslash X$

Démonstration. Notons \mathcal{L}_f l'ensemble des lacets de $\Gamma_0 \backslash X$ dont toutes les arêtes sont f -maximales et dont deux arêtes consécutives appartiennent toujours à des classes d'équivalence différentes pour la relation \sim_f . Pour toute arête e (resp. pour tout sommet s) de X , notons \bar{e} (resp. \bar{s}) son image dans $\Gamma_0 \backslash X$.

Commençons par montrer que \mathcal{L}_f admet un élément non trivial. Soit e_0 une arête f -maximale de X , d'extrémités s_0 et s_1 . Le lemme 4.2.5 permet de construire par récurrence une suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sommets de X telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les sommets s_n et s_{n+1} soient les deux extrémités d'une même arête f -maximale e_n , et les arêtes e_n et e_{n+1} appartiennent à des classes d'équivalence différentes pour la relation \sim_f . Comme $\Gamma_0 \backslash X$ est un graphe fini, il existe trois entiers $n_1 < n_2 < n_3$ tels que les sommets s_{n_1} , s_{n_2} et s_{n_3} appartiennent à la même orbite de Γ_0 . La figure 4 illustre la situation. Si $\bar{e}_{n_1} \not\sim_f \bar{e}_{n_2-1}$, l'union pour $n_1 \leq i \leq n_2 - 1$ des arêtes \bar{e}_i appartient à \mathcal{L}_f . Si $\bar{e}_{n_2} \not\sim_f \bar{e}_{n_3-1}$, l'union pour $n_2 \leq i \leq n_3 - 1$ des arêtes \bar{e}_i appartient à \mathcal{L}_f . Si $\bar{e}_{n_1} \sim_f \bar{e}_{n_2-1}$ et $\bar{e}_{n_2} \sim_f \bar{e}_{n_3-1}$, alors $\bar{e}_{n_1} \not\sim_f \bar{e}_{n_3-1}$ car $\bar{e}_{n_2-1} \not\sim_f \bar{e}_{n_2}$; dans ce cas l'union pour $n_1 \leq i \leq n_3 - 1$ des arêtes \bar{e}_i appartient à \mathcal{L}_f .

Considérons un lacet $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_f$ qui est de longueur minimale parmi les éléments de \mathcal{L}_f (un tel lacet existe car l'ensemble des longueurs possibles de lacets de $\Gamma_0 \backslash X$ est discret), et montrons que \mathcal{C} passe au plus deux fois par chaque sommet de $\Gamma_0 \backslash X$. Soit \bar{s} un sommet de $\Gamma_0 \backslash X$ par lequel passe \mathcal{C} . Relevons \mathcal{C} en un segment géodésique I de X , de même longueur que \mathcal{C} , dont les extrémités ont pour image \bar{s} dans $\Gamma_0 \backslash X$. Notons e_0, \dots, e_N les arêtes de I et s_0, \dots, s_{N+1} ses sommets, numérotés de telle sorte que l'arête e_i soit adjacente aux sommets s_i et s_{i+1} pour tout i . Soient $0 = n_1 < \dots < n_r < n_{r+1} = N + 1$ les indices i tels que $\bar{s}_i = \bar{s}$. Si $r \geq 2$, le raisonnement ci-dessus montre que soit l'union pour $n_1 \leq i \leq n_2 - 1$ des \bar{e}_i , soit l'union pour $n_2 \leq i \leq n_3 - 1$ des \bar{e}_i , soit l'union pour $n_1 \leq i \leq n_3 - 1$ des \bar{e}_i appartient à \mathcal{L}_f . Le lacet \mathcal{C} étant de longueur minimale parmi les éléments de \mathcal{L}_f , on en déduit que $r \leq 2$, ce qui signifie que \mathcal{C} passe au plus deux fois par \bar{s} .

Enfin, remarquons que tout lacet non trivial $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_f$ est l'image dans $\Gamma_0 \backslash X$ de l'axe de translation \mathcal{A}_γ d'un certain élément $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$. En effet, on peut relever \mathcal{C} en un segment géodésique I de X dont les extrémités sont deux sommets s et $\gamma \cdot s$, où $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$. Notons e (resp. e') l'arête de I adjacente à s (resp. à $\gamma \cdot s$); comme $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_f$, on a $\gamma^{-1} \cdot e' \not\sim_f e$. Le projeté de s sur \mathcal{A}_γ appartient à la fois au segment géodésique $[s, \gamma^{-1} \cdot s]$ et au segment géodésique $[s, \gamma \cdot s]$. Comme $\gamma^{-1} \cdot e' \not\sim_f e$, on a

$s \in \mathcal{A}_\gamma$, d'où $I = [s, \gamma \cdot s] \subset \mathcal{A}_\gamma$. Ceci achève la démonstration du lemme 4.2.6. \square

Remarque 4.2.7. *Pour $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$, l'application f est affine de constante C_ρ sur l'axe de translation \mathcal{A}_γ si et seulement si le lacet image de \mathcal{A}_γ dans $\Gamma_0 \backslash X$ est entièrement formé d'arêtes f -maximales et deux arêtes successives de ce lacet appartiennent toujours à des classes d'équivalence différentes pour la relation \sim_f .*

En effet, il suffit de voir que pour tous points $x_1, x_2, x_3 \in X$ alignés dans cet ordre, si f est affine de constante C_ρ sur chacun des segments géodésiques $[x_1, x_2]$ et $[x_2, x_3]$ et si $f([x_1, x_2]) \cap f([x_2, x_3]) = \{f(x_2)\}$, alors f est affine de constante C_ρ sur le segment géodésique $[x_1, x_3]$. Ceci résulte du fait que pour tout $x \in [x_1, x_2]$ et tout $x' \in [x_2, x_3]$, le triangle géodésique de sommets $f(x), f(x_2), f(x')$ est un tripode, c'est-à-dire l'union de trois segments géodésiques d'extrémité commune. La condition $f([x_1, x_2]) \cap f([x_2, x_3]) = \{f(x_2)\}$ implique donc $d(f(x), f(x')) = d(f(x), f(x_2)) + d(f(x_2), f(x'))$. En particulier, si f est affine de constante C_ρ sur $[x_1, x_2]$ et sur $[x_2, x_3]$, alors $d(f(x), f(x')) = C_\rho d(x, x')$.

Le point 3 de la proposition 4.2.1 est une conséquence facile du lemme 4.2.6 et de la remarque 4.2.7.

Démonstration du point 3 de la proposition 4.2.1. Fixons un domaine fondamental connexe \mathcal{D} de X pour l'action de Γ_0 , contenant x_0 . Notons que le diamètre de \mathcal{D} est inférieur à L_0 . Soit $f : X \rightarrow X'$ une application ρ -équivariante, affine par morceaux et C_ρ -lipschitzienne telle que le nombre d'arêtes f -maximales de $\Gamma_0 \backslash X$ soit minimal. D'après le lemme 4.2.6 et la remarque 4.2.7, il existe un élément $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$ tel que f soit affine de constante C_ρ sur l'axe de translation \mathcal{A}_γ et tel que le lacet image de \mathcal{A}_γ dans $\Gamma_0 \backslash X$ passe au plus deux fois par chaque sommet. Quitte à remplacer γ par un conjugué dans Γ_0 , on peut supposer que \mathcal{A}_γ rencontre \mathcal{D} ; d'après (3.2.2) on a alors

$$d(x_0, \gamma \cdot x_0) = \lambda(\gamma) + 2d(x_0, \mathcal{A}_\gamma) \leq 4L_0,$$

c'est-à-dire $\gamma \in F$. Montrons que

$$\frac{\lambda(\rho(\gamma))}{\lambda(\gamma)} = C_\rho,$$

ce qui suffira, d'après (4.2.1), à établir le point 3 de la proposition 4.2.1. Notons $X'_{\rho(\gamma)}$ l'axe de translation ou l'ensemble des points fixes de $\rho(\gamma)$ dans X' , selon que $\rho(\gamma)$ est hyperbolique ou elliptique. Soit s un sommet de \mathcal{A}_γ . Le projeté de $f(s)$ sur $X'_{\rho(\gamma)}$ appartient à la fois au segment géodésique $[f(s), \rho(\gamma)^{-1} \cdot f(s)] = [f(s), f(\gamma^{-1} \cdot s)]$ et au segment géodésique $[f(s), \rho(\gamma) \cdot f(s)] = [f(s), f(\gamma \cdot s)]$. Comme deux arêtes consécutives de \mathcal{A}_γ appartiennent toujours à des classes d'équivalence différentes pour la relation \sim_f , on en déduit $f(s) \in X'_{\rho(\gamma)}$. En particulier, $d(f(s), \rho(\gamma) \cdot f(s)) = \lambda(\rho(\gamma))$. Ainsi,

$$\frac{\lambda(\rho(\gamma))}{\lambda(\gamma)} = \frac{d(f(s), \rho(\gamma) \cdot f(s))}{d(s, \gamma \cdot s)} = \frac{d(f(s), f(\gamma \cdot s))}{d(s, \gamma \cdot s)} = C_\rho,$$

ce qui termine la démonstration. \square

4.3 Déformation de quotients compacts

Dans cette partie, nous déduisons le théorème 4.1.1, le corollaire 4.1.2 et le théorème 4.1.3 de la proposition 4.2.1 et d'une propriété des déformations de sous-groupes discrets de type fini sans torsion de G (lemme 3.4.2).

4.3.1 Démonstration du théorème 4.1.3

Soient X et X' deux arbres réels simpliciaux de valence ≥ 2 et Γ_0 un sous-groupe discret de $\text{Isom}(X)$. Fixons des points $x_0 \in X$ et $x'_0 \in X'$. Nous dirons qu'un morphisme de groupes $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \text{Isom}(X')$ est *admissible* si pour tout $R > 0$ on a $d(x'_0, \rho(\gamma) \cdot x'_0) \leq d(x_0, \gamma \cdot x_0) - R$ pour presque tout $\gamma \in \Gamma_0$. Cette condition ne dépend pas du choix de x_0 et x'_0 .

La proposition 4.2.1 implique le résultat suivant, dont le théorème 4.1.3 est un cas particulier.

Théorème 4.3.1. *Soient X et X' deux arbres réels simpliciaux de valence ≥ 2 , soit Γ_0 un sous-groupe discret de type fini sans torsion de $\text{Isom}(X)$ et soit X_{Γ_0} le sous-arbre Γ_0 -minimal de X . Fixons des points $x_0 \in X_{\Gamma_0}$ et $x'_0 \in X'$. Pour tout morphisme de groupes $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \text{Isom}(X')$, notons $C_\rho^\mu \geq 0$ la borne inférieure des réels $C \geq 0$ tels que l'ensemble $\{d(x'_0, \rho(\gamma) \cdot x'_0) - Cd(x_0, \gamma \cdot x_0), \gamma \in \Gamma_0\} \subset \mathbb{R}$ soit majoré.*

1. *Soit F le sous-ensemble fini de $\Gamma_0 \setminus \{1\}$ formé des éléments γ tels que $d(x_0, \gamma \cdot x_0) \leq 4L_0$, où L_0 désigne la somme des longueurs des arêtes du graphe fini $\Gamma_0 \setminus X_{\Gamma_0}$. Pour tout morphisme $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \text{Isom}(X')$ on a*

$$C_\rho^\mu = \sup_{\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}} \frac{\lambda(\rho(\gamma))}{\lambda(\gamma)} = \max_{\gamma \in F} \frac{\lambda(\rho(\gamma))}{\lambda(\gamma)}.$$

2. *Un morphisme $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \text{Isom}(X')$ est admissible si et seulement si $C_\rho^\mu < 1$.*

Rappelons que le sous-arbre Γ_0 -minimal X_{Γ_0} de X est l'union des axes de translation des éléments non triviaux de Γ_0 . Il est stable par Γ_0 , et l'action de Γ_0 sur X_{Γ_0} est libre, propre et cocompacte (cf. paragraphe 3.2.3).

Démonstration. Soit $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \text{Isom}(X')$ un morphisme de groupes. Commençons par remarquer que pour tout $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$ on a

$$\frac{\lambda(\rho(\gamma))}{\lambda(\gamma)} \leq C_\rho^\mu.$$

En effet, c'est évident si $\rho(\gamma)$ est elliptique, et si $\rho(\gamma)$ est hyperbolique cela résulte du fait que la suite

$$\left(d(x'_0, \rho(\gamma)^n \cdot x'_0) - \frac{\lambda(\rho(\gamma))}{\lambda(\gamma)} d(x_0, \gamma^n \cdot x_0) \right)_{n \geq 1} \quad (4.3.1)$$

est constante d'après (3.2.1) et (3.2.2). D'après la proposition 4.2.1, il existe une application ρ -équivariante $f : X_{\Gamma_0} \rightarrow X'$ qui est lipschitzienne de constante C_ρ minimale. Pour tout $\gamma \in \Gamma_0$ on a

$$\begin{aligned} d(x'_0, \rho(\gamma) \cdot x'_0) &\leq d(x'_0, f(x_0)) + d(f(x_0), \rho(\gamma) \cdot f(x_0)) + d(\rho(\gamma) \cdot f(x_0), \rho(\gamma) \cdot x'_0) \\ &= d(f(x_0), f(\gamma \cdot x_0)) + 2d(x'_0, f(x_0)) \\ &\leq C_\rho d(x_0, \gamma \cdot x_0) + 2d(x'_0, f(x_0)), \end{aligned}$$

donc $C_\rho^\mu \leq C_\rho$. Ainsi, on a

$$\sup_{\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}} \frac{\lambda(\rho(\gamma))}{\lambda(\gamma)} \leq C_\rho^\mu \leq C_\rho.$$

D'après la proposition 4.2.1, il existe un élément $\gamma' \in F$ tel que

$$\frac{\lambda(\rho(\gamma'))}{\lambda(\gamma')} = \sup_{\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}} \frac{\lambda(\rho(\gamma))}{\lambda(\gamma)} = C_\rho^\mu = C_\rho, \quad (4.3.2)$$

ce qui prouve le point 1 du théorème 4.3.1. Comme l'application μ est propre et le groupe Γ_0 discret dans $\text{Isom}(X)$, si $C_\rho^\mu < 1$ alors ρ est admissible, et si ρ est admissible alors $C_\rho^\mu \leq 1$. D'après (4.3.2), si $C_\rho^\mu = 1$ alors $\lambda(\rho(\gamma')) = \lambda(\gamma')$; comme la suite donnée par (4.3.1) pour $\gamma = \gamma'$ est constante, le morphisme ρ n'est pas admissible. Ceci achève la démonstration du point 2 du théorème 4.3.1. \square

Le théorème 4.1.3 s'obtient à partir du théorème 4.3.1 en prenant pour X et X' l'arbre de Bruhat-Tits de G et en utilisant (1.4.5).

4.3.2 Démonstration du théorème 4.1.1

Le théorème 4.1.1 est une conséquence facile du théorème 2.1.2, du théorème 4.3.1 et du lemme 3.4.2. Précisons ce point.

Démonstration du théorème 4.1.1. Soit Γ un sous-groupe discret de type fini sans torsion de $G \times G$ agissant proprement sur $(G \times G)/\Delta_G$. D'après le théorème 2.1.2, il existe un sous-groupe discret de type fini sans torsion Γ_0 de G et un morphisme admissible $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$ tels que

$$\Gamma = \Gamma_0^\rho = \{(\gamma, \rho(\gamma)), \gamma \in \Gamma_0\},$$

à la permutation près des deux facteurs de $G \times G$. Soient X l'arbre de Bruhat-Tits de G et X_{Γ_0} le sous-arbre Γ_0 -minimal de X . Le groupe G admet une décomposition de Cartan $G = KZ^+K$ telle que K soit le stabilisateur d'un sommet x_0 de X_{Γ_0} ; notons $\mu : G \rightarrow \mathbb{R}^+$ la projection de Cartan correspondante. Soient L_0 la somme des longueurs des arêtes du graphe fini $\Gamma_0 \setminus X_{\Gamma_0}$ et F le sous-ensemble fini de $\Gamma_0 \setminus \{1\}$ formé des éléments γ tels que $\mu(\gamma) \leq 4L_0$. Choisissons un domaine fondamental

connexe \mathcal{D} de X_{Γ_0} pour l'action de Γ_0 , contenant x_0 : on peut prendre par exemple le domaine de Dirichlet

$$\mathcal{D} = \{x \in X_{\Gamma_0}, \quad d(x, x_0) \leq d(x, \gamma \cdot x_0) \quad \forall \gamma \in \Gamma_0\}.$$

Soient $\mathcal{V} \subset \text{Hom}(\Gamma_0, G)$ le voisinage de l'inclusion naturelle donné par le lemme 3.4.2 et $\mathcal{W} \subset \text{Hom}(\Gamma_0, G)$ le voisinage du morphisme constant défini par

$$\mathcal{W} = \{\tau \in \text{Hom}(\Gamma_0, G), \quad \lambda(\tau(\gamma)) < \lambda(\gamma) \quad \forall \gamma \in F\}.$$

On a $\rho \in \mathcal{W}$ par le théorème 4.1.3, donc $\mathcal{V} \times \mathcal{W} \subset \text{Hom}(\Gamma, G \times G)$ est un voisinage de l'inclusion naturelle de Γ dans $G \times G$. Soit $\varphi = (\sigma, \tau) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W}$. Le groupe

$$\varphi(\Gamma) = \{(\sigma(\gamma), \tau(\gamma)), \quad \gamma \in \Gamma_0\}$$

est un graphe par injectivité de σ , et $\sigma(\Gamma_0)$ est un sous-groupe discret de type fini sans torsion de G ; notons $X_{\sigma(\Gamma_0)}$ le sous-arbre $\sigma(\Gamma_0)$ -minimal de X . Par définition de \mathcal{V} et de \mathcal{W} , la somme des longueurs des arêtes du graphe fini $\sigma(\Gamma_0) \setminus X_{\sigma(\Gamma_0)}$ est L_0 , l'ensemble F est formé des éléments $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$ tels que $\mu(\sigma(\gamma)) \leq 4L_0$, et l'on a $\lambda(\tau(\gamma)) < \lambda(\sigma(\gamma))$ pour tout $\gamma \in F$. D'après le théorème 4.1.3, le morphisme $\tau \circ \sigma^{-1} : \sigma(\Gamma_0) \rightarrow G$ est admissible. D'après le théorème 2.1.2, le groupe $\varphi(\Gamma)$ agit proprement sur $(G \times G)/\Delta_G$. \square

Quant au corollaire 4.1.2, c'est une conséquence immédiate du théorème 4.1.1, de la condition nécessaire et suffisante d'admissibilité donnée par le théorème 3.3.1, et du fait que pour tout réseau cocompact sans torsion Γ_0 de G et pour tout morphisme $\sigma : \Gamma_0 \rightarrow G$ suffisamment proche de l'inclusion naturelle de Γ_0 dans G , le groupe $\sigma(\Gamma_0)$ est un réseau cocompact sans torsion de G (lemme 3.4.2).

4.4 Lien avec l'outre-espace

Dans le cas particulier où ρ est injectif d'image discrète et cocompacte, la proposition 4.2.1 implique l'existence et l'équivalence entre deux définitions différentes d'une même "distance asymétrique" sur l'outre-espace, comme nous le précisons dans cette partie.

Cette distance asymétrique sur l'outre-espace est un analogue de la distance asymétrique de Thurston sur l'espace de Teichmüller, introduite et étudiée en détail dans [Thu] : les classes d'équivalence de structures hyperboliques complètes sur une surface compacte S de caractéristique d'Euler $\chi(S) < 0$ sont remplacées par des classes d'équivalence de graphes métriques finis munis d'un marquage par un groupe libre de type fini fixé (*cf.* paragraphe 4.4.4).

Sur l'outre-espace, cette distance asymétrique a d'abord été étudiée par T. White dans un texte non publié, puis récemment par Francaviglia et Martino [FM] qui se sont intéressés à une symétrisation de cette distance et à la géométrie correspondante sur l'outre-espace.

4.4.1 Rappels

Soient $n \geq 2$ un entier et \mathcal{R}_n un bouquet de n cercles d'intersection $\{c\}$; le groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{R}_n, c)$ est un groupe libre à n générateurs que nous noterons \mathbb{F}_n . Appelons *graphe normalisé marqué de rang n* tout couple (Y, φ) où Y est un graphe métrique connexe fini de valence ≥ 2 dont la somme des longueurs des arêtes vaut un, et où $\varphi : \mathcal{R}_n \rightarrow Y$ est une équivalence d'homotopie. L'équivalence d'homotopie φ induit un isomorphisme de groupes

$$\varphi_* : \mathbb{F}_n \xrightarrow{\sim} \pi_1(Y, \varphi(c)).$$

Pour tous graphes normalisés (Y, φ) et (Y', φ') marqués de rang n , nous dirons qu'une application continue $\bar{f} : Y \rightarrow Y'$ respecte les marquages φ et φ' si $\bar{f} \circ \varphi$ est homotope à φ' . Notons $(Y, \varphi) \sim (Y', \varphi')$ s'il existe une isométrie bijective $i : Y \rightarrow Y'$ respectant les marquages φ et φ' . Ceci définit une relation d'équivalence \sim sur l'ensemble des graphes normalisés marqués de rang n . On appelle *outre-espace* de rang n l'ensemble des classes d'équivalence pour cette relation. Cet ensemble a été introduit par Culler et Vogtmann dans l'article fondateur [CV]; nous le notons ici OS_n . Pour tout graphe normalisé (Y, φ) marqué de rang n , nous notons $[Y, \varphi]$ la classe de (Y, φ) dans OS_n .

4.4.2 Une distance asymétrique sur l'outre-espace

Soient (Y, φ) et (Y', φ') deux graphes normalisés marqués de rang n . Notons X (resp. X') un revêtement universel de Y (resp. de Y') : c'est un arbre réel simplicial de valence ≥ 2 . Le groupe fondamental $\pi_1(Y, \varphi(c))$ (resp. $\pi_1(Y', \varphi'(c))$) agit librement, proprement et cocompactement sur X (resp. sur X'), par isométries. Posons $\Gamma_0 = \pi_1(Y, \varphi(c))$ et

$$\rho = \varphi'_* \circ \varphi_*^{-1} : \Gamma_0 \longrightarrow \text{Isom}(X').$$

Toute application continue $\bar{f} : Y \rightarrow Y'$ respectant les marquages φ et φ' se relève en une application continue ρ -équivariante $f : X \rightarrow X'$, et réciproquement toute application continue ρ -équivariante $f : X \rightarrow X'$ induit une application continue $\bar{f} : Y \rightarrow Y'$ respectant les marquages φ et φ' . De plus, f est lipschitzienne si et seulement si \bar{f} l'est, et dans ce cas les constantes de Lipschitz sont les mêmes.

D'après la proposition 4.2.1, il existe une application lipschitzienne $\bar{f} : Y \rightarrow Y'$ respectant les marquages φ et φ' , et la borne inférieure des constantes de Lipschitz de telles applications est atteinte. Cette borne inférieure ne dépend que des classes $[Y, \varphi]$ et $[Y', \varphi']$ dans OS_n ; notons $L([Y, \varphi], [Y', \varphi'])$ son logarithme.

Lemme 4.4.1. *L'application $L : \text{OS}_n \times \text{OS}_n \rightarrow \mathbb{R}$ est une distance asymétrique sur OS_n , au sens où*

1. pour tous $[Y, \varphi], [Y', \varphi'] \in \text{OS}_n$ on a

$$L([Y, \varphi], [Y', \varphi']) \geq 0,$$

avec égalité si et seulement si $[Y, \varphi] = [Y', \varphi']$,

2. pour tous $[Y, \varphi], [Y', \varphi'], [Y'', \varphi''] \in \text{OS}_n$ on a

$$L([Y, \varphi], [Y'', \varphi'']) \leq L([Y, \varphi], [Y', \varphi']) + L([Y', \varphi'], [Y'', \varphi'']).$$

En général on a $L([Y, \varphi], [Y', \varphi']) \neq L([Y', \varphi'], [Y, \varphi])$, comme nous le verrons ci-dessous.

Démonstration du lemme 4.4.1. Le point 2 est clair. Prouvons le point 1. Soient (Y, φ) et (Y', φ') deux graphes normalisés marqués de rang n et $\bar{f} : Y \rightarrow Y'$ une application lipschitzienne respectant les marquages φ et φ' , de constante de Lipschitz C minimale.

Remarquons que \bar{f} est surjective. En effet, notons comme ci-dessus X (resp. X') un revêtement universel de Y (resp. de Y') et soit $f : X \rightarrow X'$ un relevé de \bar{f} ; montrons que f est surjective. Fixons un sommet s de X . Pour tout $\gamma \in \Gamma_0$, l'image par f du segment géodésique $[s, \gamma \cdot s]$ de X contient le segment géodésique $[f(s), \rho(\gamma) \cdot f(s)]$ de X' . Il suffit donc de montrer que les segments géodésiques $[f(s), \rho(\gamma) \cdot f(s)]$, où $\gamma \in \Gamma_0$, recouvrent X' . Mais s'il existait un point $x' \in X'$ n'appartenant à aucun segment géodésique $[f(s), \rho(\gamma) \cdot f(s)]$, alors toute composante connexe de $X' \setminus \{x'\}$ ne contenant pas $f(s)$ serait un sous-arbre infini de X ne rencontrant pas l'orbite $\rho(\Gamma_0) \cdot f(s)$, ce qui contredirait le fait que $\rho(\Gamma_0)$ agit cocompactement sur X' .

Notons E (resp. E') l'ensemble des arêtes de Y (resp. de Y'). Pour toute arête $e \in E$ (resp. $e' \in E'$), notons $\ell(e) \in [0, 1]$ (resp. $\ell'(e') \in [0, 1]$) sa longueur dans Y (resp. dans Y'). Notons enfin C_e la constante de Lipschitz de la restriction de \bar{f} à e pour tout $e \in E$. Comme \bar{f} est surjective on a

$$1 = \sum_{e' \in E'} \ell'(e') \leq \sum_{e \in E} \ell'(\bar{f}(e)) \leq \sum_{e \in E} C_e \ell(e) \leq C \sum_{e \in E} \ell(e) = C. \quad (4.4.1)$$

On en déduit

$$L([Y, \varphi], [Y', \varphi']) = \log C \geq 0. \quad (4.4.2)$$

De plus, si $L([Y, \varphi], [Y', \varphi']) = 0$, alors toutes les inégalités dans (4.4.1) sont des égalités; on en déduit aisément que \bar{f} est une isométrie bijective, et donc que $[Y, \varphi] = [Y', \varphi']$. Enfin, en considérant l'identité de Y , on voit que $L([Y, \varphi], [Y, \varphi]) \leq 0$, donc $L([Y, \varphi], [Y, \varphi]) = 0$ par (4.4.2). \square

Montrons l'asymétrie sur un exemple pour $n = 2$. Comme précédemment, soit \mathcal{R}_2 un bouquet de deux cercles \mathcal{C} et \mathcal{C}' d'intersection $\{c\}$. Pour $i \in \{1, 2\}$, soit Y_i le graphe donné par la figure 5, où les deux boucles sont de longueur $a_i \in]0, 1[$ et où l'arête du milieu est de longueur $1 - 2a_i$. Soit $\varphi_i : \mathcal{R}_2 \rightarrow Y_i$ une équivalence d'homotopie envoyant c sur y_i , établissant un homéomorphisme entre \mathcal{C} et le cercle de gauche de Y_i et envoyant \mathcal{C}' sur l'union du segment transverse et du cercle de droite de Y_i . Pour $a_1 \leq a_2$, un calcul donne

$$L([Y_1, \varphi_1], [Y_2, \varphi_2]) = \log \left(\frac{a_2}{a_1} \right) \quad \text{et} \quad L([Y_2, \varphi_2], [Y_1, \varphi_1]) = \log \left(\frac{1 - a_1}{1 - a_2} \right).$$

Ces réels sont différents dès que $a_2 \notin \{a_1, 1 - a_1\}$.

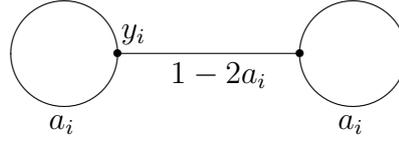


FIGURE 5 – *Le graphe Y_i*

4.4.3 Quotients de longueurs de lacets

Pour tout graphe normalisé (Y, φ) marqué de rang n et tout $\gamma \in \mathbb{F}_n \setminus \{1\}$, la longueur minimale d'un lacet dans la classe d'homotopie libre de $\varphi_*(\gamma) \in \pi_1(Y, \varphi(c))$ ne dépend que de la classe $[Y, \varphi]$ de (Y, φ) dans OS_n ; notons-la $\text{long}_{[Y, \varphi]}(\gamma)$. Si X désigne comme précédemment un revêtement universel de Y , alors $\text{long}_{[Y, \varphi]}(\gamma) = \lambda(\varphi_*(\gamma))$ est la longueur de translation de $\varphi_*(\gamma)$ vu comme isométrie de X .

Pour tous $[Y, \varphi], [Y', \varphi'] \in \text{OS}_n$, tout $\gamma \in \mathbb{F}_n \setminus \{1\}$ et toute application continue $\bar{f} : Y \rightarrow Y'$ respectant les marquages φ et φ' , lipschitzienne de constante C minimale, on a

$$\frac{\text{long}_{[Y', \varphi']}(\gamma)}{\text{long}_{[Y, \varphi]}(\gamma)} \leq C. \quad (4.4.3)$$

Posons

$$K([Y, \varphi], [Y', \varphi']) = \log \sup_{\gamma \in \mathbb{F}_n \setminus \{1\}} \left(\frac{\text{long}_{[Y', \varphi']}(\gamma)}{\text{long}_{[Y, \varphi]}(\gamma)} \right).$$

Les inégalités (4.4.3) impliquent

$$K([Y, \varphi], [Y', \varphi']) \leq L([Y, \varphi], [Y', \varphi']).$$

D'après la proposition 4.2.1, cette inégalité est en fait une égalité et la borne supérieure $K([Y, \varphi], [Y', \varphi'])$ est atteinte.

Corollaire 4.4.2. (T. White, cf. [FM], prop. 3.11)

Pour tous $[Y, \varphi], [Y', \varphi'] \in \text{OS}_n$ il existe un élément $\gamma \in \mathbb{F}_n \setminus \{1\}$ tel que

$$e^{K([Y, \varphi], [Y', \varphi'])} = \frac{\text{long}_{[Y', \varphi']}(\gamma)}{\text{long}_{[Y, \varphi]}(\gamma)} = \frac{\lambda(\varphi'_*(\gamma))}{\lambda(\varphi_*(\gamma))} = e^{L([Y, \varphi], [Y', \varphi'])} \geq 1.$$

En particulier on a $K = L$.

4.4.4 Lien avec la distance asymétrique de Thurston

On a une analogie très forte entre la distance asymétrique $K = L$ sur l'outre-espace et la distance asymétrique de Thurston sur l'espace de Teichmüller. En effet, soit S une surface compacte de caractéristique d'Euler $\chi(S) < 0$ et soit $\mathcal{T}(S)$ son espace de Teichmüller, défini comme l'ensemble des classes d'équivalence de structures hyperboliques complètes sur S pour la relation "être tirée en arrière par un homéomorphisme de S isotope à l'identité".

Pour toutes structures hyperboliques complètes g et h sur S , la borne inférieure des constantes de Lipschitz d'homéomorphismes $\bar{f} : (S, g) \rightarrow (S, h)$ isotopes à l'identité ne dépend que des classes de g et h dans $\mathcal{T}(S)$. Notons $L([g], [h])$ le logarithme de cette borne inférieure. D'après [Thu], prop. 2.1, l'application L est une distance asymétrique sur $\mathcal{T}(S)$, au sens du lemme 4.4.1.

Soit $x_0 \in S$ un point-base. Pour toute structure hyperbolique complète g sur S et tout élément $\gamma \in \pi_1(S, x_0)$ non trivial, notons $\text{long}_g(\gamma) > 0$ la plus petite longueur d'un lacet dans la classe d'homotopie libre de γ ; elle est atteinte par l'unique géodésique fermée pour g dans cette classe d'homotopie libre. Ceci définit une application long_g qui ne dépend que de la classe de g dans $\mathcal{T}(S)$. D'après [Thu], th. 3.1, l'application $K : \mathcal{T}(S) \times \mathcal{T}(S) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$K([g], [h]) = \log \sup_{\gamma \in \pi_1(S, x_0) \setminus \{1\}} \left(\frac{\text{long}_h(\gamma)}{\text{long}_g(\gamma)} \right)$$

pour tous $[g], [h] \in \mathcal{T}(S)$ est une distance asymétrique sur $\mathcal{T}(S)$.

Comme sur l'outre-espace, on a $K = L$ d'après [Thu], th. 8.5. En revanche, dans le cas de l'espace de Teichmüller la borne supérieure $K([g], [h])$ n'est en général pas atteinte par une géodésique fermée, mais par une lamination géodésique mesurée (cf. chapitre 5).

4.4.5 Absence de morphisme admissible injectif d'image discrète

Dans ce paragraphe, nous déduisons du corollaire 4.4.2 le résultat suivant, dont le corollaire 4.1.4 est un cas particulier.

Corollaire 4.4.3. *Soit X un arbre réel simplicial, biparti de valences $n_1 \geq 2$ et $n_2 \geq 2$, dont toutes les arêtes ont même longueur, et soit Γ_0 un sous-groupe discret sans torsion de $\text{Isom}(X)$ tel que le quotient $\Gamma_0 \backslash X$ soit un graphe fini. Il n'existe pas de morphisme de groupes admissible $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \text{Isom}(X)$ qui soit injectif d'image discrète.*

Rappelons qu'un morphisme $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \text{Isom}(X)$ est dit *admissible* s'il existe $x_0, x'_0 \in X$ tels que pour tout $R > 0$ on ait $d(x'_0, \rho(\gamma) \cdot x'_0) \leq d(x_0, \gamma \cdot x_0) - R$ pour presque tout $\gamma \in \Gamma_0$ (cf. paragraphe 4.3.1). Cette condition ne dépend pas du choix de x_0 et x'_0 .

Notons que l'hypothèse de cocompacité sur Γ_0 est indispensable dans les corollaires 4.4.3 et 4.1.4. En effet, sans cette hypothèse on construit facilement des exemples de morphismes admissibles injectifs d'image discrète à l'aide du lemme 3.4.1.

Pour démontrer le corollaire 4.4.3 nous utilisons le lemme suivant.

Lemme 4.4.4. *Le nombre d'arêtes d'un graphe connexe fini dont le groupe fondamental est libre de rang $n \geq 2$ fixé est une fonction décroissante de la valence moyenne des sommets.*

Démonstration. Soit Y un graphe connexe fini dont le groupe fondamental est libre de rang $n \geq 2$. Si a désigne le nombre d'arêtes, s le nombre de sommets et v la valence moyenne des sommets de Y , alors $2a = vs$. De plus, d'après [Die], th. 1.9.6, on a $n = a - s + 1$, d'où

$$a = \frac{n-1}{1-\frac{2}{v}},$$

ce qui implique le lemme. □

Nous pouvons à présent démontrer le corollaire 4.4.3.

Démonstration du corollaire 4.4.3. Soit $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \text{Isom}(X)$ un morphisme de groupes injectif d'image discrète. Montrons que ρ n'est pas admissible.

Notons $X_{\rho(\Gamma_0)}$ le sous-arbre $\rho(\Gamma_0)$ -minimal de X , c'est-à-dire l'union des axes de translation des éléments non triviaux de $\rho(\Gamma_0)$. Les quotients $\Gamma_0 \backslash X$ et $\rho(\Gamma_0) \backslash X_{\rho(\Gamma_0)}$ sont des graphes finis connexes, de valence ≥ 2 (cf. paragraphe 3.2.3). Leurs groupes fondamentaux, qui s'identifient respectivement à Γ_0 et $\rho(\Gamma_0)$, sont libres de même rang. Notons n_1 et n_2 les valences des sommets de l'arbre biparti X . La valence moyenne des graphes $\Gamma_0 \backslash X$ et $\rho(\Gamma_0) \backslash X$ est égale à $(n_1 + n_2)/2$. Celle du graphe $\rho(\Gamma_0) \backslash X_{\rho(\Gamma_0)}$ est inférieure à $(n_1 + n_2)/2$: en effet, si l'on note S_i l'ensemble des sommets de $\rho(\Gamma_0) \backslash X_{\rho(\Gamma_0)}$ qui sont de valence n_i dans $\rho(\Gamma_0) \backslash X$, alors S_1 et S_2 ont même cardinal, et pour tout $s \in S_i$ la valence de s dans $\rho(\Gamma_0) \backslash X_{\rho(\Gamma_0)}$ est inférieure à n_i .

Notons m (resp. m') le nombre d'arêtes de $\Gamma_0 \backslash X$ (resp. de $\rho(\Gamma_0) \backslash X_{\rho(\Gamma_0)}$). D'après le lemme 4.4.4 on a $m \leq m'$. Or, toutes les arêtes de X ont même longueur par hypothèse. Si l'on note $\ell > 0$ cette longueur et si l'on munit $\Gamma_0 \backslash X$ (resp. $\rho(\Gamma_0) \backslash X_{\rho(\Gamma_0)}$) de la distance induite par celle de X divisée par $m\ell$ (resp. par $m'\ell$), alors la somme des longueurs des arêtes de $\Gamma_0 \backslash X$ (resp. de $\rho(\Gamma_0) \backslash X_{\rho(\Gamma_0)}$) vaut un. D'après le corollaire 4.4.2, il existe un élément $\gamma \in \Gamma_0$ non trivial tel que

$$\frac{1}{m'\ell} \lambda(\rho(\gamma)) \geq \frac{1}{m\ell} \lambda(\gamma).$$

Comme $m \leq m'$, on en déduit $\lambda(\rho(\gamma)) \geq \lambda(\gamma)$. D'après le théorème 4.3.1, le morphisme ρ n'est pas admissible. □

Le corollaire 4.1.4 s'obtient à partir du corollaire 4.4.3 en prenant pour X l'arbre de Bruhat-Tits de G .

Notons que la démonstration du corollaire 4.4.3 ne nécessite pas l'existence d'un élément $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$ tel que le quotient $\lambda(\rho(\gamma))/\lambda(\gamma)$ soit maximal : il nous suffit de connaître l'existence d'un élément $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$ tel que $\lambda(\rho(\gamma)) \geq \lambda(\gamma)$, ce qui résulte de la positivité de la distance asymétrique $K = L$ sur l'outre-espace et de la condition d'égalité. De même, la positivité de la distance asymétrique de Thurston sur l'espace de Teichmüller et la condition d'égalité impliquent l'absence de morphisme admissible injectif d'image discrète pour les réseaux cocompacts sans torsion Γ_0 de $G = \text{SL}_2(\mathbb{R})$ (cf. chapitre 5).

Chapitre 5

Variétés anti-de Sitter compactes de dimension trois

5.1 Introduction

Ce chapitre est consacré aux variétés anti-de Sitter compactes de dimension 3, c'est-à-dire aux variétés lorentziennes compactes de dimension 3 de courbure sectionnelle constante strictement négative. Rappelons que de telles variétés n'existent qu'en dimension impaire (*cf.* paragraphe 0.1.3). De plus, elles prennent des formes très différentes selon qu'elles sont de dimension 3 ou ≥ 5 , l'étude de la dimension 3 semblant de loin la plus riche.

Bien que l'analogie du théorème de Hopf-Rinow ne soit pas vrai en général pour les variétés lorentziennes, Klingler [Kli] a montré qu'il l'est pour les variétés lorentziennes de courbure constante. Ainsi, à une isométrie et à la renormalisation de la métrique près, les variétés anti-de Sitter compactes de dimension 3 sont les quotients d'un revêtement universel de l'espace anti-de Sitter $\text{AdS}^3 = \mathbb{H}^{2,1} = \text{O}(2, 2)/\text{O}(2, 1)$ par des sous-groupes discrets de $\tilde{\text{O}}(2, 2)$ agissant librement, proprement et cocompactement sur ce revêtement universel. De plus, Kulkarni et Raymond [KR] ont montré que l'on peut se contenter d'un revêtement fini de AdS^3 au lieu d'un revêtement universel. Comme AdS^3 s'identifie à l'espace homogène $(\text{SL}_2(\mathbb{R}) \times \text{SL}_2(\mathbb{R}))/\Delta_{\text{SL}_2(\mathbb{R})}$, où $\Delta_{\text{SL}_2(\mathbb{R})}$ désigne la diagonale de $\text{SL}_2(\mathbb{R}) \times \text{SL}_2(\mathbb{R})$ (*cf.* paragraphe 2.4.3), et comme tout groupe linéaire de type fini est virtuellement sans torsion d'après le lemme de Selberg ([Sel], lem. 8), l'étude des variétés anti-de Sitter compactes de dimension 3 se ramène à celle des sous-groupes discrets sans torsion de $\text{SL}_2(\mathbb{R}) \times \text{SL}_2(\mathbb{R})$ qui agissent proprement et cocompactement sur $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ par multiplication à gauche et à droite.

Soit $\mu : \text{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ une projection de Cartan de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$. D'après le théorème 2.1.2 et par un argument de dimension cohomologique (*cf.* paragraphe 6.5.4), un sous-groupe discret sans torsion de $\text{SL}_2(\mathbb{R}) \times \text{SL}_2(\mathbb{R})$ agit proprement et cocompactement sur $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ par multiplication à gauche et à droite si et seulement, à permutation des deux facteurs de $\text{SL}_2(\mathbb{R}) \times \text{SL}_2(\mathbb{R})$ près, c'est un graphe de la forme

$$\Gamma_0^\rho = \{(\gamma, \rho(\gamma)), \gamma \in \Gamma_0\},$$

où Γ_0 est un réseau cocompact sans torsion de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ un morphisme de groupes *admissible*, au sens où pour tout $R > 0$ on a $\mu(\rho(\gamma)) \leq \mu(\gamma) - R$ pour presque tout $\gamma \in \Gamma_0$. Ceci résulte également, dans ce cas particulier, des travaux de Kulkarni et Raymond [KR], de la complétude de Klingler [Kli] et d'un résultat complémentaire de Salein ([Sa2], lem. 3.4.1).

Dans ce chapitre nous démontrons le résultat suivant, qui précise cette description et traite du cas plus général où Γ_0 est convexe cocompact dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

Théorème 5.1.1. *Soit Γ_0 un sous-groupe convexe cocompact de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Un morphisme de groupes $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est admissible si et seulement s'il existe des constantes $C < 1$ et $C' \geq 0$ telles que pour tout $\gamma \in \Gamma_0$ on ait*

$$\mu(\rho(\gamma)) \leq C\mu(\gamma) + C'.$$

Rappelons qu'un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est dit *convexe cocompact* s'il est discret dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, infini, non élémentaire, et s'il agit cocompactement sur l'enveloppe convexe $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$ dans \mathbb{H}^2 de son ensemble limite (cf. partie 5.4). Cette notion généralise celle de réseau cocompact.

Dans le cas où Γ_0 est un réseau cocompact de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, l'existence d'une constante $C < 1$ comme dans le théorème 5.1.1 avait été conjecturée par Salein ([Sa2], § 3.5, rem. 2). Dans ce cas, voici une reformulation du théorème 5.1.1 et de ce qui précède.

Corollaire 5.1.2. *Les variétés anti-de Sitter compactes de dimension 3 sont, à une isométrie, à la renormalisation de la métrique, à un quotient fini et à un revêtement fini près, les quotients de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ par un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ de la forme*

$$\Gamma_0^\rho = \{(\gamma, \rho(\gamma)), \gamma \in \Gamma_0\},$$

où Γ_0 est un réseau cocompact sans torsion de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ un morphisme de groupes pour lequel il existe des constantes $C < 1$ et $C' \geq 0$ telles que pour tout $\gamma \in \Gamma_0$ on ait

$$\mu(\rho(\gamma)) \leq C\mu(\gamma) + C'.$$

5.1.1 Stratégie de démonstration

Soient Γ_0 un sous-groupe convexe cocompact de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ un morphisme de groupes. Nous allons comparer trois constantes C_ρ , C_ρ^λ et C_ρ^μ naturellement associées à ρ .

Tout d'abord, notons C_ρ^μ la borne inférieure des réels $C \geq 0$ tels que l'ensemble $\{\mu(\rho(\gamma)) - C\mu(\gamma), \gamma \in \Gamma_0\} \subset \mathbb{R}$ soit majoré. Si $C_\rho^\mu < 1$, alors ρ est clairement admissible. Pour démontrer l'implication réciproque, nous distinguons deux cas selon le nombre de points fixes de $\rho(\Gamma_0)$ dans le bord $\partial\mathbb{H}^2 \simeq \mathbb{S}^1$ de \mathbb{H}^2 . Le cas le plus intéressant est celui où $\rho(\Gamma_0)$ admet zéro ou deux points fixes dans $\partial\mathbb{H}^2$, c'est-à-dire où $\rho(\Gamma_0)$ est soit Zariski-dense dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, soit borné, soit virtuellement abélien mais non virtuellement unipotent. Dans la suite de ce paragraphe, nous nous plaçons dans ce cas.

Nous suivons une stratégie analogue à celle du chapitre 4, en remplaçant l'arbre de Bruhat-Tits de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ par l'espace riemannien symétrique de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire le plan hyperbolique \mathbb{H}^2 . Plus précisément, nous considérons la borne inférieure $C_\rho \geq 0$ des constantes de Lipschitz d'applications lipschitziennes $f : \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ qui sont ρ -équivariantes, au sens où $f(\gamma \cdot x) = \rho(\gamma) \cdot f(x)$ pour tout $\gamma \in \Gamma_0$ et tout $x \in \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$; cette borne inférieure est atteinte dans le cas que nous considérons (lemme 5.5.1). Comme pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$, on voit facilement que $C_\rho^\mu \leq C_\rho$ (remarque 5.5.4). Nous montrons que si $C_\rho \geq 1$ alors $C_\rho^\mu = C_\rho$ (lemme 5.5.5). Pour cela nous établissons le théorème suivant.

Théorème 5.1.3. *Soit Γ_0 un sous-groupe convexe cocompact de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$; notons $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$ l'enveloppe convexe dans \mathbb{H}^2 de l'ensemble limite de Γ_0 . Soient $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ un morphisme de groupes et $f : \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ une application ρ -équivalente et lipschitzienne de constante de Lipschitz C_ρ minimale. Si $C_\rho \geq 1$, il existe une droite géodésique de $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$ sur laquelle f est affine de constante C_ρ .*

Rappelons que pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ il existait toujours un élément hyperbolique $\gamma \in \Gamma_0$ tel que f soit affine de constante C sur l'axe de translation de γ ; on pouvait même choisir γ dans un ensemble fini indépendant de ρ (proposition 4.2.1). Pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ce n'est pas le cas : en général la droite géodésique donnée par le théorème 5.1.3 ne peut pas être choisie parmi les axes de translation des éléments hyperboliques de Γ_0 .

Pour démontrer le théorème 5.1.3 nous faisons appel à des techniques de prolongement d'applications lipschitziennes de \mathbb{H}^2 . Nous affinons des résultats anciens de Kirzbraun [Kir] et Valentine [Val] pour contrôler non seulement la constante de Lipschitz de tels prolongements, mais également leur constante de Lipschitz *locale* (théorème 5.3.2).

Le théorème 5.1.3 entraîne également que s'il existe une application lipschitzienne ρ -équivalente $f : \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ de constante de Lipschitz minimale $C_\rho \geq 1$, alors ρ n'est pas admissible, ce qui implique le théorème 5.1.1. C'est le cas par exemple si Γ_0 est un réseau cocompact sans torsion de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et si ρ est injectif d'image discrète (*cf.* [Thu]); on retrouve ainsi le fait que pour Γ_0 cocompact il n'existe pas de morphisme admissible injectif d'image discrète, que nous avons déjà mentionné au paragraphe 0.1.3.

5.1.2 Spectre des longueurs

Pour tout $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, notons $\lambda(g) = \inf_{x \in \mathbb{H}^2} d(x, g \cdot x)$ la longueur de translation de g dans \mathbb{H}^2 ; rappelons que c'est la valeur absolue du logarithme du quotient des deux valeurs propres de g .

Soient Γ_0 un sous-groupe convexe cocompact sans torsion de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ un morphisme de groupes. Si ρ est admissible, on voit facilement que $\lambda(\rho(\gamma)) < \lambda(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$. Le fait que $C_\rho^\mu < 1$ donne l'information plus précise suivante sur le spectre des longueurs du graphe de ρ .

Corollaire 5.1.4. *Soit Γ_0 un sous-groupe convexe cocompact sans torsion de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Un morphisme de groupes $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est admissible si et seulement s'il existe une constante $C < 1$ telle que $\lambda(\rho(\gamma)) \leq C\lambda(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \Gamma_0$.*

Plus précisément, le corollaire 5.1.4 résulte du théorème 5.1.1 et du fait que la borne supérieure C_ρ^λ des quotients $\lambda(\rho(\gamma))/\lambda(\gamma)$, où $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$, est égale à C_ρ^μ (proposition 5.6.1).

5.1.3 Généralisation d'un résultat de Thurston

L'égalité $C_\rho^\lambda = C_\rho^\mu$ que nous venons de mentionner implique également le résultat suivant.

Corollaire 5.1.5. *Soient Γ_0 un sous-groupe convexe cocompact sans torsion de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ un morphisme de groupes tel que $\rho(\Gamma_0)$ admette zéro ou deux points fixes dans $\partial\mathbb{H}^2$. Notons $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$ l'enveloppe convexe dans \mathbb{H}^2 de l'ensemble limite de Γ_0 . Si la borne inférieure C_ρ des constantes de Lipschitz d'applications lipschitziennes ρ -équivariantes de $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$ dans \mathbb{H}^2 est ≥ 1 , elle est égale à la borne supérieure C_ρ^λ des quotients $\lambda(\rho(\gamma))/\lambda(\gamma)$, où $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$.*

Lorsque Γ_0 est cocompact dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, ceci généralise un résultat de Thurston sur l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}(M)$ de la surface $M = \Gamma_0 \backslash \mathbb{H}^2$, qui affirme que deux définitions d'une distance asymétrique sur $\mathcal{T}(M)$ sont équivalentes (cf. paragraphe 5.6.2). Plus précisément, le résultat de Thurston correspond à notre corollaire 5.1.5 dans le cas particulier où Γ_0 est cocompact et ρ injectif d'image discrète ; dans ce cas la borne inférieure des constantes de Lipschitz d'applications lipschitziennes ρ -équivariantes de $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2 = \mathbb{H}^2$ dans \mathbb{H}^2 est toujours ≥ 1 ([Thu], prop. 2.1).

Comme on l'a vu au chapitre 4, le corollaire 5.1.5 est également valable pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ en remplaçant \mathbb{H}^2 par l'arbre de Bruhat-Tits de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$, sans hypothèse sur $\rho(\Gamma_0)$ ni sur la borne inférieure des constantes de Lipschitz. Dans le cas de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$, la borne supérieure des quotients $\lambda(\rho(\gamma))/\lambda(\gamma)$, où $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$, est toujours atteinte ; elle est même atteinte sur une partie finie de $\Gamma_0 \setminus \{1\}$ indépendante de ρ . Ceci est faux pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$: en général, la borne supérieure des quotients $\lambda(\rho(\gamma))/\lambda(\gamma)$, où $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$, n'est pas atteinte. Pour Γ_0 cocompact dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et ρ injectif d'image discrète, c'est équivalent au fait qu'en général, la borne supérieure des quotients de longueurs de géodésiques fermées de $M = \Gamma_0 \backslash \mathbb{H}^2$ relativement à deux métriques hyperboliques fixées n'est pas atteinte par une géodésique fermée mais par une lamination géodésique mesurée (cf. [Thu]).

5.1.4 Déformation des variétés anti-de Sitter compactes de dimension trois

Enfin, le théorème 5.1.3 implique le résultat suivant.

Corollaire 5.1.6. *Soient Γ_0 un sous-groupe convexe cocompact sans torsion de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ un morphisme de groupes admissible. Il existe des voisinages*

$\mathcal{V} \subset \text{Hom}(\Gamma_0, \text{SL}_2(\mathbb{R}))$ de l'inclusion naturelle et $\mathcal{W} \subset \text{Hom}(\Gamma_0, \text{SL}_2(\mathbb{R}))$ de ρ tels que pour tout $(\sigma, \tau) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W}$,

- le morphisme σ soit injectif,
- le groupe $\sigma(\Gamma_0)$ soit discret dans $\text{SL}_2(\mathbb{R})$, et cocompact si Γ_0 l'est,
- le morphisme $\tau \circ \sigma^{-1} : \sigma(\Gamma_0) \rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{R})$ soit admissible.

Comme précédemment, on note $\text{Hom}(\Gamma_0, \text{SL}_2(\mathbb{R}))$ l'ensemble des morphismes de groupes de Γ_0 dans $\text{SL}_2(\mathbb{R})$, muni de la topologie compacte-ouverte. Pour toute partie génératrice finie F de Γ_0 , une suite $(\varphi_n) \in \text{Hom}(\Gamma_0, \text{SL}_2(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ converge vers un élément $\varphi \in \text{Hom}(\Gamma_0, \text{SL}_2(\mathbb{R}))$ si et seulement si $\varphi_n(\gamma) \rightarrow \varphi(\gamma)$ pour tout $\gamma \in F$.

Le corollaire 5.1.6 affirme en particulier que pour tout sous-groupe convexe cocompact sans torsion Γ_0 de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$, l'ensemble des morphismes admissibles est ouvert dans $\text{Hom}(\Gamma_0, \text{SL}_2(\mathbb{R}))$. Ceci est vrai pour un sous-groupe convexe cocompact quelconque de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ d'après le lemme de Selberg ([Sel], lem. 8) et l'inégalité (1.4.9).

Dans le cas particulier où Γ_0 est un réseau cocompact sans torsion de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$, on obtient ainsi une nouvelle démonstration du résultat suivant, analogue pour $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ du corollaire 4.1.2.

Corollaire 5.1.7. *Soit Γ un sous-groupe discret sans torsion de $\text{SL}_2(\mathbb{R}) \times \text{SL}_2(\mathbb{R})$ agissant proprement et cocompactement sur $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ par multiplication à gauche et à droite. Il existe un voisinage $\mathcal{U} \subset \text{Hom}(\Gamma, \text{SL}_2(\mathbb{R}) \times \text{SL}_2(\mathbb{R}))$ de l'inclusion naturelle formé de morphismes injectifs et tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{U}$, le groupe $\varphi(\Gamma)$ soit discret dans $\text{SL}_2(\mathbb{R}) \times \text{SL}_2(\mathbb{R})$ et agisse proprement et cocompactement sur $\text{SL}_2(\mathbb{R})$.*

Le corollaire 5.1.7 était déjà connu, comme conséquence de la complétude de Klingler [Kli] et d'un principe, dû à Ehresmann, de déformation des holonomies de (G, X) -structures sur des variétés compactes (cf. paragraphe 5.7.1). Cependant, la démonstration que nous donnons ici a l'avantage de ne pas utiliser la complétude ; elle est donc susceptible d'être adaptée à d'autres situations où l'on ne dispose pas de résultat de complétude.

Notons que si l'on remplace $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ par un autre groupe de Lie réel semi-simple G de rang réel un, le corollaire 5.1.7 n'est connu que pour les sous-groupes Γ *standard*, c'est-à-dire de la forme $\Gamma_0 \times \{1\}$ ou $\{1\} \times \Gamma_0$, où Γ_0 est un réseau cocompact sans torsion de G . Pour $G = \text{SL}_2(\mathbb{C})$, c'est un résultat de Ghys ([Ghy], lem. 2.1) ; le cas général, dû à Kobayashi ([Ko5], th. 2.4), résulte également du théorème 6.1.1 démontré au chapitre 6.

5.1.5 Plan du chapitre

Le point essentiel du chapitre est la démonstration du théorème 5.1.3 ; elle utilise un résultat de prolongement d'applications lipschitziennes de \mathbb{H}^2 (théorème 5.3.2). Dans la partie 5.2, nous rappelons la théorie classique du prolongement des applications lipschitziennes de \mathbb{H}^2 , développée par Kirzbraun et Valentine. Dans la partie 5.3, nous établissons le théorème 5.3.2, qui raffine la théorie de Kirzbraun et Valentine en contrôlant non seulement la constante de Lipschitz mais également la constante de

Lipschitz locale. Enfin, dans la partie 5.4 nous nous appuyons sur le résultat principal de la partie 5.3 pour démontrer le théorème 5.1.3. Nous procédons en deux étapes. Tout d'abord, nous montrons que si $f : \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ est une application ρ -équivariante et lipschitzienne de constante minimale $C_\rho \geq 1$ et s'il n'existe pas de droite géodésique de $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$ sur laquelle f est affine de constante maximale, on peut remplacer f par une autre application ρ -équivariante et C_ρ -lipschitzienne $g : \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ vérifiant la propriété suivante : les segments géodésiques sur lesquels g est affine de constante maximale sont inclus dans ceux sur lesquels f est affine de constante maximale, et les plus longs pour g sont uniformément plus courts que les plus longs pour f . Ensuite, nous montrons que pour toute application ρ -équivariante et lipschitzienne de constante minimale ≥ 1 , la constante de Lipschitz est atteinte entre deux points distincts. Ceci nous permet de raisonner par l'absurde : en itérant la première étape un nombre fini de fois, nous obtenons une contradiction avec la seconde étape.

Au paragraphe 5.5.1 nous prouvons l'existence d'une application ρ -équivariante et lipschitzienne de constante minimale lorsque le groupe $\rho(\Gamma_0)$ admet zéro ou deux points fixes dans $\partial\mathbb{H}^2$. Ceci nous permet, dans la suite de la partie 5.5, de déduire le théorème 5.1.1 du théorème 5.1.3. La partie 5.6 est consacrée aux corollaires 5.1.4 et 5.1.5, la partie 5.7 aux corollaires 5.1.6 et 5.1.7.

Enfin, la partie 5.8 est un appendice consacré à des rappels et calculs de géométrie hyperbolique, ainsi qu'à quelques remarques sur les applications lipschitziennes.

5.2 Rappels sur la construction de Kirzbraun et Valentine

Notre démonstration du théorème 5.1.3 utilise des techniques de prolongement d'applications lipschitziennes de \mathbb{H}^2 dans lui-même. Cette théorie a été initiée en 1934 par Kirzbraun [Kir], qui a démontré que toute application lipschitzienne d'une partie de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n admet un prolongement lipschitzien à \mathbb{R}^n tout entier avec la même constante de Lipschitz. Ce résultat a été transposé à l'espace hyperbolique \mathbb{H}^n par Valentine [Val] en 1944, et a donné lieu ensuite à de nombreux travaux de généralisation. Citons par exemple l'article de Lang et Schröder [LS], où le théorème de Kirzbraun est étendu aux applications lipschitziennes de constante ≥ 1 entre deux espaces métriques géodésiques X et Y , l'espace de départ X étant de courbure $\geq \kappa$ au sens d'Alexandrov pour un certain $\kappa \in \mathbb{R}$ et l'espace d'arrivée Y étant complet et CAT(κ) pour ce même réel κ , avec une condition de diamètre si $\kappa > 0$.

Dans ce chapitre nous nous intéressons au prolongement d'applications lipschitziennes définies sur un compact de \mathbb{H}^2 . Dans ce cadre le théorème de Kirzbraun-Valentine s'énonce ainsi.

Théorème 5.2.1 (Kirzbraun, Valentine). *Soient S un compact de \mathbb{H}^2 et $f : S \rightarrow \mathbb{H}^2$ une application lipschitzienne de constante $C \geq 1$. Alors f admet un prolongement C -lipschitzien à \mathbb{H}^2 tout entier.*

Dans tout le chapitre, on dit qu'une application f est C -lipschitzienne si

$d(f(x), f(x')) \leq Cd(x, x')$ pour tous x, x' ; on dit qu'elle est *lipschitzienne de constante C* si elle est C -lipschitzienne mais pas C' -lipschitzienne pour $C' < C$.

Dans cette partie, pour la commodité du lecteur, nous redonnons une démonstration du théorème 5.2.1. Certains des résultats intermédiaires obtenus nous seront utiles pour raffiner ce théorème dans la partie 5.3.

5.2.1 Prolongement “optimal” d’une application continue en un point

L’essentiel de la démonstration du théorème 5.2.1 consiste à construire un prolongement C -lipschitzien de f à $S \cup \{x\}$ pour un point $x \in \mathbb{H}^2 \setminus S$ quelconque fixé. Ceci se fait en deux temps : d’abord on établit l’existence d’un tel prolongement “optimal” (lemme 5.2.2), ensuite on montre que ce prolongement “optimal” est C -lipschitzien (lemme 5.2.3).

Commençons par l’existence. Dans tout le chapitre, pour toute partie T de \mathbb{H}^2 , on note $\text{Conv}(T)$ l’enveloppe convexe de T dans \mathbb{H}^2 ; pour tout triplet (x_1, x_2, x_3) de points deux à deux distincts de \mathbb{H}^2 , on note $\angle_{x_1}(x_2, x_3)$ l’angle entre les segments géodésiques $[x_1, x_2]$ et $[x_1, x_3]$.

Lemme 5.2.2. *Soient (X, d_X) un espace métrique, S un compact de X et $f : S \rightarrow \mathbb{H}^2$ une application continue. Pour tout $x \in X \setminus S$, il existe un unique point $y \in \mathbb{H}^2$ tel que*

$$C_x = \max_{s \in S} \frac{d(y, f(s))}{d_X(x, s)}$$

soit minimal. De plus, il existe trois points $s_1, s_2, s_3 \in S$ tels que $d(y, f(s_i)) = C_x d_X(x, s_i)$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$ et tels que $y \in \text{Conv}(\{f(s_1), f(s_2), f(s_3)\})$.

On dira que le quintuplet $(y, C_x, s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}^+ \times S^3$ donné par le lemme 5.2.2 est une *donnée de Kirzbraun-Valentine* associée à f , S et x . Dans un tel quintuplet, y et C_x sont définis de manière unique, mais pas s_1, s_2 et s_3 .

Démonstration. Pour tout $t \geq 0$, posons

$$Y_t = \{y \in \mathbb{H}^2, d(y, f(s)) \leq t d_X(x, s) \quad \forall s \in S\}.$$

Par compacité de S et par continuité de f , il existe $t \geq 0$ tel que $Y_t \neq \emptyset$. Posons

$$c = \inf\{t \geq 0, Y_t \neq \emptyset\},$$

montrons que $Y_c = \{y\}$ pour un certain $y \in \text{Conv}(f(S))$ et prouvons l’existence de points $s_1, s_2, s_3 \in S$ vérifiant les propriétés demandées. On procède en trois étapes.

Première étape : pour tout $t > c$ on a $Y_t \cap \text{Conv}(f(S)) \neq \emptyset$.

En effet, soient $t > c$ et $y \in Y_t$. Notons y' le projeté de y sur $\text{Conv}(f(S))$. Pour tout $s \in S$ on a $\angle_{y'}(y, f(s)) \geq \frac{\pi}{2}$, donc $d(y', f(s)) \leq d(y, f(s))$ d’après (5.8.1). On en déduit que $y' \in Y_t \cap \text{Conv}(f(S))$.

Un raisonnement analogue montre aussi que $Y_c \subset \text{Conv}(f(S))$. En effet, supposons par l'absurde qu'il existe $y \in Y_c \setminus \text{Conv}(f(S))$, et notons $y' \neq y$ le projeté de y sur $\text{Conv}(f(S))$. Pour tout $s \in S$ on a $\angle_{y'}(y, f(s)) \geq \frac{\pi}{2}$, donc $d(y', f(s)) < d(y, f(s)) \leq c d_X(x, s)$ d'après (5.8.1). Comme S est compact, il existe un réel $c' < c$ tel que $d(y', f(s)) \leq c' d_X(x, s)$ pour tout $s \in S$. Ceci contredit la minimalité de c .

Deuxième étape : on a $Y_c = \{y\}$ pour un certain $y \in \text{Conv}(f(S))$.

Montrons que le diamètre de $Y_t \cap \text{Conv}(f(S))$ tend vers 0 quand t tend vers c . Pour cela, supposons par l'absurde qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$, une suite $(t_n) \in]c, +\infty[^\mathbb{N}$ tendant vers c et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, des points $p_n, q_n \in Y_{t_n} \cap \text{Conv}(f(S))$ tels que $d(p_n, q_n) \geq \varepsilon$. Comme $\text{Conv}(f(S))$ est compact, quitte à extraire une sous-suite on peut supposer $p_n \rightarrow p \in \text{Conv}(f(S))$ et $q_n \rightarrow q \in \text{Conv}(f(S))$; on a $p \neq q$. Pour tout $t > c$ on a $p, q \in Y_t$ puisque $Y_{t_n} \subset Y_t$ pour tout n assez grand et que Y_t est fermé dans \mathbb{H}^2 ; on a donc $p, q \in \bigcap_{t>c} Y_t = Y_c$. Si m désigne le milieu de $[p, q]$, alors pour tout $s \in S$ on a

$$\angle_m(p, f(s)) + \angle_m(q, f(s)) = \pi,$$

donc soit $\angle_m(p, f(s)) \geq \frac{\pi}{2}$, soit $\angle_m(q, f(s)) \geq \frac{\pi}{2}$. En utilisant (5.8.1) on en déduit $d(m, f(s)) < \max(d(p, f(s)), d(q, f(s))) \leq c d_X(x, s)$ pour tout $s \in S$. Comme S est compact, il existe un réel $c' < c$ tel que $d(m, f(s)) \leq c' d_X(x, s)$ pour tout $s \in S$, ce qui contredit la minimalité de c . Ainsi, le diamètre de $Y_t \cap \text{Conv}(f(S))$ tend bien vers 0 quand t tend vers c .

D'après le théorème des compacts emboîtés, on a $Y_c \cap \text{Conv}(f(S)) = \{y\}$ pour un certain $y \in \text{Conv}(f(S))$. Or, on a vu dans la première étape que $Y_c \subset \text{Conv}(f(S))$, donc $Y_c = \{y\}$.

Troisième étape : existence des points s_1, s_2, s_3 .

Il reste à démontrer l'existence de trois points $s_1, s_2, s_3 \in S$ tels que $d(y, f(s_i)) = C_x d_X(x, s_i)$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$ et tels que $y \in \text{Conv}(\{f(s_1), f(s_2), f(s_3)\})$. Pour cela, il suffit de montrer que $y \in \text{Conv}(f(S'))$, où

$$S' = \{s \in S, d(y, f(s)) = C_x d_X(x, s)\}.$$

Supposons par l'absurde que $y \notin \text{Conv}(f(S'))$, et soit y' le projeté de y sur $\text{Conv}(f(S'))$. Posons $\varepsilon = d(y, y')/2 > 0$.

Commençons par remarquer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $s \in S$ vérifiant $d(y, f(s)) \geq (c - \eta) d_X(x, s)$ on ait $d(f(s), f(S')) \leq \varepsilon$. En effet, si ce n'était pas le cas, il existerait une suite $(s_n) \in S^\mathbb{N}$ telle que $\frac{d(y, f(s_n))}{d_X(x, s_n)} \rightarrow c$ et telle que $d(f(s_n), f(S')) > \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme S est compact, quitte à extraire une sous-suite on pourrait supposer que (s_n) converge vers un certain $s \in S$, et en passant à la limite on obtiendrait $s \in S'$ et $d(f(s), f(S')) \geq \varepsilon > 0$: absurde.

Soit $s \in S$ vérifiant $d(y, f(s)) \geq (c - \eta) d_X(x, s)$. D'après ce qui précède on a $d(f(s), y') \leq \varepsilon = d(y, y')/2$, donc le point $f(s)$ est situé du côté de y' par rapport à la droite géodésique médiatrice du segment $[y, y']$. En particulier, pour tout $y'' \in [y, y']$ vérifiant $d(y'', y) \leq d(y'', y')$ on a $\angle_{y''}(y, f(s)) \geq \frac{\pi}{2}$, d'où $d(y'', f(s)) < d(y, f(s)) \leq c d_X(x, s)$ d'après (5.8.1).

D'autre part, pour tout $y'' \in [y, y']$ et tout $s \in S$ tel que $d(y, f(s)) \leq (c-\eta) d_X(x, s)$ on a

$$\frac{d(y'', f(s))}{d_X(x, s)} \leq (c-\eta) + \frac{d(y'', y)}{d_X(x, S)}$$

par inégalité triangulaire, donc $d(y'', f(s)) < c d_X(x, s)$ dès que $d(y'', y) < \eta d_X(x, S)$.

Ainsi, pour tout $y'' \in [y, y']$ vérifiant $d(y'', y) \leq d(y'', y')$ et $d(y'', y) < \eta d_X(x, S)$, on a $d(y'', f(s)) < c d_X(x, s)$ pour tout $s \in S$. Comme S est compact, il existe un réel $c' < c$ tel que $d(y'', f(s)) \leq c' d_X(x, s)$ pour tout $s \in S$. Ceci contredit la minimalité de c . \square

5.2.2 Majoration de la constante de Kirzbraun-Valentine

Pour démontrer le théorème 5.2.1, on établit dans un second temps le lemme suivant.

Lemme 5.2.3. *Soient S un compact de \mathbb{H}^2 et $f : S \rightarrow \mathbb{H}^2$ une application lipschitzienne de constante $C \geq 1$. Fixons un point $x \in \mathbb{H}^2 \setminus S$, et soient $s_1, s_2, s_3 \in S$ et $y \in \text{Conv}(\{f(s_1), f(s_2), f(s_3)\})$ tels que*

$$C_x := \frac{d(y, f(s_1))}{d(x, s_1)} = \frac{d(y, f(s_2))}{d(x, s_2)} = \frac{d(y, f(s_3))}{d(x, s_3)}.$$

Alors $C_x \leq C$.

Le lemme 5.2.3 découle du résultat plus précis suivant, qui nous sera utile dans la partie 5.3.

Lemme 5.2.4. *Soient $x, s_1, s_2, s_3, y, t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{H}^2$ tels que $y \in \text{Conv}(\{t_1, t_2, t_3\})$ et*

$$C_x := \frac{d(y, t_1)}{d(x, s_1)} = \frac{d(y, t_2)}{d(x, s_2)} = \frac{d(y, t_3)}{d(x, s_3)} \geq 1.$$

- Si $C_x > 1$, alors il existe $i \neq j$ tels que $\angle_y(t_i, t_j) \neq 0$ et $d(t_i, t_j) \geq C_x d(s_i, s_j)$, et l'inégalité est stricte si t_i, y, t_j ne sont pas alignés dans cet ordre.
- Si $C_x = 1$ et si $d(t_i, t_j) \leq d(s_i, s_j)$ pour tous i, j , alors $x \in \text{Conv}(\{s_1, s_2, s_3\})$ et on a $d(t_i, t_j) = d(s_i, s_j)$ pour tous i, j .

Démonstration. On a $\sum_{i \neq j} \angle_x(s_i, s_j) \leq 2\pi$, avec égalité si et seulement si $x \in \text{Conv}(\{s_1, s_2, s_3\})$. Comme $y \in \text{Conv}(\{t_1, t_2, t_3\})$, on a $\sum_{i \neq j} \angle_y(t_i, t_j) = 2\pi$. Par conséquent, il existe $i \neq j$ tels que

$$0 \neq \angle_y(t_i, t_j) \geq \angle_x(s_i, s_j),$$

où l'inégalité est stricte si $x \notin \text{Conv}(\{s_1, s_2, s_3\})$. D'après le corollaire 5.8.3, on a

$$d(t_i, t_j) \geq C_x d(s_i, s_j),$$

où l'inégalité est stricte si $C_x > 1$ et si t_i, y, t_j ne sont pas alignés dans cet ordre, ou bien si $x \notin \text{Conv}(\{s_1, s_2, s_3\})$. En particulier, si $C_x = 1$ et si $d(t_i, t_j) \leq d(s_i, s_j)$ pour tous i, j , alors $x \in \text{Conv}(\{s_1, s_2, s_3\})$ et $d(t_i, t_j) = d(s_i, s_j)$ pour tous i, j . \square

5.2.3 Fin de la démonstration du théorème de Kirzbraun-Valentine

Soient S un compact de \mathbb{H}^2 et $f : S \rightarrow \mathbb{H}^2$ une application lipschitzienne de constante $C \geq 1$. Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de points deux à deux distincts de $\mathbb{H}^2 \setminus S$ telle que $\{x_n, n \geq 1\}$ soit dense dans $\mathbb{H}^2 \setminus S$. Posons $g_0 = f : S \rightarrow \mathbb{H}^2$ et construisons par récurrence la restriction g_n de g à $S \cup \{x_i, 1 \leq i \leq n\}$, où $n \geq 1$, de la manière suivante. Supposons g_{n-1} construite et soit $(y_n, C_n, s_{1,n}, s_{2,n}, s_{3,n})$ une donnée de Kirzbraun-Valentine associée à g_{n-1} , à $S \cup \{x_i, 1 \leq i \leq n-1\}$ et à x_n , donnée par le lemme 5.2.2. On pose $g_n(x) = g_{n-1}(x)$ pour tout $x \in S \cup \{x_i, 1 \leq i \leq n-1\}$ et $g_n(x_n) = y_n$. D'après le lemme 5.2.3, on a $C_n \leq C$, i.e. l'application g_n est C -lipschitzienne. On obtient ainsi un prolongement C -lipschitzien

$$g : S \cup \{x_n, n \geq 1\} \longrightarrow \mathbb{H}^2$$

de f . Comme l'image de la suite (x_n) est dense dans $\mathbb{H}^2 \setminus S$, on peut prolonger g par continuité en une application C -lipschitzienne de \mathbb{H}^2 dans lui-même.

5.3 Un raffinement de la construction de Kirzbraun et Valentine

Rappelons que pour toute partie S de \mathbb{H}^2 , toute application continue $f : S \rightarrow \mathbb{H}^2$ et tout $x \in S$, la *constante de Lipschitz locale* $\kappa_f(x)$ de f en x est définie par

$$\kappa_f(x) = \inf_{r>0} \sup_{x', x'' \in B(x, r) \cap S, x' \neq x''} \frac{d(f(x'), f(x''))}{d(x', x'')} \in [0, +\infty], \quad (5.3.1)$$

où $B(x, r)$ désigne la boule fermée de centre x et de rayon r dans \mathbb{H}^2 . Si f est lipschitzienne de constante C et si $s_1, s_2 \in S$ vérifient $d(f(s_1), f(s_2)) = Cd(s_1, s_2)$, alors le seul prolongement C -lipschitzien possible de f au segment géodésique $[s_1, s_2]$ est l'application affine de constante C de $[s_1, s_2]$ dans \mathbb{H}^2 qui envoie s_1 sur $f(s_1)$ et s_2 sur $f(s_2)$ (remarque 5.8.7.1). Ceci motive la définition suivante.

Définition 5.3.1. Soient S une partie de \mathbb{H}^2 et $f : S \rightarrow \mathbb{H}^2$ une application lipschitzienne de constante C . Si $C \neq 1$, notons S^f l'union des segments géodésiques $[s_1, s_2]$, où $s_1, s_2 \in S$ vérifient $d(f(s_1), f(s_2)) = Cd(s_1, s_2)$; si $C = 1$, notons S^f l'union des triangles géodésiques $\text{Conv}(\{s_1, s_2, s_3\})$, où $s_1, s_2, s_3 \in S$ vérifient $d(f(s_i), f(s_j)) = d(s_i, s_j)$ pour tous i, j . Dans les deux cas, S^f contient S . On dit que S est f -saturée si $S^f = S$.

Notre démonstration du théorème 5.1.3 se fonde de manière essentielle sur le raffinement suivant du théorème 5.2.1, dans lequel nous contrôlons non seulement la constante de Lipschitz globale, mais également la constante de Lipschitz locale du prolongement obtenu.

Théorème 5.3.2. *Soient S un compact de \mathbb{H}^2 et $f : S \rightarrow \mathbb{H}^2$ une application lipschitzienne de constante $C \geq 1$. Supposons que S est f -saturé et notons S_C l'ensemble des points $x \in S$ tels que $\kappa_f(x) = C$. Alors f se prolonge en une application C -lipschitzienne $g : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ telle que $\kappa_g(x) < C$ pour tout $x \in \mathbb{H}^2 \setminus S_C$.*

Nous verrons au cours de la démonstration que le théorème 5.3.2 reste valable en remplaçant \mathbb{H}^2 par \mathbb{R}^2 , sans condition sur C . Dans ce cas, on définit les parties f -saturées de \mathbb{R}^2 comme les parties S égales à l'union des triangles $\text{Conv}(\{s_1, s_2, s_3\})$, où $s_1, s_2, s_3 \in S$ vérifient $d(f(s_i), f(s_j)) = d(s_i, s_j)$ pour tous i, j .

La remarque suivante permet de remplacer le compact f -saturé du théorème 5.3.2 par un compact quelconque de \mathbb{H}^2 .

Remarque 5.3.3. *Soient S un compact de \mathbb{H}^2 et $f : S \rightarrow \mathbb{H}^2$ une application lipschitzienne de constante C . Alors l'ensemble S^f donné par la définition 5.3.1 est compact, f admet un unique prolongement C -lipschitzien $f_{S^f} : S^f \rightarrow \mathbb{H}^2$ et S^f est f_{S^f} -saturé. On peut appliquer le théorème 5.3.2 à f_{S^f} et S^f , ce qui donne un prolongement C -lipschitzien $g : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ de f tel que $\kappa_g(x) < C$ pour tout $x \in \mathbb{H}^2 \setminus S_C^f$. Un tel prolongement vérifie toujours $\kappa_g(x) = C$ pour tout $x \in S^f \setminus S$.*

En effet, d'après la remarque 5.8.7.1, pour tous $s_1, s_2 \in S$ tels que $d(f(s_1), f(s_2)) = Cd(s_1, s_2)$ la restriction de f_{S^f} à $[s_1, s_2]$ est l'unique application affine de constante C de $[s_1, s_2]$ dans \mathbb{H}^2 qui envoie s_1 sur $f(s_1)$ et s_2 sur $f(s_2)$. D'après la remarque 5.8.7.2, si $C = 1$ alors pour tous $s_1, s_2, s_3 \in S$ tels que $d(f(s_i), f(s_j)) = d(s_i, s_j)$ pour tous i, j la restriction de f_{S^f} à $\text{Conv}(\{s_1, s_2, s_3\})$ est l'unique isométrie de $\text{Conv}(\{s_1, s_2, s_3\})$ dans \mathbb{H}^2 qui envoie s_i sur $f(s_i)$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$.

5.3.1 Idée de la démonstration du théorème 5.3.2

Notre stratégie pour démontrer le théorème 5.3.2 est de prolonger f progressivement sur des ensembles de plus en plus grands. L'étape principale consiste à prolonger f à un segment géodésique (par convention, les segments sont supposés compacts).

Proposition 5.3.4. *Soient S un compact de \mathbb{H}^2 et $f : S \rightarrow \mathbb{H}^2$ une application lipschitzienne de constante $C \geq 1$. Supposons que S est f -saturé et notons S_C l'ensemble des points $x \in S$ tels que $\kappa_f(x) = C$. Pour tout segment géodésique I de $\mathbb{H}^2 \setminus S_C$, il existe un prolongement C -lipschitzien $g : S \cup I \rightarrow \mathbb{H}^2$ de f tel que $\kappa_g(x) < C$ pour tout $x \in I \cup S \setminus S_C$ et tel que $S \cup I$ soit g -saturé.*

En appliquant la proposition 5.3.4 une première fois avec S et f , puis une deuxième fois avec $S \cup I$ et g , et en itérant le procédé un nombre fini de fois, on obtient le résultat intermédiaire suivant.

Proposition 5.3.5. *Soient S un compact de \mathbb{H}^2 et $f : S \rightarrow \mathbb{H}^2$ une application lipschitzienne de constante $C \geq 1$. Supposons que S est f -saturé et notons S_C l'ensemble des points $x \in S$ tels que $\kappa_f(x) = C$. Pour tout polygone géodésique compact P de $\mathbb{H}^2 \setminus S_C$, il existe un prolongement C -lipschitzien $g : S \cup P \rightarrow \mathbb{H}^2$ de f et tel que $\kappa_g(x) < C$ pour tout $x \in P \cup S \setminus S_C$ et tel que $S \cup P$ soit g -saturé.*

Nous appelons ici *polygone géodésique compact* de \mathbb{H}^2 toute union finie connexe de triangles géodésiques de \mathbb{H}^2 , où par définition un triangle géodésique est l'enveloppe convexe de trois points de \mathbb{H}^2 .

On obtient finalement le théorème 5.3.2 en appliquant la proposition 5.3.5 à une suite croissante de polygones géodésiques compacts de $\mathbb{H}^2 \setminus S_C$.

5.3.2 Remarques sur les constantes de Lipschitz locales

Avant de démontrer le théorème 5.3.2, faisons quelques remarques sur la constante de Lipschitz locale d'une application continue.

Remarque 5.3.6. Soient S une partie de \mathbb{H}^2 et $f : S \rightarrow \mathbb{H}^2$ une application continue. L'application $\kappa_f : S \rightarrow [0, +\infty]$ définie par (5.3.1) est semi-continue supérieurement. En particulier,

1. si f est lipschitzienne, alors sur tout compact de S l'application κ_f est majorée et atteint son maximum,
2. pour tout $t \geq 0$, l'ensemble $\kappa_f^{-1}([t, +\infty])$ est fermé dans S pour la topologie induite.

En effet, soient $x_0 \in S$ et $\varepsilon > 0$. Par définition de $\kappa_f(x_0)$, il existe $r_0 > 0$ tel que pour tous $x' \neq x''$ dans $B(x_0, r_0)$ on ait $\frac{d(f(x'), f(x''))}{d(x', x'')} \leq \kappa_f(x_0) + \varepsilon$. Pour tout $x \in \text{Int}(B(x_0, r_0))$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset B(x_0, r_0)$; pour tous $x' \neq x''$ dans $B(x, r)$ on a alors $\frac{d(f(x'), f(x''))}{d(x', x'')} \leq \kappa_f(x_0) + \varepsilon$, ce qui prouve que $\kappa_f(x) \leq \kappa_f(x_0) + \varepsilon$.

On en déduit le lemme suivant.

Lemme 5.3.7. Soient S un compact de \mathbb{H}^2 et $f : S \rightarrow \mathbb{H}^2$ une application lipschitzienne de constante C . Alors l'ensemble S_C des points $x \in S$ tels que $\kappa_f(x) = C$ est compact. Si S est f -saturé, alors pour tout compact \mathcal{K} de $S \setminus S_C$ on a

$$\sup_{x \in \mathcal{K}} \sup_{x' \in S \setminus \{x\}} \frac{d(f(x), f(x'))}{d(x, x')} < C. \quad (5.3.2)$$

Démonstration. D'après la remarque 5.3.6, l'ensemble S_C est fermé dans S , donc compact, et pour tout compact \mathcal{K} de $S \setminus S_C$ il existe $C_{\mathcal{K}} < C$ tel que $\kappa_f(x) \leq C_{\mathcal{K}}$ pour tout $x \in \mathcal{K}$. Supposons que S est f -saturé et fixons un compact \mathcal{K} de $S \setminus S_C$. Supposons par l'absurde qu'il existe des suites $(x_n) \in \mathcal{K}^{\mathbb{N}}$ et $(x'_n) \in S^{\mathbb{N}}$ telles que $x_n \neq x'_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et telles que $\frac{d(f(x_n), f(x'_n))}{d(x_n, x'_n)} \rightarrow C$. Comme \mathcal{K} et S sont compacts, quitte à extraire des sous-suites, on peut supposer $x_n \rightarrow x \in \mathcal{K} \subset S$ et $x'_n \rightarrow x' \in S$. Si $x \neq x'$, alors $\frac{d(f(x), f(x'))}{d(x, x')} = C$ en passant à la limite, donc $[x, x'] \subset S_C$, ce qui contredit l'hypothèse que $\mathcal{K} \cap S_C = \emptyset$. Si $x = x'$, alors $\kappa_f(x) = C$ par définition de κ_f , ce qui contredit là encore l'hypothèse que $\mathcal{K} \cap S_C = \emptyset$. Ceci prouve (5.3.2). \square

5.3.3 Démonstration de la proposition 5.3.4

Pour démontrer la proposition 5.3.4 on reprend la construction du paragraphe 5.2.3.

Construction. Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de points deux à deux distincts de $I \setminus S$ telle que $\{x_n, n \geq 1\}$ soit dense dans $I \setminus S$ et telle que les deux extrémités de I appartiennent à $S \cup \{x_n, n \geq 1\}$. Posons $g_0 = f : S \rightarrow \mathbb{H}^2$ et construisons par récurrence la restriction g_n de g à $S \cup \{x_i, 1 \leq i \leq n\}$, où $n \geq 1$, de la manière suivante. Supposons g_{n-1} construite et soit $(y_n, C_n, s_{1,n}, s_{2,n}, s_{3,n})$ une donnée de Kirzbraun-Valentine associée à g_{n-1} , à $S \cup \{x_i, 1 \leq i \leq n-1\}$ et à x_n , donnée par le lemme 5.2.2. On pose $g_n(x) = g_{n-1}(x)$ pour tout $x \in S \cup \{x_i, 1 \leq i \leq n-1\}$ et $g_n(x_n) = y_n$. D'après le lemme 5.2.3 on a $C_n \leq C$, i.e. l'application g_n est C -lipschitzienne. On obtient ainsi un prolongement C -lipschitzien $g : S \cup \{x_n, n \geq 1\} \rightarrow \mathbb{H}^2$ de f tel que pour tout $n \geq 1$ on ait

$$\frac{d(g(x_n), g(s_{1,n}))}{d(x_n, s_{1,n})} = \frac{d(g(x_n), g(s_{2,n}))}{d(x_n, s_{2,n})} = \frac{d(g(x_n), g(s_{3,n}))}{d(x_n, s_{3,n})} = C_n \quad (5.3.3)$$

et

$$g(x_n) \in \text{Conv}(\{s_{1,n}, s_{2,n}, s_{3,n}\}). \quad (5.3.4)$$

On prolonge enfin g par continuité en une application C -lipschitzienne $g : S \cup I \rightarrow \mathbb{H}^2$, en utilisant le fait que $\{x_n, n \geq 1\}$ est dense dans $I \setminus S$.

Remarque 5.3.8. Pour montrer que $\kappa_g(x) < C$ pour tout $x \in I \cup S \setminus S_C$ et que $S \cup I$ est g -saturé, il suffit de montrer que $\sup_{n \geq 1} C_n < C$.

En effet, il suffit pour cela de montrer que

$$C_I = \sup_{x \in I} \sup_{x' \in (T \cup I) \setminus \{x\}} \frac{d(g(x), g(x'))}{d(x, x')} < C,$$

ce qu'implique l'inégalité $\sup_{n \geq 1} C_n < C$.

La suite de ce paragraphe est donc consacrée à la démonstration de l'inégalité $\sup_{n \geq 1} C_n < C$. On commence par une remarque facile mais indispensable.

Remarque 5.3.9. Pour tout $n \geq 1$ on a $C_n < C$.

En effet, supposons par l'absurde qu'il existe $n \geq 1$ tel que $C_n = C$. Si $C > 1$, alors d'après le lemme 5.2.4 il existe $i \neq j$ tels que $d(g(s_{i,n}), g(s_{j,n})) = C_n d(s_{i,n}, s_{j,n})$ et tels que $s_{i,n}, x, s_{j,n}$ soient alignés dans cet ordre; on obtient une contradiction avec le fait que $I \cap S_C = \emptyset$. Si $C = 1$, alors d'après le lemme 5.2.4 on a $x \in \text{Conv}(\{s_{1,n}, s_{2,n}, s_{3,n}\})$ et $d(g(s_{i,n}), g(s_{j,n})) = C_n d(s_{i,n}, s_{j,n})$ pour tous i, j ; on obtient là aussi une contradiction avec le fait que $I \cap S_C = \emptyset$.

Dans la suite du paragraphe, on raisonne par l'absurde en supposant $\sup_{n \geq 1} C_n = C$. Soit $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ une application strictement croissante telle que

$$C_{\varphi(n)} > \max_{0 \leq k \leq \varphi(n)-1} C_k \quad (5.3.5)$$

pour tout $n \geq 1$. Par hypothèse on a $C_{\varphi(n)} \rightarrow C$. Comme I est compact, quitte à extraire encore une sous-suite, on peut supposer $x_{\varphi(n)} \rightarrow x$ pour un certain $x \in I$.

On commence par se restreindre au cas où $s_{1,\varphi(n)}$ reste dans un compact en dehors de S_C .

Lemme 5.3.10. *Quitte à renuméroter et à extraire une sous-suite, on peut supposer qu'il existe un compact \mathcal{K} de $S \setminus S_C$ tel que $s_{1,\varphi(n)} \in \mathcal{K} \cup I$ pour tout $n \geq 1$.*

Démonstration. Il suffit de montrer qu'il existe $i \in \{1, 2, 3\}$ tel que la suite $(s_{i,\varphi(n)})$ admette une valeur d'adhérence $s_i \in I \cup S \setminus S_C$.

Supposons par l'absurde que pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, toutes les valeurs d'adhérence de la suite $(s_{i,\varphi(n)})$ appartiennent à S_C . Alors il existe une sous-suite $(x_{\varphi'(n)})$ de $(x_{\varphi(n)})$ telle que pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$ on ait $s_{i,\varphi'(n)} \rightarrow s_i \in S_C$. De (5.3.4) on déduit aisément que $g(x) \in \text{Conv}(\{g(s_1), g(s_2), g(s_3)\})$. En passant à la limite dans (5.3.3) on obtient $d(g(x), g(s_i)) = Cd(x, s_i)$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$.

Supposons $C > 1$. D'après le lemme 5.2.4 il existe $i \neq j$ tels que $\angle_{g(x)}(g(s_i), g(s_j)) \neq 0$ et $d(g(s_i), g(s_j)) \geq Cd(s_i, s_j)$. Si $g(s_i), g(x), g(s_j)$ ne sont pas alignés dans cet ordre, alors l'inégalité est stricte, ce qui est impossible puisque g est C -lipschitzienne. Par conséquent, $g(s_i), g(x), g(s_j)$ sont alignés dans cet ordre. D'après la remarque 5.8.7.1, on a $x \in [s_i, s_j] \subset S_C$, ce qui contredit le fait que $I \cap S_C = \emptyset$.

Supposons $C = 1$. D'après le lemme 5.2.4 on a $x \in \text{Conv}(\{s_1, s_2, s_3\})$ et $d(g(s_i), g(s_j)) = d(s_i, s_j)$ pour tous i, j . D'après la remarque 5.8.7.2, la restriction de g à $\text{Conv}(\{s_1, s_2, s_3\})$ est une isométrie. En particulier, on a $x \in S_C$, ce qui contredit le fait que $I \cap S_C = \emptyset$. \square

Notons que le fait que I est un intervalle n'intervient pas dans la démonstration du lemme 5.3.10. En revanche, il intervient dans celle du lemme suivant, qui permet de se restreindre au cas où $s_{1,\varphi(n)}$ et $s_{2,\varphi(n)}$ restent tous deux dans un compact en dehors de S_C .

Lemme 5.3.11. *Quitte à renuméroter et à extraire une sous-suite, on peut supposer qu'il existe un compact \mathcal{K}' de $S \setminus S_C$ tel que $s_{1,\varphi(n)}, s_{2,\varphi(n)} \in \mathcal{K}' \cup I$ pour tout $n \geq 1$.*

Démonstration. D'après le lemme 5.3.10, quitte à renuméroter et à extraire une sous-suite, on peut supposer $s_{1,\varphi(n)} \rightarrow s_1 \in I \cup S \setminus S_C$. Comme dans la démonstration du lemme 5.3.10, il suffit de montrer qu'il existe $i \in \{2, 3\}$ tel que la suite $(s_{i,\varphi(n)})$ admette une valeur d'adhérence $s_i \in I \cup S \setminus S_C$. Supposons par l'absurde que pour tout $i \in \{2, 3\}$, toutes les valeurs d'adhérence de la suite $(s_{i,\varphi(n)})$ appartiennent à S_C . Alors il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ de $(x_{\varphi(n)})$ telle que pour tout $i \in \{2, 3\}$ on ait $s_{i,\varphi(n)} \rightarrow s_i \in S_C$. Comme $I \cap S_C = \emptyset$, on a $s_2, s_3 \neq x$. En passant à la limite dans (5.3.3) on obtient

$$d(g(x), g(s_i)) = Cd(x, s_i) \tag{5.3.6}$$

pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$. Nous traitons séparément les cas où $s_1 \neq x$ et où $s_1 = x$, le second cas étant le plus délicat.

Premier cas : $s_1 \neq x$.

Supposons $C > 1$. D'après (5.3.6) et le lemme 5.2.4 il existe $1 \leq i < j \leq 3$ tels que $d(g(s_i), g(s_j)) \geq Cd(s_i, s_j)$, et l'inégalité est stricte si $g(s_i), g(x), g(s_j)$ ne sont pas alignés dans cet ordre. Comme g est C -lipschitzienne, l'inégalité ne peut pas être stricte, donc $g(s_i), g(x), g(s_j)$ sont alignés dans cet ordre. D'après la remarque 5.8.7.3, on a $x \in [s_i, s_j]$ et g est affine de constante C sur $[s_i, s_j]$. Si $s_i, s_j \in S$ on obtient $x \in [s_i, s_j] \subset S_C$, ce qui contredit le fait que $I \cap S_C = \emptyset$. Sinon on a $s_i = s_1 \in I \setminus S$, et $[s_1, x] \cap (I \setminus S)$ contient un sous-intervalle ouvert non trivial de I puisque $s_1 \neq x$ par hypothèse et que S est fermé dans \mathbb{H}^2 . Comme $\{x_n, n \geq 1\}$ est dense dans $I \setminus S$, il existe $n \geq 1$ tel que $x_n \in [s_1, x]$. On a alors $d(g(x_n), g(s_j)) = Cd(x_n, s_j)$, ce qui contredit le fait que $C_n < C$.

Supposons $C = 1$. D'après le lemme 5.2.4 on a $x \in \text{Conv}(\{s_1, s_2, s_3\})$ et $d(g(s_i), g(s_j)) = d(s_i, s_j)$ pour tous i, j . D'après la remarque 5.8.7.2, la restriction de g à $\text{Conv}(\{s_1, s_2, s_3\})$ est une isométrie. Si $s_1 \in S$ on obtient $x \in \text{Conv}(\{s_1, s_2, s_3\}) \subset S_C$, ce qui contredit le fait que $I \cap S_C = \emptyset$. Sinon on a $s_i = s_1 \in I \setminus S$, et $[s_1, x] \cap (I \setminus S)$ contient un sous-intervalle ouvert non trivial de I puisque $s_1 \neq x$ par hypothèse et que S est fermé dans \mathbb{H}^2 . Comme $\{x_n, n \geq 1\}$ est dense dans $I \setminus S$, il existe $n \geq 1$ tel que $x_n \in [s_1, x]$. On a alors $d(g(x_n), g(s_j)) = Cd(x_n, s_j)$, ce qui contredit le fait que $C_n < C$.

Second cas : $s_1 = x$.

Commençons par remarquer que $x \notin S$, car sinon (5.3.6) impliquerait $x \in S_C$, ce qui contredirait le fait que $I \cap S_C = \emptyset$. Comme S est fermé dans \mathbb{H}^2 et comme $s_{1,\varphi(n)}, x_{\varphi(n)} \rightarrow x$, on peut supposer, quitte à extraire une sous-suite, que $s_{1,\varphi(n)} \notin S$ et $x_{\varphi(n)} \notin S$ pour tout $n \geq 1$. On a alors

$$s_{1,\varphi(n)} \in \{x_i, 1 \leq i \leq \varphi(n) - 1\} \subset I \setminus S$$

pour tout $n \geq 1$, et quitte à extraire encore une sous-suite, on peut supposer qu'il existe une extrémité e de I telle que $s_{1,\varphi(n)} \in [e, x_{\varphi(n)}] \subset I$ pour tout $n \geq 1$. Quitte à extraire une dernière sous-suite, on peut supposer que les angles $\angle_{x_{\varphi(n)}}(s_{1,\varphi(n)}, s_{i,\varphi(n)})$ et $\angle_{g(x_{\varphi(n)})}(g(s_{1,\varphi(n)}), g(s_{i,\varphi(n)}))$ admettent des limites pour $i \in \{2, 3\}$. D'après (5.3.3) et (5.3.5), pour tout $n \geq 1$ et tout $i \in \{2, 3\}$ on a

$$\frac{d(g(s_{1,\varphi(n)}), g(s_{i,\varphi(n)}))}{d(s_{1,\varphi(n)}, s_{i,\varphi(n)})} \leq \max(C_0, \dots, C_{\varphi(n)-1}) < C_{\varphi(n)}$$

et

$$C_{\varphi(n)} = \frac{d(g(s_{1,\varphi(n)}), g(x_{\varphi(n)}))}{d(s_{1,\varphi(n)}, x_{\varphi(n)})} = \frac{d(g(x_{\varphi(n)}), g(s_{i,\varphi(n)}))}{d(x_{\varphi(n)}, s_{i,\varphi(n)})}.$$

D'après le corollaire 5.8.5, on a alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \angle_{g(x_{\varphi(n)})}(g(s_{1,\varphi(n)}), g(s_{i,\varphi(n)})) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \angle_{x_{\varphi(n)}}(s_{1,\varphi(n)}, s_{i,\varphi(n)})$$

pour tout $i \in \{2, 3\}$. Or, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \neq j} \angle_{x_{\varphi(n)}}(s_{i,\varphi(n)}, s_{j,\varphi(n)}) \leq 2\pi, \quad (5.3.7)$$

et d'après (5.3.4) on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \neq j} \angle_{g(x_{\varphi(n)})}(g(s_{i,\varphi(n)}), g(s_{j,\varphi(n)})) = 2\pi,$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \angle_{g(x_{\varphi(n)})}(g(s_{2,\varphi(n)}), g(s_{3,\varphi(n)})) \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \angle_{x_{\varphi(n)}}(s_{2,\varphi(n)}, s_{3,\varphi(n)}),$$

c'est-à-dire

$$\angle_{g(x)}(g(s_2), g(s_3)) \geq \angle_x(s_2, s_3). \quad (5.3.8)$$

En utilisant (5.3.6) et le corollaire 5.8.3, on en déduit

$$d(g(s_2), g(s_3)) \geq Cd(s_2, s_3). \quad (5.3.9)$$

Comme g est C -lipschitzienne, il y a égalité dans (5.3.9). Comme de plus S est f -saturé, on a $[s_2, s_3] \subset S_C$, donc $x \notin [s_2, s_3]$. Notons que l'égalité dans (5.3.9) implique qu'il y a égalité dans (5.3.8) et dans (5.3.7). Comme $s_{1,\varphi(n)} \in [e, x_{\varphi(n)}]$ pour tout n , on en déduit

$$\angle_x(e, s_2) + \angle_x(e, s_3) + \angle_x(s_2, s_3) = 2\pi,$$

et donc $x \in \text{Conv}(\{e, s_2, s_3\})$.

Supposons $C > 1$. D'après le corollaire 5.8.3, comme il y a égalité dans (5.3.9), les points x, s_2, s_3 sont alignés. Or, on a vu que $x \notin [s_2, s_3]$ et que $x \in \text{Conv}(\{e, s_2, s_3\})$, donc il existe $i \in \{2, 3\}$ tel que $x \in [e, s_i]$. L'autre extrémité e' de I appartient alors à $[x, s_i]$. D'après (5.3.6) et la remarque 5.8.7.1, l'application g est affine de constante C sur $[x, s_i]$, donc en particulier on a $d(g(e'), g(s_i)) = Cd(e', s_i)$. Si $e' \in I \cap S$, on obtient $[e, s_i] \subset S_C$ car S est f -saturé, ce qui contredit le fait que $I \cap S_C = \emptyset$. Sinon on a $e' \in \{x_n, n \geq 1\}$ par hypothèse, ce qui contredit le fait que $C_n < C$ pour tout $n \geq 1$.

Supposons $C = 1$. D'après (5.3.6), (5.3.9) et la remarque 5.8.7.2, la restriction de g au triangle $\text{Conv}(\{x, s_2, s_3\})$ est une isométrie. Or, on a vu que $x \in \text{Conv}(\{e, s_2, s_3\})$, donc $[e, x] \subset \text{Conv}(\{e, s_2, s_3\})$. De plus, on a vu que $x \notin [s_2, s_3]$, donc l'ensemble $I \cap \text{Conv}(\{e, s_2, s_3\})$ contient strictement $[e, x]$. On en déduit que $\text{Conv}(\{x, s_2, s_3\})$ contient un sous-intervalle ouvert non trivial de I , et même de $I \setminus S$ puisque $x \notin S$. Comme $\{x_n, n \geq 1\}$ est dense dans $I \setminus S$, il existe $n \geq 1$ tel que $x_n \in \text{Conv}(\{x, s_2, s_3\})$. On a alors $d(g(x_n), g(s_2)) = d(x_n, s_2)$, ce qui contredit le fait que $C_n < 1$. \square

On peut maintenant terminer la démonstration de la proposition 5.3.4. D'après le lemme 5.3.11, quitte à renuméroter et à extraire une sous-suite, on peut supposer qu'il existe un compact \mathcal{K}' de $S \setminus S_C$ tel que $s_{1,\varphi(n)}, s_{2,\varphi(n)} \in \mathcal{K}' \cup I$ pour tout $n \geq 1$. D'après le lemme 5.3.7, on a

$$C_{\mathcal{K}'} = \sup_{x \in \mathcal{K}'} \sup_{x' \in S \setminus \{x\}} \frac{d(g(x), g(x'))}{d(x, x')} < C.$$

D'après le lemme 5.2.4, pour tout $n \geq 1$ on a alors

$$C_{\varphi(n)} \leq \max_{1 \leq i < j \leq 3} \frac{d(g(s_{i,\varphi(n)}), g(s_{j,\varphi(n)}))}{d(s_{i,\varphi(n)}, s_{j,\varphi(n)})} \leq \max(C_{\mathcal{K}'}, \max_{0 \leq k \leq \varphi(n)-1} C_k).$$

Comme $C_{\varphi(n)} \rightarrow C$, pour tout n assez grand on a

$$C_{\varphi(n)} \leq \max_{0 \leq k \leq \varphi(n)-1} C_k,$$

ce qui contredit (5.3.5).

5.3.4 Démonstration de la proposition 5.3.5

Notons I_1, \dots, I_s les côtés de P . Posons $g_0 = f : S \rightarrow \mathbb{H}^2$. On construit par récurrence sur i des prolongements C -lipschitziens $g_i : S \cup I_1 \cup \dots \cup I_i \rightarrow \mathbb{H}^2$ de f , où $1 \leq i \leq s$, tels que $\kappa_{g_i}(x) < C$ pour tout $x \in I_1 \cup \dots \cup I_i \cup S \setminus S_C$ et tel que $S \cup I_1 \cup \dots \cup I_i$ soit g_i -saturé. Plus précisément, si g_{i-1} est construit, on construit g_i en appliquant la proposition 5.3.4 à $S \cup I_1 \cup \dots \cup I_{i-1}$, à g_{i-1} et à I_i . Fixons un voisinage compact \mathcal{U} de P dans $\mathbb{H}^2 \setminus S_C$ et notons $\partial P = I_1 \cup \dots \cup I_s$ le bord de P . L'ensemble $\partial P \cup (S \cap \mathcal{U})$ est compact et ne rencontre pas S_C par hypothèse ; d'après le lemme 5.3.7, on a

$$C' := \sup_{x \in \partial P \cup (S \cap \mathcal{U})} \sup_{x' \in S \cup \partial P \setminus \{x\}} \frac{d(g_s(x), g_s(x'))}{d(x, x')} < C.$$

D'après le théorème 5.2.1, il existe un prolongement $g : S \cup P \rightarrow \mathbb{H}^2$ de g_s dont la restriction à $P \cup (S \cap \mathcal{U})$ est C' -lipschitzienne. On a alors $\kappa_g(x) < C$ pour tout $x \in P \cup S \setminus S_C$ et le compact $P \cup S$ est g -saturé.

5.3.5 Démonstration du théorème 5.3.2

Soit $(\mathcal{C}_\ell)_{\ell \in L}$ la famille des composantes connexes de $\mathbb{H}^2 \setminus S_C$. Comme $\mathbb{H}^2 \setminus S_C$ est ouvert dans \mathbb{H}^2 d'après le lemme 5.3.7, les ensembles \mathcal{C}_ℓ sont eux aussi ouverts dans \mathbb{H}^2 .

Fixons $\ell \in L$ et montrons qu'il existe un prolongement C -lipschitzien $g_\ell : S_C \cup \mathcal{C}_\ell \rightarrow \mathbb{H}^2$ de f tel que $\kappa_{g_\ell}(x) < C$ pour tout $x \in \mathcal{C}_\ell$. Posons $g_{\ell,0} = f$ et soit $(P_{\ell,n})_{n \geq 1}$ une suite croissante (pour l'inclusion) de polygones géodésiques compacts inclus dans \mathcal{C}_ℓ , dont la réunion est \mathcal{C}_ℓ . On construit par récurrence sur n des prolongements C -lipschitziens $g_{\ell,n} : S_C \cup P_{\ell,n} \rightarrow \mathbb{H}^2$ de f , où $n \geq 1$, tels que $\kappa_{g_{\ell,n}}(x) < C$ pour tout $x \in P_{\ell,n}$ et tel que $S_C \cup P_{\ell,n}$ soit $g_{\ell,n}$ -saturé. Plus précisément, si $g_{\ell,n-1}$ est construite, on construit $g_{\ell,n}$ en appliquant la proposition 5.3.5 à $S_C \cup P_{\ell,n-1}$, à $g_{\ell,n-1}$ et à $P_{\ell,n}$. Soit $g_\ell : S_C \cup \mathcal{C}_\ell \rightarrow \mathbb{H}^2$ l'application dont la restriction à P_n est $g_{\ell,n}$ pour tout $n \geq 1$. Comme \mathcal{C}_ℓ est ouvert dans \mathbb{H}^2 et comme l'union des P_n est \mathcal{C}_ℓ , on a $\kappa_{g_\ell}(x) < C$ pour tout $x \in \mathcal{C}_\ell$.

Soit $g : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ l'application dont la restriction à S_C est f et dont la restriction à \mathcal{C}_ℓ est g_ℓ pour tout $\ell \in L$. Par construction, comme \mathcal{C}_ℓ est ouvert dans \mathbb{H}^2 pour tout $\ell \in L$, on a $\kappa_g(x) = \kappa_{g_\ell}(x) < C$ pour tout $x \in \mathcal{C}_\ell$ et tout $\ell \in L$. Ainsi, on a bien $\kappa_g(x) < C$ pour tout $x \in \mathbb{H}^2 \setminus S_C$.

5.4 Une droite géodésique d'étirement maximal

Cette partie est consacrée à la démonstration du théorème 5.1.3.

Commençons par rappeler que le bord $\partial\mathbb{H}^2 \simeq \mathbb{S}^1$ de \mathbb{H}^2 est l'ensemble des classes d'équivalence $[\mathcal{R}]$ de rayons géodésiques $\mathcal{R} : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{H}^2$ pour la relation d'équivalence "être à distance bornée". L'espace $\overline{\mathbb{H}^2} = \mathbb{H}^2 \sqcup \partial\mathbb{H}^2$ est compact pour la topologie suivante : par définition, une suite $(x_n) \in (\mathbb{H}^2)^\mathbb{N}$ (resp. $(\xi_n) \in (\partial\mathbb{H}^2)^\mathbb{N}$) converge vers un point $\xi \in \partial\mathbb{H}^2$ si pour tout $x \in \mathbb{H}^2$ on a $d(x, x_n) \rightarrow +\infty$ et la suite des rayons géodésiques \mathcal{R}_n d'extrémité x passant par x_n (resp. tels que $[\mathcal{R}_n] = \xi_n$) converge uniformément sur les compacts vers le rayon géodésique \mathcal{R} d'extrémité x tel que $[\mathcal{R}] = \xi$ ([BrH], § III.H.3). L'ensemble limite Λ_{Γ_0} d'un sous-groupe Γ_0 de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est le plus petit fermé Γ_0 -invariant de $\partial\mathbb{H}^2$, obtenu comme intersection de $\partial\mathbb{H}^2$ avec l'adhérence dans $\overline{\mathbb{H}^2}$ d'une orbite $\Gamma_0 \cdot x_0$; il ne dépend pas du choix de l'orbite.

Notation. Pour tout sous-groupe Γ_0 de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, on note $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$ l'enveloppe convexe dans \mathbb{H}^2 de l'ensemble limite Λ_{Γ_0} , c'est-à-dire l'union des droites géodésiques de \mathbb{H}^2 dont les deux extrémités appartiennent à Λ_{Γ_0} .

L'action de Γ_0 sur \mathbb{H}^2 préserve (globalement) $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$. On dit que Γ_0 est *convexe cocompact* s'il est discret dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, si $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2 \neq \emptyset$ et si l'action de Γ_0 sur $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$ est cocompacte. Par exemple, tout réseau cocompact Γ_0 de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est convexe cocompact, avec $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2 = \mathbb{H}^2$.

Soit Γ_0 un sous-groupe convexe cocompact de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, soit $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ un morphisme de groupes et soit $f : \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ une application ρ -équivariante, lipschitzienne de constante C_ρ minimale. Pour démontrer le théorème 5.1.3, on commence par faire l'observation suivante : pour montrer qu'il existe une droite géodésique de $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$ sur laquelle f est affine de constante C_ρ , il suffit de prouver l'existence de segments géodésiques de longueur arbitrairement grande sur lesquels f est affine de constante C_ρ (lemme 5.4.3). Le théorème 5.1.3 se ramène donc à la proposition suivante.

Proposition 5.4.1. *Soit Γ_0 un sous-groupe convexe cocompact de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, soit $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ un morphisme de groupes et soit $f : \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ une application ρ -équivariante, lipschitzienne de constante C_ρ minimale. Si $C_\rho \geq 1$, il existe des segments géodésiques de $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$ de longueur arbitrairement grande sur lesquels f est affine de constante C_ρ .*

Pour démontrer la proposition 5.4.1, on introduit la notation suivante.

Notation. Pour toute application $f : \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$, lipschitzienne de constante C , on note

$$L_f = \sup \{ d(x, x'), \quad x, x' \in \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2, \quad d(f(x), f(x')) = C d(x, x') \} \in [0, +\infty]$$

la borne supérieure des longueurs des segments géodésiques sur lesquels f est affine de constante C .

La proposition 5.4.1 affirme que pour toute application ρ -équivariante $f : \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$, lipschitzienne de constante C_ρ minimale où $C_\rho \geq 1$, on a $L_f = +\infty$. Pour démontrer ceci, nous établissons la proposition suivante et raisonnons par l'absurde.

Proposition 5.4.2. *Soit Γ_0 un sous-groupe convexe cocompact de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, soit $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ un morphisme de groupes et soient $C \geq 1$ et $R > 0$ deux réels.*

1. *Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $R' \leq R$, l'existence d'une application ρ -équivariante et C -lipschitzienne $f : \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ vérifiant $L_f \leq R'$ implique l'existence d'une application ρ -équivariante et C -lipschitzienne $g : \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ vérifiant $L_g \leq R' - \varepsilon$.*
2. *Pour toute application ρ -équivariante $f : \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$, lipschitzienne de constante C , on a $L_f > 0$.*

On obtient immédiatement la proposition 5.4.1 en raisonnant par l'absurde et en appliquant la proposition 5.4.2 un nombre fini de fois.

5.4.1 Une première réduction du problème

L'observation suivante ramène la démonstration du théorème 5.1.3 à celle de la proposition 5.4.1.

Lemme 5.4.3. *Soit Γ_0 un sous-groupe convexe cocompact de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, soit $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ un morphisme de groupes et soit $f : \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ une application ρ -équivariante, lipschitzienne de constante $C \geq 0$. S'il existe des segments géodésiques de $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$ de longueur arbitrairement grande sur lesquels f est affine de constante C , alors il existe une droite géodésique de $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$ sur laquelle f est affine de constante C .*

Démonstration. Supposons qu'il existe une suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de segments géodésiques de $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$ sur lesquels f est affine de constante C et dont la longueur tend vers l'infini avec n . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons x_n et x'_n les deux extrémités de I_n , et x''_n son milieu. Soit \mathcal{D} un domaine fondamental compact de $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$ pour l'action de Γ_0 . Comme f est ρ -équivariante, quitte à remplacer I_n par un translaté par Γ_0 , on peut supposer $x''_n \in \mathcal{D}$. Comme \mathcal{D} est compact, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer $x''_n \rightarrow x'' \in \mathcal{D}$. Comme $d(x'', x_n) \rightarrow +\infty$ et comme $\overline{\mathbb{H}^2} = \mathbb{H}^2 \cup \partial\mathbb{H}^2$ est compact, quitte à extraire encore une sous-suite, on peut supposer que (x_n) converge dans $\overline{\mathbb{H}^2}$ vers un certain point $\xi \in \partial\mathbb{H}^2$. Ainsi, la suite des rayons géodésiques $\mathcal{R}_{n,x''}$ d'extrémité x'' passant par x_n converge uniformément sur les compacts vers le rayon géodésique \mathcal{R} d'extrémité x'' tel que $[\mathcal{R}] = \xi$; l'image de ce rayon géodésique est incluse dans $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si l'on note \mathcal{R}_n le rayon géodésique d'extrémité x''_n passant par x_n , alors pour tout $t \leq \min(d(x''_n, x_n), d(x'', x_n))$ on a $d(\mathcal{R}_n(t), \mathcal{R}_{n,x''}(t)) \leq d(x''_n, x'')$. Par conséquent, la suite $(\mathcal{R}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge elle aussi vers \mathcal{R} uniformément sur les compacts. De même, la suite des rayons géodésiques \mathcal{R}'_n d'extrémité x''_n passant par x'_n converge uniformément sur les compacts vers un certain rayon géodésique \mathcal{R}' d'extrémité x'' dont l'image est incluse dans $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$. Comme $I_n = [x_n, x''_n] \cup [x''_n, x'_n]$ est un segment géodésique, $\mathrm{Im}\mathcal{R}_n \cup \mathrm{Im}\mathcal{R}'_n$ est une droite géodésique pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\mathrm{Im}\mathcal{R} \cup \mathrm{Im}\mathcal{R}'$ aussi. Comme f est affine de constante C sur I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, elle est affine de constante C sur $\mathrm{Im}\mathcal{R} \cup \mathrm{Im}\mathcal{R}'$. \square

5.4.2 Un lemme-clé

Le lemme suivant constitue le cœur de la démonstration de la proposition 5.4.1.

Lemme 5.4.4. *Soit Γ_0 un sous-groupe convexe cocompact de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Notons $r > 0$ le rayon d'injectivité de $\Gamma_0 \backslash \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$ et soient $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_m$ des ouverts de $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$ de diamètre $< r$. Pour tout $1 \leq k \leq m$, fixons un voisinage compact convexe \mathcal{K}_k de $\overline{\mathcal{U}_k}$ dans $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$ de diamètre $< r$, et posons $S_k = \mathcal{K}_k \setminus \mathcal{U}_k$. Soient $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ un morphisme de groupes et $R > 0$ un réel. Il existe un réel $\varepsilon > 0$ vérifiant la propriété suivante :*

pour toute application ρ -équivariante $g_0 : \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$, lipschitzienne de constante $C \geq 1$ et telle que $L_{g_0} \leq R$, il existe des applications ρ -équivariantes et C -lipschitziennes $g_k : \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$, où $1 \leq k \leq m$, telles que

1. $\kappa_{g_k}^{-1}(C) \subset \kappa_{g_{k-1}}^{-1}(C)$ et $\kappa_{g_k}(x) < C$ pour tout $x \in \Gamma_0 \cdot (\mathcal{U}_k \setminus S_k^{g_k^{-1}})$,
2. pour tous $x, x' \in \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$ vérifiant $d(g_k(x), g_k(x')) = Cd(x, x')$, on ait $d(g_\ell(x), g_\ell(x')) = Cd(x, x')$ pour tout $0 \leq \ell \leq k-1$,
3. pour tous $x, x' \in \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$ vérifiant $d(g_k(x), g_k(x')) = Cd(x, x')$ et $(B(x, \frac{r}{4}) \cap \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2) \subset \Gamma_0 \cdot \mathcal{U}_k$, on ait $d(x, x') \leq L_{g_0} - \varepsilon$.

On reprend ici les notations de la définition 5.3.1 : si $C > 1$, on note $S_k^{g_k^{-1}}$ l'union des segments géodésiques $[s_1, s_2]$, où $s_1, s_2 \in S_k$ vérifient $d(g_{k-1}(s_1), g_{k-1}(s_2)) = Cd(s_1, s_2)$; si $C = 1$, on note $S_k^{g_k^{-1}}$ l'union des enveloppes convexes $\mathrm{Conv}(\{s_1, s_2, s_3\})$, où $s_1, s_2, s_3 \in S_k$ vérifient $d(g_{k-1}(s_i), g_{k-1}(s_j)) = d(s_i, s_j)$ pour tous i, j .

On munit le fermé $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$ de \mathbb{H}^2 de la topologie induite. Pour toute partie S de $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$, on note \overline{S} (resp. $\mathrm{Int}(S)$) son adhérence (resp. son intérieur) dans $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$.

Démonstration. D'après le lemme 5.8.6, il existe $\varepsilon \in]0, \frac{r}{4}]$ tel que pour tout triangle géodésique non plat $\mathrm{Conv}(\{x, x', x''\})$ de \mathbb{H}^2 vérifiant $d(x', x'') - \varepsilon \leq d(x, x') \leq R$ et $d(x, x'') \geq r/4$, le projeté orthogonal y de x'' sur la droite géodésique (x, x') vérifie $[x, y] \cap [x, x'] \neq \{x\}$ et $d(x, y) \geq \varepsilon$. Montrons que ce réel ε convient.

Soit $g_0 : \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ une application ρ -équivariante et lipschitzienne de constante $C \geq 1$, telle que $L_{g_0} \leq R$. On construit les applications g_k par récurrence sur k , en utilisant le théorème 5.3.2. Plus précisément, supposons g_{k-1} construite et construisons g_k . Notons que $S_k^{g_k^{-1}} \subset \mathcal{K}_k$ puisque \mathcal{K}_k est convexe par hypothèse. D'après le théorème 5.3.2, il existe une application C -lipschitzienne $g_k : \mathcal{K}_k \rightarrow \mathbb{H}^2$ coïncidant avec g_{k-1} sur $S_k^{g_k^{-1}}$ et telle que pour tout $x \in \mathcal{K}_k \setminus S_k^{g_k^{-1}} = \mathcal{U}_k \setminus S_k^{g_k^{-1}}$ on ait $\kappa_{g_k}(x) < C$. Comme \mathcal{K}_k est de diamètre $< r$, on peut prolonger g_k en une application continue ρ -équivariante $g_k : \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ en posant $g_k(\gamma \cdot x) = \rho(\gamma) \cdot g_k(x)$ pour tout $\gamma \in \Gamma_0$ et tout $x \in \mathcal{K}_k$, et $g_k(x) = g_{k-1}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2 \setminus (\Gamma_0 \cdot \mathcal{K}_k)$.

Par construction, on a $\kappa_{g_k}(x) \leq C$ pour tout $x \in \Gamma_0 \cdot \mathrm{Int}(\mathcal{K}_k)$, et $\kappa_{g_k}(x) < C$ pour $x \in \Gamma_0 \cdot (\mathcal{U}_k \setminus S_k^{g_k^{-1}})$. De plus, comme g_k coïncide avec g_{k-1} sur l'ouvert $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2 \setminus (\Gamma_0 \cdot \overline{\mathcal{U}_k})$, on a $\kappa_{g_k}(x) = \kappa_{g_{k-1}}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2 \setminus (\Gamma_0 \cdot \overline{\mathcal{U}_k})$. Par conséquent, g_k est C -lipschitzienne et vérifie la propriété 1.

Montrons que g_k vérifie la propriété 2. Soient $x \neq x'$ dans $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$ tels que $d(g_k(x), g_k(x')) = Cd(x, x')$. On a $\kappa_{g_k}(x) = \kappa_{g_k}(x') = C$ d'après la remarque 5.8.7.1,

donc $x, x' \notin \Gamma_0 \cdot (\mathcal{U}_k \setminus S_k^{g_{k-1}})$ d'après ce qui précède. Mais g_k coïncide avec g_{k-1} en dehors de $\Gamma_0 \cdot (\mathcal{U}_k \setminus S_k^{g_{k-1}})$, donc $d(g_{k-1}(x), g_{k-1}(x')) = Cd(x, x')$. Par hypothèse de récurrence, on a $d(g_\ell(x), g_\ell(x')) = Cd(x, x')$ pour tout $0 \leq \ell \leq k-1$. Ainsi, g_k vérifie bien la propriété 2.

Montrons que g_k vérifie la propriété 3. Comme g_k est ρ -équivariante, il suffit de considérer des points $x \neq x'$ de $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$ tels que $d(g_k(x), g_k(x')) = Cd(x, x')$ et tels que $(B(x, \frac{r}{4}) \cap \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2) \subset \mathcal{U}_k$. Par la propriété 1 que nous venons de démontrer, on a $d(g_0(x), g_0(x')) = Cd(x, x')$, donc $d(x, x') \leq L_{g_0}$ par définition de L_{g_0} . Supposons par l'absurde $d(x, x') > L_{g_0} - \varepsilon$. Soit x_ε le point de $[x, x']$ tel que $d(x, x_\varepsilon) = \min(\varepsilon, d(x, x'))$. Pour obtenir une contradiction, il suffit de montrer que

$$]x, x_\varepsilon[\cap S_k^{g_{k-1}} = \emptyset. \quad (5.4.1)$$

En effet, si (5.4.1) est vérifié, alors la restriction de κ_{g_k} à $]x, x_\varepsilon[$ est $< C$ d'après la propriété 1. Or, d'après la remarque 5.8.7.1 l'application g_k est affine de constante C sur $[x, x']$, d'où une contradiction.

Prouvons (5.4.1) en supposant tout d'abord $C > 1$. Soient $s_1, s_2 \in S_k$ tels que $d(g_0(s_1), g_0(s_2)) = Cd(s_1, s_2)$. Montrons que

$$]x, x_\varepsilon[\cap [s_1, s_2] = \emptyset. \quad (5.4.2)$$

Notons que $]x, x_\varepsilon[$ est inclus dans $B(x, \frac{r}{4}) \cap \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$, donc dans \mathcal{U}_k , donc ne rencontre pas S_k . Comme s_1 et s_2 appartiennent à S_k , il suffit, pour démontrer (5.4.2), de démontrer que $]x, x_\varepsilon[\cap]s_1, s_2[= \emptyset$. Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas. D'après le lemme 5.8.8, l'ensemble $]x, x_\varepsilon[\cap]s_1, s_2[$ est un intervalle ouvert non trivial. Comme $]x, x_\varepsilon[\subset (B(x, \frac{r}{4}) \cap \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2) \subset \mathcal{U}_k$, le segment géodésique $[s_1, s_2]$ contient le diamètre de $B(x, \frac{r}{4})$ contenant $]x, x_\varepsilon[$. D'après la remarque 5.8.7.4, l'application g_0 est donc affine de constante C sur un segment géodésique de longueur

$$d(x, x') + \frac{r}{4} > L_{g_0} - \varepsilon + \frac{r}{4} \geq L_{g_0},$$

ce qui contredit la définition de L_{g_0} . Par conséquent, (5.4.2) est bien vérifié. Ceci prouve (5.4.1) lorsque $C > 1$.

Prouvons à présent (5.4.1) en supposant $C = 1$. Soient $s_1, s_2, s_3 \in S_k$ tels que $d(g_0(s_i), g_0(s_j)) = Cd(s_i, s_j)$ pour tous i, j . Montrons que

$$]x, x_\varepsilon[\cap \text{Conv}(\{s_1, s_2, s_3\}) = \emptyset. \quad (5.4.3)$$

Pour cela, on suppose que $]x, x_\varepsilon[$ rencontre $\text{Conv}(\{s_1, s_2, s_3\})$. D'après le lemme 5.8.8, la restriction de g_0 à $\text{Conv}(\{x, x', s_1, s_2, s_3\})$ est une isométrie. En particulier, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$ on a $d(g_0(x'), g_0(s_i)) = d(x', s_i)$, donc

$$d(x', s_i) \leq L_{g_0} < d(x, x') + \varepsilon$$

par hypothèse. De plus, on a $d(x, s_i) > \frac{r}{4}$ puisque $(B(x, \frac{r}{4}) \cap \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2) \subset \mathcal{U}_k$ par hypothèse. D'après le lemme 5.8.6 appliqué au triangle géodésique $\text{Conv}(\{x, x', s_i\})$, le projeté

orthogonal y_i de s_i sur la droite géodésique passant par x et x' vérifie $[x, x_\varepsilon] \subset [x, y_i]$. Ainsi, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$ le point s_i est situé de l'autre côté que x par rapport à la droite orthogonale à $[x, x']$ passant par x_ε ; il en est donc de même de $\text{Conv}(\{s_1, s_2, s_3\})$. Par conséquent, (5.4.3) est bien vérifié. Ceci prouve (5.4.1) lorsque $C = 1$. \square

5.4.3 Démonstration de la proposition 5.4.2

Pour démontrer la proposition 5.4.2, on applique le lemme 5.4.4 à des ouverts $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_m$ bien choisis, donnés par le lemme suivant.

Lemme 5.4.5. *Soit Γ_0 un sous-groupe convexe cocompact de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$; notons $r > 0$ le rayon d'injectivité de $\Gamma_0 \backslash \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$. Il existe des ouverts $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_m$ de $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$ de diamètre $< r$ tels que toute boule fermée de rayon $r/4$ de $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$ soit incluse dans $\gamma \cdot \mathcal{U}_k$ pour un certain $\gamma \in \Gamma_0$ et un certain $1 \leq k \leq m$.*

Démonstration. Soit

$$\mathcal{D} = \left\{ x \in \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2, d(x, x_0) = \min_{\gamma \in \Gamma_0} d(x, \gamma \cdot x_0) \right\}$$

le domaine fondamental de Dirichlet de $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$ associé à un certain $x_0 \in \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$. Il existe une partie finie F de Γ_0 telle que tout convexe de $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$ de diamètre $\leq r/2$ rencontrant \mathcal{D} soit inclus dans l'union \mathcal{D}' des translatés $\gamma \cdot \mathcal{D}$, où $\gamma \in F$. L'ensemble X des parties compactes et convexes de \mathcal{D}' de diamètre $\leq r/2$ est compact pour la topologie de Hausdorff. Il est donc recouvert par un nombre fini de boules ouvertes de rayon $r/8$ pour la distance de Hausdorff d_{Haus} : il existe des éléments $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_m \in X$ tels que pour tout $\mathcal{C} \in X$ on ait $d_{\text{Haus}}(\mathcal{C}, \mathcal{C}_k) < r/8$ pour un certain $1 \leq k \leq m$. Pour tout $1 \leq k \leq m$, soit

$$\mathcal{U}_k = \left\{ x \in \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2, d(x, \mathcal{C}_k) < \frac{r}{8} \right\}$$

le $r/8$ -voisinage de \mathcal{C}_k dans $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$. Les ouverts $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_m$ conviennent. \square

Démonstration de la proposition 5.4.2. Soient $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_m$ les ouverts donnés par le lemme 5.4.5. Pour tout $1 \leq k \leq m$, fixons un voisinage compact convexe \mathcal{K}_k de $\overline{\mathcal{U}_k}$ dans $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$ de diamètre $< r$, et posons $S_k = \mathcal{K}_k \setminus \mathcal{U}_k$.

1. Montrons que le réel $\varepsilon > 0$ donné par le lemme 5.4.4 convient. Soit $f : \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ une application ρ -équivariante et C -lipschitzienne telle que $L_f \leq R$. Posons $g_0 = f$. D'après le lemme 5.4.4, il existe des applications ρ -équivariantes et C -lipschitziennes $g_k : \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$, où $1 \leq k \leq m$, telles que
 - (a) pour tous $x, x' \in \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$ vérifiant $d(g_k(x), g_k(x')) = Cd(x, x')$, on ait $d(g_\ell(x), g_\ell(x')) = Cd(x, x')$ pour tout $0 \leq \ell \leq k-1$,
 - (b) pour tous $x, x' \in \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$ vérifiant $d(g_k(x), g_k(x')) = Cd(x, x')$ et $(B(x, \frac{r}{4}) \cap \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2) \subset \Gamma_0 \cdot \mathcal{U}_k$, on ait $d(x, x') \leq L_f - \varepsilon$.

Posons $g = g_m$ et montrons que $L_g \leq L_f - \varepsilon$. Soient $x \neq x'$ dans $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$ tels que $d(g(x), g(x')) = Cd(x, x')$. D'après le lemme 5.4.5, il existe un élément $\gamma \in \Gamma_0$ et un entier $1 \leq k \leq m$ tels que $(B(x, \frac{r}{4}) \cap \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2) \subset \gamma \cdot \mathcal{U}_k$. D'après la propriété (a), on a $d(g_k(x), g_k(x')) = Cd(x, x')$. D'après la propriété (b), on a $d(x, x') \leq R - \varepsilon$.

2. Soit $f : \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ une application ρ -équivariante et lipschitzienne de constante C . Posons $g_0 = f$. D'après le lemme 5.4.4, il existe des applications ρ -équivariantes et C -lipschitziennes $g_k : \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$, où $1 \leq k \leq m$, telles que

- (a) $\kappa_{g_k}^{-1}(C) \subset \kappa_{g_{k-1}}^{-1}(C)$ et $\kappa_{g_k}(x) < C$ pour tout $x \in \Gamma_0 \cdot (\mathcal{U}_k \setminus S_k^{g_{k-1}})$,
- (b) pour tous $x, x' \in \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$ vérifiant $d(g_k(x), g_k(x')) = Cd(x, x')$, on ait $d(g_\ell(x), g_\ell(x')) = Cd(x, x')$ pour tout $0 \leq \ell \leq k - 1$.

Supposons par l'absurde que pour tous $x \neq x'$ dans $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$ on ait $d(f(x), f(x')) < Cd(x, x')$. D'après la propriété (b), on a $d(g_k(x), g_k(x')) < Cd(x, x')$ pour tout $1 \leq k \leq m$ et tous $x \neq x'$ dans $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$. En particulier, on a $\mathcal{U}_k \setminus S_k^{g_{k-1}} = \mathcal{U}_k$ pour tout $1 \leq k \leq m$. La propriété (a) implique donc, par récurrence,

$$\kappa_{g_k}^{-1}(C) \subset \kappa_f^{-1}(C) \setminus ((\Gamma_0 \cdot \mathcal{U}_1) \cup \dots \cup (\Gamma_0 \cdot \mathcal{U}_k)).$$

Or, d'après le lemme 5.4.5 on a

$$(\Gamma_0 \cdot \mathcal{U}_1) \cup \dots \cup (\Gamma_0 \cdot \mathcal{U}_m) = \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2,$$

donc $\kappa_{g_m}^{-1}(C) = \emptyset$. Ceci contredit la remarque suivante. □

Remarque 5.4.6. Soit Γ_0 un sous-groupe convexe cocompact de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Pour tout morphisme de groupes $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et toute application ρ -équivariante $f : \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$, lipschitzienne de constante C , il existe $x \in \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$ tel que $\kappa_f(x) = C$.

En effet, par définition de la constante de Lipschitz, il existe des suites $(x_n)_{n \geq 1}$ et $(x'_n)_{n \geq 1}$ de points de $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$ telles que $x_n \neq x'_n$ pour tout $n \geq 1$ et telles que

$$C_n := \frac{d(f(x_n), f(x'_n))}{d(x_n, x'_n)} \longrightarrow C.$$

Pour tout $n \geq 1$, il existe des points $y_n, y'_n \in [x_n, x'_n]$ tels que $0 < d(y_n, y'_n) \leq 1/n$ et tels que $d(f(y_n), f(y'_n)) \geq C_n d(y_n, y'_n)$. Soit \mathcal{D} un domaine fondamental compact de $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$ pour l'action de Γ_0 . Comme f est ρ -équivariante, quitte à remplacer le couple (y_n, y'_n) par un translaté par Γ_0 , on peut supposer $y_n \in \mathcal{D}$ pour tout $n \geq 1$. Comme \mathcal{D} est compact, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que (y_n) converge vers un certain $y \in \mathcal{D}$. On a alors $\kappa_f(y) = C$.

5.5 Une condition nécessaire et suffisante d'admissibilité

Cette partie est consacrée à la démonstration du théorème 5.1.1. Nous distinguons deux cas selon le nombre de points fixes de $\rho(\Gamma_0)$ dans $\partial\mathbb{H}^2$.

Rappelons qu'un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ admet deux points fixes ξ_1 et ξ_2 dans $\partial\mathbb{H}^2$ si et seulement si tous ses éléments $\neq \pm 1$ sont hyperboliques d'axe de translation la droite d'extrémités ξ_1 et ξ_2 . Il admet un unique point fixe dans $\partial\mathbb{H}^2$ si et seulement s'il est virtuellement unipotent ou bien résoluble mais non virtuellement abélien ; dans ce dernier cas il est conjugué à un sous-groupe du Borel de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ formé des matrices triangulaires supérieures. Enfin, il est sans point fixe dans $\partial\mathbb{H}^2$ si et seulement s'il est Zariski-dense dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, ou conjugué à un sous-groupe non abélien du normalisateur des matrices diagonales, ou encore borné.

Pour démontrer le théorème 5.1.1 dans le cas le plus intéressant où $\rho(\Gamma_0)$ admet zéro ou deux points fixes dans $\partial\mathbb{H}^2$, nous utilisons le théorème 5.1.3. Nous commençons par prouver dans ce cas l'existence d'une application ρ -équivariante et lipschitzienne de constante minimale.

5.5.1 Une application équivariante de constante de Lipschitz minimale

Lemme 5.5.1. *Soit Γ_0 un sous-groupe convexe cocompact de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et soit $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ un morphisme de groupes.*

1. *Il existe une application ρ -équivariante et lipschitzienne de $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$ dans \mathbb{H}^2 .*
2. *Si $\rho(\Gamma_0)$ admet zéro ou deux points fixes dans $\partial\mathbb{H}^2$, la borne inférieure C_ρ des constantes de Lipschitz de telles applications est atteinte.*

Comme dans le cas ultramétrique (paragraphe 4.2.1), le point 1 est facile.

Démonstration du point 1 du lemme 5.5.1. Fixons un point $x_0 \in \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$ et notons

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2, \quad d(x, x_0) \leq d(x, \gamma \cdot x_0) \quad \forall \gamma \in \Gamma_0\}$$

le domaine de Dirichlet associé dans $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$. L'enveloppe convexe de \mathcal{D} dans \mathbb{H}^2 est un polygone géodésique compact P . Soit S un système fini de représentants des sommets de P modulo l'action de Γ_0 . Pour tout $s \in S$, choisissons un point $x_s \in \mathbb{H}^2$. Définissons une application f de l'ensemble des sommets de P vers \mathbb{H}^2 en posant $f(\gamma \cdot s) = \rho(\gamma) \cdot x_s$ pour tout $s \in S$ et tout $\gamma \in \Gamma_0$ tels que $\gamma \cdot s \in \mathcal{D}$. On peut prolonger f en une application ρ -équivariante et lipschitzienne du bord de P vers \mathbb{H}^2 en imposant que sa restriction à tout côté de P soit affine. D'après le théorème 5.2.1, cette application admet un prolongement lipschitzien à \mathcal{D} tout entier. On le prolonge en une application ρ -équivariante et lipschitzienne $f : \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ en posant $f(\gamma \cdot x) = \rho(\gamma) \cdot f(x)$ pour tout $\gamma \in \Gamma_0$ et tout $x \in \mathcal{D}$. \square

Avant de démontrer le point 2 du lemme 5.5.1, donnons l'idée de la démonstration. Soit \mathcal{D} un domaine fondamental compact de $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$ pour l'action de Γ_0 . On commence par remarquer que la donnée d'une application ρ -équivariante $f : \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ est équivalente à la donnée d'une application $f' : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{H}^2$ vérifiant certaines conditions sur le bord de \mathcal{D} . Fixons une constante $C > C_\rho$. L'idée est alors d'appliquer le théorème d'Ascoli aux applications f' ci-dessus qui sont C -lipschitziennes. Pour cela,

il faut se ramener à un sous-ensemble composé d'applications à valeurs dans un compact fixé de \mathbb{H}^2 . C'est possible lorsque $\rho(\Gamma_0)$ admet zéro ou deux points fixes dans $\partial\mathbb{H}^2$: on utilise pour cela la remarque suivante.

Remarque 5.5.2. Soient $g_1, \dots, g_n \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et $R \geq 0$. Posons

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{H}^2, \quad d(x, g_i \cdot x) \leq R \quad \forall i\}.$$

Si les éléments g_i n'admettent pas de point fixe commun dans $\partial\mathbb{H}^2$, alors \mathcal{C} est compact. Si les éléments g_i admettent deux points fixes communs ξ_1 et ξ_2 dans $\partial\mathbb{H}^2$, alors il existe $R' \geq 0$ tel que $d(x, D) \leq R'$ pour tout $x \in \mathcal{C}$, où D désigne la droite géodésique de \mathbb{H}^2 d'extrémités ξ_1 et ξ_2 .

En effet, pour tout $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, l'ensemble des points $x \in \mathbb{H}^2$ tels que $d(x, g \cdot x) \leq R$ est

- un voisinage de l'axe de translation \mathcal{A}_g de g de la forme $\{x \in \mathbb{H}^2, d(x, \mathcal{A}_g) \leq R'\}$ si g est hyperbolique,
- un horodisque centré en l'unique point fixe de g dans $\partial\mathbb{H}^2$ si g est parabolique,
- un disque centré en l'unique point fixe de g dans \mathbb{H}^2 si g est elliptique.

Démontrons à présent le point 2 du lemme 5.5.1.

Démonstration du point 2 du lemme 5.5.1. Soit \mathcal{D} un domaine fondamental connexe pour l'action de Γ_0 sur $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$. L'ensemble

$$\mathcal{F} = \{\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}, \quad \gamma \cdot \mathcal{D} \cap \mathcal{D} \neq \emptyset\}$$

est un système générateur fini de Γ_0 . Fixons un réel $C > C_\rho$. La restriction de $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$ à \mathcal{D} induit une bijection entre l'ensemble \mathcal{S} des applications ρ -équivariantes et C -lipschitziennes $f : \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ et l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$ des applications C -lipschitziennes $f' : \mathcal{D} \rightarrow X'$ vérifiant $f'(\gamma \cdot x) = \rho(\gamma) \cdot f'(x)$ pour tous $\gamma \in \mathcal{F}$ et $x \in \mathcal{D}$ tels que $\gamma \cdot x \in \mathcal{D}$. Cette bijection préserve les constantes de Lipschitz. Notons que $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$ est fermé dans l'ensemble des applications continues de \mathcal{D} dans \mathbb{H}^2 et uniformément équicontinu pour la topologie de la convergence uniforme. Comme dans le cas ultramétrique (paragraphe 4.2.2), nous voulons appliquer le théorème d'Ascoli ; dans le cas où $\rho(\Gamma_0)$ admet deux points fixes dans $\partial\mathbb{H}^2$, nous allons devoir nous ramener à un sous-ensemble de $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$ formé d'applications à valeurs dans un compact fixé de \mathbb{H}^2 . Commençons par remarquer que si l'on pose

$$R = \max \{d(x, \gamma \cdot x), \quad x \in \mathcal{D}, \gamma \in \mathcal{F}\} > 0,$$

alors pour tout $f' \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}}$ l'image $f'(\mathcal{D})$ est incluse dans

$$\mathcal{C} = \{y \in \mathbb{H}^2, \quad d(y, \rho(\gamma) \cdot y) \leq CR \quad \forall \gamma \in \mathcal{F}\}.$$

Si le groupe $\rho(\Gamma_0)$ n'a pas de point fixe dans $\partial\mathbb{H}^2$, alors \mathcal{C} est compact d'après le lemme 5.5.2. Le théorème d'Ascoli implique alors que $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$ est compact pour la

topologie de la convergence uniforme. On en déduit l'existence d'un élément $f' \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}}$, et donc d'un élément $f \in \mathcal{S}$, de constante de Lipschitz C_ρ minimale.

Supposons que $\rho(\Gamma_0)$ admette deux points fixes ξ_1 et ξ_2 dans $\partial\mathbb{H}^2$, et soit D la droite géodésique de \mathbb{H}^2 d'extrémités ξ_1 et ξ_2 . D'après le lemme 5.5.2, il existe $R' \geq 0$ tel que $d(f'(x), D) \leq R'$ pour tout $f' \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}}$ et tout $x \in \mathcal{D}$. Fixons un point $y_0 \in D$ et une isométrie hyperbolique $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ d'axe de translation D . Pour tout $f' \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}}$, il existe un entier $m \in \mathbb{Z}$ tel que $g^m \cdot f'(\mathcal{D})$ soit inclus dans le compact

$$\mathcal{C}' = \{y \in \mathbb{H}^2, \quad d(y, y_0) \leq \lambda(g) + R'\}.$$

Comme g est hyperbolique d'axe de translation D , il commute à $\rho(\Gamma_0)$. Par conséquent on a encore $g^m \cdot f' \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}}$, et les constantes de Lipschitz de f' et de $g^m \cdot f'$ sont les mêmes. Ainsi, si l'on note $\mathcal{S}_{\mathcal{D}, \mathcal{C}'}$ le sous-ensemble fermé de $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$ formé des éléments f' tels que $f'(\mathcal{D}) \subset \mathcal{C}'$, alors les bornes inférieures des constantes de Lipschitz des éléments de $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$ et de $\mathcal{S}_{\mathcal{D}, \mathcal{C}'}$ sont les mêmes. D'après le théorème d'Ascoli, l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathcal{D}, \mathcal{C}'}$ est compact pour la topologie de la convergence uniforme. On en déduit l'existence d'un élément $f' \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}, \mathcal{C}'}$, et donc d'un élément $f \in \mathcal{S}$, de constante de Lipschitz C_ρ minimale. \square

5.5.2 Cas où $\rho(\Gamma_0)$ admet zéro ou deux points fixes dans $\partial\mathbb{H}^2$

Commençons par démontrer le théorème 5.1.1 dans le cas le plus intéressant, à savoir le cas où $\rho(\Gamma_0)$ admet zéro ou deux points fixes dans $\partial\mathbb{H}^2$.

Proposition 5.5.3. *Soient $\mu : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ une projection de Cartan, Γ_0 un sous-groupe convexe cocompact de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ un morphisme de groupes tel que $\rho(\Gamma_0)$ admette zéro ou deux points fixes dans $\partial\mathbb{H}^2$. Si ρ est admissible, il existe des constantes $C < 1$ et $C' \geq 0$ telles que pour tout $\gamma \in \Gamma_0$ on ait*

$$\mu(\rho(\gamma)) \leq C\mu(\gamma) + C'.$$

Comme précédemment, pour tout sous-groupe convexe cocompact Γ_0 de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et pour tout morphisme de groupes $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, notons C_ρ la borne inférieure des constantes de Lipschitz d'applications ρ -équivariantes de $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$ dans \mathbb{H}^2 . Fixons une projection de Cartan $\mu : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ et notons C_ρ^μ la borne inférieure des réels $t \geq 0$ tels que l'ensemble $\{\mu(\rho(\gamma)) - t\mu(\gamma), \gamma \in \Gamma_0\} \subset \mathbb{R}$ soit majoré; elle ne dépend pas du choix de μ (cf. paragraphe 1.4.3).

Remarque 5.5.4. *On a $C_\rho^\mu \leq C_\rho$.*

En effet, on peut supposer que $\mu(g) = d(x_0, g \cdot x_0)$ pour un certain $x_0 \in \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$ (cf. paragraphe 1.4.4). D'après le lemme 5.5.1 il existe une application ρ -équivariante $f : \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ qui est lipschitzienne de constante $C_\rho \geq 0$ minimale. Pour tout $\gamma \in \Gamma_0$

on a

$$\begin{aligned}
\mu(\rho(\gamma)) &= d(x_0, \rho(\gamma) \cdot x_0) \\
&\leq d(x_0, f(x_0)) + d(f(x_0), \rho(\gamma) \cdot f(x_0)) + d(\rho(\gamma) \cdot f(x_0), \rho(\gamma) \cdot x_0) \\
&= d(f(x_0), f(\gamma \cdot x_0)) + 2d(x_0, f(x_0)) \\
&\leq C_\rho d(x_0, \gamma \cdot x_0) + 2d(x_0, f(x_0)) \\
&= C_\rho \mu(\gamma) + 2d(x_0, f(x_0)).
\end{aligned}$$

Le lemme suivant est une conséquence de la proposition 5.4.1, et donc *a fortiori* du théorème 5.1.3.

Lemme 5.5.5. *Soient $\mu : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ une projection de Cartan, Γ_0 un sous-groupe convexe cocompact de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ un morphisme de groupes tel que $\rho(\Gamma_0)$ admette zéro ou deux points fixes dans $\partial\mathbb{H}^2$. Si $C_\rho \geq 1$, il existe une suite $(\gamma_n) \in (\Gamma_0)^\mathbb{N}$ telle que la suite $(\mu(\rho(\gamma_n)) - C_\rho \mu(\gamma_n))_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée et telle que $\mu(\gamma_n) \rightarrow +\infty$; en particulier on a $C_\rho^\mu = C_\rho$.*

Démonstration. On peut supposer que $\mu(g) = d(x_0, g \cdot x_0)$ pour un certain $x_0 \in \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$ (cf. paragraphe 1.4.4). D'après le lemme 5.5.1, il existe une application ρ -équivariante $f : \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ qui est C_ρ -lipschitzienne. Supposons $C_\rho \geq 1$. D'après la proposition 5.4.1, il existe une suite $([x_n, x'_n])_{n \geq 1}$ de segments géodésiques de $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$ de longueur tendant vers l'infini et sur lesquels f est affine de constante C_ρ . Soit

$$\mathcal{D} = \left\{ x \in \mathbb{H}_{\Gamma_0}^2, d(x, x_0) = \min_{\gamma \in \Gamma_0} d(x, \gamma \cdot x_0) \right\}$$

le domaine fondamental de Dirichlet de $\mathbb{H}_{\Gamma_0}^2$ associé à x_0 ; notons $d > 0$ son diamètre. Comme f est ρ -équivariante, quitte à remplacer $[x_n, x'_n]$ par un translaté par Γ_0 , on peut supposer $x_n \in \mathcal{D}$ pour tout $n \geq 1$. Pour tout $n \geq 1$, soit $\gamma_n \in \Gamma_0$ tel que $x'_n \in \gamma_n \cdot \mathcal{D}$. On a

$$\begin{aligned}
\mu(\gamma_n) = d(x_0, \gamma_n \cdot x_0) &\leq d(x_0, x_n) + d(x_n, x'_n) + d(x'_n, \gamma_n \cdot x_0) \\
&\leq d(x_n, x'_n) + 2d
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mu(\rho(\gamma_n)) &= d(x_0, \rho(\gamma_n) \cdot x_0) \\
&\geq d(f(x_n), f(x'_n)) - d(x_0, f(x_0)) - d(f(x_0), f(x_n)) \\
&\quad - d(f(x'_n), \rho(\gamma_n) \cdot f(x_0)) - d(\rho(\gamma_n) \cdot f(x_0), \rho(\gamma_n) \cdot x_0) \\
&\geq C_\rho d(x_n, x'_n) - 2d(x_0, f(x_0)) - 2C_\rho d,
\end{aligned}$$

d'où

$$\mu(\rho(\gamma_n)) \geq C_\rho \mu(\gamma_n) - 2d(x_0, f(x_0)) - 4C_\rho d$$

pour tout $n \geq 1$. Ainsi, la suite $(\mu(\rho(\gamma_n)) - C_\rho \mu(\gamma_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée. D'après la remarque 5.5.4, elle est majorée. De plus on a

$$\begin{aligned}
\mu(\gamma_n) = d(x_0, \gamma_n \cdot x_0) &\geq d(x_n, x'_n) - d(x_0, x_n) - d(x'_n, \gamma_n \cdot x_0) \\
&\geq d(x_n, x'_n) - 2d \longrightarrow +\infty,
\end{aligned}$$

donc la suite (γ_n) convient. On en déduit l'inégalité $C_\rho^\mu \geq C_\rho$. D'après la remarque 5.5.4, c'est une égalité. \square

Le lemme 5.5.5 implique la proposition 5.5.3. En effet, si $C_\rho \geq 1$, il affirme l'existence d'une suite $(\gamma_n) \in (\Gamma_0)^\mathbb{N}$ telle que la suite $(\mu(\rho(\gamma_n)) - \mu(\gamma_n))_{n \in \mathbb{N}}$ soit minorée et telle que $\mu(\gamma_n) \rightarrow +\infty$, ce qui prouve que ρ n'est pas admissible. Par conséquent, lorsque ρ est admissible on a $C_\rho < 1$, d'où $C_\rho^\mu < 1$ toujours d'après le lemme 5.5.5.

5.5.3 Cas où $\rho(\Gamma_0)$ admet un unique point fixe dans $\partial\mathbb{H}^2$

Démontrons une version plus précise du théorème 5.1.1 lorsque $\rho(\Gamma_0)$ admet un unique point fixe dans $\partial\mathbb{H}^2$, c'est-à-dire lorsqu'il est soit virtuellement unipotent, soit résoluble mais non virtuellement abélien. Comme précédemment, pour toute projection de Cartan $\mu : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^+$, tout sous-groupe convexe cocompact Γ_0 de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et tout morphisme de groupes $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, on note $C_\rho^\mu \geq 0$ la borne inférieure des réels $t \geq 0$ tels que l'ensemble $\{\mu(\rho(\gamma)) - t\mu(\gamma), \gamma \in \Gamma_0\} \subset \mathbb{R}$ soit majoré.

Proposition 5.5.6. *Soit $G = KA^+K$ une décomposition de Cartan de $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Notons $\mu : G \rightarrow \mathbb{R}^+$ la projection de Cartan associée et soit $B = A \times U$ un sous-groupe de Borel de G contenant A . Pour tout sous-groupe convexe cocompact Γ_0 de G et tout morphisme de groupes $\rho : \Gamma_0 \rightarrow B$, on a $C_\rho^\mu = C_{\rho_a}^\mu$, où $\rho_a : \Gamma_0 \rightarrow A$ désigne la projection de ρ sur A .*

La proposition 5.5.6 est valable plus généralement pour un groupe de Lie linéaire semi-simple réel connexe de rang réel un.

Pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, les propositions 5.5.3 et 5.5.6 impliquent que si $\rho : \Gamma_0 \rightarrow B$ est admissible alors $C_\rho^\mu = C_{\rho_a}^\mu < 1$, ce qui prouve le théorème 5.1.1 dans le cas où $\rho(\Gamma_0)$ admet un unique point fixe dans $\partial\mathbb{H}^2$.

Lorsque $\rho(\Gamma_0)$ est unipotent, le morphisme ρ_a est constant égal à 1, donc $C_\rho^\mu = 0$ d'après la proposition 5.5.6. En particulier, tout morphisme de groupes $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ d'image unipotente est admissible. Dans le cas où Γ_0 est un réseau cocompact de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, nous retrouvons ainsi un résultat de Salein ([Sa1], th. 2.1).

L'inégalité $C_\rho^\mu \geq C_{\rho_a}^\mu$ résulte immédiatement du lemme suivant.

Lemme 5.5.7. *Soit $G = KA^+K$ une décomposition de Cartan de $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Notons $\mu : G \rightarrow \mathbb{R}^+$ la projection de Cartan associée et soit $B = A \times U$ un sous-groupe de Borel de G contenant A . Pour tout $a \in A$ et tout $u \in U$ on a $\mu(au) \geq \mu(a)$.*

Démonstration. Soit $\|\cdot\|$ une norme K -invariante sur \mathbb{R}^2 ; notons encore $\|\cdot\|$ la norme d'opérateurs associée sur $\mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$. Pour tout $g \in G$ on a

$$\|g\| := \max_{x \in \mathbb{R}^2, \|x\|=1} \|g \cdot x\| = e^{\mu(g)/2},$$

donc il suffit de voir que $\|au\| \geq \|a\|$ pour tout $a \in A$ et tout $u \in U$. Or, $\|a\|$ est la valeur absolue de la plus grande valeur propre de a . Si U fixe (point par point) la

droite propre D de a associée à cette valeur propre, alors pour tout $x \in D$ tel que $\|x\| = 1$ on a

$$\|au\| \geq \|au \cdot x\| = \|a \cdot x\| = \|a\|. \quad (5.5.1)$$

Sinon U fixe (point par point) la droite propre de a^{-1} associée à la plus grande valeur propre de a^{-1} , et d'après (1.4.8) et (5.5.1) on a

$$\mu(au) = \mu(u^{-1}a^{-1}) = \mu(a^{-1}(au^{-1}a^{-1})) \geq \mu(a^{-1}) = \mu(a).$$

□

Le lemme 5.5.7 est vrai de manière générale pour les groupes de Lie linéaires semi-simples réels connexes G de rang réel un : il suffit de remplacer la représentation naturelle de $SL_2(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R}^2 par une représentation irréductible de G dont l'espace de plus haut poids est une droite (cf. paragraphe 6.2.2).

Pour démontrer l'inégalité $C_\rho^\mu \geq C_{\rho_a}^\mu$ dans la proposition 5.5.6, on utilise le résultat suivant, qui est un cas particulier de la proposition 6.5.1 qui sera démontrée au chapitre 6.

Proposition 5.5.8. *Soient G un groupe de Lie linéaire semi-simple réel connexe de rang réel un, $\mu : G \rightarrow \mathbb{R}^+$ une projection de Cartan et Γ_0 un sous-groupe convexe cocompact de G . Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie F_ε de Γ_0 , une constante $C_\varepsilon > 0$ et un voisinage $\mathcal{V}_\varepsilon \subset \text{Hom}(\Gamma_0, G)$ de l'inclusion naturelle tels que tout $\gamma \in \Gamma_0$ s'écrive $\gamma = \gamma_0 \dots \gamma_n$, où $\gamma_0, \dots, \gamma_n \in F_\varepsilon$, où $n \leq \varepsilon\mu(\gamma) + C_\varepsilon$ et où pour tout $\sigma \in \mathcal{V}_\varepsilon$ on a*

$$\left| \mu(\sigma(\gamma)) - \sum_{i=0}^n \mu(\sigma(\gamma_i)) \right| \leq \varepsilon\mu(\gamma) + C_\varepsilon.$$

Montrons comment la proposition 5.5.8 implique la proposition 5.5.6.

Démonstration de la proposition 5.5.6. On a vu, lors de la justification de la remarque 5.5.4, qu'il existe une constante $C'_a \geq 0$ telle que

$$\mu(\rho_a(\gamma)) \leq C_{\rho_a} \mu(\gamma) + C'_a$$

pour tout $\gamma \in \Gamma_0$. D'après le lemme 5.5.5, on a donc

$$\mu(\rho_a(\gamma)) \leq C_{\rho_a}^\mu \mu(\gamma) + C'_a$$

pour tout $\gamma \in \Gamma_0$. Fixons $\varepsilon > 0$ et soient F_ε la partie finie de Γ_0 et $C_\varepsilon > 0$ la constante données par la proposition 5.5.8. En utilisant le fait que toute orbite d'un élément de U sous l'action de A par conjugaison contient 1 dans son adhérence, on obtient l'existence d'un élément $a \in A$ tel que

$$\mu(a\rho(\gamma)a^{-1}) \leq \mu(\rho_a(\gamma)) + C'_a \leq C_{\rho_a}^\mu \mu(\gamma) + 2C'_a$$

pour tout $\gamma \in F_\varepsilon$. D'après la proposition 5.5.8, tout élément $\gamma \in \Gamma_0$ s'écrit $\gamma = \gamma_0 \dots \gamma_n$, où $\gamma_0, \dots, \gamma_n \in F_\varepsilon$, où $n \leq \varepsilon\mu(\gamma) + C_\varepsilon$ et où

$$\sum_{i=0}^n \mu(\gamma_i) \leq (1 + \varepsilon)\mu(\gamma) + C_\varepsilon,$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}
\mu(\rho(\gamma)) &\leq \mu(a\rho(\gamma)a^{-1}) + 2\mu(a) \\
&\leq \left(\sum_{i=0}^n \mu(a\rho(\gamma_i)a^{-1}) \right) + 2\mu(a) \\
&\leq C_{\rho_a}^\mu \left(\sum_{i=0}^n \mu(\gamma_i) \right) + 2C'_a(n+1) + 2\mu(a) \\
&\leq (C_{\rho_a}^\mu(1+\varepsilon) + 2C'_a\varepsilon)\mu(\gamma) + (C_{\rho_a}^\mu C_\varepsilon + 2C'_a(C_\varepsilon + 1) + 2\mu(a)).
\end{aligned}$$

Ceci vaut pour tout $\gamma \in \Gamma_0$, donc

$$C_\rho^\mu \leq C_{\rho_a}^\mu(1+\varepsilon) + 2C'_a\varepsilon.$$

En faisant tendre ε vers 0 on obtient $C_\rho^\mu \leq C_{\rho_a}^\mu$. Il y a égalité d'après le lemme 5.5.7. \square

5.6 Longueurs de translation

Cette partie est consacrée aux corollaires 5.1.4 et 5.1.5. Pour tout $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, on note $\lambda(g) = \inf_{x \in \mathbb{H}^2} d(x, g \cdot x)$ la longueur de translation de g dans \mathbb{H}^2 ; c'est la valeur absolue du logarithme du quotient des deux valeurs propres de g . Rappelons que si Γ_0 est un sous-groupe discret sans torsion de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, alors tous ses éléments $\gamma \neq 1$ sont hyperboliques, donc vérifient $\lambda(\gamma) > 0$.

5.6.1 Démonstration du corollaire 5.1.4

Le corollaire 5.1.4 est une conséquence immédiate du théorème 5.1.1 et du résultat suivant.

Proposition 5.6.1. *Soient $\mu : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ une projection de Cartan, Γ_0 un sous-groupe convexe cocompact sans torsion de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ un morphisme de groupes. Notons C_ρ^λ la borne supérieure des quotients $\lambda(\rho(\gamma))/\lambda(\gamma)$ où $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$, et $C_\rho^\mu \geq 0$ la borne inférieure des réels $t \geq 0$ tels que l'ensemble $\{\mu(\rho(\gamma)) - t\mu(\gamma), \gamma \in \Gamma_0\} \subset \mathbb{R}$ soit majoré. Alors*

$$C_\rho^\lambda = C_\rho^\mu.$$

Démonstration. Pour montrer que $C_\rho^\lambda \leq C_\rho^\mu$ on utilise le fait que

$$\lambda(g) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \mu(g^n) \tag{5.6.1}$$

pour tout $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ([Be2], cor. 2.5). Plus précisément, soit $\varepsilon > 0$. Par définition de C_ρ^μ , il existe $C' \geq 0$ tel que

$$\mu(\rho(\gamma)) \leq (C_\rho^\mu + \varepsilon)\mu(\gamma) + C' \tag{5.6.2}$$

pour tout $\gamma \in \Gamma_0$. Soit $\gamma \in \Gamma_0$. En appliquant (5.6.2) à γ^n , en divisant par n et en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient

$$\lambda(\rho(\gamma)) \leq (C_\rho^\mu + \varepsilon) \lambda(\gamma)$$

d'après (5.6.1). On en déduit $C_\rho^\lambda \leq C_\rho^\mu + \varepsilon$. En faisant tendre ε vers 0 on obtient $C_\rho^\lambda \leq C_\rho^\mu$.

Pour montrer que $C_\rho^\mu \leq C_\rho^\lambda$ on distingue deux cas selon le nombre de points fixes de $\rho(\Gamma_0)$ dans $\partial\mathbb{H}^2$. Supposons tout d'abord que $\rho(\Gamma_0)$ admet zéro ou deux points fixes dans $\partial\mathbb{H}^2$. Si $\rho(\Gamma_0)$ est Zariski-dense dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, alors d'après [AMS1], th. 4.1, et [Be2], lem. 2.2.1, il existe une partie finie F de Γ_0 et une constante $C_0 > 0$ vérifiant la propriété suivante : pour tout $\gamma \in \Gamma_0$ il existe $f \in F$ tel que

$$|\mu(\rho(\gamma f)) - \lambda(\rho(\gamma f))| \leq C_0. \quad (5.6.3)$$

Si $\rho(\Gamma_0)$ est conjugué à un sous-groupe du normalisateur des matrices diagonales, alors (5.6.3) reste valable pour une certaine constante $C_0 > 0$ et un certain ensemble F de cardinal ≤ 2 . Enfin, si $\rho(\Gamma_0)$ est borné, alors $\lambda(\rho(\Gamma_0)) = \{0\}$ et $\mu(\rho(\Gamma_0))$ est majoré par une certaine constante $C_0 > 0$, donc (5.6.3) reste valable avec $F = \{1\}$. Dans les trois cas, pour tout $\gamma \in \Gamma_0$ et tout $f \in F$ vérifiant (5.6.3) on a

$$\begin{aligned} \mu(\rho(\gamma)) &\leq \mu(\rho(\gamma f)) + \mu(\rho(f)) \\ &\leq \lambda(\rho(\gamma f)) + C_0 + \mu(\rho(f)) \\ &\leq C_\rho^\lambda \lambda(\gamma f) + C_0 + \mu(\rho(f)) \\ &\leq C_\rho^\lambda \mu(\gamma f) + C_0 + \mu(\rho(f)) \\ &\leq C_\rho^\lambda \mu(\gamma) + C_\rho^\lambda \mu(f) + C_0 + \mu(\rho(f)) \\ &\leq C_\rho^\lambda \mu(\gamma) + C', \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$C' = C_0 + \max_{f \in F} (C_\rho^\lambda \mu(f) + \mu(\rho(f))) \geq 0.$$

Ceci prouve que $C_\rho^\mu \leq C_\rho^\lambda$ lorsque $\rho(\Gamma_0)$ admet zéro ou deux points fixes dans $\partial\mathbb{H}^2$. Supposons à présent que $\rho(\Gamma_0)$ admet un unique point fixe dans $\partial\mathbb{H}^2$. Soit $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = KA^+K$ la décomposition de Cartan associée à μ . Quitte à conjuguer on peut supposer $\rho(\Gamma_0)$ inclus dans un sous-groupe de Borel de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ contenant A . Notons ρ_a la projection de ρ sur A . D'après ce qui précède (cas de deux points fixes dans $\partial\mathbb{H}^2$), on a $C_{\rho_a}^\mu \leq C_{\rho_a}^\lambda$. Or, pour tout $\gamma \in \Gamma_0$ on a $\lambda(\rho_a(\gamma)) = \lambda(\rho(\gamma))$, donc $C_{\rho_a}^\lambda = C_\rho^\lambda$. De plus, d'après la proposition 5.5.6 on a $C_\rho^\mu = C_{\rho_a}^\mu$, d'où $C_\rho^\mu \leq C_\rho^\lambda$. \square

5.6.2 Distances asymétriques sur l'espace de Teichmüller

Le corollaire 5.1.5 résulte immédiatement du lemme 5.5.5 et de la proposition 5.6.1. Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, dans le cas d'un réseau cocompact sans torsion Γ_0 de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, il généralise un résultat de Thurston sur l'espace de Teichmüller de la surface compacte $\Gamma_0 \backslash \mathbb{H}^2$. Précisons ceci.

Soient Γ_0 un réseau cocompact sans torsion de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et $M = \Gamma_0 \backslash \mathbb{H}^2$ la surface quotient. On voit ici l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}(M)$ de M comme l'ensemble des classes d'équivalence de structures hyperboliques complètes sur M pour la relation "être tirée en arrière par un homéomorphisme de M isotope à l'identité".

Pour toutes structures hyperboliques complètes h et h' sur M , la borne inférieure des constantes de Lipschitz d'homéomorphismes $\varphi : (M, h) \rightarrow (M, h')$ homotopes à l'identité ne dépend que des classes $[h]$ et $[h']$ de h et h' dans $\mathcal{T}(M)$; notons-la $\ell([h], [h'])$. On voit facilement que $\ell([h], [h']) \geq 1$, avec égalité si et seulement $[h] = [h']$ ([Thu], prop. 2.1). De plus, on a $\ell(h, h'') \leq \ell(h, h') \cdot \ell(h', h'')$ pour tous $[h], [h'], [h''] \in \mathcal{T}(M)$, mais en général $\ell(h, h') \neq \ell(h', h)$: l'application $L = \log(\ell)$ est une *distance asymétrique* sur $\mathcal{T}(M)$.

Soit $x_0 \in M$ un point-base ; le groupe Γ_0 s'identifie au groupe fondamental $\pi_1(M, x_0)$. Pour toute structure hyperbolique complète h sur M et tout élément $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\} = \pi_1(M, x_0) \setminus \{1\}$, notons $\mathrm{long}_h(\gamma) > 0$ la plus petite longueur pour h d'un lacet dans la classe d'homotopie libre de γ ; elle est atteinte par l'unique géodésique fermée pour h dans la classe d'homotopie libre de γ . Ceci définit une application long_h qui ne dépend que de $[h] \in \mathcal{T}(M)$. Pour tous $[h], [h'] \in \mathcal{T}(M)$, on note $k([h], [h'])$ la borne supérieure des quotients $\mathrm{long}_{h'}(\gamma)/\mathrm{long}_h(\gamma)$, où $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\} = \pi_1(M, x_0) \setminus \{1\}$. D'après [Thu], th. 3.1, l'application $K = \log(k)$ est une distance asymétrique sur $\mathcal{T}(M)$.

D'après [Thu], th. 8.5, on a $K = L$: les deux distances asymétriques sur $\mathcal{T}(M)$ sont les mêmes. Ce résultat est un cas particulier de notre corollaire 5.1.5, correspondant au cas où Γ_0 est cocompact et ρ injectif d'image discrète.

5.7 Déformation des variétés anti-de Sitter compactes de dimension trois

Dans cette partie nous rappelons la démonstration "classique" du corollaire 5.1.7, qui s'appuie sur la complétude des variétés anti-de Sitter, puis nous donnons une nouvelle démonstration de ce corollaire, comme conséquence du théorème 5.1.1 et de la proposition 5.5.8. Cette nouvelle démonstration a l'avantage de ne pas utiliser la complétude, ce qui nourrit l'espoir de l'adapter un jour à d'autres situations où l'on ne dispose pas de résultat de complétude. Nous démontrons en fait le corollaire 5.1.6, qui se place dans le cadre plus général des sous-groupes convexes cocompacts de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

5.7.1 Le corollaire 5.1.7 du point de vue des (G, X) -structures

Soient G un groupe de Lie réel, X un espace homogène sous G et M une variété. Rappelons qu'une (G, X) -structure sur M est la donnée d'un atlas de cartes à valeurs dans X tels que les changements de cartes correspondent à des éléments de G . Soit \widetilde{M} un revêtement universel de M . La donnée d'une (G, X) -structure sur M est équivalente à la donnée d'un morphisme de groupes $h : \pi_1(M) \rightarrow G$ appelé *holonomie* et d'un difféomorphisme local h -équivariant $D : \widetilde{M} \rightarrow X$ appelé *développante*.

Le couple (h, D) est bien défini *modulo* l'action de G par

$$g \cdot (h, D) = (gh(\cdot)g^{-1}, g \cdot D).$$

Une variété munie d'une (G, X) -structure est naturellement appelée (G, X) -variété. Elle est dite *complète* si sa développante est un revêtement, ou, de manière équivalente, si M s'identifie comme (G, X) -variété à un quotient de la forme $\Gamma \backslash X$, où Γ est un sous-groupe discret de G agissant proprement sur X .

Comme au paragraphe 0.1.2, pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, posons $\mathbb{S}^{p,q} = \mathrm{O}(p+1, q)/\mathrm{O}(p, q)$ et $\mathbb{H}^{p,q} = \mathrm{O}(p, q+1)/\mathrm{O}(p, q)$. À une isométrie et à la renormalisation de la métrique près, les variétés pseudo-riemanniennes de signature (p, q) et de courbure sectionnelle constante > 0 (resp. < 0) sont les $(\mathrm{O}(p+1, q), \mathbb{S}^{p,q})$ -variétés (resp. les $(\mathrm{O}(p, q+1), \mathbb{H}^{p,q})$ -variétés). De plus, pour ces variétés les notions de complétude géodésique et de complétude au sens des (G, X) -variétés coïncident (*cf.* [Gol] par exemple).

Comme l'espace anti-de Sitter $\mathrm{AdS}^3 = \mathbb{H}^{2,1} = \mathrm{O}(2, 2)/\mathrm{O}(2, 1)$ s'identifie à l'espace homogène $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))/\Delta_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ (*cf.* paragraphe 2.4.3), les variétés anti-de Sitter de dimension 3 sont les (G, X) -variétés pour $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et $X = (\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))/\Delta_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$. Lorsqu'elles sont compactes, de telles variétés sont toujours complètes : en effet, Klingler [Kli] a établi la complétude des variétés lorentziennes compactes de courbure sectionnelle constante. Ce résultat de complétude est non trivial : le théorème de Hopf-Rinow, qui affirme que toute variété riemannienne compacte est complète, est faux en général pour les variétés pseudo-riemanniennes compactes, et même pour les variétés lorentziennes compactes.

Posons $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et $X = (\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))/\Delta_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$, et soit Γ un sous-groupe discret sans torsion de G agissant proprement et cocompactement sur X . Notons $M = \Gamma \backslash X$ la variété anti-de Sitter compacte correspondante. Son morphisme d'holonomie $h \in \mathrm{Hom}(\pi_1(M), G)$ est obtenu en composant la surjection canonique $\pi : \pi_1(M) \rightarrow \Gamma$ avec l'inclusion naturelle i de Γ dans G . Tout morphisme $\varphi \in \mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ proche de i induit un morphisme $\varphi \circ \pi \in \mathrm{Hom}(\pi_1(M), G)$ proche de h . On utilise alors un principe, dû à Ehresmann, selon lequel tout morphisme $h' \in \mathrm{Hom}(\pi_1(M), G)$ suffisamment proche de h est l'holonomie d'une certaine (G, X) -structure sur M . D'après le résultat de complétude de Klingler, cette (G, X) -structure est complète. Ainsi, pour tout élément $\varphi \in \mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ suffisamment proche de i la variété M est diffeomorphe à $(\varphi \circ \pi)(\pi_1(M)) \backslash X$, c'est-à-dire à $\varphi(\Gamma) \backslash X$. On en déduit que l'action de $\varphi(\Gamma)$ sur X est encore libre, propre et cocompacte.

5.7.2 Le corollaire 5.1.7 comme conséquence du théorème 5.1.1

Montrons à présent comment le théorème 5.1.1 et la proposition 5.5.8 impliquent le corollaire 5.1.6. Le corollaire 5.1.7 est une conséquence immédiate de ce corollaire et de la description des sous-groupes discrets sans torsion de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ agissant proprement et cocompactement sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ par multiplication à gauche et à droite, donnée au début de la partie 5.1.

Démonstration du corollaire 5.1.6. D'après le théorème 5.1.1, il existe des

constantes $C < 1$ et $C' \geq 0$ telles que pour tout $\gamma \in \Gamma_0$ on ait

$$\mu(\rho(\gamma)) \leq C\mu(\gamma) + C'. \quad (5.7.1)$$

Soit $\varepsilon \in]0, \frac{1}{6}]$ assez petit pour que

$$C + 2(C + C' + 2)\varepsilon < 1.$$

Soient $F_\varepsilon \subset \Gamma_0$ l'ensemble fini, $C_\varepsilon > 0$ la constante et $\mathcal{V}_\varepsilon \subset \text{Hom}(\Gamma_0, \text{SL}_2(\mathbb{R}))$ le voisinage de l'inclusion naturelle donnés par la proposition 5.5.8. Soit $\mathcal{W} \subset \text{Hom}(\Gamma_0, \text{SL}_2(\mathbb{R}))$ le voisinage de l'inclusion naturelle formé des éléments $\sigma \in \mathcal{V}_\varepsilon$ tels que $\mu(\sigma(\gamma)) \geq \mu(\gamma) - 1$ pour tout $\gamma \in F_\varepsilon$, et soit $\mathcal{W} \subset \text{Hom}(\Gamma_0, \text{SL}_2(\mathbb{R}))$ le voisinage de ρ formé des éléments $\tau \in \text{Hom}(\Gamma_0, \text{SL}_2(\mathbb{R}))$ tels que $\mu(\tau(\gamma)) \leq \mu(\rho(\gamma)) + 1$ pour tout $\gamma \in F_\varepsilon$. Fixons un élément $(\sigma, \tau) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W}$. D'après la proposition 5.5.8, tout élément $\gamma \in \Gamma_0$ s'écrit $\gamma = \gamma_0 \dots \gamma_n$, où $\gamma_0, \dots, \gamma_n \in F_\varepsilon$, où $n \leq \varepsilon\mu(\gamma) + C_\varepsilon$, où

$$\left| \mu(\gamma) - \sum_{i=0}^n \mu(\gamma_i) \right| \leq \varepsilon\mu(\gamma) + C_\varepsilon \quad (5.7.2)$$

et où

$$\left| \mu(\sigma(\gamma)) - \sum_{i=0}^n \mu(\sigma(\gamma_i)) \right| \leq \varepsilon\mu(\gamma) + C_\varepsilon. \quad (5.7.3)$$

D'après (1.4.9), par définition de \mathcal{W} et d'après (5.7.1) et (5.7.3) on a alors

$$\begin{aligned} \mu(\tau(\gamma)) &\leq \sum_{i=0}^n \mu(\tau(\gamma_i)) \leq \left(\sum_{i=0}^n \mu(\rho(\gamma_i)) \right) + (n+1) \\ &\leq C \left(\sum_{i=0}^n \mu(\gamma_i) \right) + (C' + 1)(n+1) \\ &\leq C \left(\sum_{i=0}^n \mu(\sigma(\gamma_i)) \right) + (C' + 2)(n+1) \\ &\leq C\mu(\sigma(\gamma)) + (C + C' + 2)\varepsilon\mu(\gamma) \\ &\quad + (CC_\varepsilon + (C' + 2)(C_\varepsilon + 1)). \end{aligned} \quad (5.7.4)$$

Or, d'après (5.7.2) et (5.7.3) on a

$$\begin{aligned} \mu(\gamma) &= \left(\mu(\gamma) - \sum_{i=0}^n \mu(\gamma_i) \right) + \sum_{i=0}^n (\mu(\gamma_i) - \mu(\sigma(\gamma_i))) \\ &\quad + \left(\sum_{i=0}^n \mu(\sigma(\gamma_i)) - \mu(\sigma(\gamma)) \right) + \mu(\sigma(\gamma)) \\ &\leq 2\varepsilon\mu(\gamma) + \mu(\sigma(\gamma)) + 2C_\varepsilon + (n+1) \\ &\leq 3\varepsilon\mu(\gamma) + \mu(\sigma(\gamma)) + 3C_\varepsilon + 1, \end{aligned} \quad (5.7.5)$$

d'où, sachant que $\varepsilon \leq 1/6$,

$$\mu(\gamma) \leq 2\mu(\sigma(\gamma)) + (6C_\varepsilon + 2). \quad (5.7.6)$$

De (5.7.4) et (5.7.6) on tire finalement, sachant que $\varepsilon \leq 1/2$,

$$\mu(\tau(\gamma)) \leq C_{\sigma,\tau} \mu(\sigma(\gamma)) + (C + C' + 2)(3C_\varepsilon + 1) + CC_\varepsilon + (C' + 2)(C_\varepsilon + 1), \quad (5.7.7)$$

où $C_{\sigma,\tau} = C + 2(C + C' + 2)\varepsilon < 1$. De plus, comme Γ_0 est discret dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et comme l'application μ est propre, (5.7.5) implique que le noyau de σ est fini et que $\sigma(\Gamma_0)$ est discret dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Comme Γ_0 est sans torsion, σ est injectif. Si Γ_0 est cocompact dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, alors $\sigma(\Gamma_0)$ l'est aussi par un argument de dimension cohomologique (*cf.* paragraphe 6.5.4). Enfin, le morphisme $\tau \circ \sigma^{-1} : \sigma(\Gamma_0) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est admissible d'après (5.7.7). \square

5.8 Appendice : rappels et calculs de géométrie hyperbolique

Dans tout l'appendice, $T(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma)$ désigne un triangle géodésique de \mathbb{H}^2 dont les longueurs des côtés sont a, b, c , et dont l'angle opposé au côté de longueur a (resp. b , resp. c) est α (resp. β , resp. γ).

5.8.1 Un peu de trigonométrie hyperbolique

Commençons par rappeler la version hyperbolique du théorème d'Al Kashi, qui affirme que pour tout triangle géodésique $T(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma)$ de \mathbb{H}^2 , on a

$$\mathrm{ch} a = (\mathrm{ch} b)(\mathrm{ch} c) - (\cos \alpha)(\mathrm{sh} b)(\mathrm{sh} c). \quad (5.8.1)$$

En particulier, a est entièrement déterminé par b, c et α . Voici une conséquence immédiate de cette formule.

Corollaire 5.8.1. *Soient $T(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma)$ et $T(a', b', c', \alpha', \beta', \gamma')$ deux triangles géodésiques de \mathbb{H}^2 . Si $b = b', c = c'$ et $a' > a$, alors $\alpha' > \alpha$.*

En appliquant deux fois (5.8.1) on voit que pour tout triangle géodésique $T(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma)$ de \mathbb{H}^2 tel que $\alpha = \frac{\pi}{2}$, on a

$$\cos \beta = \frac{\mathrm{th}(c)}{\mathrm{th}(a)}. \quad (5.8.2)$$

5.8.2 Divergence des géodésiques en courbure négative

Rappelons le théorème de Toponogov, qui traduit la divergence des géodésiques en courbure négative. Dans \mathbb{H}^2 , il s'énonce ainsi ([BrH], lem. II.1.13).

Lemme 5.8.2. *Soient $T(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma)$ et $T(a', b', c', \alpha', \beta', \gamma')$ deux triangles géodésiques de \mathbb{H}^2 . Supposons qu'il existe $C \geq 1$ tel que $b' = Cb$ et $c' = Cc$ et que $\alpha' = \alpha$. Alors $a' \geq Ca$, et l'inégalité est stricte si $C > 1$ et $\alpha \notin \{0, \pi\}$.*

Voici une conséquence immédiate du lemme 5.8.2 et du corollaire 5.8.1, que nous utilisons dans les démonstrations du lemme 5.2.3 et du lemme 5.3.11.

Corollaire 5.8.3. *Soient $T(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma)$ et $T(a', b', c', \alpha', \beta', \gamma')$ deux triangles géodésiques de \mathbb{H}^2 . Supposons qu'il existe $C \geq 1$ tel que $b' = Cb$ et $c' = Cc$. Si $\alpha' \geq \alpha$, alors $a' \geq Ca$, et l'inégalité est stricte si $C > 1$ et $\alpha \notin \{0, \pi\}$, ou bien si $\alpha' > \alpha$.*

5.8.3 Un passage à la limite

D'après le corollaire 5.8.3, si $T(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma)$ et $T(a', b', c', \alpha', \beta', \gamma')$ sont deux triangles géodésiques non plats de \mathbb{H}^2 vérifiant $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = C$ où $C > 1$ (resp. où $C < 1$), alors $\alpha' < \alpha$ (resp. $\alpha' > \alpha$). Le lemme suivant affirme toutefois que si c est très petit et b pas trop petit, alors α' n'est pas très différent de α .

Lemme 5.8.4. *Soient $(T(a_n, b_n, c_n, \alpha_n, \beta_n, \gamma_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(T(a'_n, b'_n, c'_n, \alpha'_n, \beta'_n, \gamma'_n))_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de triangles géodésiques non plats de \mathbb{H}^2 vérifiant $\frac{a'_n}{a_n} = \frac{b'_n}{b_n} = \frac{c'_n}{c_n} = C_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n \rightarrow C > 0$, $b_n \rightarrow R > 0$ et $c_n \rightarrow 0$. Alors on a $\alpha'_n - \alpha_n \rightarrow 0$.*

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, écrivons $a_n = b_n + t_n c_n$, où $t_n \in [-1, 1]$. Commençons par remarquer que

$$\operatorname{ch}(a_n) = \operatorname{ch}(b_n + t_n c_n) = \operatorname{ch}(b_n) \operatorname{ch}(t_n c_n) + \operatorname{sh}(b_n) \operatorname{sh}(t_n c_n),$$

ce qui implique, avec (5.8.1),

$$\begin{aligned} \cos \alpha_n &= \frac{\operatorname{ch}(b_n) \operatorname{ch}(c_n) - \operatorname{ch}(a_n)}{\operatorname{sh}(b_n) \operatorname{sh}(c_n)} \\ &= \frac{\operatorname{ch}(b_n)}{\operatorname{sh}(b_n)} \cdot \frac{(\operatorname{ch}(c_n) - \operatorname{ch}(t_n c_n))}{\operatorname{sh}(c_n)} - \frac{\operatorname{sh}(t_n c_n)}{\operatorname{sh}(c_n)}. \end{aligned}$$

De même, on a

$$\cos \alpha'_n = \frac{\operatorname{ch}(b'_n)}{\operatorname{sh}(b'_n)} \cdot \frac{(\operatorname{ch}(c'_n) - \operatorname{ch}(t_n c'_n))}{\operatorname{sh}(c'_n)} - \frac{\operatorname{sh}(t_n c'_n)}{\operatorname{sh}(c'_n)}.$$

D'une part, on a

$$\frac{\operatorname{ch}(b_n)}{\operatorname{sh}(b_n)} \longrightarrow \frac{\operatorname{ch}(R)}{\operatorname{sh}(R)} \quad \text{et} \quad \frac{\operatorname{ch}(b'_n)}{\operatorname{sh}(b'_n)} = \frac{\operatorname{ch}(C_n b_n)}{\operatorname{sh}(C_n b_n)} \longrightarrow \frac{\operatorname{ch}(CR)}{\operatorname{sh}(CR)}.$$

D'autre part, lorsque $x \rightarrow 0$, on a $\text{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ et $\text{sh}(x) \sim x$, donc

$$\frac{(\text{ch}(c_n) - \text{ch}(t_n c_n))}{\text{sh}(c_n)} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \frac{(\text{ch}(c'_n) - \text{ch}(t_n c'_n))}{\text{sh}(c'_n)} \rightarrow 0.$$

On obtient également

$$\frac{\text{sh}(t_n c_n)}{\text{sh}(c_n)} - \frac{\text{sh}(t_n c'_n)}{\text{sh}(c'_n)} = \frac{\text{sh}(t_n c_n)}{\text{sh}(c_n)} - \frac{\text{sh}(C_n t_n c_n)}{\text{sh}(C_n c_n)} \rightarrow 0.$$

Finalement, on trouve

$$\cos \alpha_n - \cos \alpha'_n \rightarrow 0,$$

d'où $\alpha_n - \alpha'_n \rightarrow 0$ d'après l'inégalité des accroissements finis. \square

En utilisant le corollaire 5.8.1, on obtient le résultat suivant, que nous utilisons dans la démonstration du lemme 5.3.11.

Corollaire 5.8.5. *Soient $(T(a_n, b_n, c_n, \alpha_n, \beta_n, \gamma_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(T(a'_n, b'_n, c'_n, \alpha'_n, \beta'_n, \gamma'_n))_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de triangles géodésiques non plats de \mathbb{H}^2 vérifiant $\frac{a'_n}{a_n} \leq \frac{b'_n}{b_n} = \frac{c'_n}{c_n} = C_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n \rightarrow C > 0$, $b_n \rightarrow R > 0$ et $c_n \rightarrow 0$. Alors les valeurs d'adhérence de la suite $(\alpha'_n - \alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont toutes négatives.*

5.8.4 Une minoration uniforme

Dans la démonstration du lemme 5.4.4, nous utilisons le résultat suivant, qui est spécifique à la courbure négative.

Lemme 5.8.6. *Pour tous réels $r, R > 0$, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout triangle géodésique non plat $\text{Conv}(\{x, x', x''\})$ de \mathbb{H}^2 vérifiant $d(x', x'') - \varepsilon \leq d(x, x') \leq R$ et $d(x, x'') \geq r$, le projeté orthogonal y de x'' sur la droite géodésique (x, x') vérifie $[x, y] \cap [x, x'] \neq \{x\}$ et $d(x, y) \geq \varepsilon$.*

Démonstration. Fixons des réels $r, R > 0$. Soient x, x', x'' des points deux à deux distincts de \mathbb{H}^2 . Posons $a = d(x', x'')$, $b = d(x, x'')$, $c = d(x, x')$, $\alpha = \angle_x(x', x'')$, et supposons $b \geq r$ et $c \leq R$. Notons y le projeté orthogonal de x'' sur la droite géodésique (x, x') et posons $d = d(x, y)$. Démontrer que $[x, y] \cap [x, x'] \neq \{x\}$ équivaut à démontrer que $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$. En appliquant (5.8.1) au triangle $\text{Conv}(\{x, x', x''\})$ on trouve

$$\cos \alpha = \frac{\text{ch}(b) \text{ch}(c) - \text{ch}(a)}{\text{sh}(b) \text{sh}(c)}. \quad (5.8.3)$$

Si $a \leq c$, alors $\text{ch}(a) \leq \text{ch}(c) \leq \text{ch}(b) \text{ch}(c)$, donc $\cos \alpha \geq 0$, i.e. $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Sinon on a

$$\begin{aligned} \text{ch}(a) &= \text{ch}(c) \text{ch}(a - c) + \text{sh}(c) \text{sh}(a - c) \\ &\leq \text{ch}(c) (\text{ch}(a - c) + \text{sh}(a - c)), \end{aligned}$$

donc pour que $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$ il suffit que $\text{ch}(a - c) + \text{sh}(a - c) \leq \text{ch}(r)$. Par continuité de ch et sh en 0, il existe $\varepsilon' > 0$ tel que ceci soit vérifié dès que $a - c \leq \varepsilon'$. En appliquant (5.8.2) au triangle $\text{Conv}(\{x, y, x''\})$ on trouve

$$\cos \alpha = \frac{\text{th}(d)}{\text{th}(b)}. \quad (5.8.4)$$

De (5.8.3) et (5.8.4) on tire

$$\begin{aligned} \text{th}(d) &= \text{th}(b) \left(\frac{\text{ch}(b) \text{ch}(c) - \text{ch}(a)}{\text{sh}(b) \text{sh}(c)} \right) \\ &= \frac{1}{\text{th}(c)} \left(1 - \frac{1}{\text{ch}(b)} \cdot \frac{\text{ch}(a)}{\text{ch}(c)} \right) \\ &\geq \frac{1}{\text{th}(R)} \left(1 - \frac{1}{\text{ch}(r)} \cdot \frac{\text{ch}(a)}{\text{ch}(c)} \right), \end{aligned}$$

car les fonctions ch et th sont croissantes. Pour tout $\varepsilon > 0$, pour montrer que $d \geq \varepsilon$ il suffit donc de montrer que

$$\frac{\text{ch}(a)}{\text{ch}(c)} \leq \text{ch}(r) (1 - \text{th}(\varepsilon) \text{th}(R)).$$

Comme ch et th sont croissantes, pour démontrer le lemme 5.8.6 il suffit de voir qu'il existe $\varepsilon \in]0, \varepsilon']$ tel que

$$\frac{\text{ch}(x + \varepsilon)}{\text{ch}(x)} \leq \text{ch}(r) (1 - \text{th}(\varepsilon) \text{th}(R))$$

pour tout $x \in [0, R]$. Mais pour tout $\varepsilon > 0$, l'application $x \mapsto \frac{\text{ch}(x + \varepsilon)}{\text{ch}(x)}$ est croissante donc il suffit de voir qu'il existe $\varepsilon \in]0, \varepsilon']$ tel que $\frac{\text{ch}(R + \varepsilon)}{\text{ch}(R)} \leq \text{ch}(r) (1 - \text{th}(\varepsilon) \text{th}(R))$. Cela résulte de la continuité de ch en R et de th en 0. \square

5.8.5 Quelques remarques sur les applications lipschitziennes

Dans les démonstrations des théorèmes 5.3.2 puis 5.1.3, nous utilisons plusieurs fois les remarques suivantes.

Remarques 5.8.7. Soit $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ une application lipschitzienne de constante C .

1. Si $d(f(x), f(x')) = Cd(x, x') > 0$, alors f est affine de constante C sur le segment géodésique $[x, x']$.
2. Si $C = 1$ et si $d(f(x_i), f(x_j)) = d(x_i, x_j)$ pour tous i, j , alors la restriction de f à $\text{Conv}(\{x_1, x_2, x_3\})$ est une isométrie.
3. Si $d(f(x), f(s_i)) = Cd(x, s_i)$, si $d(f(x), f(s_j)) = Cd(x, s_j)$ et si $f(s_i), f(x), f(s_j)$ sont alignés dans cet ordre, alors s_i, x, s_j sont alignés dans cet ordre et f est affine de constante C sur le segment géodésique $[s_i, s_j]$.

4. Si $d(f(x_1), f(x_2)) = Cd(x_1, x_2)$, si $d(f(x_3), f(x_4)) = Cd(x_3, x_4)$ et si $]x_1, x_2[\cap]x_3, x_4[$ est un intervalle ouvert non trivial, alors f est affine de constante C sur $]x_1, x_2[\cup]x_3, x_4[$.

Dans la démonstration du lemme 5.4.4, nous utilisons également le lemme suivant.

Lemme 5.8.8. Soit $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ une application lipschitzienne de constante C .

1. Supposons $C > 1$ et soient $x, x', s_1, s_2 \in \mathbb{H}^2$ tels que $d(f(x), f(x')) = Cd(x, x')$ et $d(f(s_1), f(s_2)) = Cd(s_1, s_2)$. Alors $]x, x'[\cap]s_1, s_2[$ est un intervalle ouvert.
2. Supposons $C = 1$ et soient $x, x', s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{H}^2$ tels que $d(f(x), f(x')) = d(x, x')$ et $d(f(s_i), f(s_j)) = d(s_i, s_j)$ pour tous i, j . Si $]x, x'[\cap \text{Conv}(\{s_1, s_2, s_3\}) \neq \emptyset$, alors la restriction de f à $\text{Conv}(\{x, x', s_1, s_2, s_3\})$ est une isométrie.

Démonstration.

1. Supposons qu'il existe $x'' \in]x, x'[\cap]s_1, s_2[$. Si l'on pose

$$F = \{(x, s_1), (s_1, x'), (x', s_2), (s_2, x)\},$$

alors

$$\sum_{(y, y') \in F} \angle_{x''}(y, y') = 2\pi$$

et

$$\sum_{(y, y') \in F} \angle_{f(x'')}(f(y), f(y')) \leq 2\pi,$$

donc il existe $(y, y') \in F$ tel que $\angle_{f(x'')}(f(y), f(y')) \leq \angle_{x''}(y, y')$. D'autre part, d'après la remarque 5.8.7.1 on a $d(f(x''), f(y)) = Cd(x'', y)$ et $d(f(x''), f(y')) = Cd(x'', y')$. Par conséquent, d'après le corollaire 5.8.3, les points x'', y, y' sont alignés, et donc $]x, x'[\cap]s_1, s_2[$ est un intervalle ouvert.

2. D'après les remarques 5.8.7, la restriction de f à $]x, x'[$ (resp. à $\text{Conv}(\{s_1, s_2, s_3\})$) est une isométrie. Supposons que $]x, x'[\cap \text{Conv}(\{s_1, s_2, s_3\}) \neq \emptyset$ et que $]x, x'[\not\subset \text{Conv}(\{s_1, s_2, s_3\})$ (sinon c'est fini!). Quitte à renuméroter, on peut supposer qu'il existe $x'' \in]x, x'[\cap]s_1, s_2[$, et l'on a alors $d(f(x''), f(y)) = d(x'', y)$ pour tout $y \in \{x, x', s_1, s_2\}$. Posons $F = \{(x, s_1), (s_1, x'), (x', s_2), (s_2, x)\}$. Pour tout $(y, y') \in F$, d'après le corollaire 5.8.3, comme f est 1-lipschitzienne, on ne peut pas avoir $\angle_{f(x'')}(f(y), f(y')) > \angle_{x''}(y, y')$. Comme

$$\sum_{(y, y') \in F} \angle_{x''}(y, y') = 2\pi$$

et

$$\sum_{(y, y') \in F} \angle_{f(x'')}(f(y), f(y')) = 2\pi,$$

on en déduit $\angle_{f(x'')}(f(y), f(y')) = \angle_{x''}(y, y')$ pour tout $(y, y') \in F$. Comme de plus $d(f(x''), f(y)) = d(x'', y)$ et $d(f(x''), f(y')) = d(x'', y')$, on a $d(f(y), f(y')) =$

$d(y, y')$ (comme conséquence immédiate de (5.8.1)), et donc la restriction de f à $\text{Conv}(\{x'', y, y'\})$ est une isométrie d'après la remarque 5.8.7.2. Ainsi, la restriction de f à $\text{Conv}(\{x, x', s_1, s_2\})$ est une isométrie.

Si $x' \in \text{Conv}(\{s_1, s_2, s_3\})$, alors $\text{Conv}(\{x, x', s_1, s_2, s_3\}) = \text{Conv}(\{x, s_1, s_2, s_3\})$ est l'union des triangles géodésiques $\text{Conv}(\{x, s_1, s_2\})$ et $\text{Conv}(\{s_1, s_2, s_3\})$, sur lesquels f est une isométrie. On en déduit que les longueurs des côtés et les angles du quadrilatère $\text{Conv}(\{x, s_1, s_2, s_3\})$ sont invariants par f , et donc que f est une isométrie sur ce quadrilatère, c'est-à-dire sur $\text{Conv}(\{x, x', s_1, s_2, s_3\})$.

Si $x' \notin \text{Conv}(\{s_1, s_2, s_3\})$, alors, quitte à renuméroter, on peut supposer que $[x, x'] \cap [s_1, s_3] \neq \emptyset$. Le même raisonnement que ci-dessus montre alors que la restriction de f à $\text{Conv}(\{x, x', s_1, s_3\})$ est une isométrie. Le polygone géodésique $\text{Conv}(\{x, x', s_1, s_2, s_3\})$ est l'union des quadrilatères $\text{Conv}(\{x, x', s_1, s_2\})$ et $\text{Conv}(\{x, x', s_1, s_3\})$, sur lesquels f est une isométrie. On en déduit que les longueurs des côtés et les angles du polygone $\text{Conv}(\{x, x', s_1, s_2, s_3\})$ sont invariants par f , et donc que f est une isométrie sur ce polygone.

□

Chapitre 6

Déformation d'actions propres sur des espaces homogènes réductifs sur un corps local

6.1 Introduction

Dans ce chapitre nous nous intéressons encore une fois à des problèmes de déformation de quotients compacts d'espaces homogènes réductifs G/H sur un corps local. Commençons par énoncer notre résultat principal dans le cadre des groupes de Lie réels.

6.1.1 Déformation de quotients compacts dans le cas réel

Soient G un groupe de Lie réel linéaire réductif et H un sous-groupe fermé réductif. Dans tous les exemples connus, lorsque G/H admet un quotient compact, il existe un sous-groupe fermé réductif L de G qui agit proprement et cocompactement sur G/H . Par exemple, $L = \mathrm{U}(n, 1)$ agit proprement et transitivement sur l'espace anti-de Sitter $\mathbb{H}^{2n,1} = \mathrm{O}(2n, 2)/\mathrm{O}(2n, 1)$ (cf. partie 6.6). Tout réseau cocompact sans torsion Γ d'un tel groupe L agit librement, proprement et cocompactement sur G/H ; nous dirons que le quotient compact $\Gamma \backslash G/H$ correspondant est *standard*. Notons que L admet toujours des réseaux cocompacts sans torsion d'après [Bo1]. Kobayashi et Yoshino ont conjecturé que tout espace homogène réductif G/H admettant des quotients compacts en admet des standard ([KY], conj. 3.3.10) ; cette conjecture reste ouverte.

Bien sûr, il peut également exister des quotients compacts non standard : c'est le cas par exemple pour les espaces homogènes de la forme $(G \times G)/\Delta_G$ qui font l'objet des chapitres précédents de cette thèse. Mais en général on ne connaît que des exemples standard. Afin d'en construire de non standard, il est naturel, étant donné un sous-groupe réductif L de G agissant proprement et cocompactement sur G/H , de déformer légèrement dans G des réseaux cocompacts sans torsion Γ de L et de voir s'ils restent discrets dans G et si leur action sur G/H reste libre, propre et

cocompacte. Lorsque L est de rang réel ≥ 2 et Γ irréductible, c'est toujours le cas, car le théorème de super-rigidité de Margulis ([Ma3], cor. IX.5.9) implique alors la rigidité locale de Γ dans G . Dans ce chapitre, nous montrons que c'est également le cas lorsque L est de rang réel un.

Théorème 6.1.1. *Soient G un groupe de Lie réel linéaire réductif, H et L deux sous-groupes fermés réductifs de G . Supposons que $\text{rang}_{\mathbb{R}}(L) = 1$ et que L agit proprement et cocompactement sur G/H . Pour tout réseau cocompact sans torsion Γ de L , il existe un voisinage $\mathcal{U} \subset \text{Hom}(\Gamma, G)$ de l'inclusion naturelle formé de morphismes injectifs et tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{U}$, le groupe $\varphi(\Gamma)$ soit discret dans G et agisse proprement et cocompactement sur G/H .*

Comme aux chapitres 4 et 5, on note $\text{Hom}(\Gamma, G)$ l'ensemble des morphismes de groupes de Γ dans G , muni de la topologie compacte-ouverte. Dans le cas réel, le fait que $\varphi(\Gamma)$ reste discret dans G pour tout $\varphi \in \text{Hom}(\Gamma, G)$ suffisamment proche de l'inclusion naturelle est un résultat général de Guichard ([Gui], th. 2).

Le théorème 6.1.1 améliore un résultat de Kobayashi ([Ko5], th. 2.4) qui se restreignait aux morphismes de la forme $\gamma \mapsto \gamma\psi(\gamma)$ où $\psi : \Gamma \rightarrow Z_G(L)$ est un morphisme de groupes à valeurs dans le centralisateur de L dans G .

Voici, d'après [KY], cor. 3.3.7, une liste de triplets (G, H, L) auxquels le théorème 6.1.1 s'applique :

1. $(\text{SO}(2n, 2), \text{SO}(2n, 1), \text{U}(n, 1))$ pour $n \geq 1$,
2. $(\text{SO}(2n, 2), \text{U}(n, 1), \text{SO}(2n, 1))$ pour $n \geq 1$,
3. $(\text{U}(2n, 2), \text{Sp}(n, 1), \text{U}(2n, 1))$ pour $n \geq 1$,
4. $(\text{SO}(8, 8), \text{SO}(8, 7), \text{Spin}(8, 1))$,
5. $(\text{SO}(8, \mathbb{C}), \text{SO}(7, \mathbb{C}), \text{Spin}(7, 1))$,
6. $(\text{SO}^*(8), \text{U}(1, 3), \text{Spin}(6, 1))$,
7. $(\text{SO}^*(8), \text{Spin}(6, 1), \text{U}(1, 3))$,
8. $(\text{SO}^*(8), \text{SO}^*(6) \times \text{SO}^*(2), \text{Spin}(6, 1))$,
9. $(\text{SO}(4, 4), \text{Spin}(4, 3), \text{SO}(4, 1))$,
10. $(\text{SO}(4, 3), \text{G}_2(2), \text{SO}(4, 1))$.

Comme mentionné plus haut, nous cherchons à déformer des quotients compacts standard de G/H en des quotients compacts non standard, plus "génériques". Le mieux que nous puissions espérer serait d'obtenir des sous-groupes discrets Zariski-denses de G agissant librement, proprement et cocompactement sur G/H . Bien sûr, même lorsque L est de rang réel un, il n'existe pas toujours de déformation non triviale de réseaux cocompacts Γ de L . Par exemple, quand L est semi-simple, non compact et sans facteur quasi-simple localement isomorphe à $\text{SO}(n, 1)$ ou $\text{SU}(n, 1)$, un résultat de Raghunathan ([Rag], th. 1) stipule l'annulation du premier groupe de cohomologie $H^1(\Gamma, \mathfrak{g})$ (où \mathfrak{g} désigne l'algèbre de Lie de G), ce qui implique la rigidité locale de Γ dans G d'après Weil [We2].

Pour $(G, H, L) = (\mathrm{SO}(2n, 2), \mathrm{SO}(2n, 1), \mathrm{U}(n, 1))$ où $n \geq 2$, les réseaux cocompacts de L ne sont pas localement rigides dans G , mais on ne peut obtenir de quotient compact non standard de G/H par déformation. Autrement dit, les variétés anti-de Sitter compactes standard de dimension ≥ 5 ne peuvent être déformées en des variétés anti-de Sitter compactes non standard (cf. paragraphe 0.1.3). En effet, la décomposition de l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(2n, 2)$ en $\mathrm{U}(n, 1)$ -modules irréductibles s'écrit

$$\mathfrak{so}(2n, 2) = \mathfrak{su}(n, 1) \oplus \mathbb{R} \oplus \Lambda^2 \mathbb{C}^{n+1},$$

où $\mathbb{R} = \mathfrak{z}(\mathfrak{u}(n, 1))$ est l'algèbre de Lie du centre de $\mathrm{U}(n, 1)$. D'après [Rag], th. 1, on a

$$H^1(\Gamma, \mathfrak{su}(n, 1)) = H^1(\Gamma, \Lambda^2 \mathbb{C}^{n+1}) = 0,$$

ce qui implique, d'après Weil [We2], l'existence d'un voisinage dans $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ de l'inclusion naturelle qui est entièrement formé de morphismes de la forme $\gamma \mapsto \gamma\psi(\gamma)$, modulo conjugaison, où $\psi : \Gamma \rightarrow \mathrm{SO}(2n, 2)$ est un morphisme à valeurs dans le centre de $\mathrm{U}(n, 1)$.

En revanche, pour $(G, H, L) = (\mathrm{SO}(2n, 2), \mathrm{U}(n, 1), \mathrm{SO}(2n, 1))$ où $n \geq 1$, de petites déformations de réseaux cocompacts de L peuvent fournir des sous-groupes Zariski-denses dans G (cf. paragraphe 6.6). De telles déformations sont obtenues par une construction de *bending* due à Johnson et Millson [JM]. Le théorème 6.1.1 implique alors le résultat suivant sur les quotients compacts de l'espace homogène $G/H = \mathrm{SO}(2n, 2)/\mathrm{U}(n, 1)$, qui est d'après [KY], prop. 3.2.7, un espace symétrique pseudo-riemanien de signature $(2n, n^2 - 1)$.

Corollaire 6.1.2. *Pour tout $n \geq 1$, il existe des sous-groupes discrets Γ de $\mathrm{SO}(2n, 2)$ agissant librement, proprement et cocompactement sur $\mathrm{SO}(2n, 2)/\mathrm{U}(n, 1)$ et qui sont Zariski-denses dans $\mathrm{SO}(2n, 2)$.*

Jusqu'à présent, l'existence de quotients compacts d'espaces homogènes réductifs G/H par des sous-groupes Zariski-denses n'était connue que pour H compact ou pour G/H de la forme $(G' \times G')/\Delta_{G'}$.

6.1.2 Déformation d'actions propres dans le cas général

D'après Chevalley ([Che], ch. 2, th. 14 et 15), si G est un groupe de Lie réel linéaire réductif connexe et H un sous-groupe fermé réductif connexe de G , alors G (resp. H) est la composante connexe de l'élément neutre (pour la topologie réelle) de l'ensemble des \mathbb{R} -points d'un \mathbb{R} -groupe algébrique réductif connexe \mathbf{G} (resp. d'un \mathbb{R} -sous-groupe fermé réductif connexe \mathbf{H} de \mathbf{G}). Par conséquent, le théorème 6.1.1 est équivalent au résultat analogue où G , H et L sont les ensembles des \mathbb{R} -points de \mathbb{R} -groupes algébriques réductifs connexes.

Nous démontrons la conservation de la propriété par déformation non seulement pour les \mathbb{R} -groupes, mais plus généralement pour les groupes algébriques sur un corps local quelconque. De plus, nous assouplissons l'hypothèse que Γ est un réseau cocompact sans torsion de L .

Théorème 6.1.3. *Soient \mathbf{k} un corps local, G l'ensemble des \mathbf{k} -points d'un \mathbf{k} -groupe algébrique réductif \mathbf{G} et H (resp. L) l'ensemble des \mathbf{k} -points d'un sous-groupe fermé réductif \mathbf{H} (resp. \mathbf{L}) de \mathbf{G} . Supposons que $\text{rang}_{\mathbf{k}}(\mathbf{L}) = 1$ et que L agit proprement sur G/H . Soit Γ un sous-groupe discret de type fini sans torsion de L ; si $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , supposons Γ convexe cocompact. Alors il existe un voisinage $\mathcal{U} \subset \text{Hom}(\Gamma, G)$ de l'inclusion naturelle formé de morphismes injectifs et tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{U}$, le groupe $\varphi(\Gamma)$ soit discret dans G et agisse proprement sur G/H .*

Rappelons que pour $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , un sous-groupe discret de L est dit *convexe cocompact* s'il agit cocompactement sur l'enveloppe convexe de son ensemble limite dans l'espace symétrique de L , cette enveloppe convexe étant supposée non vide. En particulier, tout réseau cocompact de L est convexe cocompact.

Pour $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , le théorème 6.1.1 résulte du théorème 6.1.3 et d'un argument cohomologique dû à Kobayashi (cf. partie 6.5.4). Cet argument ne se transpose pas au cas ultramétrique.

Notons qu'en caractéristique nulle, tout sous-groupe de type fini de L est virtuellement sans torsion d'après le lemme de Selberg ([Sel], lem. 8). Ceci permet de s'affranchir à moindre frais de l'hypothèse "sans torsion" dans ce cas.

6.1.3 Traduction en termes de projection de Cartan

Soient \mathbf{k} un corps local, G l'ensemble des \mathbf{k} -points d'un \mathbf{k} -groupe algébrique réductif connexe et H un sous-groupe fermé de G . Le *critère de propreté* de Benoist ([Be1], cor. 5.2) traduit la propreté de l'action sur G/H d'un sous-groupe Γ de G en termes d'une projection de Cartan de G . Grâce à ce critère (cf. paragraphe 6.5.4), le théorème 6.1.3 découle du résultat suivant.

Théorème 6.1.4. *Soient \mathbf{k} un corps local, G l'ensemble des \mathbf{k} -points d'un \mathbf{k} -groupe algébrique réductif connexe \mathbf{G} et L l'ensemble des \mathbf{k} -points d'un sous-groupe fermé réductif \mathbf{L} de \mathbf{G} de \mathbf{k} -rang un. Fixons une projection de Cartan $\mu : G \rightarrow E^+$ et une norme $\|\cdot\|$ sur E . Soit Γ un sous-groupe discret de type fini sans torsion de L ; si $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , supposons Γ convexe cocompact. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $\mathcal{U}_\varepsilon \subset \text{Hom}(\Gamma, G)$ de l'inclusion naturelle tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{U}_\varepsilon$ et tout $\gamma \in \Gamma$ on ait*

$$\|\mu(\varphi(\gamma)) - \mu(\gamma)\| \leq \varepsilon \|\mu(\gamma)\|.$$

6.1.4 Idées des démonstrations

Le cœur du chapitre consiste à démontrer le théorème 6.1.4. Pour cela, nous commençons par rappeler dans la partie 6.2 que certaines formes linéaires ℓ sur E sont liées à des représentations (V, ρ) de \mathbf{G} par des relations de la forme

$$\ell(\mu(g)) = \log \|\rho(g)\|_V$$

pour tout $g \in G$, où $\|\cdot\|_V$ est une certaine norme fixée sur V . Nous nous ramenons ainsi à borner des quotients de la forme $\|\rho(\varphi(\gamma))\|_V / \|\rho(\gamma)\|_V$, où $\gamma \in \Gamma \setminus \{1\}$ et où $\varphi \in \text{Hom}(\Gamma, G)$ est proche de l'inclusion naturelle de Γ dans G .

Pour borner ces quotients, nous étudions la dynamique de G agissant sur l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$, notamment la dynamique des éléments $g \in G$ qui sont *proximaux* dans $\mathbb{P}(V)$. Par définition, de tels éléments $g \in G$ admettent un point fixe attractif et un hyperplan projectif répulsif dans $\mathbb{P}(V)$. Dans la partie 6.3, nous considérons des produits $z_1 k_2 z_2 \dots k_n z_n$ d'éléments proximaux z_i ayant un point fixe attractif commun x_0^+ et un hyperplan répulsif commun X_0^- , avec des isométries k_i telles que $k_i \cdot x_0^+$ ne soit pas trop proche de X_0^- . Nous mesurons la puissance de contraction d'un tel produit en fonction des puissances de contraction des z_i .

Dans la partie 6.4, nous voyons comment ces considérations dynamiques s'appliquent aux éléments $\gamma \in \Gamma$ et à leurs images $\varphi(\gamma)$ par une petite déformation $\varphi \in \text{Hom}(\Gamma, G)$. Nous utilisons pour cela l'idée de Guichard [Gui] d'écrire tout élément $\gamma \in \Gamma$ comme un produit $\gamma_0 \dots \gamma_n$ d'éléments d'une partie finie fixée F de Γ , où l'on contrôle les normes $\|\mu(\gamma_i)\|$ et $\|\mu(\gamma_i \gamma_{i+1}) - \mu(\gamma_i) - \mu(\gamma_{i+1})\|$ pour tout i .

Dans la partie 6.5, nous réunissons les résultats des parties 6.3 et 6.4 en choisissant la partie finie F de Γ de manière judicieuse, afin d'obtenir un contrôle fin des quotients $\|\rho(\varphi(\gamma))\|_V / \|\rho(\gamma)\|_V$, ou encore des réels $\ell(\mu(\varphi(\gamma)) - \mu(\gamma))$ pour $\gamma \in \Gamma \setminus \{1\}$. Nous en déduisons le théorème 6.1.4.

Le dernier paragraphe de la partie 6.5 explique comment les théorèmes 6.1.1 et 6.1.3 découlent du théorème 6.1.4. Enfin, la partie 6.6 est consacrée au corollaire 6.1.2 et à la construction de *bending* de Johnson et Millson évoquée plus haut.

6.2 Sous-groupes paraboliques maximaux et représentations

Commençons par quelques rappels sur les sous-groupes paraboliques maximaux des groupes réductifs et sur certaines représentations. Nous reprenons les notations des préliminaires, et désignons par des lettres gothiques les algèbres de Lie des groupes algébriques (par exemple \mathfrak{g} pour un groupe algébrique \mathbf{G}).

6.2.1 Sous-groupes paraboliques maximaux

Fixons un groupe algébrique réductif connexe \mathbf{G} sur un corps local \mathbf{k} . Soient \mathbf{A} un \mathbf{k} -tore \mathbf{k} -déployé maximal de \mathbf{G} et \mathbf{Z} (resp. \mathbf{N}) son centralisateur (resp. son normalisateur) dans \mathbf{G} . Notons Φ le système des racines restreintes de \mathbf{A} dans \mathbf{G} et $W = N/Z$ son groupe de Weyl. Pour tout $\alpha \in \Phi$, soit \mathbf{U}_α le sous-groupe unipotent associé à α : c'est l'unique sous-groupe fermé unipotent normalisé par \mathbf{Z} d'algèbre de Lie $\mathfrak{u}_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$, où

$$\mathfrak{g}_{i\alpha} = \{X \in \mathfrak{g}, \quad \text{Ad}(a)(X) = \alpha(a)^i X \quad \forall a \in A\}$$

pour tout $i \in \{1, 2\}$ ([Bo2], prop. 21.9). Fixons une base Δ de Φ , ce qui définit un ensemble Φ^+ de racines restreintes positives. Pour toute partie θ de Δ , notons \mathbf{P}_θ le sous-groupe parabolique *standard* de \mathbf{G} associé à θ , c'est-à-dire le groupe engendré

par \mathbf{Z} et les \mathbf{U}_α où $\alpha \in \Phi^+ \cup -\mathbb{N}(\Delta \setminus \theta) \cap \Phi$, d'algèbre de Lie

$$\mathfrak{p}_\theta = \mathfrak{z} \oplus \left(\bigoplus_{\beta \in \Phi^+} \mathfrak{u}_\beta \right) \oplus \left(\bigoplus_{\beta \in \mathbb{N}(\Delta \setminus \theta) \cap \Phi} \mathfrak{u}_{-\beta} \right).$$

Ici, $\mathbb{N}(\Delta \setminus \theta)$ désigne l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de $\Delta \setminus \theta$ à coefficients entiers positifs. Tout \mathbf{k} -sous-groupe parabolique \mathbf{P} de \mathbf{G} est conjugué sur \mathbf{k} à un unique \mathbf{k} -sous-groupe parabolique standard ([BoT], prop. 5.14). En particulier, les \mathbf{k} -sous-groupes paraboliques stricts maximaux de \mathbf{G} sont les conjugués des $\mathbf{P}_\alpha = \mathbf{P}_{\{\alpha\}}$, où $\alpha \in \Delta$.

Soit $\alpha \in \Delta$. Comme \mathbf{P}_α est son propre normalisateur dans \mathbf{G} ([BoT], prop. 4.4), la *variété de drapeaux* $\mathbf{G}/\mathbf{P}_\alpha$ paramètre l'ensemble des \mathbf{k} -sous-groupes paraboliques conjugués à \mathbf{P}_α . C'est une variété projective, définie sur \mathbf{k} ([BoT], § 5.24(ii)). Notons \mathbf{N}_α^- le sous-groupe de \mathbf{G} engendré par les $\mathbf{U}_{-\beta}$ où $\beta \in (\alpha + \mathbb{N}\Delta) \cap \Phi$, d'algèbre de Lie

$$\mathfrak{n}_\alpha^- = \bigoplus_{\beta \in (\alpha + \mathbb{N}\Delta) \cap \Phi} \mathfrak{u}_{-\beta}.$$

Soit W_α le sous-groupe de W engendré par les réflexions $s_\beta : x \mapsto x - \langle x, \check{\beta} \rangle \beta$ de $X(\mathbf{A}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ associées aux racines simples $\beta \in \Delta \setminus \{\alpha\}$. On a la *décomposition de Bruhat*

$$\mathbf{G}/\mathbf{P}_\alpha = \coprod_{w \in W/W_\alpha} \mathbf{N}_\alpha^- w \mathbf{P}_\alpha,$$

où la sous-variété projective $\mathbf{N}_\alpha^- w \mathbf{P}_\alpha$ est de codimension strictement positive dès que $wW_\alpha \neq W_\alpha$.

6.2.2 Représentations de \mathbf{G}

Soient $\alpha \in \Delta$ une racine simple et $\check{\alpha}$ sa coracine. Notons $\omega_\alpha \in X(\mathbf{A})$ le poids fondamental associé à α , défini par $\langle \omega_\alpha, \check{\alpha} \rangle = 1$ et $\langle \omega_\alpha, \check{\beta} \rangle = 0$ pour tout $\beta \in \Delta \setminus \{\alpha\}$. D'après [Ti2], th. 7.2, il existe une \mathbf{k} -représentation irréductible (ρ_α, V_α) de \mathbf{G} dont le plus haut poids restreint χ_α est un multiple positif de ω_α et dont le sous-espace de plus haut poids x_α^+ est une droite. Le point $x_\alpha^+ \in \mathbb{P}(V_\alpha)$ est l'unique point fixe de P_α dans $\mathbb{P}(V_\alpha)$. L'application de $\mathbf{G}/\mathbf{P}_\alpha$ dans $\mathbb{P}(V_\alpha)$ qui à $g\mathbf{P}_\alpha$ associe $\rho_\alpha(g)(x_\alpha^+)$ est une immersion fermée. On note Λ_α l'ensemble des poids restreints de (ρ_α, V_α) , et pour tout $\lambda \in \Lambda_\alpha$ on note $(V_\alpha)_\lambda$ le sous-espace de poids associé à λ .

Le groupe G admet une décomposition de Cartan $G = KA^+K$ ou $G = KZ^+K$ pour un certain sous-groupe compact maximal K de G . Notons $\mu : G \rightarrow E^+$ la projection de Cartan associée. Si $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ (resp. si $\mathbf{k} = \mathbb{C}$), il existe un produit scalaire (resp. un produit scalaire hermitien) K -invariant sur V_α pour lequel les sous-espaces de poids sont orthogonaux; on note $\|\cdot\|_\alpha$ la norme euclidienne (resp. hermitienne) associée. La norme d'opérateurs correspondante $\|\cdot\|_\alpha$ sur $\text{End}(V_\alpha)$ vérifie

$$\|\rho_\alpha(g)\|_\alpha = e^{\langle \chi_\alpha, \mu(g) \rangle} \quad (6.2.1)$$

pour tout $g \in G$. Si \mathbf{k} est ultramétrique, il existe une norme ultramétrique K -invariante $\|\cdot\|_\alpha$ sur V_α telle que pour tout $(v_\lambda) \in \prod_{\lambda \in \Lambda_\alpha} (V_\alpha)_\lambda$ on ait

$$\left\| \sum_{\lambda \in \Lambda_\alpha} v_\lambda \right\|_\alpha = \max_{\lambda \in \Lambda_\alpha} \|v_\lambda\|_\alpha$$

et telle que pour tout $z \in Z$ et tout $\lambda \in \Lambda_\alpha$, la restriction de $\rho_\alpha(z)$ à $(V_\alpha)_\lambda$ soit une similitude de rapport $q^{\langle \lambda, \nu(z) \rangle}$ ([Qui], th. 6.1). (On note ici $\nu : Z \rightarrow E$ le morphisme de groupes défini dans la partie 1.2.) La norme d'opérateurs correspondante $\|\cdot\|_\alpha$ sur $\text{End}(V_\alpha)$ vérifie

$$\|\rho_\alpha(g)\|_\alpha = q^{\langle \chi_\alpha, \mu(g) \rangle} \quad (6.2.2)$$

pour tout $g \in G$.

6.2.3 Exemple de \mathbf{SL}_n

Explicitons les notations précédentes pour $\mathbf{G} = \mathbf{SL}_n$, où $n \geq 2$. Soit \mathbf{A} le tore des matrices diagonales de déterminant 1. Le système de racines Φ associé est l'ensemble des formes linéaires $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ pour $1 \leq i, j \leq n$ et $i \neq j$, où

$$\varepsilon_i(\text{diag}(a_1, \dots, a_n)) = a_i.$$

Soit Δ la base de Φ formée des racines $\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$, où $1 \leq i \leq n-1$. Fixons une racine simple $\alpha = \varepsilon_{i_0} - \varepsilon_{i_0+1} \in \Delta$. Le groupe parabolique \mathbf{P}_α est défini par l'annulation des coefficients matriciels (i, j) pour $1 \leq j \leq i_0 < i \leq n$. La variété de drapeaux $\mathbf{G}/\mathbf{P}_\alpha$ est ici la grassmannienne $\mathcal{G}(i_0, n)$ des sous-espaces vectoriels de dimension i_0 de l'espace affine \mathbb{A}^n . L'algèbre de Lie \mathfrak{n}_α^- est définie par l'annulation des coefficients matriciels (i, j) pour $1 \leq i \leq i_0$ et pour $i_0+1 \leq i, j \leq n$. La décomposition

$$\mathbf{G}/\mathbf{P}_\alpha = \coprod_{w \in W/W_\alpha} \mathbf{N}_\alpha^- w \mathbf{P}_\alpha$$

est la décomposition de la grassmannienne $\mathcal{G}(i_0, n)$ en cellules de Schubert. La représentation (ρ_α, V_α) est la représentation naturelle de \mathbf{SL}_n dans le produit extérieur $\Lambda^{i_0} \mathbb{A}^n$; son plus haut poids est le poids fondamental $\omega_\alpha = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{i_0}$ associé à α . Le plongement de la grassmannienne $\mathcal{G}(i_0, n)$ dans l'espace projectif $\mathbb{P}(V_\alpha) = \mathbb{P}(\Lambda^{i_0} \mathbb{A}^n)$ est le plongement de Plücker.

6.3 Dynamique dans les espaces projectifs

Dans cette partie, nous étudions la dynamique de certains endomorphismes de \mathbf{k} -espaces vectoriels dans les espaces projectifs associés, où \mathbf{k} est un corps local. Au paragraphe 6.3.1, nous commençons par quelques rappels sur la notion de proximité. Nous considérons ensuite des produits de la forme $z_1 k_2 z_2 \dots k_n z_n$, où les z_i sont des éléments proximaux ayant un point fixe attractif commun x_0^+ et un

hyperplan répulsif commun X_0^- , et les k_i sont des isométries telles que $k_i \cdot x_0^-$ ne soit pas trop proche de X_0^- . Nous mesurons la puissance de contraction d'un tel produit en fonction des puissances de contraction des z_i . Au paragraphe 6.3.2 nous considérons un \mathbf{k} -groupe algébrique réductif connexe \mathbf{G} et appliquons le résultat du paragraphe 6.3.1 aux représentations (V_α, ρ_α) de \mathbf{G} introduites au paragraphe 6.2.2. En utilisant les relations (6.2.1) et (6.2.2), nous obtenons une majoration de $|\langle \chi_\alpha, \mu(g_1 \dots g_n) - \mu(g_1) - \dots - \mu(g_n) \rangle|$ pour des éléments $g_1, \dots, g_n \in G$ vérifiant certaines propriétés de contraction et de transversalité.

6.3.1 Proximalité dans les espaces projectifs et estimation de normes

Soient \mathbf{k} un corps local et V un \mathbf{k} -espace vectoriel de dimension finie. Fixons une base (v_1, \dots, v_n) de V et munissons V de la norme $\|\cdot\|_V$ définie par

$$\left\| \sum_{1 \leq j \leq n} t_j v_j \right\|_V = \sup_{1 \leq j \leq n} |t_j|. \quad (6.3.1)$$

Nous notons encore $\|\cdot\|_V$ la norme d'opérateurs correspondante sur $\text{End}(V)$. Munissons l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$ de la distance d définie par

$$d(x_1, x_2) = \inf \{ \|v'_1 - v'_2\|_V, v'_i \in x_i \text{ et } \|v'_i\|_V = 1 \ \forall i = 1, 2 \}.$$

Rappelons qu'un élément $g \in \text{End}(V) \setminus \{0\}$ est dit *proximal* s'il possède une unique valeur propre de valeur absolue maximale et si cette valeur propre est de multiplicité un. (Les valeurs propres de g appartiennent à une extension finie \mathbf{k}_g de \mathbf{k} et l'on considère ici l'unique extension de la valeur absolue $|\cdot|$ de \mathbf{k} à \mathbf{k}_g .) Si g est proximal, alors sa valeur propre de valeur absolue maximale appartient à \mathbf{k} ; on note $x_g^+ \in \mathbb{P}(V)$ la droite propre correspondante et X_g^- l'image dans $\mathbb{P}(V)$ de l'unique supplémentaire g -invariant de x_g^+ dans V . Notons que g agit sur $\mathbb{P}(V)$ en contractant $\mathbb{P}(V) \setminus X_g^-$ vers x_g^+ . Pour $\varepsilon > 0$, nous dirons qu'un élément proximal $g \in \text{End}(V)$ est ε -proximal s'il vérifie les deux conditions supplémentaires suivantes :

1. $d(x_g^+, X_g^-) \geq 2\varepsilon$,
2. pour tout $x \in \mathbb{P}(V)$, si $d(x, X_g^-) \geq \varepsilon$, alors $d(g \cdot x, x_g^+) \leq \varepsilon$.

Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 6.3.1. *Soit X_0^- un hyperplan projectif de $\mathbb{P}(V)$, soit $x_0^+ \in \mathbb{P}(V) \setminus X_0^-$ et soit $\varepsilon > 0$ tel que $d(x_0^+, X_0^-) \geq 2\varepsilon$. Il existe un réel $r_\varepsilon > 0$ tel que pour toutes isométries $k_2, \dots, k_n \in \text{End}(V)$ vérifiant $d(k_i \cdot x_0^+, X_0^-) \geq 2\varepsilon$ pour tout i , et pour tous endomorphismes ε -proximaux $z_1, \dots, z_n \in \text{End}(V)$ vérifiant $x_{z_i}^+ = x_0^+$ et $X_{z_i}^- = X_0^-$ et induisant sur la droite x_0^+ une similitude de rapport $\|z_i\|_V$ pour tout i , on ait*

$$e^{-(n-1)r_\varepsilon} \cdot \prod_{i=1}^n \|z_i\|_V \leq \|z_1 k_2 z_2 \dots k_n z_n\|_V \leq \prod_{i=1}^n \|z_i\|_V.$$

Démonstration. Comme la norme d'opérateurs $\|\cdot\|_V$ sur $\text{End}(V)$ est sous-multiplicative et comme k_i est une isométrie de V pour tout i , on a

$$\|z_1 k_2 z_2 \dots k_n z_n\|_V \leq \prod_{i=1}^n \|z_i\|_V.$$

Établissons l'inégalité de gauche. Soit $v_0 \in V \setminus \{0\}$ tel que $x_0^+ = \mathbf{k}v_0$ et soit V_0 l'hyperplan vectoriel de V tel que $X_0^- = \mathbb{P}(V_0)$. Posons

$$\begin{aligned} b_\varepsilon &= \{x \in \mathbb{P}(V), d(x, x_0^+) \leq \varepsilon\} \\ \text{et } B_\varepsilon &= \{x \in \mathbb{P}(V), d(x, X_0^-) \geq \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Par compacité de l'ensemble des vecteurs unitaires $v \in V$ tels que $d(\mathbf{k}v, X_0^-) \geq \varepsilon$ et par continuité de l'application qui à $v \in V$ associe l'unique élément $t \in \mathbf{k}$ tel que $v \in tv_0 + V_0$, il existe un réel $r_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $v \in V \setminus \{0\}$ vérifiant $\mathbf{k}v \in B_\varepsilon$ on ait

$$v \in \{t \in \mathbf{k}, e^{-\frac{r_\varepsilon}{2}}\|v\| \leq |t| \leq e^{\frac{r_\varepsilon}{2}}\|v\|\} \cdot v_0 + V_0. \quad (6.3.2)$$

Pour tout $1 \leq j \leq n$, posons

$$h_j = z_j k_{j+1} z_{j+1} \dots k_n z_n \in \text{End}(V).$$

Montrons par récurrence descendante sur j que $h_j \cdot B_\varepsilon \subset b_\varepsilon$ et

$$\|h_j \cdot v_0\|_V \geq e^{-(n-j)r_\varepsilon} \cdot \prod_{i=j}^n \|z_i\|_V, \quad (6.3.3)$$

ce qui démontrera le lemme. On commence par remarquer que pour tout i on a d'une part $k_i \cdot b_\varepsilon \subset B_\varepsilon$ car k_i est une isométrie de V et $d(k_i \cdot x_0^+, X_0^-) \geq 2\varepsilon$, d'autre part $z_i \cdot B_\varepsilon \subset b_\varepsilon$ car z_i est ε -proximal, $x_{z_i}^+ = x_0^+$ et $X_{z_i}^- = X_0^-$. D'après l'hypothèse de récurrence on a donc $k_{j+1} h_{j+1} \cdot B_\varepsilon \subset B_\varepsilon$ et $h_j \cdot B_\varepsilon \subset b_\varepsilon$. D'après (6.3.2) on a $k_{j+1} h_{j+1} \cdot v_0 \in t_j v_0 + V_0$ où $t_j \in \mathbf{k}$ vérifie

$$|t_j| \geq e^{-\frac{r_\varepsilon}{2}} \|k_{j+1} h_{j+1} \cdot v_0\|_V = e^{-\frac{r_\varepsilon}{2}} \|h_{j+1} \cdot v_0\|_V.$$

Par hypothèse de récurrence on a

$$|t_j| \geq e^{-(n-j-\frac{1}{2})r_\varepsilon} \cdot \prod_{i=j+1}^n \|z_i\|_V.$$

Or, par hypothèse z_j préserve V_0 et induit sur la droite x_0^+ une similitude de rapport $\|z_j\|_V$, donc $h_j \cdot v_0 = z_j k_{j+1} h_{j+1} \cdot v_0 \in t'_j v_0 + V_0$ où $t'_j \in \mathbf{k}$ vérifie

$$|t'_j| = \|z_j\|_V |t_j| \geq e^{-(n-j-\frac{1}{2})r_\varepsilon} \cdot \prod_{i=j}^n \|z_i\|_V.$$

L'inégalité (6.3.3) en découle en utilisant encore une fois (6.3.2). □

6.3.2 Projection de Cartan selon les poids fondamentaux

Le lemme 6.3.1 implique le résultat suivant.

Proposition 6.3.2. *Soient \mathbf{k} un corps local et G l'ensemble des \mathbf{k} -points d'un \mathbf{k} -groupe algébrique réductif connexe, admettant une décomposition de Cartan $G = KA^+K$ ou $G = KZ^+K$. Notons $\mu : G \rightarrow E^+$ la projection de Cartan associée, et choisissons pour tout $g \in G$ une décomposition $g = k_g z_g \ell_g$ où $k_g, \ell_g \in K$ et $z_g \in Z^+$. Soient $\alpha \in \Delta$ une racine simple et \mathcal{C}_α un compact de N_α^- . Il existe des réels $r_\alpha, R_\alpha > 0$ tels que pour tous $g_1, \dots, g_n \in G$ vérifiant $\langle \alpha, \mu(g_i) \rangle \geq R_\alpha$ et $\ell_{g_i} k_{g_{i+1}} \in \mathcal{C}_\alpha P_\alpha$ pour tout $1 \leq i \leq n$, on ait*

$$\left| \left\langle \chi_\alpha, \mu(g_1 \dots g_n) - \sum_{i=1}^n \mu(g_i) \right\rangle \right| \leq nr_\alpha.$$

On reprend ici les notations de la partie 6.2. En particulier, pour toute racine simple $\alpha \in \Delta$, on note \mathbf{N}_α^- (resp. \mathbf{P}_α) le sous-groupe unipotent (resp. parabolique) de \mathbf{G} introduit au paragraphe 6.2.1 et χ_α le plus haut poids de la représentation (V_α, ρ_α) introduite au paragraphe 6.2.2. On munit V_α d'une norme $\|\cdot\|_\alpha$ comme au paragraphe 6.2.2, and $\mathbb{P}(V_\alpha)$ d'une distance d comme au paragraphe 6.3.1. La proposition 6.3.2 résulte du lemme 6.3.1, des relations (6.2.1) et (6.2.2), et du lemme suivant.

Lemme 6.3.3. *Soit $x_\alpha^+ \in \mathbb{P}(V_\alpha)$ la droite de plus haut poids $(V_\alpha)_{\chi_\alpha}$ et soit X_α^- l'image dans $\mathbb{P}(V_\alpha)$ de la somme des espaces de poids $(V_\alpha)_\lambda$ où $\lambda \in \Lambda_\alpha \setminus \{\chi_\alpha\}$.*

1. *Pour tout $\varepsilon > 0$ vérifiant $d(x_\alpha^+, X_\alpha^-) \geq 2\varepsilon$, il existe un réel $R_\alpha > 0$ tel que pour tout $z \in Z^+$ vérifiant $\langle \alpha, \mu(z) \rangle \geq R_\alpha$, l'élément $\rho_\alpha(z)$ soit ε -proximal dans $\mathbb{P}(V_\alpha)$ avec $x_{\rho_\alpha(z)}^+ = x_\alpha^+$ et $X_{\rho_\alpha(z)}^- = X_\alpha^-$.*
2. *On a $\rho_\alpha(N_\alpha^-)(x_\alpha^+) \cap X_\alpha^- = \emptyset$.*

Démonstration. 1. Il suffit de voir que tout poids restreint de (ρ_α, V_α) distinct de χ_α appartient à $\chi_\alpha - \alpha - \mathbb{N}\Delta$. Soit W_α le sous-groupe de W engendré par les réflexions $s_\beta : x \mapsto x - \langle x, \check{\beta} \rangle \beta$ de $X(\mathbf{A}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ associées aux racines $\beta \in \Delta \setminus \{\alpha\}$. Il fixe χ_α puisque χ_α est un multiple de ω_α et que par définition $\langle \omega_\alpha, \check{\beta} \rangle = 0$ pour tout $\beta \in \Delta \setminus \{\alpha\}$. C'est le groupe de Weyl du sous-système de racines de Φ engendré par $\Delta \setminus \{\alpha\}$ ([BoT], § 2.1), donc l'élément "le plus long" w de W_α permute $\mathbb{N}(\Delta \setminus \{\alpha\})$ et $-\mathbb{N}(\Delta \setminus \{\alpha\})$. Par conséquent, pour tout poids restreint $\lambda \in \chi_\alpha - \mathbb{N}(\Delta \setminus \{\alpha\})$ de (ρ_α, V_α) on a $w \cdot \lambda \in \chi_\alpha + \mathbb{N}\Delta$, ce qui implique $\lambda = \chi_\alpha$.

2. Pour tout $n \in N_\alpha^-$, l'élément neutre $1 \in G$ appartient à l'adhérence de la classe de conjugaison $\{znz^{-1}, z \in Z\}$, donc x_α^+ appartient à l'adhérence de l'orbite $\rho_\alpha(Zn)(x_\alpha^+)$ dans $\mathbb{P}(V_\alpha)$. Or, X_α^- est fermé dans $\mathbb{P}(V_\alpha)$, stable par Z , et ne contient pas x_α^+ . \square

Démonstration de la proposition 6.3.2. Le point $x_\alpha^+ \in \mathbb{P}(V_\alpha)$ est fixe par P_α . De plus, $\rho_\alpha(N_\alpha^-(x_\alpha^+) \cap X_\alpha^- = \emptyset$ d'après le lemme 6.3.3, donc il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que

$$d(\rho_\alpha(\mathcal{C}_\alpha P_\alpha)(x_\alpha^+), X_\alpha^-) \geq 2\varepsilon.$$

Soit $r_\varepsilon > 0$ le réel donné par le lemme 6.3.1 pour $(V, X_0^-, x_0^+) = (V_\alpha, X_\alpha^-, x_\alpha^+)$. Posons $r_\alpha = r_\varepsilon / \log q$, où $q = e$ si \mathbf{k} est archimédien et q désigne le cardinal du corps résiduel si \mathbf{k} est ultramétrique. Soit $R_\alpha > 0$ le réel donné par le lemme 6.3.3. Montrons que r_α et R_α satisfont les conclusions de la proposition 6.3.2. Soient $g_1, \dots, g_n \in G$ tels que $\langle \alpha, \mu(g_i) \rangle \geq R_\alpha$ et $\ell_{g_i} k_{g_{i+1}} \in \mathcal{C}_\alpha P_\alpha$ pour tout i . D'après le lemme 6.3.3, l'élément $\rho_\alpha(z_{g_i})$ est ε -proximal dans $\mathbb{P}(V_\alpha)$ et vérifie $x_{\rho_\alpha(z_{g_i})}^+ = x_\alpha^+$ et $X_{\rho_\alpha(z_{g_i})}^- = X_\alpha^-$. De plus, il induit sur la droite x_α^+ une similitude de rapport $\|\rho_\alpha(z_{g_i})\|_\alpha$, par choix de la norme $\|\cdot\|_\alpha$ sur V_α . D'après le lemme 6.3.1, on a

$$q^{-nr_\alpha} \cdot \prod_{i=1}^n \|\rho_\alpha(z_{g_i})\|_\alpha \leq \|\rho_\alpha(g_1 \dots g_n)\|_\alpha \leq \prod_{i=1}^n \|\rho_\alpha(z_{g_i})\|_\alpha.$$

D'après (6.2.1) et (6.2.2), on a donc

$$\left\langle \chi_\alpha, \sum_{i=1}^n \mu(g_i) \right\rangle - nr_\alpha \leq \langle \chi_\alpha, \mu(g_1 \dots g_n) \rangle \leq \left\langle \chi_\alpha, \sum_{i=1}^n \mu(g_i) \right\rangle. \quad \square$$

6.4 Produits transverses

Dans cette partie nous expliquons comment, sous les hypothèses du théorème 6.1.4, la proposition 6.3.2 s'applique aux éléments $\gamma \in \Gamma$ et à leurs déformés $\varphi(\gamma)$, où $\varphi \in \text{Hom}(\Gamma, G)$ est proche de l'inclusion naturelle de Γ dans G . Nous utilisons pour cela l'idée de Guichard [Gui] d'écrire tout élément $\gamma \in \Gamma$ comme un "produit transverse" $\gamma_0 \dots \gamma_n$ d'éléments d'une partie finie fixée F de Γ .

6.4.1 Transversalité dans L

Soient \mathbf{k} un corps local et \mathbf{L} un \mathbf{k} -groupe algébrique réductif connexe de \mathbf{k} -rang un. Fixons une décomposition de Cartan $L = K_L A_L^+ K_L$ ou $L = K_L Z_L^+ K_L$, où K_L est un sous-groupe compact maximal de L , où \mathbf{A}_L est un \mathbf{k} -tore \mathbf{k} -déployé maximal de \mathbf{L} et où \mathbf{Z}_L est le centralisateur de \mathbf{A}_L dans \mathbf{L} . Notons $\mu_L : L \rightarrow E_L^+$ la projection de Cartan correspondante, où $E_L = Y(\mathbf{A}_L) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Comme \mathbf{L} est de \mathbf{k} -rang un, l'espace vectoriel E_L est une droite, et tout isomorphisme entre E_L et \mathbb{R} donne une projection de Cartan $\mu_L^{\mathbb{R}} : L \rightarrow \mathbb{R}$.

Si \mathbf{L} est de \mathbf{k} -rang semi-simple un, l'application $\mu_L^{\mathbb{R}}$ prend toutes ses valeurs dans \mathbb{R}^+ ou toutes ses valeurs dans \mathbb{R}^- . On note α_L l'unique racine restreinte positive indivisible de \mathbf{A}_L dans \mathbf{L} , on note $\mathbf{P}_L = \mathbf{P}_{\alpha_L}$ le sous-groupe parabolique strict maximal de \mathbf{L} associé à α_L et $\mathbf{N}_L^- = \mathbf{U}_{-\alpha_L}$ le sous-groupe unipotent associé à $-\alpha_L$ (*cf.* paragraphe 6.2.1).

Si \mathbf{L} est de \mathbf{k} -rang semi-simple nul, le tore $\mathbf{A}_{\mathbf{L}}$ est central dans \mathbf{L} , donc $\mathbf{Z}_{\mathbf{L}} = \mathbf{L}$. L'application $\mu_{\mathbf{L}}^{\mathbb{R}}$ est alors un morphisme de groupes de L dans \mathbb{R} , qui prend donc des valeurs positives et négatives. On pose $\mathbf{P}_{\mathbf{L}} = \mathbf{Z}_{\mathbf{L}} = \mathbf{L}$ et $\mathbf{N}_{\mathbf{L}}^- = \{1\}$.

Dans ce paragraphe, pour la commodité du lecteur, nous redonnons une démonstration du résultat suivant, dû à Guichard dans le cas réel semi-simple ([Gui], lem. 7 et 9). Nous nous plaçons dans le cadre plus général d'un groupe algébrique réductif sur un corps local.

Proposition 6.4.1 (Guichard). *Soient \mathbf{k} un corps local, L l'ensemble des \mathbf{k} -points d'un \mathbf{k} -groupe algébrique réductif connexe de \mathbf{k} -rang un et $\mu_{\mathbf{L}}^{\mathbb{R}} : L \rightarrow \mathbb{R}$ une projection de Cartan. Soit Γ un sous-groupe discret de type fini sans torsion de L ; si $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , supposons Γ convexe cocompact. Il existe un réel $D > 0$ et un compact \mathcal{C}_L de $N_{\mathbf{L}}^-$ tels que pour tout $R \geq 2D$, tout $\gamma \in \Gamma$ s'écrive $\gamma = \gamma_0 \dots \gamma_n$, où $\gamma_0, \dots, \gamma_n \in \Gamma$ vérifient les propriétés suivantes :*

1. $|\mu_{\mathbf{L}}^{\mathbb{R}}(\gamma_0)| \leq R + D$ et $R - D \leq |\mu_{\mathbf{L}}^{\mathbb{R}}(\gamma_i)| \leq R + D$ pour tout $1 \leq i \leq n$,
2. si $\gamma_i = k_{\gamma_i} z_{\gamma_i} \ell_{\gamma_i}$ où $k_{\gamma_i}, \ell_{\gamma_i} \in K_L$ et $z_{\gamma_i} \in Z_L^+$, alors $\ell_{\gamma_i} k_{\gamma_{i+1}} \in \mathcal{C}_L P_L$ pour tout $1 \leq i \leq n - 1$,
3. $\mu_{\mathbf{L}}^{\mathbb{R}}(\gamma_1), \dots, \mu_{\mathbf{L}}^{\mathbb{R}}(\gamma_n)$ ont tous le même signe que $\mu_{\mathbf{L}}^{\mathbb{R}}(\gamma)$ si $n \geq 2$.

Pour démontrer la proposition 6.4.1, on utilise le lemme suivant, qui traduit la condition de transversalité 2 en termes de $\mu_{\mathbf{L}}^{\mathbb{R}}$.

Lemme 6.4.2. *Sous les hypothèses de la proposition 6.4.1, il existe un réel $D_0 \geq 0$ vérifiant la propriété suivante : pour tout $D \geq D_0$, il existe un compact \mathcal{C}_L de $N_{\mathbf{L}}^-$ tel que pour tout $k \in K_L$, s'il existe $z_1, z_2 \in Z_L^+$ vérifiant $|\mu_{\mathbf{L}}^{\mathbb{R}}(z_1)|, |\mu_{\mathbf{L}}^{\mathbb{R}}(z_2)| \geq D$ et*

$$|\mu_{\mathbf{L}}^{\mathbb{R}}(z_1 k z_2)| \geq |\mu_{\mathbf{L}}^{\mathbb{R}}(z_1)| + |\mu_{\mathbf{L}}^{\mathbb{R}}(z_2)| - D,$$

alors $k \in \mathcal{C}_L P_L$.

Notons que dans le lemme 6.4.2 on peut se restreindre au cas où \mathbf{L} est de \mathbf{k} -rang semi-simple un, sinon l'énoncé est trivial. Dans ce cas, la proposition 6.3.2 implique une sorte de réciproque au lemme 6.4.2 : pour tout compact \mathcal{C}_L de $N_{\mathbf{L}}^-$, il existe $D \geq 0$ tel que pour tout $k \in K_L \cap \mathcal{C}_L P_L$ et tous $z_1, z_2 \in Z^+$ on ait

$$|\mu_{\mathbf{L}}^{\mathbb{R}}(z_1 k z_2)| \geq |\mu_{\mathbf{L}}^{\mathbb{R}}(z_1)| + |\mu_{\mathbf{L}}^{\mathbb{R}}(z_2)| - D.$$

Démonstration du lemme 6.4.2. On peut supposer \mathbf{L} de \mathbf{k} -rang semi-simple un. L'espace L/P_L est alors l'union disjointe de l'ouvert $N_{\mathbf{L}}^- \cdot P_L$ et du singleton $\{w \cdot P_L\}$, où w désigne l'élément non trivial du groupe de Weyl (restreint) de L . Il suffit donc de prouver l'existence d'un voisinage \mathcal{U} de $w \cdot P_L$ dans L/P_L tel que pour tout $k \in K_L$ vérifiant $k \cdot P_L \in \mathcal{U}$ et tous $z_1, z_2 \in Z_L^+$ vérifiant $|\mu_{\mathbf{L}}^{\mathbb{R}}(z_1)|, |\mu_{\mathbf{L}}^{\mathbb{R}}(z_2)| \geq D$, on ait $|\mu_{\mathbf{L}}^{\mathbb{R}}(z_1 k z_2)| < |\mu_{\mathbf{L}}^{\mathbb{R}}(z_1)| + |\mu_{\mathbf{L}}^{\mathbb{R}}(z_2)| - D$.

Si $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , notons X_L l'espace riemannien symétrique de G . Sa courbure sectionnelle est strictement négative ([Hel], ch. 5, th. 3.1 et rem. 2), donc X_L est

un espace hyperbolique au sens de Gromov ([BrH], th. II.1A.6 et prop. III.H.1.2) : il existe un réel $\delta \geq 0$ tel que tout triangle géodésique de X_L soit δ -fin, au sens où chaque côté du triangle est contenu dans le δ -voisinage de l'union des deux autres côtés. Si \mathbf{k} est ultramétrique, notons X_L l'arbre de Bruhat-Tits de G , muni de la distance introduite dans la partie 1.2; c'est également un espace hyperbolique au sens de Gromov (on peut prendre $\delta = 0$). Dans les deux cas (archimédien ou ultramétrique), on identifie L/P_L au bord à l'infini ∂X_L de X_L , c'est-à-dire à l'ensemble des classes d'équivalence $[\mathcal{R}]$ de demi-rayons géodésiques $\mathcal{R} : [0, +\infty[\rightarrow X_L$ pour la relation d'équivalence "être à distance bornée" (remarquons que si \mathbf{k} est ultramétrique, cette relation s'exprime aussi par "coïncider à partir d'un certain point"). Le point $P_L \in L/P_L$ (resp. $w \cdot P_L \in L/P_L$) correspond à la classe $[\mathcal{R}^+]$ (resp. $[\mathcal{R}^-]$) du demi-rayon géodésique $\mathcal{R}^+ : [0, +\infty[\rightarrow X_L$ (resp. $\mathcal{R}^- : [0, +\infty[\rightarrow X_L$) d'image $Z_L^+ \cdot x_0$ (resp. $(w \cdot Z_L^+) \cdot x_0$).

Notons d la distance de X_L et $x_0 \in X_L$ le point dont le stabilisateur est K_L . D'après (1.4.4) et (1.4.5), on peut supposer que $|\mu_L^{\mathbb{R}}(g)| = d(x_0, g \cdot x_0)$ pour tout $g \in L$. Posons $D_0 = 5\delta \geq 0$. D'après le "lemme des ombres" (cf. par exemple [Bou], lem. 1.6.2), les ouverts

$$\mathcal{U}_t = \left\{ [\mathcal{R}] \in \partial X_L, \quad \mathcal{R}(0) = x_0 \text{ et } d(\mathcal{R}(t), \mathcal{R}^-(t)) < D_0 \right\},$$

où $t \geq 0$, forment une base de voisinages de $[\mathcal{R}^-]$ dans ∂X_L .

Soit $D \geq D_0$. Pour tous $z_1, z_2 \in Z_L^+$ et $k \in K_L$ tels que $t_1 := |\mu_L^{\mathbb{R}}(z_1)| \geq D$ et $t_2 := |\mu_L^{\mathbb{R}}(z_2)| \geq D$, on a

$$\begin{aligned} |\mu_L^{\mathbb{R}}(z_1 k z_2)| &= d(x_0, z_1 k z_2 \cdot x_0) \\ &= d(z_1^{-1} \cdot x_0, k z_2 \cdot x_0) \\ &= d(\mathcal{R}^-(t_1), k \cdot \mathcal{R}^+(t_2)) \\ &\leq d(\mathcal{R}^-(t_1), \mathcal{R}^-(D)) + d(\mathcal{R}^-(D), k \cdot \mathcal{R}^+(D)) \\ &\quad + d(k \cdot \mathcal{R}^+(D), k \cdot \mathcal{R}^+(t_2)) \\ &= t_1 - D + d(\mathcal{R}^-(D), k \cdot \mathcal{R}^+(D)) + t_2 - D \\ &= |\mu_L^{\mathbb{R}}(z_1)| + |\mu_L^{\mathbb{R}}(z_2)| - 2D + d(\mathcal{R}^-(D), k \cdot \mathcal{R}^+(D)). \end{aligned}$$

Par conséquent, si $[k \cdot \mathcal{R}^+] \in \mathcal{U}_D$, alors $|\mu_L^{\mathbb{R}}(z_1 k z_2)| < |\mu_L^{\mathbb{R}}(z_1)| + |\mu_L^{\mathbb{R}}(z_2)| - D$, ce qui termine la démonstration. \square

On peut à présent démontrer la proposition 6.4.1.

Démonstration de la proposition 6.4.1. Comme dans la démonstration du lemme 6.4.2, notons X_L l'espace symétrique ou l'arbre de Bruhat-Tits de L , selon que \mathbf{k} est archimédien ou ultramétrique. Soient d la distance de X_L et $x_0 \in X_L$ le point dont le stabilisateur est K_L . D'après (1.4.4) et (1.4.5), on peut supposer que $|\mu_L^{\mathbb{R}}(g)| = d(x_0, g \cdot x_0)$ pour tout $g \in L$. Notons qu'il existe une partie fermée convexe Γ -invariante $X'_L \neq \emptyset$ de X_L sur laquelle Γ agit cocompactement : en effet, si $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} c'est l'hypothèse de convexe cocompacité; si \mathbf{k} est ultramétrique cela résulte

de [Bas], prop. 7.9. Soit \mathcal{D} un domaine fondamental compact de X'_L pour l'action de Γ , et soit $x'_0 \in X'_L$ dans l'intérieur de \mathcal{D} . Notons $d_{\mathcal{D}}$ le diamètre de \mathcal{D} et D_0 le réel donné par le lemme 6.4.2. Montrons que la constante

$$D = \max(D_0, 6d_{\mathcal{D}} + 6d(x_0, x'_0)) > 0$$

et le compact \mathcal{C}_L de N_L^- donné par le lemme 6.4.2 satisfont les propriétés de la proposition 6.4.1.

Soit $R \geq 2D$. Fixons $\gamma \in \Gamma$ et notons I le segment géodésique de X'_L d'extrémités x'_0 et $\gamma^{-1} \cdot x'_0$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$nR \leq d(x'_0, \gamma^{-1} \cdot x'_0) < (n+1)R.$$

Pour tout $1 \leq i \leq n$, soit $x'_i \in I$ tel que $d(x'_i, x'_0) = iR$. Il existe $\lambda_i \in \Gamma$ tel que $x'_i \in \lambda_i \cdot \mathcal{D}$. Posons $\gamma_0 = \gamma \lambda_n \in \Gamma$ et $\gamma_i = \lambda_{n-i+1}^{-1} \lambda_{n-i} \in \Gamma$ pour tout $1 \leq i \leq n$ (où $\lambda_0 = 1$), de sorte que $\gamma = \gamma_0 \dots \gamma_n$. Pour $1 \leq i \leq n$, on a

$$\begin{aligned} \left| |\mu_L^{\mathbb{R}}(\gamma_i)| - d(x'_{n-i}, x'_{n-i+1}) \right| &= \left| d(\lambda_{n-i} \cdot x_0, \lambda_{n-i+1} \cdot x_0) - d(x'_{n-i}, x'_{n-i+1}) \right| \\ &\leq d(\lambda_{n-i} \cdot x_0, \lambda_{n-i} \cdot x'_0) + d(\lambda_{n-i} \cdot x'_0, x'_{n-i}) \\ &\quad + d(x'_{n-i+1}, \lambda_{n-i+1} \cdot x'_0) + d(\lambda_{n-i+1} \cdot x'_0, \lambda_{n-i+1} \cdot x_0) \\ &\leq 2d_{\mathcal{D}} + 2d(x_0, x'_0). \end{aligned}$$

Comme $d(x'_{n-i}, x'_{n-i+1}) = R$, on en déduit $\left| |\mu_L^{\mathbb{R}}(\gamma_i)| - R \right| \leq 2d_{\mathcal{D}} + 2d(x_0, x'_0)$. De même, on a

$$\left| |\mu_L^{\mathbb{R}}(\gamma_0)| - d(x'_n, \gamma^{-1} \cdot x'_0) \right| \leq 2d_{\mathcal{D}} + 2d(x_0, x'_0),$$

d'où $|\mu_L^{\mathbb{R}}(\gamma_0)| \leq R + 2d_{\mathcal{D}} + 2d(x_0, x'_0) \leq R + D$. Enfin, pour $1 \leq i \leq n-1$, le même raisonnement montre que

$$\begin{aligned} |\mu_L^{\mathbb{R}}(\gamma_i \gamma_{i+1})| &\geq d(x_{n-i-1}, x_{n-i+1}) - 2d_{\mathcal{D}} - 2d(x_0, x'_0) \\ &= 2R - 2d_{\mathcal{D}} - 2d(x_0, x'_0) \\ &\geq |\mu_L^{\mathbb{R}}(\gamma_i)| + |\mu_L^{\mathbb{R}}(\gamma_{i+1})| - 6d_{\mathcal{D}} - 6d(x_0, x'_0) \\ &\geq |\mu_L^{\mathbb{R}}(\gamma_i)| + |\mu_L^{\mathbb{R}}(\gamma_{i+1})| - D. \end{aligned} \tag{6.4.1}$$

Choisissons pour tout i une décomposition de Cartan $\gamma_i = k_{\gamma_i} z_{\gamma_i} \ell_{\gamma_i}$, où $k_{\gamma_i}, \ell_{\gamma_i} \in K_L$ et $z_{\gamma_i} \in Z_L^+$. D'après le lemme 6.4.2, on a $\ell_{\gamma_i} k_{\gamma_{i+1}} \in \mathcal{C}_L P_L$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$.

Montrons que $\mu_L^{\mathbb{R}}(\gamma_1), \dots, \mu_L^{\mathbb{R}}(\gamma_n)$ ont tous le même signe. Pour cela, on peut supposer \mathbf{L} de \mathbf{k} -rang semi-simple nul, auquel cas $\mu_L^{\mathbb{R}} : L \rightarrow \mathbb{R}$ est un morphisme de groupes. S'il existait un entier $1 \leq i \leq n-1$ tel que $\mu_L^{\mathbb{R}}(\gamma_i)$ et $\mu_L^{\mathbb{R}}(\gamma_{i+1})$ soient de signes différents, l'inégalité (6.4.1) impliquerait

$$\min(|\mu_L^{\mathbb{R}}(\gamma_i)|, |\mu_L^{\mathbb{R}}(\gamma_{i+1})|) \leq \frac{D}{2},$$

ce qui contredirait le fait que

$$\begin{aligned} |\mu_L^{\mathbb{R}}(\gamma_i)|, |\mu_L^{\mathbb{R}}(\gamma_{i+1})| &\geq R - 2d_{\mathcal{D}} - 2d(x_0, x'_0) \\ &\geq D - 2d_{\mathcal{D}} - 2d(x_0, x'_0) > \frac{D}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mu_L^{\mathbb{R}}(\gamma_1), \dots, \mu_L^{\mathbb{R}}(\gamma_n)$ ont tous le même signe. Si $n \geq 2$, on a

$$\begin{aligned} |\mu_L^{\mathbb{R}}(\gamma) - \mu_L^{\mathbb{R}}(\gamma_1 \dots \gamma_n)| &\leq |\mu_L^{\mathbb{R}}(\gamma_0)| \\ &\leq R + 2d_{\mathcal{D}} + 2d(x_0, x'_0) \\ &\leq n(R - 2d_{\mathcal{D}} - 2d(x_0, x'_0)) \\ &\leq \sum_{i=1}^n |\mu_L^{\mathbb{R}}(\gamma_i)| = |\mu_L^{\mathbb{R}}(\gamma_1 \dots \gamma_n)|, \end{aligned}$$

donc $\mu_L^{\mathbb{R}}(\gamma_1 \dots \gamma_n)$ a même signe que $\mu_L^{\mathbb{R}}(\gamma)$, et par suite $\mu_L^{\mathbb{R}}(\gamma_1), \dots, \mu_L^{\mathbb{R}}(\gamma_n)$ aussi. \square

6.4.2 Transversalité dans G

Soient \mathbf{k} un corps local, \mathbf{G} un \mathbf{k} -groupe algébrique réductif connexe et \mathbf{L} un sous-groupe fermé réductif connexe de \mathbf{G} de \mathbf{k} -rang un. Fixons une décomposition de Cartan $G = KA^+K$ ou $G = KZ^+K$.

Remarque 6.4.3. *Quitte à conjuguer \mathbf{L} par un élément de G , on peut supposer que L admet une décomposition de Cartan $L = K_L A_L^+ K_L$ ou $L = K_L Z_L^+ K_L$ où $K_L \subset K$, où $\mathbf{A}_L \subset \mathbf{A}$ et où $A_L^+ \cap A^+$ est non compact.*

En effet, \mathbf{A}_L est contenu dans un certain \mathbf{k} -tore \mathbf{k} -déployé maximal de \mathbf{G} , et ces tores sont tous conjugués sur \mathbf{k} ([BoT], th. 4.21). Par conséquent, quitte à conjuguer \mathbf{L} par un élément de G , on peut supposer $\mathbf{A}_L \subset \mathbf{A}$. Nous utilisons alors un résultat de Mostow [Mos] et Karpelevich [Kar], dont la version ultramétrique a été démontrée par Landvogt [Lan] : quitte à conjuguer encore une fois, on peut supposer $K_L \subset K$. Enfin, quitte à conjuguer \mathbf{L} par un élément du groupe de Weyl W , on peut supposer $A_L^+ \cap A^+$ non compact.

Supposons que les conditions de la remarque 6.4.3 sont satisfaites. Le lemme suivant fait le lien entre les propositions 6.3.2 et 6.4.1. Nous reprenons les notations du paragraphe 6.2.1.

Lemme 6.4.4. *Soit $\alpha \in \Delta$ dont la restriction à \mathbf{A}_L est non triviale. On a $P_L \subset P_\alpha$ et $N_L^- \subset N_\alpha^- P_\alpha$.*

Démonstration. Fixons un élément $a \in A_L^+ \cap A^+$ tel que $|\alpha(a)| > 1$. Notons que $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_\alpha^- \oplus \mathfrak{p}_\alpha$ et $\mathfrak{p}_\alpha = \mathfrak{p}_\emptyset \oplus \mathfrak{n}_{\alpha^c}^-$, où

$$\begin{aligned} \mathfrak{n}_\alpha^- &= \bigoplus_{\beta \in (\alpha + \mathbb{N}\Delta) \cap \Phi} \mathfrak{u}_{-\beta}, \\ \mathfrak{p}_\emptyset &= \mathfrak{z} \oplus \bigoplus_{\beta \in \Phi^+} \mathfrak{u}_\beta \\ \text{et } \mathfrak{n}_{\alpha^c}^- &= \bigoplus_{\beta \in \mathbb{N}(\Delta \setminus \{\alpha\}) \cap \Phi} \mathfrak{u}_{-\beta} \end{aligned}$$

sont tous trois des sommes d'espaces propres de $\text{Ad}(a)$, pour des valeurs propres de valeur absolue < 1 dans le cas de \mathfrak{n}_α^- et ≥ 1 dans le cas de \mathfrak{p}_θ . Comme \mathfrak{p}_L est somme d'espaces propres de $\text{Ad}(a)$ pour des valeurs propres de valeur absolue ≥ 1 , on a $\mathfrak{p}_L \subset \mathfrak{p}_\alpha$. Sachant que \mathbf{P}_L et \mathbf{P}_α sont connexes, on en déduit $P_L \subset P_\alpha$. Comme \mathfrak{n}_L^- est somme d'espaces propres de $\text{Ad}(a)$ pour des valeurs propres de valeur absolue < 1 , on a $\mathfrak{n}_L^- \subset \mathfrak{n}_\alpha^- \oplus \mathfrak{n}_{\alpha^c}^-$. Notons que $[\mathfrak{n}_\alpha^-, \mathfrak{n}_{\alpha^c}^-] \subset \mathfrak{n}_\alpha^-$, ce qui implique que N_α^- est normalisé par le groupe $N_{\alpha^c}^-$ engendré par les $U_{-\beta}$, où $\beta \in \mathbb{N}(\Delta \setminus \{\alpha\}) \cap \Phi$. On en déduit que le groupe engendré par N_α^- et $N_{\alpha^c}^-$ est ensemblistement égal à $N_\alpha^- N_{\alpha^c}^-$, puis que

$$N_L^- \subset N_\alpha^- N_{\alpha^c}^- \subset N_\alpha^- P_\alpha.$$

□

6.5 Projection de Cartan et déformations

Le but de cette partie est de démontrer le théorème 6.1.4, dont nous déduisons les théorèmes 6.1.1 et 6.1.3. À l'aide des propositions 6.3.2 et 6.4.1, nous établissons le résultat suivant.

Proposition 6.5.1. *Soient \mathbf{k} un corps local, G l'ensemble des \mathbf{k} -points d'un \mathbf{k} -groupe algébrique réductif connexe \mathbf{G} et L l'ensemble des \mathbf{k} -points d'un sous-groupe fermé réductif \mathbf{L} de \mathbf{G} de \mathbf{k} -rang un. Fixons une projection de Cartan $\mu : G \rightarrow E^+$ et une norme $\|\cdot\|$ sur E . Soit Γ un sous-groupe discret de type fini sans torsion de L ; si $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , supposons Γ convexe cocompact. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie F_ε de Γ et un voisinage $\mathcal{U}_\varepsilon \subset \text{Hom}(\Gamma, G)$ de l'inclusion naturelle tels que tout $\gamma \in \Gamma$ s'écrive $\gamma = \gamma_0 \dots \gamma_n$, où $\gamma_0, \dots, \gamma_n \in F_\varepsilon$ vérifient les propriétés suivantes :*

- (i) $n \leq \varepsilon \|\mu(\gamma)\|$,
- (ii) $\|\mu(\varphi(\gamma_i)) - \mu(\gamma_i)\| \leq 1$ pour tout $\varphi \in \mathcal{U}_\varepsilon$ et tout $0 \leq i \leq n$,
- (iii) pour tout $\varphi \in \mathcal{U}_\varepsilon$ on a

$$\left\| \mu(\varphi(\gamma)) - \sum_{i=0}^n \mu(\varphi(\gamma_i)) \right\| \leq \varepsilon \|\mu(\gamma)\|.$$

Expliquons brièvement comment la proposition 6.5.1 implique le théorème 6.1.4. Soit $\varepsilon > 0$ et soient F_ε la partie finie et \mathcal{U}_ε le voisinage donnés par la proposition 6.5.1. Pour tout $\eta > 0$, l'ensemble

$$\mathcal{U}_{\varepsilon, \eta} = \{\varphi \in \mathcal{U}_\varepsilon, \|\mu(\varphi(g)) - \mu(g)\| \leq \eta \quad \forall g \in F_\varepsilon\}$$

est un voisinage de l'inclusion naturelle dans $\text{Hom}(\Gamma, G)$. Les conditions (i), (ii), (iii) impliquent, par inégalité triangulaire, que

$$\|\mu(\varphi(\gamma)) - \mu(\gamma)\| \leq 3\varepsilon \|\mu(\gamma)\| + \eta$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{U}_{\varepsilon, \eta}$ et tout $\gamma \in \Gamma$. Comme l'application μ est propre et que Γ est discret dans G , l'ensemble $\Gamma \cap K$ des éléments $\gamma \in \Gamma$ tels que $\mu(\gamma) = 0$ est un sous-groupe fini de Γ et

$$r := \inf \{ \|\mu(\gamma)\|, \gamma \in \Gamma \text{ and } \mu(\gamma) \neq 0 \} > 0.$$

Prenons $\eta = \varepsilon r$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{U}_{\varepsilon, \eta}$ et tout $\gamma \in \Gamma$ vérifiant $\mu(\gamma) \neq 0$ on a alors

$$\|\mu(\varphi(\gamma)) - \mu(\gamma)\| \leq 4\varepsilon \|\mu(\gamma)\|. \quad (6.5.1)$$

Si Γ est sans torsion, on a $\Gamma \cap K = \{1\}$ et (6.5.1) est vérifié pour tout $\gamma \in \Gamma$. Ceci implique le théorème 6.1.4.

Avant de donner une démonstration de la proposition 6.5.1 (au paragraphe 6.5.3), commençons par quelques notations et remarques préliminaires.

6.5.1 Normes sur E et ses sous-espaces vectoriels

Sous les hypothèses de la proposition 6.5.1, soit $G = KA^+K$ ou $G = KZ^+K$ la décomposition de Cartan associée à μ . D'après le lemme 1.4.3, pour démontrer la proposition 6.5.1 on peut supposer \mathbf{L} connexe, puis le remplacer par l'un de ses conjugués par G . D'après la remarque 6.4.3, on peut supposer que L admet une décomposition de Cartan $L = K_L A_L^+ K_L$ ou $L = K_L Z_L^+ K_L$ où $K_L \subset K$, où $\mathbf{A}_L \subset \mathbf{A}$ et où $A_L^+ \cap A^+$ est non compact. Notons $\mu_L : L \rightarrow E_L^+$ la projection de Cartan associée. On voit naturellement E_L comme une droite de E . Si \mathbf{L} est de \mathbf{k} -rang semi-simple un, E_L^+ est une demi-droite de E^+ ; posons alors $L^+ = L$. Si \mathbf{L} est de \mathbf{k} -rang semi-simple nul, $E_L^+ = E_L$ est une droite de E ; choisissons alors une demi-droite E_L^{++} dans $E_L^+ \cap E^+$ et posons $L^+ = \{g \in L, \mu_L(g) \in E_L^{++}\}$. Comme toutes les normes sur E sont équivalentes, on peut supposer que $\|\cdot\|$ est une norme euclidienne W -invariante comme dans la partie 1.1. En composant μ_L avec un isomorphisme entre E_L et \mathbb{R} , on obtient une projection de Cartan $\mu_L^{\mathbb{R}} : L \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\mu_L^{\mathbb{R}}(g) = \|\mu(g)\| \geq 0$$

pour tout $g \in L^+$. Notons que pour tout $g \in L \setminus L^+$ on a $g^{-1} \in L^+$. De plus, l'involution d'opposition $\iota : \mu(G) \rightarrow \mu(G)$, qui à $\mu(g)$ associe $\mu(g^{-1})$ pour tout $g \in G$, est une isométrie pour la norme W -invariante $\|\cdot\|$; en effet, $\iota(\mu(g)) = w \cdot (-\mu(g))$ où w est l'élément "le plus long" de W . Par conséquent, il suffit de démontrer la proposition 6.5.1 pour des éléments $\gamma \in \Gamma$ qui appartiennent à L^+ .

Pour tout sous-espace vectoriel E' de E , soit $|\cdot|_{E'}$ la semi-norme sur E définie par

$$|y|_{E'} = \|\text{pr}_{E'}(y)\|,$$

où $\text{pr}_{E'} : E \rightarrow E'$ est la projection orthogonale sur E' . Nous allons utiliser les trois semi-normes $|\cdot|_{E_{\Delta_L}}$, $|\cdot|_{E_Z}$ et $|\cdot|_{E_{\Delta_L} \oplus E_Z}$, où E_Z est le sous-espace de E introduit dans la partie 1.1 et E_{Δ_L} le sous-espace défini de la manière suivante. Pour tout $\alpha \in \Delta$ il existe un réel $t_\alpha \geq 0$ tel que

$$\langle \alpha, \mu(g) \rangle = t_\alpha \mu_L^{\mathbb{R}}(g) \quad (6.5.2)$$

pour tout $g \in L^+$. Notons $\Delta_L = \{\alpha \in \Delta, t_\alpha > 0\}$ l'ensemble des racines simples de \mathbf{A} dans \mathbf{G} dont la restriction à \mathbf{A}_L est non triviale et posons

$$E_{\Delta_L} = \{y \in E_D, \langle \beta, y \rangle = 0 \quad \forall \beta \in \Delta \setminus \Delta_L\}.$$

Observons que $E_L \subset E_{\Delta_L} \oplus E_Z$. Observons également que E_{Δ_L} et E_Z sont orthogonaux pour la norme euclidienne $\|\cdot\|$. En effet, $\|\cdot\|$ est W -invariante, le groupe W est engendré par les réflexions $s_{\check{\alpha}}$, et pour tout $\alpha \in \Phi$ on a $s_{\check{\alpha}}(\check{\alpha}) = -\check{\alpha}$ et $s_{\check{\alpha}}(y) = y$ pour tout $y \in E_Z$, donc E_Z est orthogonal à $E_D = \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R}\check{\alpha}$. Par conséquent, on a

$$|y|_{E_{\Delta_L} \oplus E_Z}^2 = |y|_{E_{\Delta_L}}^2 + |y|_{E_Z}^2 \quad (6.5.3)$$

pour tout $y \in E$.

Pour tout $\alpha \in \Delta$, notons χ_α le plus haut poids de la représentation (ρ_α, V_α) de \mathbf{G} introduite au paragraphe 6.2.2. Rappelons que $\langle \chi_\alpha, \check{\alpha} \rangle \neq 0$ et $\langle \chi_\alpha, \check{\beta} \rangle = 0$ pour tout $\beta \in \Delta \setminus \{\alpha\}$.

Remarque 6.5.2. *L'ensemble $\{\langle \chi_\alpha, \cdot \rangle, \alpha \in \Delta_L\}$ est une base du dual de E_{Δ_L} .*

En effet, comme $\dim E_{\Delta_L} = \#\Delta_L$, il suffit de voir que les éléments $\langle \chi_\alpha, \cdot \rangle$, où $\alpha \in \Delta_L$, sont linéairement indépendants en tant que formes linéaires sur E_{Δ_L} . Par définition de E_{Δ_L} , il suffit de voir que

$$\text{vect}\{\chi_\alpha, \alpha \in \Delta_L\} \cap \text{vect}(\Delta \setminus \Delta_L) = \{0\}. \quad (6.5.4)$$

Soit (\cdot, \cdot) un produit scalaire W -invariant sur $X(\mathbf{A}) \otimes_Z \mathbb{R}$. Pour tout $\beta \in \Delta$ et tout $x \in X(\mathbf{A}) \otimes_Z \mathbb{R}$ on a

$$s_\beta(x) = x - \langle x, \check{\beta} \rangle \beta = x - \frac{2(x, \beta)}{(\beta, \beta)} \beta,$$

donc $(\chi_\alpha, \beta) = \frac{(\beta, \beta)}{2} \cdot \langle \chi_\alpha, \check{\beta} \rangle = 0$ pour tous $\alpha \neq \beta$ dans Δ , ce qui implique (6.5.4).

D'après la remarque 6.5.2, l'application $y \mapsto \sum_{\alpha \in \Delta_L} |\langle \chi_\alpha, y \rangle|$ est une norme sur E_{Δ_L} . Comme toutes les normes sur E_{Δ_L} sont équivalentes, il existe une constante $c \geq 1$ telle que

$$c^{-1} \cdot \sum_{\alpha \in \Delta_L} |\langle \chi_\alpha, y \rangle| \leq |y|_{E_{\Delta_L}} \leq c \cdot \sum_{\alpha \in \Delta_L} |\langle \chi_\alpha, y \rangle| \quad (6.5.5)$$

pour tout $y \in E$.

6.5.2 Norme de la projection sur E_{Δ_L}

L'étape principale de la démonstration de la proposition 6.5.1 est donnée par la proposition suivante, qui établit une majoration pour la semi-norme $|\cdot|_{E_{\Delta_L}}$.

Proposition 6.5.3. *Sous les hypothèses de la proposition 6.5.1, pour tout $\delta > 0$ il existe une partie finie F'_δ de Γ et un voisinage $\mathcal{U}'_\delta \subset \text{Hom}(\Gamma, G)$ de l'inclusion naturelle tels que tout $\gamma \in \Gamma \cap L^+$ s'écrive $\gamma = \gamma_0 \dots \gamma_n$, où $\gamma_0, \dots, \gamma_n \in F'_\delta$ vérifient les propriétés suivantes :*

1. $n \leq \delta \sum_{i=1}^n \|\mu(\gamma_i)\|$,
2. $\sum_{i=1}^n \|\mu(\gamma_i)\| = \|\sum_{i=1}^n \mu(\gamma_i)\|$,
3. $\|\mu(\varphi(\gamma_i)) - \mu(\gamma_i)\| \leq 1$ pour tout $\varphi \in \mathcal{U}'_\delta$ et tout $0 \leq i \leq n$,
4. pour tout $\varphi \in \mathcal{U}'_\delta$ on a

$$\left| \mu(\varphi(\gamma_1 \cdots \gamma_n)) - \sum_{i=1}^n \mu(\varphi(\gamma_i)) \right|_{E_{\Delta_L}} \leq \delta \left(\sum_{i=1}^n \|\mu(\gamma_i)\| \right).$$

Pour démontrer la proposition 6.5.3, nous utilisons les propositions 6.3.2 et 6.4.1, ainsi que le lemme 6.4.4.

Démonstration. Soient $D > 0$ la constante et \mathcal{C}_L le compact de N_L^- donnés par la proposition 6.4.1. Pour tout $\alpha \in \Delta_L$, on peut trouver d'après le lemme 6.4.4 un compact \mathcal{C}_α de N_α^- tel que $\mathcal{C}_L P_L \subset \text{Int}(\mathcal{C}_\alpha) P_\alpha$, où $\text{Int}(\mathcal{C}_\alpha)$ désigne l'intérieur de \mathcal{C}_α . Quitte à augmenter la taille du compact \mathcal{C}_α , on peut supposer qu'il est globalement stable par conjugaison par $K \cap Z$. Soient $r_\alpha, R_\alpha > 0$ les constantes données par la proposition 6.3.2. Fixons $\delta > 0$ et soit $R \geq 2D$ suffisamment grand pour que $\frac{1}{R-D} \leq \delta$ et $t_\alpha(R-D) - 1 \geq R_\alpha$ pour tout $\alpha \in \Delta_L$, où t_α est défini par (6.5.2). Notons F'_δ l'ensemble des éléments $\gamma \in \Gamma$ tels que $|\mu_L^{\mathbb{R}}(\gamma)| \leq R+D$, et F''_δ le sous-ensemble formé des éléments $\gamma \in F'_\delta$ tels que $|\mu_L^{\mathbb{R}}(\gamma)| \geq R-D$. Les ensembles F'_δ et F''_δ sont finis car l'application $\mu_L^{\mathbb{R}}$ est propre et le groupe Γ est discret dans L . Pour tout $\gamma \in F'_\delta$ nous choisissons une décomposition de Cartan $\gamma = k_\gamma z_\gamma \ell_\gamma$ où $k_\gamma, \ell_\gamma \in K_L$ et $z_\gamma \in Z_L^+$. Soit \mathcal{U}'_δ l'ensemble des éléments $\varphi \in \text{Hom}(\Gamma, G)$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

- $\|\mu(\varphi(\gamma)) - \mu(\gamma)\| \leq 1$ et $|\langle \alpha, \mu(\varphi(\gamma)) - \mu(\gamma) \rangle| \leq 1$ pour tous $\gamma \in F'_\delta$ et $\alpha \in \Delta_L$,
- tout $\gamma \in F''_\delta$ admet une décomposition de Cartan $\varphi(\gamma) = k_{\varphi(\gamma)} z_{\varphi(\gamma)} \ell_{\varphi(\gamma)}$, où $k_{\varphi(\gamma)}, \ell_{\varphi(\gamma)} \in K$ et $z_{\varphi(\gamma)} \in Z^+$, de sorte que $\ell_{\varphi(\gamma)} k_{\varphi(\gamma)} \in \mathcal{C}_\alpha P_\alpha$ pour tout $\alpha \in \Delta_L$ et tous $\gamma, \gamma' \in F''_\delta$ vérifiant $\ell_\gamma k_{\gamma'} \in \mathcal{C}_L P_L$.

Notons que \mathcal{U}'_δ est un voisinage de l'inclusion naturelle dans $\text{Hom}(\Gamma, G)$. En effet, pour $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , cela résulte du fait que si $g = k_g a_g \ell_g = k'_g a_g \ell'_g$ où $k_g, \ell_g, k'_g, \ell'_g \in K$ et $a_g \in A^+$, alors $k'_g \in k_g(K \cap Z)$ et $\ell'_g \in (K \cap Z)\ell_g$ ([Hel], ch. 9, cor. 1.2). Dans le cas ultramétrique, cela résulte du fait que K est un voisinage de 1 dans G , de sorte que si $g = k_g z_g \ell_g$ où $k_g, \ell_g \in K$ et $z_g \in Z^+$, alors tout $g' \in G$ suffisamment proche de g appartient à gK et à Kg et admet les décompositions de Cartan $g' = k_g z_g (\ell_g g^{-1} g')$ et $g' = (g' g^{-1} k_g) z_g \ell_g$.

Montrons que F'_δ et \mathcal{U}'_δ satisfont les conclusions de la proposition 6.5.3. Soit $\gamma \in \Gamma \cap L^+$. D'après la proposition 6.4.1, on peut écrire $\gamma = \gamma_0 \cdots \gamma_n$, où $\gamma_0 \in F'_\delta$ et $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in F''_\delta$ vérifient les propriétés suivantes :

- $\ell_{\gamma_i} k_{\gamma_{i+1}} \in \mathcal{C}_L P_L$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$,
- $\mu_L^{\mathbb{R}}(\gamma_1), \dots, \mu_L^{\mathbb{R}}(\gamma_n)$ sont tous ≥ 0 si $n \geq 2$.

Cette dernière condition implique que $\mu_L^{\mathbb{R}}(\gamma_1), \dots, \mu_L^{\mathbb{R}}(\gamma_n)$ appartiennent tous à une même demi-droite de E^+ , donc la condition 2 est satisfaite. De plus, comme $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ appartiennent à F''_δ , on a

$$n \leq \frac{1}{R-D} \cdot \sum_{i=1}^n |\mu_L^{\mathbb{R}}(\gamma_i)| \leq \delta \sum_{i=1}^n \|\mu(\gamma_i)\|,$$

i.e. la condition 1 est satisfaite. Pour établir la condition 4, on peut supposer $n \geq 2$. Soit $\varphi \in \mathcal{U}'_\delta$. D'après (6.5.5), il suffit de majorer

$$\left| \left\langle \chi_\alpha, \mu(\varphi(\gamma_1 \dots \gamma_n)) - \sum_{i=1}^n \mu(\varphi(\gamma_i)) \right\rangle \right|$$

pour tout $\alpha \in \Delta_L$. Comme $n \geq 2$, on a $\mu_L^{\mathbb{R}}(\gamma_i) \geq 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$, autrement dit, $\gamma_i \in L^+$. Par définition de \mathcal{U}'_δ et t_α , on obtient

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \mu(\varphi(\gamma_i)) \rangle &\geq \langle \alpha, \mu(\gamma_i) \rangle - 1 \\ &\geq t_\alpha \mu_L^{\mathbb{R}}(\gamma_i) - 1 \\ &\geq t_\alpha(R - D) - 1 \geq R_\alpha \end{aligned}$$

pour tout $\alpha \in \Delta_L$. De plus, par définition de \mathcal{U}'_δ on peut écrire $\varphi(\gamma_i) = k_{\varphi(\gamma_i)} z_{\varphi(\gamma_i)} \ell_{\varphi(\gamma_i)}$, où $k_{\varphi(\gamma_i)}, \ell_{\varphi(\gamma_i)} \in K$ et $z_{\varphi(\gamma_i)} \in Z^+$, de sorte que $\ell_{\varphi(\gamma_i)} k_{\varphi(\gamma_{i+1})} \in \mathcal{C}_\alpha P_\alpha$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$. La proposition 6.3.2 donne alors

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \chi_\alpha, \mu(\varphi(\gamma_1 \dots \gamma_n)) - \sum_{i=1}^n \mu(\varphi(\gamma_i)) \right\rangle \right| &\leq nr_\alpha \\ &\leq \frac{r_\alpha}{R - D} \sum_{i=1}^n \|\mu(\gamma_i)\|. \end{aligned}$$

D'après (6.5.5), ceci implique la condition 4 dès que

$$\sum_{\alpha \in \Delta_L} \frac{cr_\alpha}{R - D} \leq \delta,$$

cette dernière inégalité étant vérifiée pour R suffisamment grand. \square

6.5.3 Démonstration de la proposition 6.5.1

La proposition 6.5.1 découle de la proposition 6.5.3 et de l'observation générale suivante.

Lemme 6.5.4. *Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace euclidien et E' un sous-espace vectoriel de E . Pour tout $y \in E$, soit $|y|_{E'} = \|\text{pr}_{E'}(y)\|$, où $\text{pr}_{E'} : E \rightarrow E'$ désigne la projection orthogonale sur E' . Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que pour tous $y, y' \in E$ vérifiant*

- $y' \in E'$,
 - $|y - y'|_{E'} \leq 2\delta \|y'\|$,
 - $\|y\| \leq (1 + \delta) \|y'\|$,
- on ait $\|y - y'\| \leq \frac{\varepsilon}{8} \|y'\|$.

Démonstration. L'inégalité $|y - y'|_{E'} \leq 2\delta \|y'\|$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz impliquent $\langle y, y' \rangle \geq (1 - 2\delta) \|y'\|^2$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire associé à $\|\cdot\|$. Par conséquent, il suffit d'observer que pour $y'_1 \in E$ de norme 1, le diamètre de l'ensemble

$$\{y_1 \in E, \quad 1 - 2\delta \leq \langle y_1, y'_1 \rangle \leq \|y_1\| \leq 1 + \delta\}$$

tend uniformément vers 0 avec δ . □

Démontrons à présent la proposition 6.5.1.

Démonstration de la proposition 6.5.1. Fixons $\varepsilon \in]0, 1]$. Soit $\delta \in]0, \frac{\varepsilon}{8}]$ et soient F'_δ l'ensemble fini et \mathcal{U}'_δ le voisinage de l'inclusion naturelle donnés par la proposition 6.5.3. Posons

$$C'_\delta = \max_{g \in F'_\delta} \|\mu(g)\| + 1,$$

$$F_\varepsilon = F'_\delta \cup F'^{-1}_\delta \cup \left\{ g \in \Gamma, \|\mu(g)\| < \frac{6C'_\delta}{\varepsilon} \right\}$$

et

$$\mathcal{U}_\varepsilon = \{ \varphi \in \mathcal{U}'_\delta, \|\mu(\varphi(g)) - \mu(g)\| \leq 1 \quad \forall g \in F_\varepsilon \}.$$

Soit $\gamma \in \Gamma$. Montrons que l'on peut écrire $\gamma = \gamma_0 \dots \gamma_n$, où $\gamma_0, \dots, \gamma_n \in F_\varepsilon$ vérifient les conditions (i), (ii), (iii) de la proposition 6.5.1. Tout d'abord, on peut supposer $\|\mu(\gamma)\| \geq \frac{6C'_\delta}{\varepsilon}$. De plus, nous avons déjà remarqué au paragraphe 6.5.1 que l'on peut supposer $\gamma \in L^+$: en effet, sinon $\gamma^{-1} \in L^+$ et l'on utilise le fait que l'involution d'opposition est une isométrie. Supposons donc $\gamma \in \Gamma \cap L^+$ et $\|\mu(\gamma)\| \geq \frac{6C'_\delta}{\varepsilon}$. D'après la proposition 6.5.3, on peut écrire $\gamma = \gamma_0 \dots \gamma_n$, où $\gamma_0, \dots, \gamma_n \in F'_\delta$ vérifient

1. $n \leq \delta \sum_{i=1}^n \|\mu(\gamma_i)\|$,
2. $\sum_{i=1}^n \|\mu(\gamma_i)\| = \|\sum_{i=1}^n \mu(\gamma_i)\|$,
3. $\|\mu(\varphi(\gamma_i)) - \mu(\gamma_i)\| \leq 1$ pour tout $\varphi \in \mathcal{U}'_\delta$ et tout $0 \leq i \leq n$,
4. pour tout $\varphi \in \mathcal{U}'_\delta$ on a

$$\left| \mu(\varphi(\gamma_1 \dots \gamma_n)) - \sum_{i=1}^n \mu(\varphi(\gamma_i)) \right|_{E_{\Delta_L}} \leq \delta \left(\sum_{i=1}^n \|\mu(\gamma_i)\| \right).$$

Notons que l'on a

$$\text{pr}_{E_Z}(\mu(gg')) = \text{pr}_{E_Z}(\mu(g)) + \text{pr}_{E_Z}(\mu(g'))$$

pour tous $g, g' \in G$, d'où

$$\left| \mu(\varphi(\gamma_1 \dots \gamma_n)) - \sum_{i=1}^n \mu(\varphi(\gamma_i)) \right|_{E_Z} = 0.$$

D'après (6.5.3), la condition 4 reste satisfaite si l'on remplace la semi-norme $|\cdot|_{E_{\Delta_L}}$ par $|\cdot|_{E_{\Delta_L} \oplus E_Z}$. Par inégalité triangulaire et d'après les conditions 1, 2, 3, 4 et l'inégalité (1.4.9), on a

$$\begin{aligned} & \left| \mu(\varphi(\gamma_1 \dots \gamma_n)) - \sum_{i=1}^n \mu(\gamma_i) \right|_{E_{\Delta_L} \oplus E_Z} \\ & \leq \left| \mu(\varphi(\gamma_1 \dots \gamma_n)) - \sum_{i=1}^n \mu(\varphi(\gamma_i)) \right|_{E_{\Delta_L} \oplus E_Z} + \sum_{i=1}^n \|\mu(\varphi(\gamma_i)) - \mu(\gamma_i)\| \\ & \leq 2\delta \left(\sum_{i=1}^n \|\mu(\gamma_i)\| \right) = 2\delta \left\| \sum_{i=1}^n \mu(\gamma_i) \right\| \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|\mu(\varphi(\gamma_1 \dots \gamma_n))\| & \leq \sum_{i=1}^n \|\mu(\varphi(\gamma_i))\| \\ & \leq \sum_{i=1}^n \|\mu(\gamma_i)\| + \sum_{i=1}^n \|\mu(\varphi(\gamma_i)) - \mu(\gamma_i)\| \\ & \leq (1 + \delta) \left(\sum_{i=1}^n \|\mu(\gamma_i)\| \right) = (1 + \delta) \left\| \sum_{i=1}^n \mu(\gamma_i) \right\| \end{aligned}$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{U}'_\delta$. Par conséquent, le lemme 6.5.4 s'applique à

$$(E', y, y') = \left(E_{\Delta_L} \oplus E_Z, \mu(\varphi(\gamma_1 \dots \gamma_n)), \sum_{i=1}^n \mu(\gamma_i) \right) :$$

on obtient

$$\left\| \mu(\varphi(\gamma_1 \dots \gamma_n)) - \sum_{i=1}^n \mu(\gamma_i) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{8} \left\| \sum_{i=1}^n \mu(\gamma_i) \right\| \quad (6.5.6)$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{U}'_\delta$. Or, par inégalité triangulaire et d'après les conditions 1, 2, 3, on a

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^n \mu(\varphi(\gamma_i)) \right) - \left(\sum_{i=1}^n \mu(\gamma_i) \right) \right\| \leq \delta \left(\sum_{i=1}^n \|\mu(\gamma_i)\| \right) \leq \frac{\varepsilon}{8} \left\| \sum_{i=1}^n \mu(\gamma_i) \right\|,$$

d'où

$$\left\| \mu(\varphi(\gamma_1 \dots \gamma_n)) - \sum_{i=1}^n \mu(\varphi(\gamma_i)) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{4} \left\| \sum_{i=1}^n \mu(\gamma_i) \right\|$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{U}'_\delta$. Comme

$$\|\mu(\varphi(\gamma)) - \mu(\varphi(\gamma_1 \dots \gamma_n))\| \leq \|\mu(\varphi(\gamma_0))\| \leq \|\mu(\gamma_0)\| + 1 \leq C'_\delta,$$

on obtient

$$\left\| \mu(\varphi(\gamma)) - \sum_{i=1}^n \mu(\varphi(\gamma_i)) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{4} \left\| \sum_{i=1}^n \mu(\gamma_i) \right\| + C'_\delta.$$

par inégalité triangulaire. En particulier, en prenant pour φ l'inclusion naturelle de Γ dans G , on obtient

$$\left\| \sum_{i=1}^n \mu(\gamma_i) \right\| \leq \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{4}} (\|\mu(\gamma)\| + C'_\delta) \leq 2 (\|\mu(\gamma)\| + C'_\delta). \quad (6.5.7)$$

Comme $\|\mu(\gamma)\| \geq \frac{6C'_\delta}{\varepsilon}$, ceci implique

$$\left\| \mu(\varphi(\gamma)) - \sum_{i=0}^n \mu(\varphi(\gamma_i)) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|\mu(\gamma)\| + 3C'_\delta \leq \varepsilon \|\mu(\gamma)\|$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{U}'_\delta$, *i.e.* la condition (iii) de la proposition 6.5.1 est satisfaite. Enfin, d'après les conditions 1 et 2 et l'inégalité (6.5.7), comme $\|\mu(\gamma)\| \geq \frac{6C'_\delta}{\varepsilon}$ et $\delta \leq \frac{\varepsilon}{4} \leq 1$, on a

$$n \leq 2\delta (\|\mu(\gamma)\| + C'_\delta) \leq \varepsilon \|\mu(\gamma)\|,$$

i.e. la condition (i) de la proposition 6.5.1 est satisfaite, ce qui achève la démonstration. \square

6.5.4 Propreté et déformations

Expliquons brièvement comment les théorèmes 6.1.1 et 6.1.3 découlent du théorème 6.1.4.

Le théorème 6.1.3 est une conséquence facile du théorème 6.1.4 et du critère de propreté de Benoist ([Be1], cor. 5.2), qui affirme que pour tout sous-groupe fermé H de G , un sous-groupe Γ de G agit proprement sur G/H si et seulement si pour tout compact \mathcal{C} de E , l'ensemble $\mu(\Gamma) \cap (\mu(H) + \mathcal{C})$ est borné. Cette condition signifie que l'ensemble $\mu(\Gamma)$ "s'éloigne de $\mu(H)$ à l'infini".

Démonstration du théorème 6.1.3. On peut supposer \mathbf{G} , \mathbf{H} et \mathbf{L} connexes. Soient $G = KA^+K$ ou $G = KZ^+K$ une décomposition de Cartan de G et $\mu : G \rightarrow E^+$ la projection de Cartan associée. Munissons l'espace vectoriel E d'une norme euclidienne W -invariante $\|\cdot\|$ comme dans la partie 1.1. D'après la remarque 6.4.3, on peut supposer que L admet une décomposition de Cartan $L = K_L A_L^+ K_L$ ou $L = K_L Z_L^+ K_L$ où $K_L \subset K$ et $\mathbf{A}_L \subset \mathbf{A}$. Si $\mu_L : L \rightarrow E_L^+$ désigne la projection de Cartan correspondante, on voit naturellement E_L comme une droite de E et l'on a

$$\mu(g) = E^+ \cap (W \cdot \mu_L(g))$$

pour tout $g \in L$. Ainsi, $\mu(L)$ est inclus dans l'union U_L de deux demi-droites de E^+ . Toujours d'après la remarque 6.4.3, il existe un élément $g \in G$ tel que gHg^{-1} admette une décomposition de Cartan $gHg^{-1} = K_H A_H^+ K_H$ ou $gHg^{-1} = K_H Z_H^+ K_H$ où $K_H \subset K$ et $\mathbf{A}_H \subset \mathbf{A}$. L'ensemble $\mu(gHg^{-1})$ est inclus dans l'intersection U_H de E^+ avec une union finie de sous-espaces vectoriels de E paramétrés par le groupe de Weyl W . D'après le lemme 1.4.3, les ensembles $\mu(gHg^{-1})$ et $\mu(H)$ sont à distance de

Hausdorff $\leq 2 \|\mu(g)\|$. D'après le critère de propreté, on a donc $U_L \cap U_H = \{0\}$, et il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$d(\mu(g), \mu(H)) \geq 2\varepsilon \|\mu(g)\| - 2 \|\mu(g)\|$$

pour tout $g \in L$. D'après le théorème 6.1.4, il existe un voisinage $\mathcal{U}_\varepsilon \subset \text{Hom}(\Gamma, G)$ de l'inclusion naturelle tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{U}_\varepsilon$ et tout $\gamma \in \Gamma$ on ait

$$\|\mu(\varphi(\gamma)) - \mu(\gamma)\| \leq \varepsilon \|\mu(\gamma)\|.$$

Fixons $\varphi \in \mathcal{U}_\varepsilon$. Pour tout $\gamma \in \Gamma$ on a

$$\begin{aligned} d(\mu(\varphi(\gamma)), \mu(H)) &\geq d(\mu(\gamma), \mu(H)) - \|\mu(\varphi(\gamma)) - \mu(\gamma)\| \\ &\geq \varepsilon \|\mu(\gamma)\| - 2 \|\mu(g)\|. \end{aligned}$$

Comme l'application μ est propre et le groupe Γ est discret dans G , on en déduit que pour tout compact \mathcal{C} de E , l'ensemble $\mu(\varphi(\Gamma)) \cap (\mu(H) + \mathcal{C})$ est fini. D'après le critère de propreté, ceci implique que l'action de $\varphi(\Gamma)$ sur G/H est propre. Ceci implique également que $\varphi(\Gamma)$ est discret dans G et que le noyau de φ est fini. Comme Γ est sans torsion, φ est injectif. \square

Démonstration du théorème 6.1.1. D'après le théorème 6.1.3, il existe un voisinage $\mathcal{U} \subset \text{Hom}(\Gamma, G)$ de l'inclusion naturelle formé de morphismes injectifs et tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{U}$, le groupe $\varphi(\Gamma)$ agisse proprement sur G/H . Par injectivité, pour tout $\varphi \in \mathcal{U}$ le groupe $\varphi(\Gamma)$ a même dimension cohomologique que Γ . Or, d'après [Ko1], cor. 5.5, un sous-groupe discret sans torsion de G agissant proprement sur G/H agit cocompactement si et seulement si sa dimension cohomologique est égale à $d(G) - d(H)$, où $d(G)$ (resp. $d(H)$) désigne la dimension de l'espace symétrique de G (resp. de H) (cf. paragraphe 0.2.2). Par conséquent, pour tout $\varphi \in \mathcal{U}$ le quotient $\varphi(\Gamma) \backslash G/H$ est encore compact. \square

6.6 Application aux quotients de $\text{SO}(2n, 2)/\text{U}(n, 1)$

Soit $n \geq 1$ un entier. Notons que le groupe $\text{U}(n, 1)$ se plonge naturellement dans $\text{O}(2n, 2)$ en identifiant la forme hermitienne $|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 - |z_{n+1}|^2$ sur \mathbb{C}^{n+1} à la forme quadratique $x_1^2 + \dots + x_{2n}^2 - x_{2n+1}^2 - x_{2n+2}^2$ sur \mathbb{R}^{2n+2} . De manière explicite, ce plongement envoie une matrice $(z_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n+1} \in \text{U}(n, 1)$ sur la matrice par blocs $(Z_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n+1}$, où

$$Z_{i,j} = \begin{pmatrix} \text{Re}(z_{i,j}) & -\text{Im}(z_{i,j}) \\ \text{Im}(z_{i,j}) & \text{Re}(z_{i,j}) \end{pmatrix}.$$

Comme $\text{U}(n, 1)$ est connexe ([Hel], lem. 2.4), ce plongement est en fait à valeurs dans la composante neutre de $\text{SO}(2n, 2)$. Comme l'a remarqué Kulkarni [Kul], le groupe

$U(n, 1)$, vu comme sous-groupe de $SO(2n, 2)$, agit transitivement sur l'espace anti-de Sitter

$$\begin{aligned} \text{AdS}^{2n+1} = \mathbb{H}^{2n,1} &= \{(x_1, \dots, x_{2n+2}) \in \mathbb{R}^{2n+2}, x_1^2 + \dots + x_{2n}^2 - x_{2n+1}^2 - x_{2n+2}^2 = -1\} \\ &\simeq SO(2n, 2)/SO(2n, 1). \end{aligned}$$

Le stabilisateur du point $(0, \dots, 0, 1)$ est le sous-groupe compact $U(n)$, donc $\mathbb{H}^{2n,1}$ s'identifie à l'espace homogène $U(n, 1)/U(n)$ et l'action de $U(n, 1)$ sur $SO(2n, 2)/SO(2n, 1)$ est propre. Par dualité, l'action de $SO(2n, 1)$ sur $SO(2n, 2)/U(n, 1)$ est propre et transitive. En particulier, tout réseau cocompact Γ de $SO(2n, 1)$ fournit un quotient compact standard $\Gamma \backslash SO(2n, 2)/U(n, 1)$ de $SO(2n, 2)/U(n, 1)$.

Le corollaire 6.1.2 résulte du théorème 6.1.1 et de l'existence de petites déformations Zariski-denses dans $SO(m, 2)$ de certains réseaux cocompacts de $SO(m, 1)$. Pour $m = 2$, l'existence de telles déformations résulte de l'observation suivante : la composante neutre $SO(2, 2)^\circ$ de $SO(2, 2)$ (pour la topologie réelle) admet un revêtement à deux feuilletés par $SL_2(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{R})$ (induit par l'action de $SL_2(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{R})$ sur $M_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^4$ par multiplication à gauche et à droite, qui préserve le déterminant), et l'image réciproque de $SO(1, 2)^\circ$ est la diagonale de $SL_2(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{R})$. Par conséquent, il suffit de voir que pour tout réseau cocompact Γ_0 de $SL_2(\mathbb{R})$ et tout voisinage $\mathcal{U} \subset \text{Hom}(\Gamma_0, SL_2(\mathbb{R}))$ de l'inclusion naturelle, il existe un élément $\varphi \in \mathcal{U}$ tel que le groupe $\Gamma_0^\varphi = \{(\gamma, \varphi(\gamma)), \gamma \in \Gamma_0\}$ soit Zariski-dense dans $SL_2(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{R})$. Cela résulte de la remarque suivante, conséquence facile de la simplicité de $PSL_2(\mathbb{R})$ et du lemme de Goursat, appliquée à l'adhérence de Zariski de Γ_0^φ .

Remarque 6.6.1. *Un sous-groupe de $PSL_2(\mathbb{R}) \times PSL_2(\mathbb{R})$ dont la projection sur chaque facteur de $PSL_2(\mathbb{R}) \times PSL_2(\mathbb{R})$ est surjective est soit conjugué à la diagonale de $PSL_2(\mathbb{R}) \times PSL_2(\mathbb{R})$, soit égal à $PSL_2(\mathbb{R}) \times PSL_2(\mathbb{R})$ tout entier.*

Pour $m \geq 3$, de petites déformations Zariski-denses dans $SO(m, 2)$ de certains réseaux cocompacts de $SO(m, 1)$ sont obtenues par une construction de *bending* due à Johnson et Millson. Cette construction a été initialement introduite dans [JM] pour des déformations dans $SO(m+1, 1)$ ou $PGL_{m+1}(\mathbb{R})$. Pour la commodité du lecteur, nous la décrivons pour des déformations dans $SO(m, 2)$, et vérifions que l'on obtient bien ainsi des déformations Zariski-denses.

Désormais on utilise les lettres gothiques pour désigner les algèbres de Lie des groupes de Lie (par exemple \mathfrak{g} pour G).

6.6.1 Réseaux arithmétiques cocompacts de $SO(m, 1)$

Soit $m \geq 3$. Les réseaux cocompacts de $SO(m, 1)$ que Johnson et Millson considèrent sont obtenus de la manière classique suivante. On fixe un entier $r \geq 2$ sans facteur carré et l'on identifie $SO(m, 1)$ au groupe spécial orthogonal de la forme quadratique $x_1^2 + \dots + x_m^2 - \sqrt{r}x_{m+1}^2$ sur \mathbb{R}^{m+1} . Soit \mathcal{O}_r l'anneau des entiers du corps quadratique $\mathbb{Q}(\sqrt{r})$. Le groupe $\Gamma = SO(m, 1) \cap M_{m+1}(\mathcal{O}_r)$ est un réseau cocompact de $SO(m, 1)$ (cf. [Bo1] par exemple). Pour tout idéal I de \mathcal{O}_r , le sous-groupe de

congruence $\Gamma \cap (1 + M_{m+1}(I))$ est d'indice fini dans Γ , donc est un réseau cocompact de $\mathrm{SO}(m, 1)$. D'après [MR], quitte à remplacer Γ par un tel sous-groupe de congruence, on peut le supposer sans torsion. Le quotient $M = \Gamma \backslash \mathbb{H}^m$ est alors une variété hyperbolique compacte de dimension m , dont le groupe fondamental s'identifie à Γ .

Le point clé de la construction de *bending* est l'existence d'une hypersurface totalement géodésique, orientable et connexe N de M . Plus précisément, Johnson et Millson démontrent que quitte à remplacer encore une fois Γ par un sous-groupe de congruence, l'hypersurface $N = (\Gamma \cap \mathrm{SO}(m-1, 1)) \backslash \mathbb{H}^{m-1}$ convient, où

$$\mathbb{H}^{m-1} \simeq \{(x_2, \dots, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^m, \quad x_2^2 + \dots + x_m^2 - \sqrt{r}x_{m+1}^2 = -1 \text{ et } x_{m+1} > 0\}$$

est plongé de manière naturelle dans

$$\mathbb{H}^m \simeq \{(x_1, \dots, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1}, \quad x_1^2 + \dots + x_m^2 - \sqrt{r}x_{m+1}^2 = -1 \text{ et } x_{m+1} > 0\}$$

([JM], lem. 7.1 et th. 7.2). Posons $\Gamma_0 = \Gamma \cap \mathrm{SO}(m-1, 1)$. Pour construire des déformations de Γ dans $\mathrm{SO}(m, 2)$, on utilise le fait que le centralisateur de Γ_0 dans $\mathrm{SO}(m, 2)$ contient un sous-groupe isomorphe à $\mathrm{SO}(1, 1) \simeq \mathbb{R}^*$. L'idée est de déformer Γ "selon ce centralisateur", dans un sens que nous allons préciser. La méthode de Johnson et Millson distingue les cas où l'hypersurface N est séparante ou non.

6.6.2 Déformations dans le cas séparant

Supposons tout d'abord que N sépare M en deux composantes M_1 et M_2 , et notons Γ_1 (resp. Γ_2) le groupe fondamental de M_1 (resp. de M_2). D'après le théorème de van Kampen, le groupe Γ est le produit amalgamé $\Gamma_1 *_{\Gamma_0} \Gamma_2$ de Γ_1 et Γ_2 au-dessus de Γ_0 . Fixons un élément $Y \notin \mathfrak{so}(m, 1)$ de l'algèbre de Lie du centralisateur de Γ_0 dans $\mathrm{SO}(m, 2)$. La méthode de Johnson et Millson consiste à considérer les déformations de Γ dans $\mathrm{SO}(m, 2)$ données, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par

$$\varphi_t(\gamma) = \begin{cases} \gamma & \text{pour } \gamma \in \Gamma_1, \\ e^{tY}\gamma e^{-tY} & \text{pour } \gamma \in \Gamma_2. \end{cases}$$

Comme e^{tY} centralise Γ_0 , ces deux définitions coïncident pour $\gamma \in \Gamma_0 = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$; on obtient donc une représentation $\varphi_t : \Gamma \rightarrow \mathrm{SO}(m, 2)$ par la propriété universelle du produit amalgamé. Vérifions que son image est Zariski-dense pour t suffisamment petit. Pour cela, commençons par une remarque.

Remarque 6.6.2. *Pour $m \geq 3$, la seule sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{so}(m, 2)$ contenant strictement $\mathfrak{so}(m, 1)$ est $\mathfrak{so}(m, 2)$.*

En effet, $\mathfrak{so}(m, 2)$ s'écrit de manière unique comme somme directe

$$\mathfrak{so}(m, 2) = \mathfrak{so}(m, 1) \oplus \mathbb{R}^{m+1}$$

de $\mathrm{SO}(m, 1)$ -modules irréductibles, où $\mathrm{SO}(m, 1)$ agit sur $\mathfrak{so}(m, 1)$ (resp. sur \mathbb{R}^{m+1}) par l'action adjointe (resp. naturelle).

On en déduit le résultat de Zariski-densité annoncé.

Lemme 6.6.3. *Pour tout $t \neq 0$ suffisamment petit, le groupe $\varphi_t(\Gamma)$ est Zariski-dense dans $\mathrm{SO}(m, 2)$.*

Démonstration. Rappelons que $\mathrm{SO}(m, 2)$ est connexe pour la topologie de Zariski. Par conséquent, pour montrer que $\overline{\varphi_t(\Gamma)}$ est Zariski-dense dans $\mathrm{SO}(m, 2)$, il suffit de montrer que l'algèbre de Lie de $\overline{\varphi_t(\Gamma)}$ est $\mathfrak{so}(m, 2)$, où $\overline{\varphi_t(\Gamma)}$ désigne l'adhérence de Zariski de $\varphi_t(\Gamma)$ dans $\mathrm{SO}(m, 2)$.

D'après [JM], lem. 5.9, les groupes Γ_1 et Γ_2 sont Zariski-denses dans $\mathrm{SO}(m, 1)$. D'après [JM], cor. 5.3, et [Se3], § I.5.2, cor. 1, ils s'injectent naturellement dans Γ . Par conséquent, $\overline{\varphi_t(\Gamma)}$ contient à la fois $\mathrm{SO}(m, 1)$ et $e^{tY}\mathrm{SO}(m, 1)e^{-tY}$, et l'algèbre de Lie de $\overline{\varphi_t(\Gamma)}$ contient à la fois $\mathfrak{so}(m, 1)$ et l'algèbre de Lie de $e^{tY}\mathrm{SO}(m, 1)e^{-tY}$. D'après la remarque 6.6.2, pour montrer que $\overline{\varphi_t(\Gamma)}$ est Zariski-dense dans $\mathrm{SO}(m, 2)$, il suffit de montrer que l'algèbre de Lie de $e^{tY}\mathrm{SO}(m, 1)e^{-tY}$ n'est pas égale à $\mathfrak{so}(m, 1)$.

Mais si l'algèbre de Lie de $e^{tY}\mathrm{SO}(m, 1)e^{-tY}$ était égale à $\mathfrak{so}(m, 1)$, on aurait $e^{tY}\mathrm{SO}(m, 1)e^{-tY} = \mathrm{SO}(m, 1)^\circ$: autrement dit, e^{tY} appartiendrait au normalisateur $N_{\mathrm{SO}(m, 2)}(\mathrm{SO}(m, 1)^\circ)$ de la composante neutre $\mathrm{SO}(m, 1)^\circ$ de $\mathrm{SO}(m, 1)$. Or, l'exponentielle réalise un difféomorphisme entre un voisinage \mathcal{U} de 0 dans $\mathfrak{so}(m, 2)$ et un voisinage \mathcal{V} de 1 dans $\mathrm{SO}(m, 2)$, qui induit une bijection entre $\mathcal{U} \cap \mathfrak{n}_{\mathrm{so}(m, 2)}(\mathfrak{so}(m, 1))$ et $\mathcal{V} \cap N_{\mathrm{SO}(m, 2)}(\mathrm{SO}(m, 1)^\circ)$. Par conséquent, si l'on avait $e^{tY} \in N_{\mathrm{SO}(m, 2)}(\mathrm{SO}(m, 1)^\circ)$ pour un certain $t \neq 0$ suffisamment petit, on aurait

$$Y \in \mathfrak{n}_{\mathrm{so}(m, 2)}(\mathfrak{so}(m, 1)) = \{X \in \mathfrak{so}(m, 2), \mathrm{ad}(X)(\mathfrak{so}(m, 1)) = \mathfrak{so}(m, 1)\}.$$

Mais d'après la remarque 6.6.2 l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}_{\mathrm{so}(m, 2)}(\mathfrak{so}(m, 1))$ est égale à $\mathfrak{so}(m, 1)$, car elle contient $\mathfrak{so}(m, 1)$ et n'est pas égale à $\mathfrak{so}(m, 2)$. Ainsi, on aurait $Y \in \mathfrak{so}(m, 1)$, ce qui contredirait notre choix de Y . \square

6.6.3 Déformations dans le cas non séparant

Supposons à présent que le complémentaire $S = M \setminus N$ est connexe. Notons $j_1 : \Gamma_0 \rightarrow \pi_1(S)$ et $j_2 : \Gamma_0 \rightarrow \pi_1(S)$ les inclusions des groupes fondamentaux des deux côtés de N dans $\pi_1(S)$. Le groupe Γ est une extension HNN de $\pi_1(S)$: il existe un élément $\nu \in \Gamma$ tel que Γ soit engendré par $\pi_1(S)$ et par ν avec les relations

$$\nu j_1(\gamma) \nu^{-1} = j_2(\gamma)$$

pour tout $\gamma \in \Gamma_0$. Fixons un élément $Y \notin \mathfrak{so}(m, 1)$ de l'algèbre de Lie du centralisateur de $j_1(\Gamma_0)$ dans $\mathrm{SO}(m, 2)$. La méthode de Johnson et Millson consiste à considérer les déformations de Γ dans $\mathrm{SO}(m, 2)$ données, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par

$$\begin{cases} \varphi_t(\gamma) = \gamma & \text{pour } \gamma \in \pi_1(S), \\ \varphi_t(\nu) = \nu e^{tY}. \end{cases}$$

Comme e^{tY} centralise $j_1(\Gamma_0)$, on a $\varphi_t(\nu)\varphi_t(j_1(\gamma))\varphi_t(\nu^{-1}) = \varphi_t(j_2(\gamma))$ pour tout $\gamma \in \Gamma_0$, donc ceci définit bien une représentation $\varphi_t : \Gamma \rightarrow \mathrm{SO}(m, 2)$. Vérifions que son image est Zariski-dense pour t suffisamment petit.

Lemme 6.6.4. *Pour tout $t \neq 0$ suffisamment petit, le groupe $\varphi_t(\Gamma)$ est Zariski-dense dans $\mathrm{SO}(m, 2)$.*

Démonstration. Notons $\overline{\varphi_t(\Gamma)}$ l'adhérence de Zariski de $\varphi_t(\Gamma)$ dans $\mathrm{SO}(m, 2)$. D'après [JM], lem. 5.9, le groupe $\pi_1(S)$ est Zariski-dense dans $\mathrm{SO}(m, 1)$, donc $\overline{\varphi_t(\Gamma)}$ contient à la fois $\mathrm{SO}(m, 1)$ et νe^{tY} . Comme $\nu \in \mathrm{SO}(m, 1)$, on a $e^{tY} \in \overline{\varphi_t(\Gamma)}$, donc $\overline{\varphi_t(\Gamma)}$ contient $e^{tY}\mathrm{SO}(m, 1)e^{-tY}$. On conclut comme dans le cas séparant. \square

Bibliographie

- [Abe] H. ABELS, *Properly discontinuous groups of affine transformations : a survey*, Geometriae Dedicata 87 (2001), p. 309–333.
- [AMS1] H. ABELS, G. A. MARGULIS, G. A. SOIFER, *Semigroups containing proximal linear maps*, Israel J. Math. 91 (1995), p. 1–30.
- [AMS2] H. ABELS, G. A. MARGULIS, G. A. SOIFER, *Properly discontinuous groups of affine transformations with orthogonal linear part*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 324 (1997), p. 253–258.
- [AMS3] H. ABELS, G. A. MARGULIS, G. A. SOIFER, *The Auslander conjecture for groups leaving a form of signature $(n - 2, 2)$ invariant*, Israel J. Math. 148 (2005), p. 11–21.
- [Alp] R. C. ALPERIN, *An elementary account of Selberg’s lemma*, Enseign. Math. (2) 33 (1987), No. 3–4, p. 269–273.
- [Aus] L. AUSLANDER, *The structure of compact locally affine manifolds*, Topology 3 (1964), p. 131–139.
- [Bas] H. BASS, *Covering theory for graphs of groups*, J. Pure Appl. Algebra 89 (1993), p. 3–47.
- [BaL] H. BASS, A. LUBOTZKY, *Tree lattices*, Progress in Mathematics 176, Birkhäuser, Boston, MA, 2001.
- [Be1] Y. BENOIST, *Actions propres sur les espaces homogènes réductifs*, Ann. Math. 144 (1996), p. 315–347, annoncé dans C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 319 (1994), p. 937–940.
- [Be2] Y. BENOIST, *Propriétés asymptotiques des groupes linéaires*, Geom. Funct. Anal. 7 (1997), p. 1–47.
- [BeL] Y. BENOIST, F. LABOURIE, *Sur les espaces homogènes modèles de variétés compactes*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 76 (1992), p. 99–109.
- [Bie] L. BIEBERBACH, *Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Raume*, Math. Ann. 70 (1911), p. 297–336, et Math. Ann. 72 (1912), p. 400–412.

- [Bo1] A. BOREL, *Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces*, Topology 2 (1963), p. 111–122.
- [Bo2] A. BOREL, *Linear algebraic groups*, deuxième édition, Graduate Texts in Mathematics 126, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [BH] A. BOREL, G. HARDER, *Existence of discrete cocompact subgroups of reductive groups over local fields*, J. Reine Angew. Math. 298 (1978), p. 53–64.
- [BHC] A. BOREL, HARISH-CHANDRA, *Arithmetic subgroups of algebraic groups*, Ann. Math. 75 (1962), p. 485–535.
- [BoL] A. BOREL, A. LICHNEROWICZ, *Espaces riemanniens et hermitiens symétriques*, C. R. Acad. Sci. Paris 234 (1952), p. 2332–2334.
- [BoT] A. BOREL, J. TITS, *Groupes réductifs*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 27 (1965), p. 55–150.
- [Bou] M. BOURDON, *Structure conforme au bord et flot géodésique d'un $CAT(-1)$ -espace*, Enseign. Math. 41 (1995), p. 63–102.
- [BrH] M. R. BRIDSON, A. HAEFLIGER, *Metric spaces of non-positive curvature*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 319, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [BT1] F. BRUHAT, J. TITS, *Groupes réductifs sur un corps local : I. Données radicielles valuées*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 41 (1972), p. 5–251.
- [BT2] F. BRUHAT, J. TITS, *Groupes réductifs sur un corps local : II. Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 60 (1984), p. 5–184.
- [CM] E. CALABI, L. MARKUS, *Relativistic space forms*, Ann. Math. 75 (1962), p. 63–76.
- [Car] Y. CARRIÈRE, *Autour de la conjecture de L. Markus sur les variétés affines*, Invent. Math. 95 (1989), p. 615–628.
- [Che] C. CHEVALLEY, *Théorie des groupes de Lie : II. Groupes algébriques*, Actualités Sci. Ind. 1152, Hermann & Cie, Paris, 1951.
- [CV] M. CULLER, K. VOGTMANN, *Moduli of graphs and automorphisms of free groups*, Invent. Math. 84 (1986), p. 91–119.
- [CR] C. CURTIS, I. REINER, *Representation theory of finite groups and associative algebras*, Pure and Applied Mathematics 11, Interscience Publishers, John Wiley & Sons, New York, London, 1962.

- [Die] R. DIESTEL, *Graph theory*, troisième édition, Graduate Texts in Mathematics 173, Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [FM] S. FRANCAVIGLIA, A. MARTINO, *Metric properties of outer space*, arXiv 0803.0640.
- [Ghy] É. GHYS, *Déformations des structures complexes sur les espaces homogènes de $SL_2(\mathbb{C})$* , J. Reine Angew. Math. 468 (1995), p. 113–138.
- [Gol] W. M. GOLDMAN, *Nonstandard Lorentz space forms*, J. Differ. Geom. 21 (1985), p. 301–308.
- [GK] W. M. GOLDMAN, Y. KAMISHIMA, *The fundamental group of a compact flat Lorentz space form is virtually polycyclic*, J. Differ. Geom. 19 (1983), p. 233–240.
- [GPS] M. GROMOV, I. PIATETSKI-SHAPIRO, *Non-arithmetic groups in Lobachevsky spaces*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 76 (1992), p. 165–246.
- [Gui] O. GUICHARD, *Groupes plongés quasi-isométriquement dans un groupe de Lie*, Math. Ann. 330 (2004), p. 331–351.
- [Hel] S. HELGASON, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, réimpression corrigée de l'original de 1978, Graduate Studies in Mathematics 34, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [JM] D. JOHNSON, J. J. MILLSON, *Deformation spaces associated to compact hyperbolic manifolds*, in *Discrete groups in geometry and analysis*, p. 48–106, Prog. Math. 67, Birkhäuser, Boston, MA, 1987.
- [Kar] F. I. KARPELEVICH, *Surfaces of transitivity of semisimple groups of motions of a symmetric space*, Soviet Math. Dokl. 93 (1953), p. 401–404.
- [Ka1] F. KASSEL, *Proper actions on corank-one reductive homogeneous spaces*, J. Lie Theory 18 (2008), p. 961–978.
- [Ka2] F. KASSEL, *Quotients compacts des groupes ultramétriques de rang un*, arXiv 0904.4657, à paraître aux Annales de l'Institut Fourier.
- [Kir] M. D. KIRZBRAUN, *Über die zusammenziehende und Lipschitzsche Transformationen*, Fundamenta Math. 22 (1934), p. 77–108.
- [Kli] B. KLINGLER, *Complétude des variétés lorentziennes à courbure constante*, Math. Ann. 306 (1996), p. 353–370.
- [Ko1] T. KOBAYASHI, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann. 285 (1989), p. 249–263.

- [Ko2] T. KOBAYASHI, *A necessary condition for the existence of compact Clifford-Klein forms of homogeneous spaces of reductive type*, Duke Math. J. 67 (1992), p. 653–664.
- [Ko3] T. KOBAYASHI, *On discontinuous groups acting on homogeneous spaces with noncompact isotropy subgroups*, J. Geom. Phys. 12 (1993), p. 133–144.
- [Ko4] T. KOBAYASHI, *Criterion for proper actions on homogeneous spaces of reductive groups*, J. Lie Theory 6 (1996), p. 147–163.
- [Ko5] T. KOBAYASHI, *Deformation of compact Clifford-Klein forms of indefinite-Riemannian homogeneous manifolds*, Math. Ann. 310 (1998), p. 394–408.
- [Ko6] T. KOBAYASHI, *On discontinuous group actions on non-Riemannian homogeneous spaces*, Sugaku Expositions 22 (2009), p. 1–19, traduit du japonais par M. Reid.
- [KY] T. KOBAYASHI, T. YOSHINO, *Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces — revisited*, Pure and Applied Mathematics Quaterly 1 (2005), p. 591–653.
- [Kul] R. S. KULKARNI, *Proper actions and pseudo-Riemannian space forms*, Adv. Math. 40 (1981), p. 10–51.
- [KR] R. S. KULKARNI, F. RAYMOND, *3-dimensional Lorentz space-forms and Seifert fiber spaces*, J. Differential Geom. 21 (1985), p. 231–268.
- [LMZ] F. LABOURIE, S. MOZES, R. J. ZIMMER, *On manifolds locally modelled on non-Riemannian homogeneous spaces*, Geom. Funct. Anal. 5 (1995), p. 955–965.
- [LZ] F. LABOURIE, R. J. ZIMMER, *On the non-existence of cocompact lattices for $SL(n)/SL(m)$* , Math. Res. Lett. 2 (1995), p. 75–77.
- [Lan] E. LANDVOGT, *Some functorial properties of the Bruhat-Tits building*, J. Reine Angew. Math. 518 (2000), p. 213–241.
- [LS] U. LANG, V. SCHRÖDER, *Kirzbraun’s Theorem and metric spaces of bounded curvature*, Geom. Funct. Anal. 7 (1997), p. 535–560.
- [Lub] A. LUBOTZKY, *Lattices in rank-one Lie groups over local fields*, Geom. Funct. Anal. 1 (1991), p. 405–432.
- [Ma1] G. A. MARGULIS, *Groupes libres complètement discontinus de transformations affines* (en russe), Dokl. Akad. Nauk SSSR 272 (1983), p. 785–788.

- [Ma2] G. A. MARGULIS, *Complete affine locally flat manifolds with a free fundamental group*, J. Soviet Math. 1934 (1987), p. 129–139, traduit de Zap. Nauch. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov (LOMI) 134 (1984), p. 190–205.
- [Ma3] G. A. MARGULIS, *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) 17, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [Ma4] G. A. MARGULIS, *Existence of compact quotients of homogeneous spaces, measurably proper actions, and decay of matrix coefficients*, Bull. Soc. Math. France 125 (1997), p. 447–456.
- [MR] J. J. MILLSON, M. S. RAGHUNATHAN, *Geometric construction of cohomology for arithmetic groups I*, dans *Geometry and analysis*, p. 103–123, Indian Acad. Sci., Bangalore, 1980.
- [Mil] J. MILNOR, *On fundamental groups of complete affinely flat manifolds*, Adv. Math. 25 (1977), p. 178–187.
- [Mos] G. D. MOSTOW, *Some new decomposition theorems for semi-simple groups*, Mem. Amer. Math. Soc. 14 (1955), p. 31–54.
- [MT] G. D. MOSTOW, T. TAMAGAWA, *On the compactness of arithmetically defined homogeneous spaces*, Ann. Math. 76 (1962), p. 446–463.
- [Neu] J. NEUKIRCH, *Algebraic number theory*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 322, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [Now] W. NOWACKI, *Die euklidischen, dreidimensionalen, geschlossenen und offenen Raumformen*, Commentarii Mathematici Helvetici 7 (1934), p. 81–93.
- [Qui] J.-F. QUINT, *Cônes limites des sous-groupes discrets des groupes réductifs sur un corps local*, Transform. Groups 7 (2002), p. 247–266.
- [Rag] M. S. RAGHUNATHAN, *On the first cohomology of discrete subgroups of semisimple Lie groups*, Amer. J. Math. 87 (1965), p. 103–139.
- [Rou] G. ROUSSEAU, *Euclidean buildings*, dans *Nonpositive curvature geometry, discrete groups and rigidity*, Notes de cours de l'école d'été de 2004 à l'Institut Joseph Fourier de Grenoble, Séminaires et Congrès 18, Société Mathématique de France, Paris, 2008.
- [Sa1] F. SALEIN, *Variétés anti-de Sitter de dimension 3 possédant un champ de Killing non trivial*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 324 (1997), p. 525–530.
- [Sa2] F. SALEIN, *Variétés anti-de Sitter de dimension 3 exotiques*, Ann. Inst. Fourier 50 (2000), p. 257–284.

- [Sel] A. SELBERG, *On discontinuous groups in higher-dimensional symmetric spaces*, dans “Collected papers”, vol. 1, p. 475–492, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [Se1] J.-P. SERRE, *Algèbres de Lie semi-simples complexes*, W. A. Benjamin, New York, 1966.
- [Se2] J.-P. SERRE, *Cohomologie des groupes discrets*, Prospects in mathematics (Proc. Sympos., Princeton Univ., Princeton, NJ, 1970), p. 77–169, Ann. of Math. Studies, vol. 70, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971.
- [Se3] J.-P. SERRE, *Arbres, amalgames, $SL(2)$* , Astérisque 46, Société Mathématique de France, Paris, 1977.
- [Sha] Y. SHALOM, *Rigidity, unitary representations of semisimple groups, and fundamental groups of manifolds with rank one transformation group*, Ann. Math. 152 (2000), p. 113–182.
- [Thu] W. P. THURSTON, *Minimal stretch maps between hyperbolic surfaces* (1986), arXiv 9801039.
- [Ti1] J. TITS, *Sur le groupe des automorphismes d’un arbre*, dans “Essays on topology and related topics, Mémoires dédiés à Georges de Rham”, p. 188–211, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
- [Ti2] J. TITS, *Représentations linéaires irréductibles d’un groupe réductif sur un corps quelconque*, J. Reine Angew. Math. 247 (1971), p. 196–220.
- [Ti3] J. TITS, *Free subgroups in linear groups*, J. Algebra 20 (1972), p. 250–270.
- [Tom] G. TOMANOV, *The virtual solvability of the fundamental group of a generalized Lorentz space form*, J. Differential Geom. 32 (1990), p. 539–547.
- [Val] F. A. VALENTINE, *Contractions in non-Euclidean spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 50 (1944), p. 710–713.
- [Vin] E. B. VINBERG, *Groupes discrets engendrés par des réflexions dans les espaces de Lobachevskiï* (en russe), Mat. Sbornik 72 (114) 1967, p. 471–488.
- [We1] A. WEIL, *Discrete subgroups of Lie groups II*, Ann. Math. 75 (1962), p. 578–602.
- [We2] A. WEIL, *Remarks on the cohomology of groups*, Ann. Math. 80 (1964), p. 149–157.
- [Wol] J. A. WOLF, *The Clifford-Klein space forms of indefinite metric*, Ann. Math. 75 (1962), p. 77–80.

- [Wol] J. A. WOLF, *Spaces of constant curvature*, troisième édition, Publish or Perish, Boston, MA, 1974.
- [Zeg] A. ZEGHIB, *On closed anti-de Sitter spacetimes*, Math. Ann. 310 (1998), p. 695–716.
- [Zim] R. J. ZIMMER, *Discrete groups and non-Riemannian homogeneous spaces*, J. Amer. Math. Soc. 7 (1994), p. 159–168.