M. L. Gromov, Transversal mappings of foliations, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1968, Volume 182, Number 2, 255–258

Доклады Академии наук СССР
1968. Том 182, № 2

УДК 513.836 МАТЕМАТИКА

М. Л. ГРОМОВ

ТРАНСВЕРСАЛЬНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ СЛОЕНИЙ

(Представлено академиком Л. С. Понтрягиным 22 I 1968)

1. Введение. Распределение (см. ([1])) на гладком многообразии M (которое будет в дальнейшем предполагаться связным, без края, но не обязательно компактным), задаваемое подрасслоением ξ касательного расслоения $\tau(M)$, мы будем обозначать через (M, ξ). Размерностью $\dim T$ распределения $T=(M, \xi)$ назовем размерность $\dim \xi$, а коразмерностью $\operatorname{codim} T$ — разность $\dim M - \dim \xi$. Инволютивные распределения (см. ([1])) мы будем называть слоениями. Если заданы два распределения $S=(M,\xi)$, $T=(N,\theta)$ и гладкое отображение $f\colon M\to N$, то через $D_f\colon \xi\to\tau(N)/\theta$ обозначим композицию трех гомоморфизмов: включения $\xi\to\tau(M)$, дифференциала $d_f\colon \tau(M)\to\tau(N)$ и проекции $\tau(N)\to\tau(N)/\theta$. Назовем отображение f трансверсальным относительно распределений S, T, если гомоморфизм D_f инъективен (т. е. его сужение на каждый слой инъективно).

На каждом многообразии M существуют два стандартных распределения $T_0(M)=(M, 0)$, где 0 — нульмерное расслоение, и $T_\tau(M)=(M, \tau)$, где τ есть касательное расслоение $\tau(M)$. Очевидно, что гладкое отображение $f\colon M\to N$ является погружением (иммерсией) тогда и только тогда, когда это отображение трансверсально относительно распределений $T_\tau(M), T_0(N)$.

Если $S=(M, \xi)$ и $T=(N, \theta)$ — распределения, то через $i(S, T)$ обозначим пространство всех тех гладких отображений $M\to N$, которые трансверсальны относительно S, T. Если $K\subset M$ — произвольное подмножество, то через $I_K(\xi, \tau(N)/\theta)$ обозначим пространство всех инъекций сужения ξ_K расслоения ξ на K в расслоение $\tau(N)/\theta$. Соответствие $f\to D_f$ определяет непрерывное отображение $D\colon\ i(S, T)\to I_M(\xi, \tau(N)/\theta)$.

С. Смейлом и М. Хиршем в работах ([6,4]) было показано, что при $\dim M<\dim N$ отображение $D_*\colon\ \pi_0(i(T_\tau(M)),\ T_0(N)))\to\pi_0(I_M(\tau(M), \tau(N)))$ взаимно однозначно и на. Фактически в этих работах доказано, но явно не сформулировано, что при $\dim M<\dim N$ отображение D является слабой гомотопической эквивалентностью. В настоящей работе этот результат переносится на случай более общих распределений.

Теорема 1. *Пусть дано слоение $S=(M, \xi)$ и распределение $T=(N, \theta)$, причем $\dim S\leqslant\operatorname{codim} T$. Тогда отображение $D\colon\ i(S, T)\to I_M(\xi, \tau(N)/\theta)$ является слабой гомотопической эквивалентностью.*

Приводимые ниже теорема 2, следствия А, В, С и теорема 3 непосредственно вытекают из теоремы 1. Если $S=(M, \xi)$ — слоение, то гладкое отображение $f\colon\ M\to N$ назовем S-погружением, если сужение отображения f на слои слоения S суть погружения, или, что равносильно, отображение f трансверсально относительно распределений S, $T_0(N)$.

Теорема 2. *Если $S=(M, \xi)$ — слоение, то для существования S-погружения $f\colon\ M\to N$, гомотопного данному непрерывному отображению $g\colon\ M\to N$, при $\dim\xi<\dim N$ необходимо и достаточно, чтобы существовало такое векторное расслоение α на многообразии M,* что $\alpha\oplus\xi=g^!\,(\tau(N))$.

Следствие А. *Пусть на многообразии M гладко действует без не-*

подвижных точек группа R^1. Тогда существует гладкое отображение $f: M \to R^2$, сужение которого на каждую траекторию есть подгружение.

Следствие В. *Для любого k-мерного слоения S на эвклидовом пространстве R^n существует гладкое S-погружение $f: R^n \to R^{k+1}$.*

Следствие С. *Если на многообразии M существуют q линейно независимых коммутирующих векторных полей, то существует гладкое отображение $f: M \to R^{q+1}$, ранг дифференциала которого в каждой точке не меньше, чем q.*

Пусть $T = (M, \xi)$ — распределение на компактном ориентированном n-мерном многообразии M. Назовем класс гомологий $x \in H_i(M, Z)$ реализуемым трансверсально относительно распределения T, если существует гладкое замкнутое ориентированное i-мерное многообразие X и такое гладкое отображение f: $X \to M$, трансверсальное относительно распределений $T_\tau(X)$, T, что образ фундаментального класса многообразия X переводится отображением f в класс x.

Если α — векторное расслоение над многообразием M, то обозначим через x_α класс когомологий из группы $H^{n-i+\dim\alpha}(M^\alpha, Z)$ (где M^α — пространство Тома расслоения α), полученный из класса x применением двойственности Пуанкаре и изоморфизма Тома.

Теорема 3. *Для того чтобы класс x был реализуем трансверсально относительно распределения T при $n - i > k = \dim \xi$, необходимо и достаточно, чтобы для векторного расслоения α достаточно высокой размерности, такого что $\alpha \oplus \xi = E$ (E — тривиальное расслоение), класс когомологий x^α был реализуем относительно группы $SO(n-k-i)$ (см. ([7])).*

Следствие. *Для любого $x \in H_i(M, Z)$ при $k < n - i$ существует такое натуральное m, что класс mx реализуем трансверсально относительно T.*

Заметим, что результат, аналогичный теореме 3, справедлив для классов гомологий по модулю 2 неориентированных многообразий, а также для классов гомологий с некомпактными носителями в случае открытых многообразий.

План дальнейшего изложения. Теорема 1 является прямым следствием теорем 4 и 6. Доказательство теоремы 5 и вытекающей из нее теоремы 6 опирается на предложения 1 и 2. Кроме теорем 5 и 6, в п. 4 сформулированы некоторые следствия теоремы 6, дополняющие теорему 1. В п. 5 приведены результаты геометрического характера, доказательство которых может быть проведено по той же схеме, что и доказательство теоремы 1.

2. Триангуляция слоений. Для каждой пары целых неотрицательных чисел k, p, где $k \geqslant p$, зафиксируем эвклидово пространство R^k и прямолинейный p-мерный симплекс $s_p \subset R^k$. Прямое произведение $s_p \times s_q \subset R^k \times R^l$ назовем стандартной биклеткой $s_{pq}{}^{kl}$.

Рассмотрим на многообразии M слоение T и положим $k = \dim T$, а $l = \operatorname{codim} T$. Клеточное разбиение $\tilde{M}$ многообразия M^n назовем регулярным относительно слоения T, если для любой замкнутой клетки $\sigma \in \tilde{M}$ найдутся неотрицательные числа p, q и диффеоморфизм f_σ некоторой окрестности $U \subset R^k \times R^l$ стандартной биклетки $s_{pq}{}^{kl} \subset R^k \times R^l$ в многообразие M^n, обладающий двумя свойствами: а) диффеоморфизм f_σ переводит k-мерные слои, на которые естественным образом разбита окрестность $U \subset R^k \times R^l$, в слои слоения T; б) биклетка $s_{pq}{}^{kl} \subset U$ при этом диффеоморфизме отображается на клетку σ. Заметим, что клеточное разбиение, регулярное относительно T, является укрупнением некоторой гладкой триангуляции многообразия M^n. На гладкие слоения может быть перенесена триангуляционная теория Уайтхеда ([8]), в частности, справедлива

Теорема 4. *Для любого слоения T на гладком многообразии M существует клеточное разбиение M, регулярное относительно T.*

3. Гомотопические пучки. С каждым CW-комплексом K ассоциирована категория $\mathcal{K}$ всех его (замкнутых) подкомплексов и их включений друг в друга. Контравариантный функтор из $\mathcal{K}$ в категорию $\mathcal{T}$ топологических пространств и непрерывных отображений назовем топологическим предпучком над K. Поскольку замкнутые подкомплексы комплекса K удовлетворяют аксиомам открытых множеств некоторой топологии и объекты категории $\mathcal{T}$ суть множества, а морфизмы — отображения, то можно (см. ([2])) выделить понятие топологического пучка над K. Предпучок (пучок) назовем гомотопическим предпучком (пучком), если его значения от морфизмов категории $\mathcal{K}$ суть расслоения в смысле Серра. Назовем гомоморфизмом $\Phi_1 \to \Phi_2$ предпучков Φ_1, Φ_2 над комплексом K естественное преобразование функторов $\Phi_1 \to \Phi_2$. Гомоморфизм φ: $\Phi_1 \to \Phi_2$ назовем слабой гомотопической эквивалентностью, если для любого подкомплекса $L \subset K$ непрерывное отображение φ_L: $\Phi_1(L) \to \Phi_2(L)$ есть слабая гомотопическая эквивалентность.

Предложение 1. *Для того чтобы топологический пучок Φ над комплексом K был гомотопическим пучком, необходимо и достаточно, чтобы для каждой замкнутой клетки $\sigma \subset K$ и включения i: $\dot{\sigma} \to \bar{\sigma}$ границы σ непрерывное отображение $\Phi(i)$ было расслоением в смысле Серра.*

Предложение 2. *Для того чтобы гомоморфизм φ: $\Phi_1 \to \Phi_2$ гомотопических пучков Φ_1, Φ_2 над комплексом K был слабой гомотопической эквивалентностью, необходимо и достаточно, чтобы для каждой замкнутой клетки $\bar{\sigma} \subset K$ непрерывное отображение φ_σ: $\Phi_1(\bar{\sigma}) \to \Phi_2(\bar{\sigma})$ было слабой гомотопической эквивалентностью.*

4. Топологические пучки ростков отображений. Пусть $S = (M, \xi)$ — слоение, $T = (N, \theta)$ — распределение, $\tilde{M}$ — разбиение многообразия M, регулярное относительно S, и K — подкомплекс разбиения $\tilde{M}$.

Обозначим через $F_K(S, T)$ топологический пучок над комплексом K, сопоставляющий каждому подкомплексу $L \subset K$ индуктивный предел пространств $i(S_{Uj}, T)$ по всем окрестностям $U_j \subset M$ комплекса $L \subset M$ (S_{Uj} — сужение слоения S на окрестность U_j). Включению $Q \subset L$ пучок F_K сопоставляет отображение, возникающее при индуктивном предельном переходе из отображений ограничения $I(S_U, T) \to I(S_V, T)$ $(U \supset V)$.

Теорема 5. *Если* $\dim S \leqslant \operatorname{codim} T$ *и* $\dim K < \operatorname{codim} T$, *то пучок* $F_K(S, T)$ *является гомотопическим пучком.*

Доказательство теоремы 5 в том частном случае, когда комплекс K есть стандартная биклетка, проводится прямыми геометрическими рассуждениями. Общий случай сводится к этому частному в силу предложения 1.

Обозначим через $\Phi_K(\xi, \tau(N) / \theta)$ топологический пучок, сопоставляющий каждому подкомплексу $L \subset K$ пространство $I_L(\xi, \tau(N) / \theta)$, а включению $Q \subset L$ — ограничение $I_L(\xi, \tau(N) / \theta) \to I_Q(\xi, \tau(N) / \theta)$. Ясно, что пучок $\Phi_K(\xi, \tau(N) / \theta)$ гомотопический. Для всех открытых множеств $U \subset M$ определены непрерывные отображения D: $i(U_S, T) \to I_U(\xi, \tau(N) / \theta)$, с помощью которых строится гомоморфизм D_K: $F_K(S, T) \to \Phi_K(\xi, \tau(N) / \theta)$.

Теорема 6. *Если* $\dim S \leqslant \operatorname{codim} T$ *и* $\dim K < \operatorname{codim} T$, *то* D_K *— слабая гомотопическая эквивалентность.*

Доказательство теоремы 6 заключается в сведении ее посредством теоремы 5 и предложения 2 к частному случаю стандартной биклетки. Доказательство же в этом случае проводится простыми геометрическими рассуждениями.

Непосредственным следствием теоремы 6 является

Теорема 7. *Если* $\dim S < \operatorname{codim} T$, *то непрерывное отображение* f: $M \to N$, *гомотопное отображение* g: $M \to N$, *трансверсальному относительно* S, T, *может быть аппроксимировано отображением* F, *трансверсальным относительно* S, T.

Используя результаты работы ([5]) и теорему 6, получаем:

Теорема 8. *Если M — открытое многообразие, то непрерывное отображение D: $i(T_\tau(M), T) \to I_M(\tau(M), \tau(N) / \theta)$ есть слабая гомотопическая эквивалентность. (Здесь не предполагается, что* $\dim M < \operatorname{codim} T$).

Введенное нами понятие трансверсальности обобщается в случае слоений на непрерывные отображения.

Пусть S, T — слоения на многообразиях M и N. Отображение f: $M \to N$ называется топологически трансверсальным относительно S, T, если для любых двух слоев $s \subset M$ и $t \subset N$ и любых двух точек $\mu \in s$ и $\nu \in t$ найдутся такие их окрестности $U_\mu \subset s$ и $U_\nu \subset t$, что пересечение $f^{-1}(U_\nu) \cap U_\mu$ состоит не более чем из одной точки. Используя аргументацию работы ([3]) и теоремы 6, 7, получаем:

Теорема 9. *Если* $^1/_2 \dim M < \operatorname{codim} T - \dim S$, *то любое непрерывное отображение $f: M \to N$, топологически трансверсальное относительно S, T, может быть аппроксимировано гладким отображением, трансверсальным относительно S, T.*

5. Метрические теоремы. Пусть даны распределения $S = (M, \xi)$, $T = (N, \theta)$ и в многообразии N введена риманова метрика. Обозначим через $i_\varepsilon(S, T) \subset i(S, T)$ подмножество, образованное теми гладкими отображениями $f \in i(S, T)$, которые обладают следующим свойством: если $x_\nu \in \theta$ и $y_\nu \in \operatorname{Im} d_f$ — единичные касательные векторы в точке $\nu \in N$, то $\langle x_\nu, y_\nu \rangle < \varepsilon$.

Теорема 10. *Если S — слоение,* $\dim S < \operatorname{codim} T$ и $0 < \varepsilon < 1$, *то включение $i_\varepsilon(S, T) \subset i(S, T)$ есть слабая гомотопическая эквивалентность.*

Теорема 1 настоящей работы может быть интерпретирована как теорема существования секущей поверхности специального вида в тривиальном косом произведении $M \times N \to M$. Для произвольного гладкого косого произведения $X \to M$, слоения (M, ξ) и распределения (X, θ) можно доказать аналогичную теорему. Сформулируем соответствующий результат в одном частном случае

Теорема 11. *Пусть M — многообразие аффинной связности и N — подмногообразие меньшей размерности. Тогда на многообразии M существует векторное поле X, аффинно невырожденное в каждой точке $\nu \in N$. (Для любого вектора $y_\nu \neq 0$ ковариантная производная $\nabla_{y_\nu}(x)$ отлична от нуля.)*

Заметим, что в случае плоской связности (т. е. связности с тривиальной группой голономий) теорема 11 равносильна теореме Хирша о погружении многообразия в эвклидово пространство.

Выражаю благодарность проф. В. А. Рохлину за интерес к настоящей работе и ценные советы.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
16 I 1968

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Бишоп, Р. Криттенден, Геометрия многообразий, М., 1967. [2] Р. Годеман, Алгебраическая топология и теория пучков, М., 1961. [3] A. Haefliger, M. Hirsch, Ann. Math., 75, № 2, 231 (1962). [4] M. Hirsch, Trans. Am. Math. Soc., 93, 242 (1959). [5] M. Hirsch, Ann. Math., 74, № 3 (1961). [6] S. Smale, Ann. Math., 69, № 2, 327 (1959). [7] Р. Том, Сборн. Расслоенные пространства, М., 1958. [8] S. H. C. Whitehead, Ann. Math., 41, № 4, 809 (1940).