Sur le groupe fondamental d'une variété kählérienne

Michel GROMOV

Résumé — Nous montrons que la cohomologie H^1L_2 du groupe fondamental Γ d'une variété kählérienne compacte V est induite par un morphisme dans une surface de Riemann. On en déduit (généralisant [6]) que Γ ne se décompose pas en produit libre non trivial. De plus, si Γ est hyperbolique et V est asphérique, alors $H^iL_2(\Gamma)=0$ pour $i \neq \dim_{\mathbb{C}} V$.

On the fundamental group of a Kähler manifold

Abstract — *We show that the cohomology* H^1L_2 *of the fundamental group* Γ *of a compact Kähler manifold* V *is induced by a morphism to a Riemann surface. It follows (generalizing* [6]) *that* Γ *does not decompose into a non-trivial free product. Besides, if* Γ *is hyperbolic and* V *is aspherical, then* $H^iL_2(\Gamma)=0$ *for* $i \neq \dim_{\mathbb{C}} V$.

1. THÉORIE DE HODGE POUR LES VARIÉTÉS NON COMPACTES. — Soit X une variété riemannienne complète. Notons $H^iL_2(X)$ l'espace hilbertien des i-formes harmoniques de carré intégrable sur X, et $H^iEL_2(X)$ le sous-espace des formes exactes. D'après la théorie de Hodge toute forme harmonique L^2 sur une variété *complète* est fermée. Il en résulte que $H^iL_2(X)=H^iEL_2(X)$ si et seulement si $H^i(X;\mathbb{R})=0$.

1.1 *La condition* Geo $X<\infty$. — Ceci signifie que la courbure sectionnelle est bornée, $-\infty<-\rho\leqq K(X)\leqq\rho<\infty$, et que les boules unitaires de X vérifient $\operatorname{Vol} B(X, 1)\geqq\varepsilon>0$ pour tout $x\in X$. Par exemple, tout revêtement X d'une variété *compacte* V vérifie $\operatorname{Geo} X<\infty$.

1.2. THÉORÈME. — *Soit* X *une variété kählérienne complète et connexe telle que* $\operatorname{Geo} X<\infty$. *Si* $H^1(X;\mathbb{R})=0$ *et* $H^1L_2(X)\neq 0$, *il existe une surface de Riemann* X′ *et une application holomorphe propre* $f: X\to X'$ *qui induit une bijection*

$$f^*:\quad H^1EL_2(X')\to H^1EL_2(X).$$

Démonstration. — D'après la théorie de Hodge il existe une fonction holomorphe non constante g sur X telle que $\int_X \|dg\|^2<\infty$. Comme g est holomorphe, on a $\int_X \|dg\|^2=\int_{\mathbb{C}} \operatorname{Vol} g^{-1}(z)\,dz<\infty$. D'après $\operatorname{Geo} X<\infty$ la finitude de la dernière intégrale implique que les composantes connexes de $g^{-1}(z)\subset X$ soient compactes pour tout $z\in\mathbb{C}$. On sait alors (*cf.* [8]) que X est un espace fibré, $f: X\to X'$, dont les fibres sont les composantes connexes de $g^{-1}(z)$. Il est clair que X′ est une surface de Riemann non singulière et f^* est une bijection.

1.2.A. *Le cas* $H^1(X;\mathbb{R})\neq 0$. — On peut démontrer que le théorème reste vrai si au lieu de $H^1(X;\mathbb{R})=0$ on suppose que le groupe Is X des isométries de X est non compact.

1.3. *La condition* $\omega\in dL^*_\infty$. — Notons $L^*_\infty=\bigoplus_i L^i_\infty(X)$ l'espace des formes différentielles bornées sur X. Alors $\omega\in dL^*_\infty$ signifie que ω est la différentielle extérieure d'une forme bornée sur X.

Note présentée par René THOM.

1.3.A. *Exemples.* — (i) Supposons que X soit *hyperbolique* (*cf.* [5]) et $H_i(X)=H_{i+1}(X)=0$ pour un i fixe. On peut montrer alors que toute forme fermée $\omega \in dL_\infty^{i+1}$ vérifie $\omega \in dL_\infty^*$.

Signalons que toute variété simplement connexe X à courbure strictement négative, $K(X) \leqq -C \leqq 0$, est hyperbolique et $H_i(X)=0$ pour tout $i \geqq 1$.

(ii) Soit ω une 2-forme fermée, bornée et vérifiant $|\omega(\tau)| \leqq -CK(\tau)$ où C est une constante positive et τ tout bi-vecteur unitaire. Si $\pi_1(X)=0$, on a $\omega \in dL_\infty^*$. Notons que si X est un espace symétrique hermitien de type non-compact (*i. e.* $K(X) \leqq 0$), alors la forme de Ricci ω de X vérifie $|\omega(\tau)| \leqq -CK(\tau)$.

1.4. Théorème. — *Soit* X *une variété kählérienne complète de dimension n. Si la k-ième puissance extérieure de la forme kählérienne vérifie* $\omega^k \in dL_\infty^*$, *alors* $H^iL_2(X)=0$ *pour* $i \leqq n-k$ *et pour* $i \geqq n+k$.

Démontration. — D'après le théorème de Lefschetz le produit extérieur $h \to h \wedge \omega^k$ induit une *injection* $H^iL_2(X) \to H^{i+2k}L_2(X)$ pour $i \leqq n-k$ et une *surjection* pour $i \geqq n-k$. D'autre part, si $\omega^k \in dL_\infty^*$, on a $h \wedge \omega^k \in dL_2^*$ pour toute forme fermée $h \in L_2^*$, ensuite la théorie de Hodge implique $h \wedge \omega^k = 0$ d'où l'annulation cherchée.

2. La cohomologie $H^* L_2(\Gamma)$. — Soit Γ un sous-groupe discret du groupe Is X. Alors Γ agit sur les espaces hilbertiens $H^iL_2(X)$ et $H^iEL_2(X)$. Si $\mathrm{Geo}\, X < \infty$ et $\mathrm{Vol}\, X/\Gamma < \infty$, par exemple, si X/Γ est compacte, alors les Γ-modules hilbertiens $H^iL_2(X)$ et $H^iEL_2(X)$ ne dépendent que du type d'homotopie Γ-invariant de X (*cf.* [2] et [3]).

2.1. Si les groupes $\pi_j(X)$ pour $j \leqq i-1$ sont finis, le Γ-module $H^iEL_2(X)$ ne dépend que de Γ lui-même. On note alors $H^iL_2(\Gamma)=H^iEL_2(X)$. Cette définition de $H^iL_2(\Gamma)$ s'applique à tout groupe Γ abstrait pour lequel il existe une variété compacte V telle que $\pi_1(V)=\Gamma$ et $\pi_j(\Gamma)$ est fini pour $j=2, \ldots, i-1$. En effet on prend X le revêtement universel de V. Par exemple, si Γ possède une présentation finie, on peut définir $H^iL_2(\Gamma)$ pour $i=1$ et 2. Le cas général est traité dans [4].

2.2. *Γ-rang.* — La projection orthogonale $L_2^i(X) \to H^iL_2(X)$ est un opérateur intégral à noyau lisse sur $X \times X$, notée K^i. La restriction de K^i sur la diagonale, notée $K^i(X, X)$, est une section Γ-invariante du fibré End $\Lambda^i(X)$ et Trace $K^i(X, X)$ définit une fonction sur $V=X/\Gamma$, notée $K_*^i(v)$. Si $\mathrm{Geo}\, X < \infty$, la fonction K_*^i est bornée sur V et si $\mathrm{Vol}\, V < \infty$, on pose $h^i = h^i L_2(X:\Gamma) = \mathrm{rang}_\Gamma H^iL_2(X) = \int_V K_*^i(v)\, dv$. On définit de la même manière les nombres $h_0^i = \mathrm{rang}_\Gamma H^iEL^2$ et les nombres de Hodge h^{ij} et h_0^{ij} pour le cas kählérien. On sait pour tous les cas que $h = \mathrm{rang}_\Gamma H$ ne dépend que du Γ-module H, de plus $h \geqq 0$ et $h=0 \Leftrightarrow H=0$. On introduit de même le nombre $h^i L_2(\Gamma) = \mathrm{rang}_\Gamma H^iL_2(X)$.

2.3. *Quelques exemples du calcul de* h^i (cf. [4]). — (A) Si Γ est libre à $p>0$ générateurs, alors $h^1=p-1$ et $h^i=0$ pour $i \neq 1$.

(B) Si Γ est à p générateurs et q relations, alors $p-q-1 \leqq h^1 \leqq p$ et $h^2 \leqq q$. De plus si les relations sont *génériques* (*cf.* [5]), alors $h^2-h^1=q-p+1$ et $h^i=0$ pour $i \geqq 3$. Signalons que Γ est *hyperbolique* dans le cas générique (*cf.* [5]).

(B′) Supposons que les relations de Γ ci-dessus sont de la forme $w_i^{d_i}=1$, $d_i \in \mathbb{N}$, $i=1, \ldots, q$. Si l'ordre de w_i dans Γ est égal à d_i pour tout i, alors $h^1 \geqq p-1-\sum_{i=1}^{i=q} d_i^{-1}$.

(Si les mots w_i sont génériques, alors Γ est hyperbolique, $\operatorname{ord} w_i = d_i$ dans Γ et $h^2 - h^1 = 1 - p + \sum_{i=1}^{q} d_i^{-1}$.)

(C) Pour le produit libre $\Gamma = \Gamma_1 * \Gamma_2$ on a $h^i = h_1^i + h_2^i$ pour $i \geqq 2$ et

$$h^1 = h_1^1 + h_2^1 + 1 + (\operatorname{card} \Gamma)^{-1} - (\operatorname{card} \Gamma_1)^{-1} - (\operatorname{card} \Gamma_2)^{-1}.$$

Par exemple, si $\operatorname{card} \Gamma_1 \geqq 2$ et $\operatorname{card} \Gamma_2 \geqq 3$, alors $h^1 \geqq 1/6 > 0$. En fait, si card (bouts Γ) $= \infty$, alors $h^1 > 0$. (*cf.* [5] p. 229).

(C′) Soit Γ le groupe quotient de $\Gamma_1 * \Gamma_2 * \ldots * \Gamma_p$ par q relations. Si le morphisme $\Gamma_k \to \Gamma$ est injectif pour $k = 1, \ldots, p$, alors $h^1 \geqq p - q - 1 - \sum_{k=1}^{k=q} (\operatorname{card} \Gamma_k)^{-1}$.

(Je ne sais pas si la condition d'injectivité est nécessaire.)

(F) Le produit amalgamé de Γ_1 et Γ_2 sur Γ_3 vérifie $h^1 - h^0 \geqq h_1^1 - h_1^0 + h_2^1 - h_2^0 - h_3^1 + h_3^0$, où $h_i^0 = (\operatorname{card} \Gamma_i)^{-1}$.

3. Problème de Serre (*cf.* [6], [7]). — Étant donné un groupe Γ de type fini existe-t-il une variété algébrique lisse (compacte ou ouverte) V telle que $\pi_1(\mathrm{V}) = \Gamma$?

3.1. *Réponse pour* $h^1 > 0$.

Si $h^1 \mathrm{L}^2(\Gamma) > 0$ *et* $\Gamma = \pi_1(\mathrm{V})$, *alors* Γ *est commensurable au groupe fondamental* Γ' *d'une surface de Riemann* V′.

Démonstration. — On peut réduire le problème au cas où V est kählérienne et le revêtement universel X de V vérifie $\operatorname{Geo} \mathrm{X} < \infty$. D'après 1.2 il existe un revêtement fini $\tilde{\mathrm{V}}$ de V, une surface de Riemann V′ et une application holomorphe $\tilde{f} : \tilde{\mathrm{V}} \to \mathrm{V}'$, telle que le morphisme induit $\tilde{f}_* : \tilde{\Gamma} \to \Gamma'$ est de noyau et conoyau finis.

Q.E.D.

3.2. *Remarque.* — Grâce à 1.2.A ce résultat se généralise aux groupes Γ admettant des surjections $\Gamma \to \Gamma_1$ où $h^1 \mathrm{L}_2(\Gamma_1) > 0$.

3.3. *Sur les* h^i *pour* $i \geqq 2$. — Soient V et V_1 des variétés kählériennes compactes et connexes et $\mathrm{V} \to \mathrm{V}_1$ un morphisme holomorphe fini. Supposons que le groupe fondamental Γ_1 de V_1 soit hyperbolique et que le groupe $\pi_2(\mathrm{V}_1)$ soit fini.

3.3.A. Théorème. — (i) *Le revêtement universel* X *de* V *vérifie* $h^i \mathrm{L}_2 = 0$ *pour* $i \neq n = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{V}$, *et les nombres de Hodge* L_2 *de* X *de degré n vérifient*

$$h^{i,\, n-i} \mathrm{L}_2 = \chi_i(\mathrm{V}) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j h^{ij}(\mathrm{V}), \qquad \text{pour} \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

En particulier, $\chi_i \geqq 0$ *si n est pair et* $\chi_i \leqq 0$ *pour n impair.*

(ii) *Si les groupes* $\pi_2(\mathrm{V}), \ldots, \pi_k(\mathrm{V})$ *sont finis, alors* $h^i \mathrm{L}_2 = 0$ *pour* $i \leqq \min(k, n-1)$.

Démonstration. — L'hyperbolicité de Γ_1 équivaut à celle du revêtement universel X_1 de V_1 (*cf.* [5]). D'après 1.3.A la forme kählérienne ω_1 de X_1 vérifie $\omega_1 \in d\mathrm{L}_\infty^*$, et comme $\mathrm{V} \to \mathrm{V}_1$ est un morphisme fini, on a aussi $\omega_1 \in d\mathrm{L}_\infty^*$ sur X. Puis, 1.4 implique l'annulation de $h^i \mathrm{L}_2$ pour $i \neq n$ et d'après [1] on a $h^i \mathrm{L}_2(\mathrm{X}) = \chi_i(\mathrm{V})$. On obtient (ii) en appliquant 2.1.

Note remise le 24 novembre 1988, acceptée le 6 décembre 1988.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] M. F. ATIYAH, Elliptic operators, discrete groups and Von Neumann algebras, *Soc. Math. France, Astérisque*, 32-33, 1976, p. 43-72.

[2] J. CHEEGER et M. GROMOV, On the characteristic numbers of complete manifolds of bounded curvature and finite volume, *Diff. Geom and Complex An.*, I, I. CHAVEL and H. FARKAS ed., Springer, Berlin 1985.

[3] J. CHEEGER et M. GROMOV, Bounds on the Von Neumann dimension of L_2-cohomology and the Gauss-Bonnet theorem for open manifolds, *J.D.G.*, 21, 1985, p. 1-34.

[4] J. CHEEGER et M. GROMOV, L_2-cohomology and group cohomology, *Topology*, 25: 2, 1986, p. 189-215.

[5] M. GROMOV, Hyperbolic groups, in *Essays in Group Theory*, S. M. GERSTEN ed., Springer-Verlag 1987.

[6] F. E. A. JOHNSON et E. G. REES, On the fundamental group of a complex algebraic manifold, *Bull. Lond. Math. Soc.*, 19, 1987, p. 463-466.

[7] J. MORGAN, The algebraic topology of smooth algebraic varieties, *Publ. Math. I.H.E.S.*, 48, 1978, p. 137-204.

[8] K. STEIN, Analytische Zerlegungen komplexer Räume, *Math. Ann.*, 132, 1956, p. 63-93.

I.H.E.S., 91440 *Bures-sur-Yvette*.