ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

Серия математическая

37 (1973), 329—343

УДК 513.8

М. Л. ГРОМОВ

ВЫПУКЛОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ. I

Предлагается прямой тополого-геометрический метод для построения решений дифференциальных неравенств и уравнений в частных производных.

§ 1. Постановка задачи и формулировка результатов

1.1. Введение.

1.1.1. Задача интегрирования. Пусть $p : X \to V$ — гладкое расслоение, X^r — многообразие r-струй ростков его сечений и $X^r \to V$ — естественное расслоение. *Дифференциальным соотношением* или *дифференциальным условием порядка* r называется множество $\Omega \subset X^r$. *Решением* соотношения Ω называется такое C^r-сечение $V \to X$, образ струи $J^r(f) : V \to X^r$ которого содержится в Ω.

Выделим два случая.

1) Множество Ω открыто. В этом случае его дополнение $\Sigma = X^r \setminus \Omega$ называется *особенностью*, а решения соотношения Ω называются Σ-*неособыми* сечениями.

Представим множество $\Sigma \subset X^r$ совокупностью общих нулей вещественнозначных непрерывных функций $\Phi_1, \ldots, \Phi_s$ на X^r и будем интерпретировать каждую из функций как дифференциальный оператор, относящий сечению $f : V \to X$ функцию $\Phi_i(J^r(f))$ на V, $i = 1, \ldots, s$. При такой интерпретации Σ-неособыми оказываются в точности те сечения f, для которых функции $\Phi_i(J^r(f))$, $i = 1, \ldots, s$, не обращаются одновременно в нуль.

2) Множество Ω замкнуто. В этом случае Ω представляется совокупностью общих нулей функций $\Psi_1, \ldots, \Psi_t$ на X^r, а решения соотношения Ω — это решения f системы

$$\Psi_i(J^r(f)) = 0, \quad i = 1, \ldots, t. \qquad (*)$$

1.1.2. Необходимое условие разрешимости. Тривиальным необходимым условием разрешимости соотношения Ω является наличие сечения $\varphi : V \to \Omega$, т. е. сечения $\varphi : V \to X^r$ с образом в Ω. В случае 2) из 1.1.1 подобное сечение φ — это решение системы $(*)$, трактуемой не как система дифференциальных уравнений, а как алгебраическая система, где неизвестными служат компоненты струи, рассматриваемые как независимые переменные. Иными словами, решая систему $(*)$, мы игнорируем тот факт, что компоненты струи должны быть частными производными некоторого сечения $V \to X$.

Представляется разумным с самого начала исходить из подобного «решения» φ, а затем уже строить настоящее решение соотношения Ω.

e-принцип. Если для любого сечения $\varphi: V \to \Omega$ существует такое решение f соотношения Ω, что струя $J^r(f): V \to \Omega$ соединима с φ гомотопией, составленной из сечений $V \to \Omega$, то скажем, что *для Ω верен e-принцип.*

Во многих случаях удобно описывать решения соотношения Ω без явного указания самого Ω и понятие e-принципа относить не к Ω, а к его решениям.

$w.h.e$-принцип. Скажем, что *для Ω и для решений соотношения Ω верен $w.h.e$-принцип*, если непрерывное отображение $f \to J^r(f)$ пространства решений (снабженного C^r-топологией) в пространство сечений $V \to \Omega$ есть слабая гомотопическая эквивалентность.

Если верен $w.h.e$-принцип, то, очевидно, верен и e-принцип.

1.1.3. Цель статьи; взаимоотношение частей I и II. Могло бы показаться, что для большинства условий Ω неверен e-принцип (и тем более $w.h.e$-принцип), поскольку заключенное в нем необходимое условие разрешимости крайне поверхностно и не отражает главного — дифференциальности соотношения. Цель статьи — показать обратное: $w.h.e.$-принцип нарушается лишь в исключительных случаях. Например, в случае 1) из 1.1.1. *для Σ-неособых сечений верен $w.h.e$-принцип, если особенность Σ задается функциями Φ_i, $i=1, ..., s$, общего положения и $s \geqslant 2$* (см. п. 1.3.4). Аналогичное можно сказать и о случае 2) по крайней мере тогда, когда число функций Ψ_i меньше размерности слоя расслоения $X \to V$, т. е. система **(*)** из **1.1.1** недоопределенная.

Следует, впрочем, иметь в виду, что исключительными являются почти все уравнения математической физики. Лишь в редких случаях для линейных или квазилинейных систем верен $w.h.e$-принцип. Напротив, дифференциальные соотношения, возникающие в геометрии и топологии, как правило, подчиняются $w.h.e$-принципу.

В публикуемую первую часть статьи включены только те формулировки, доказательства которых не отягощены второстепенными деталями, могущими затемнить чрезвычайную простоту используемого метода — метода выпуклого интегрирования. Соотношения порядка выше первого, определенные и переопределенные системы уравнений, а также описание области действия e-принципа и анализ пограничной ситуации — все это оставлено до части II. Поэтому наиболее интересные геометрические приложения, связанные с переопределенными системами, не включены в первую часть, хотя именно для таких систем был впервые обнаружен e-принцип. Речь идет о C^1-феномене Нэша [см. ([6]), ([5]), ([3]), ([2])], который обретает естественное истолкование в рамках выпуклого интегрирования.

1.2. Терминология.

1.2.1. Охват и обильность. Будем говорить, что множество Q, лежащее в аффинном пространстве L, *охватывает* точку $x \in L$, если некоторая ее окрестность содержится в выпуклой оболочке $\operatorname{Conv}(Q)$.

Назовем множество *обильным*, если каждая его линейно связная компонента охватывает все точки в L; пустое множество причислим к обильным.

1.2.2. Направление в аффинном расслоении. *Аффинным* называется расслоение $Z \to K$ с аффинной структурой в слоях Z_k, $k \in K$, непрерывно зависящей от $k \in K$.

Направлением размерности q называется разбиение каждого слоя в объединение попарно параллельных q-мерных подпространств, причем разбиение должно быть непрерывно зависящим от $k \in K$.

Аффинным вложением $\mathbf{R}^q \to Z$ называется взаимно однозначное аффинное отображение в какой-нибудь слой Z_k, $k \in K$. Если в расслоении выделено q-мерное направление, то можно говорить об аффинных вложениях $\mathbf{R}^q \to Z$, *параллельных данному направлению*, т. е. об отображениях с образом из данного направления.

1.2.3. Множество $Q \subset Z$ назовем *обильным над* $K_0 \subset K$ *в выделенном* q*-мерном направлении*, если для любого аффинного вложения $a: \mathbf{R}^q \to Z_k$, $k \subset K_0$, параллельного данному направлению, прообраз $a^{-1}(Q) \subset \mathbf{R}^q$ обилен.

Расслоения струй; главные и координатные направления.

1.2.4. Пусть $p: X \to V$ — гладкое расслоение с n-мерной базой и q-мерным слоем. Через X^1 обозначается многообразие 1-струй ростков сечений, а через $p^1: X^1 \to V$ и $p^0: X^1 \to X$ — естественные расслоения, второе из которых аффинно.

1.2.5. Рассмотрим слой $(p^0)^{-1}(x) \subset X^1$, $x \in X$, и многообразие $V_0 \subset V$ коразмерности 1, проходящее через точку $p(x) \in V$. Многообразие V_0 определяет разбиение слоя $(p^0)^{-1}(x)$ на классы эквивалентности: две струи объявляются эквивалентными, если сужения на V_0 ростков, представляющих струи, имеют одинаковые 1-струи. Такого рода разбиения называются *главными* направлениями (легко видеть, что это действительно q-мерные направления в смысле п. 1.2.2), а афинные вложения $\mathbf{R}^q \to X^1$, параллельные какому-нибудь главному направлению, тоже называются *главными*.

1.2.6. Система координат $u_1, \ldots, u_n$ в окрестности $U \subset V$ определяет n главных направлений в слоях над $p^{-1}(U) \subset X$: направление i-ой координаты задается многообразиями уровней $u_i = \mathrm{const}$. Назовем эти n направлений *координатными*.

1.3. Формулировки для открытого условия $\Omega \subset X^1$.

1.3.1. *Пусть* $p: X \to V$ *— гладкое расслоение и* $\Omega \subset X^1$ *— открытое множество. Если у любой точки* $x \in X$ *найдется такая ее окрестность* $Y \subset X$ *и такие локальные координаты в окрестности образа* $p(Y) \subset V$, *что* Ω *окажется обильным над* Y *в координатных направлениях, то для* Ω *верен* *w.h.e-принцип.*

1.3.2. Следствие. *Если для любого главного вложения* $a: \mathbf{R}^q \to X^1$ *множество* $a^{-1}(\Omega) \subset \mathbf{R}^q$ *обильно, то для открытого условия* Ω *верен* *w.h.e-принцип.*

Σ-неособые сечения.

1.3.3. *Пусть $\Sigma \subset X^1$ — такое замкнутое множество, что для любого главного аффинного вложения $a: \mathbf{R}^q \to X^1$ прообраз $a^{-1}(\Sigma) \subset \mathbf{R}^q$ либо совпадает с $\mathbf{R}^q$, либо нигде не плотен и имеет связное дополнение. Тогда для Σ-неособых сечений $V \to X$ верен w.h.e-принцип.*

Действительно, связное, открытое, всюду плотное множество в $\mathbf{R}^q$ обильно.

1.3.4. Ясно, что для типичной особенности $\Sigma \subset X^1$ с $\operatorname{codim} \Sigma \geqslant 2$ выполнены предпосылки из 1.3.3, что дает утверждение из п. 1.1.3.

Примеры.

1.3.5. Погружения. Пусть V и W — гладкие многообразия размерностей n и q, $X = V \times W \to V$ — тривиальное расслоение $\Sigma \subset X^1$ — томовская особенность Σ^1. В этом случае Σ-неособым сечениям соответствуют погружения $V \to W$; множество $a^{-1}(\Sigma) \subset \mathbf{R}^q$ представляет собой либо все $\mathbf{R}^q$, либо $(n-1)$-мерное подпространство. Так что при $q > n$ применимо 1.3.3 и получается теорема Хирша ([8]):

При $q > n$ для погружений $V \to W$ верен w.h.e-принцип.

k-мерсии. C^1-отображение $V \to W$ называется *k-мерсией*, если его ранг $\geqslant k$. Для k-мерсий соответствующее множество $a^{-1}(\Sigma) \subset \mathbf{R}^q$ либо пусто, либо совпадает с $\mathbf{R}^q$, либо является $(k-1)$-мерным подпространством. Применяя 1.3.3, получаем теорему Фейта ([7]):

При $k < q$ для k-мерсий верен w.h.e-принцип.

Вещественные погружения. Обозначим через $\mathrm{Gr}_n(W)$ тотальное пространство расслоения, которое ассоциировано с касательным расслоением $T(W) \to W$ и имеет слоем грассманово многообразие $\mathrm{Gr}_n(\mathbf{R}^q)$, $n = \dim V \leqslant q = \dim W$. Пусть W снабжено комплексной структурой. Обозначим через $L_n(W) \subset \mathrm{Gr}_n(W)$ многообразие, составленное из чисто вещественных касательных пространств, т. е. тех n-мерных вещественных пространств $A \subset T_w(W)$, $w \in W$, которые не содержат нетривиальных комплексных линейных подпространств. Назовем погружение $V \to W$ *вещественным*, если образ ассоциированного тангенциального отображения $V \to \mathrm{Gr}_n(W)$ содержится в $L_n(W)$.

Для вещественных погружений верен w.h.e-принцип [в ([2]) это доказано при $q > n$].

Действительно, соответствующее $a^{-1}(\Sigma)$ — это либо все $\mathbf{R}^q$, либо $(q/2 + n - 2)$-мерное подпространство, так что применимо 1.3.3.

Следствия.

А. *Для того чтобы погружение $f: V \to W$ было регулярно гомотопно вещественному погружению $g: V \to W$, необходимо и достаточно, чтобы ассоциированное с f отображение $V \to \mathrm{Gr}_n(W)$ было стягиваемо в $L_n(W) \subset \mathrm{Gr}_n(W)$.*

Б. *Если $f: V \to W$ — вложение, то при выполнении необходимого условия из* А *существует вещественное вложение $V \to W$, за исключением, быть может, случая $n = 2$, $q = 4$* *.

---

* Примечание при корректуре. Во второй части статьи это будет доказано и в исключительном случае.

Доказательство. Утверждение А следует из *w.h.e*-принципа для погружений и вещественных погружений. При $q=2n$ отображение g получается (после приведения регулярной гомотопии в общее положение) из f конечным числом перестроек Уитни [см. (9)]. За исключением случая $n=2$, $q=4$ перестройки можно производить в обратном порядке, начиная с g и не нарушая вещественности. Поэтому если f — вложение, то g можно продеформировать в вещественное вложение и утверждение Б доказано.

Вещественное C^1-погружение можно C^1-аппроксимировать вещественно-аналитическими вещественными погружениями, которые, в свою очередь, аналитически продолжаются до голоморфных погружений в W некоторой комплексной оболочки многообразия V. Комбинируя это замечание с А и Б, для $W=\mathbf{C}^n$ получаем:

В. *Стабильно параллелизуемое n-мерное многообразие обладает комплексной оболочкой, которая реализуется в* $\mathbf{C}^n$ *многолистной областью голоморфности.*

Г. *Параллелизуемое многообразие четной размерности n обладает комплексной оболочкой, которая реализуется в* $\mathbf{C}^n$ *однолистной областью голоморфности.*

Д. *Сфера* S^n *обладает комплексной оболочкой, однолистно реализуемой в* $\mathbf{C}^n$, *если и только если* $n=1,3$.

1.3.6. Погружения с малым сферическим образом. С погружением ориентированного многообразия $V\to\mathbf{R}^{n+1}$ связано тангенциальное отображение $V\to S^n\subset\mathbf{R}^{n+1}$. Будем интересоваться погружениями, образ тангенциального отображения которых содержится в данном множестве $\Omega_0\subset S^n$. Обозначим через $\Omega\subset X^1$ (в данном случае $X\to V$ — это тривиальное расслоение $V\times\mathbf{R}^{n+1}\to V$) соответствующее условие и выясним, чем может быть прообраз $a^{-1}(\Omega)\subset\mathbf{R}^q$, $q=n+1$ (ср. с п. 1.3.2). Пересечем Ω_0 с каким-нибудь двумерным подпространством, натянем на пересечение конус с вершиной в нуле, удалим из конуса вершину и результат умножим на $\mathbf{R}^{n-1}$. Получаемые таким образом множества в $\mathbf{R}^{n+1}$ — это и есть прообразы $a^{-1}(\Omega)$. Применяя теперь 1.3.2, получаем:

Пусть $\Omega_0\subset S^n$ — *открытое множество, которое пересекается с каждой большой окружностью по связной дуге длины большей* π. *Тогда для погружений* $V\to\mathbf{R}^{n+1}$ *с тангенциальным образом, лежащим в* Ω_0, *верен w.h.e-принцип. В частности, для существования погружения* $V\to\mathbf{R}^{n+1}$, *тангенциальный образ которого содержится в данной (отличной от* S^n*) окрестности замкнутой полусферы, необходима и достаточна параллелизуемость многообразия V.*

Заметим, что при вложении замкнутого многообразия V в $\mathbf{R}^{n+1}$ тангенциальный образ покрывает всю сферу.

1.3.7. Динамическая система. Рассмотрим многообразие V с необращающимся в нуль векторным полем Z. Дифференцирование по Z сопоставляет каждому гладкому отображению $f: V\to\mathbf{R}^q$ отображение $Zf: V\to\mathbf{R}^q$. Применяя 1.3.2, получаем:

Если $\Omega_0\subset\mathbf{R}^q$ — *открытое обильное* (см. п. 1.2.1) *множество, то для отображений* $f: V\to\mathbf{R}^q$, *у которых* Zf *переводит* V *в* Ω_0, *верен w.h.e-принцип. В частности, если* Ω_0 *обильно и непусто, то существует по крайней мере одно такое* f.

Заметим, что для выпуклого $\Omega_0 \subset \mathbf{R}^q$, не содержащего нуля, подобное f заведомо отсутствует, если V — замкнутое многообразие.

Коммутирующие поля. Обобщая вышеизложенное, рассмотрим на V независимые коммутирующие поля $Z_1, \ldots, Z_s$, $s \leqslant n = \dim V$, и непустые открытые обильные множества $\Omega_1, \ldots, \Omega_s \subset \mathbf{R}^q$.

Существует гладкое отображение $f: V \to \mathbf{R}^q$, *у которого каждое* $Z_i f: V \to \mathbf{R}^q$, $i=1, \ldots, s$, *переводит* V *в* Ω_i.

Для доказательства нужно применить 1.3.1, используя координатные системы, согласованные с полями Z_i.

1.3.8. Бездивергентные поля. Будем сначала строить на V дифференциальные $(n-2)$-формы $\omega_1, \ldots, \omega_s$, $s \leqslant n$, дифференциалы которых в каждой точке независимы. Наборы таких форм интерпретируются сечениями расслоения $X \to V$ со слоем размерности $q = \frac{sn(n-1)}{2}$. Прообразы соответствующей особенности (ср. с пп. 1.3.3, 1.3.5) являются аффинными пространствами в $\mathbf{R}^q$ коразмерности $n-s$ или $n-s+1$, так что *при* $s \leqslant n-2$ *верен* *w.h.e-принцип.*

Фиксируем на V невырождающуюся n-форму, с помощью которой установим соответствие между точными $(n-1)$-формами и бездивергентными полями с нулевыми числами вращения. Перенося таким образом e-принцип с форм на поля (с учетом тривиального дополнительного рассуждения в случае неориентируемого V), получаем:

Если на V существуют s независимых полей с $s \leqslant n-2$, то существуют s бездивергентных линейно независимых векторных полей с нулевыми числами вращения. В частности, на многообразии размерности выше двух с нулевой эйлеровой характеристикой существует бездивергентное не обращающееся в нуль поле с нулевыми числами вращения. (Последнее, очевидно, не существует на замкнутом V с $\dim V \leqslant 2$.)

Заметим, что для открытого V условие $s \leqslant n-2$ можно опустить в силу (1), но неясно, возможно ли это при $n > 2$ в замкнутом случае.

1.4. Дополнительные определения.

1.4.1. Нигде не плоские множества. Множество Q, лежащее в аффинном пространстве, назовем *нигде не плоским*, если его пересечение с любой гиперплоскостью нигде не плотно в Q.

1.4.2. Вспомогательные расслоения. Вернемся к расслоению $X \to V$ из п. 1. 2. 4 и предположим, что V разложено в прямое произведение $V = V_0 \times V_1$, где V_1 — одномерное многообразие. В соответствии с этим расслоение $X^1 \to X$ разлагается в сумму Уитни: $X^1 = X_0^1 \oplus X_1^1$, где $X_0^1 \to X$ и $X_1^1 \to X$ — аффинные расслоения со слоями размерностей $q(n-1)$ и q соответственно.

Обозначим через π_1 проекцию $X^1 \to X_0^1$. Ясно, что $\pi_1: X^1 \to X_0^1$ — аффинное расслоение с q-мерным слоем.

1.5. Формулировки для замкнутого условия $\Omega \subset X^1$.

1.5.1. *w. h. e*-принцип. *Пусть* $\Omega \subset X^1$ — *замкнутое множество, представляющее собой тотальное пространство некоторого топологического подрасслоения расслоения* $\pi_1: X^1 \to X_0^1$. *Если для любого аффинного вложения*

$a: \mathbf{R}^q \to X^1$, *переводящего* $\mathbf{R}^q$ *на один из слоев* $\pi_1^{-1}(x)$, $x \in X_0^1$, *прообраз* $a^{-1}(\Omega) \subset \mathbf{R}^q$ *является нигде не плоским обильным* (см. п. 1. 2. 1.) *окрестностным ретрактом, то для* Ω *верен w. h. е-принцип.*

1.5.2. Локальная задача Коши. Предположим, что $V_1 = \mathbf{R}^1$ и существует C^1-сечение $\gamma: V \to X_0^1$. Фиксируем трубчатую окрестность $K \subset X_0^1$ образа $\gamma(V) \subset X_0^1$ и обозначим через $Z \to K$ сужение на K расслоения $\pi_1: X^1 \to X_0^1$. Предположим, что сужение $\gamma|_{V_0 \times 0}$ является струей некоторого сечения $f_0: V_0 \times 0 \to X$.

Пусть $\Omega \subset Z$ *— замкнутое множество, представляющее собой тотальное пространство некоторого топологического подрасслоения расслоения* $Z \to K$. *Если для любого* $k \in K$ *пересечение* $\Omega \cap Z_k \subset Z_k = \mathbf{R}^q$ *является нигде не плоским окрестностным ретрактом в* $\mathbf{R}^q$, *то для существования* C^1-*сечения* $f: V \to X$ *с* $f|_{V_0 \times 0} = f_0$, *струя* $J^1(f): V \to X^1$ *которого переводит некоторую окрестность* $U \subset V$ *многообразия* $V_0 \times 0 \subset V$ *в множество* $\Omega \subset Z \subset X^1$, *необходимо и достаточно, чтобы существовало сечение* $K \to \Omega$.

Формульные иллюстрации.

1.5.3. Пусть $\Psi_1, \ldots, \Psi_q$ — непрерывные функции параметра $t \in \mathbf{R}^1$, причем $\Psi_1(t) = t$.

Будем говорить, что функции *локально независимы*, если их сужения на любой интервал $(t_0, t_1) \subset \mathbf{R}^1$ линейно независимы. Равносильное условие заключается в том, что множество $Q \subset \mathbf{R}^q$, заданное уравнениями $x_1 - \Psi_\nu(x_\nu) = 0$, $\nu = 2, \ldots, q$, где x_ν, $\nu = 1, \ldots, q$,— координаты в $\mathbf{R}^q$, нигде не плоско.

Заметим, что для вещественно-аналитических функций локальная независимость эквивалентна линейной независимости.

Будем говорить, что функции Ψ_ν *вполне независимы*, если, во-первых, они локально независимы и, во-вторых, для любых констант $C_0, C_1, \ldots, C_q$, где среди C_ν с $\nu > 0$ найдется не равная нулю, функция $C_0 + \sum_{\nu=1}^{V} C_\nu \Psi_\nu$ меняет знак. Пример — функции $t, t^3, \ldots, t^{2q-1}$.

Ясно, что полная независимость равносильна тому, что соответствующее множество $Q \subset \mathbf{R}^q$ нигде не плоско и обильно.

1.5.4. Рассмотрим в пространстве $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}^1$ с координатами $x_1, \ldots, x_{n-1}, t$ систему из $q-1$ уравнений относительно неизвестных функций $f_1, \ldots, f_q$:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = \Psi_\nu\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial t}\right) + \Phi_\nu(\ldots), \quad \nu = 2, \ldots, q, \qquad (**)$$

где Φ_ν — произвольные непрерывные функции аргументов x_j, t, f_i, $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $j = 1, \ldots, n-1$, $i = 1, \ldots, q$.

1.5.5. Глобальная разрешимость. *Если функции* Ψ_ν, $\nu = 1, \ldots, q$, $(\Psi_1(t) = t)$ *вполне независимы, то система* $(**)$ *обладает* C^1-*решением и, более того, ее* C^1-*решения плотны в пространстве всех непрерывных отображений* $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^q$ *с тонкой* C^0-*топологией.*

Для аппроксимации отображения $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^q$ решением нужно выделить малую окрестность $X \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^q$ графика отображения g и к расслоению $X \to \mathbf{R}^n$ применить 1.5.1.

1.5.6. Задача Коши. *Если функции Ψ_ν локально независимы, то в некоторой окрестности пространства $\mathbf{R}^{n-1} \times 0 \subset \mathbf{R}^n$ система* (**) *обладает C^1-решением $f_1, \ldots, f_q$ с $f_i|_{\mathbf{R}^{n-1}\times 0} = 0$, $i = 1, \ldots, q$.*

Доказательство непосредственно следует из 1.5.2.

§ 2. Одномерные соотношения и выпуклые оболочки

2.1. Интегральные выпуклые оболочки в банаховом пространстве.

2.1.1. Специальная параметризация отрезка. С набором $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ неотрицательных чисел p_i с $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ и положительным $\varepsilon < 1$ свяжем непрерывную, монотонно не убывающую, кусочно-линейную функцию $\theta = \theta_\varepsilon^P : [0,1] \to [0,1]$, определенную следующими условиями:

Изломы функции θ сосредоточены в точках $0 < t_1 \leqslant t_1' \leqslant t_2 \leqslant t_2' \leqslant \ldots \ldots \leqslant t_n \leqslant t_n' < 1$ с $t_i' - t_i = (1-\varepsilon) p_i$, $t_1 = t_2 - t_1' = \ldots = t_{i+1} - t_i' = 1 - t_n' = \varepsilon/(n+1)$.

На участке $[t_i, t_i']$ функция θ принимает постоянное значение $i/(n+1)$, а $\theta(0) = 0$, $\theta(1) = 1$.

Пространство B; обозначение «Conn» и $I(\Gamma)$.

2.1.2. Пусть B — банахово пространство с нормой $\| \; \|$.

Для множества Γ путей $[0, 1] \to B$ через $I(\Gamma) \subset B$ обозначается множество значений интегралов

$$\int_0^1 \gamma(t)\, dt \in B, \quad \gamma \in \Gamma.$$

Для топологического пространства Q через $\operatorname{Conn}(Q, b)$, $b \in Q$, обозначается его компонента линейной связности, содержащая точку b.

2.1.3. Рассмотрим множество $Q \subset B$, путь $\gamma_0 : [0, 1] \to Q$ и множество Γ_0 путей $[0, 1] \to Q$, гомотопных (связанно на концах) пути γ_0.

Множество $I(\Gamma_0) \subset B$ обладает следующими свойствами:

а) *множество $I(\Gamma_0)$ выпукло,*

б) *множество $I(\Gamma_0)$ содержится в замыкании выпуклой оболочки компоненты* $\operatorname{Conn}(Q, \gamma_0(0))$,

в) *множество $I(\Gamma_0)$ плотно в выпуклой оболочке компоненты* $\operatorname{Conn}(Q, \gamma_0(0))$,

г) *если $Q \subset B$ открыто, то и $I(\Gamma_0) \subset B$ открыто.*

Доказательство. Свойство а) следует из того, что интеграл произведения двух путей есть выпуклая комбинация интегралов исходных путей, причем заменой параметра можно получить комбинацию с произвольными положительными коэффициентами p и q, $p + q = 1$.

Для доказательства б) нужно аппроксимировать интеграл суммами Римана.

Докажем в), аппроксимируя точку $b=\sum_{i=1}^{n} p_i b_i$, $b_i \in \mathrm{Conn}(Q, \gamma_0(0))$, интегралами. Возьмем какой-нибудь путь $\gamma \in \Gamma_0$ с $\gamma(i/(n+))=b_i$, $i=1, \ldots, n$, положим $\gamma_\varepsilon=\gamma(\theta_\varepsilon^P)$, где θ из 2.1.1, и устремим $\varepsilon \to 0$. Ясно, что

$$\int_0^1 \gamma_\varepsilon(t)\,dt \underset{\varepsilon\to 0}{\rightrightarrows} b.$$

Свойство г) очевидно.

2.1.4. *Если $Q \subset B$ открыто, то множество $I(\Gamma_0)$ совпадает с выпуклой оболочкой компоненты* $\mathrm{Conn}(Q, \gamma_0(0))$.

Для доказательства нужно скомбинировать лемму 2.1.3 с таким очевидным фактом:

2.1.5. *Если два множества в банаховом пространстве открыты, выпуклы и имеют одинаковые замыкания, то они совпадают.*

Множество Ω.

2.1.6. Пусть $\Omega \subset [0, 1] \times B$ — открытое множество. Через $\Omega_t \subset B$, $t \in [0, 1]$, обозначается пересечение $\Omega \cap t \times B$.

2.1.7. ОДНОМЕРНАЯ ЛЁММА. *Пусть $\varphi_0 : [0,1] \to B$ — непрерывное отображение с графиком в Ω, а $f_0 : [0,1] \to B$ — такое непрерывно дифференцируемое отображение, что $\frac{df_0}{dt}(0)=\varphi_0(0)$, $\frac{df_0}{dt}(1)=\varphi_0(1)$ и для любого $t_0 \in [0,1]$ компонента* $\mathrm{Conn}(\Omega_{t_0}, \varphi_0(t_0)) \subset B$ *охватывает* (см. п. 1.2.1) *точку* $\frac{df_0}{dt}(t) \in B$. *Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется непрерывно дифференцируемое отображение $f : [0,1] \to B$ со следующими свойствами:*

а) *на концах отрезка $[0, 1]$ функция f и ее первые производные совпадают с соответствующими значениями функции f_0 и ее производных;*

б) $\|f - f_0\| \leqslant \varepsilon$;

в) *график отображения $\frac{df}{dt} : [0,1] \to B$ содержится в Ω;*

г) *существует такая связанная на концах гомотопия ψ_τ, $\tau \in [0,1]$, отображения φ_0 (т. е. $\psi_{\tau=0}=\varphi_0$), что графики составляющих ее отображений $\psi_\tau : [0,1] \to B$, $\tau \in [0,1]$, содержатся в Ω и $\psi_{\tau=1}=\frac{df}{dt}$.*

Доказательство. Предположим сначала, что $\Omega=[0, 1] \times Q$, где $Q \subset B$ — открытое ограниченное множество. Применяя на каждом участке $[i/(n+1),\ (i+1)/(n+1)]$ лемму 2.1.4, построим такой путь $\varphi_1 : [0, 1] \to Q$, гомотопный φ_0, что $\varphi_1(i/(n+1))=\varphi_0(i/(n+1))$, $i=0, \ldots$ $\ldots, n+1$, а

$$\int_{i/(n+1)}^{(i+1)/(n+1)} \varphi_1(t)\,dt = f_0((i+1)/(n+1)) - f_0(i/(n+1)).$$

Ясно, что функция $f(t)=f_0(0)+\int\limits_0^t \varphi_1(\theta)\,d\theta$ удовлетворяет всем требованиям, за исключением, быть может, условия б), но и этого легко добиться, устремляя $n\to\infty$.

В общем случае для достаточно большого m найдутся такие $Q_0, Q_1, \ldots$ $\ldots, Q_m\subset B$, что множество $\Omega'=\bigcup\limits_{i=1}[(i-1)/m, i/m]\times Q_i\subset[0,1]\times B$, во-первых, содержится в Ω, а во-вторых, для него остаются в силе предпосылки леммы. Применяя уже разобранный случай к каждому из участков $[(i-1)/m, i/m]$, получим искомое.

2.2. Специальная выпуклая оболочка.

2.2.1. Начнем с формулировки, нужной лишь для разъяснения леммы 2.2.3.

Пусть $Q\subset\mathbf{R}^q$ — *открытое множество,* K — *компактное пространство,* F — *множество всех непрерывных отображений* $K\to Q$. *Если* Q *связно, то выпуклая оболочка множества* F *(в пространстве непрерывных отображений* $K\to\mathbf{R}^q$) *совпадает с множеством всех непрерывных отображений пространства* K *в выпуклую оболочку* $\operatorname{Conv}(Q)\mathbf{R}^q$ *множества* Q.

Доказательство. В силу б) из 2.1.3, достаточно для любого $\varphi: K\to\operatorname{Conv}(Q)$ построить семейство $\psi_\varepsilon: K\times[0,1]\to Q$ с

$$\int\limits_0^1 \psi_\varepsilon(k,t)\,dt \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \varphi.$$

Выберем точки $x_1, \ldots, x_n\in Q$, охватывающие (см. п. 1.2.1) в совокупности образ $\varphi(K)\subset\operatorname{Conv}(Q)$, и, используя разбиение единицы, построим неотрицательные функции $p_1, \ldots, p_n$: $K\to[0,1]$, $\sum\limits_{i=1}^n p_i=1$ с $\sum\limits_{i=1}^n p_i(k)\,x_i=\varphi(k)$, $k\in K$. Проведем путь $\gamma:[0,1]\to Q$ с $\gamma(i/(n+1))=x_i$ и положим $\psi_\varepsilon=$ $=\gamma(\theta_\varepsilon^{P(k)}(t))$ с $P(k)=\{p_1(k), \ldots, p_n(k)\}$ и с θ из п. 2.1.1. Ясно (ср. с доказательством пункта в) из 2.1.3.), что семейство искомое.

2.2.2. Перейдем теперь к векторному расслоению $Z\to K$ со слоями $Z_k=\mathbf{R}^q$, $k\in K$, и компактной базой. Пусть $\Omega\subset Z$ — открытое множество, а $\varphi_0: K\to Z$ — сечение с образом в Ω. В каждом слое Z_k натянем на компоненту $\operatorname{Conn}(\Omega_k, \varphi_0(k))\subset Z_k(\Omega_k=\Omega\cap Z_k)$ выпуклую оболочку Ω_k^0 и положим $\Omega^0=\bigcup\limits_{k\in K}\Omega_k^0\subset Z$.

Фиксируем замкнутое множество $K_0\subset K$ и обозначим через Γ_0 множество сечений, которые переводят K в Ω и связанно на K_0 гомотопны (в классе сечений с образами в Ω) сечению φ_0.

2.2.3. ЛЕММА О ВЫПУКЛОЙ ОБОЛОЧКЕ. *Выпуклая оболочка множества* Γ_0 *(в пространстве сечений* $K\to Z$) *совпадает с множеством сечений* $K\to\Omega^0$, *равных на* K_0 *сечению* φ_0.

Доказательство. Так же, как в 2.2.1, начнем с сечений $x_i: K\to\Omega$ связанно гомотопных φ_0, и функций $p_i: K\to[0,1]$ с $\sum\limits_{i=1}^n p_i=1$, $\sum\limits_{i=1}^n p_i x_i=\varphi$, где $\varphi: K \to \Omega_0$ — данное сечение. Затем построим такой путь $\gamma(t)$, $t \in [0,1]$, в пространстве сечений $K \to \Omega$, совпадающих на K_0 с φ_0, что $\gamma(i/(n+1)) = x_i$, и, наконец, ψ_ε определим по формуле $\psi_\varepsilon(k, t) = \gamma(k, \theta_\varepsilon^{P(k)}(t))$. Ясно, что

$$\int_0^1 \psi_\varepsilon(k, t)\, dt \underset{\varepsilon \to 0}{\rightrightarrows} \varphi.$$

Лемма доказана.

§ 3. Устранение особенностей

3.1. Леммы.

3.1.1. Рассмотрим тривиальное расслоение $Y = V \times \mathbf{R}^q \to V$ над компактным многообразием V, разложенным в прямое произведение $V = V_0 \times [0, 1]$. Фиксируем покрытие многообразия конечным числом карт с координатами $u_1, \ldots, u_{n-1}, t$, где u_i — координаты в V_0, а t — параметр из $[0, 1]$.

Для C^1-отображения $f: V \to \mathbf{R}^q$ положим $\|f\|^{\check{n}} = \max\left(|f(v)|, \left|\frac{\partial f}{\partial u_i}(v)\right|\right)$, где max берется по всем выделенным картам, всем $v \in V$ и по $i = 1, \ldots, n-1$, т. е. $\|\ \|^{\check{n}}$ отличается от C^1-нормы игнорированием производной $\frac{\partial f}{\partial t}$.

3.1.2. ОСНОВНАЯ ЛЕММА. *Пусть* $Q \subset Y$ — *открытое множество*, $Q = \bigcup_{v \in V} Q_v$, $Q_v = Q \cap (v \times \mathbf{R}^q) \subset \mathbf{R}^q$ *и* φ_0, $f_0: V \to \mathbf{R}^q$ — *такие гладкие отображения, что график отображения* φ_0 *содержится в* Q, *отображение* $\frac{\partial f_0}{\partial t}$ *совпадает на крае многообразия* V *с* φ_0, *а каждая из компонент* $\operatorname{Conn}(Q_v, \varphi_0(v)) \subset \mathbf{R}^q$ *охватывает* $\frac{\partial f_0}{\partial t}(v) \in \mathbf{R}^q$ (см. п. п. 1.2.1, 2.1.2). *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется* C^1-*отображение* $f: V \to \mathbf{R}^q$ *со следующими свойствами:*

а) *на крае многообразия* V *отображение* f *и его первые частные производные совпадают с соответствующими значениями отображения* f_0 *и его производных,*

б) $\|f - f_0\|^{\check{n}} < \varepsilon$,

в) *график отображения* $\frac{\partial f}{\partial t}$ *содержится в* Q,

г) *существует такая деформация* ψ_τ *отображения* φ_0, *которая неподвижна на крае многообразия* V, *составлена из отображений с графиками в* Q *и* $\psi_{\tau=1} = \frac{\partial f}{\partial t}$.

Доказательство. Не нарушая общности будем считать, что f_0 и φ_0 на крае многообразия V обращаются в нуль. Введем пространство B, составленное из C^1-отображений $V_0 \to \mathbf{R}^q$, которые на крае многообразия V_0 обращаются вместе с производными в нуль. Участвующие в рассмотрении отображения $V \to \mathbf{R}^q$ будем интерпретировать отображениями $[0, 1] \to B$.

Сформируем $\Omega = \bigcup_{t \in [0,1]} \Omega_t \subset [0, 1] \times B$ (ср. с п. 2.1.6), составляя Ω_t из тех отображений $V_0 \to \mathbf{R}^q$ график которых содержится в пересечении

$Q\cap((V_0\times t)\times\mathbf{R}^q)$. В силу леммы 2.2.3 применима лемма 2.1.7, и предложение доказано.

Особенность над кубом.

3.1.3. *Пусть* V — *куб* I^n *с координатами* $u_1, \ldots, u_n$, $X=V\times\mathbf{R}^q\to V$ — *тривиальное расслоение и* $\Omega\subset X^1$ — *открытое множество, обильное в координатных направлениях* (ср. с п. 1.3.1). *Пусть* $f_0: V\to X$, $\varphi_0: V\to\Omega$ — *такие гладкие сечения, что на границе куба выполнено* $J^1(f_0)=\varphi_0$. *Тогда для любого* $\varepsilon>0$ *найдется* C^1-*сечение* $f: V\to X$ *со следующими свойствами*:

а) *на границе куба струя* $J^1(f)$ *совпадает с* φ_0,

б) $|f-f_0|<\varepsilon$,

в) *струя* $J^1(f)$ *переводит* V *в* Ω,

г) *существует такая деформация* ψ_τ, $\tau\in[0,1]$, *составленная из сечений* $V\to\Omega$, *совпадающих на границе куба с* φ_0, *что* $\psi_{\tau=0}=\varphi_0$, $\psi_{\tau=1}=J^1(f)$ *и* $|p^0\circ\psi_\tau-f_0|\leqslant\varepsilon$, $\tau\in[0,1]$.

Доказательство. Сечение f строится в n этапов. На i-м шаге в кубе выделяется i-я координата и V представляется произведением $V_0\times[0,1]$ с координатами $u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n$, $u_i=t$. Расслоение $V\times\mathbf{R}^q\to V$ отождествляется с расслоением, которое составлено из тех слоев расслоения $X^1\to X^1_0$ (см. п. 1.4.2), которые пересекаются с образом $\varphi_0(V)\subset X^1$, а множество $Q\subset V\times\mathbf{R}^q$ составляется из пересечений этих слоев с Ω. После этого множество Q слегка уменьшается, т.е. заменяется относительно компактным, послойно обильным множеством, для которого остаются в силе предпосылки из 3.1.2 и применяется лемма 3.1.2. Таким образом, на первом шаге получаются сечения $f_1: V\to X$ и $\varphi_1: V\to\Omega$, затем f_2, φ_2 и т. д. до f_n, φ_n. Каждое из сечений f_i оказывается близким к f_{i-1} в норме $\|\ \|^{\check{i}}$ (ср. с 3.1.1.), а сечение φ_i получается из φ_{i-1} деформацией, не меняющей соответствующей проекции $\pi_1\circ\varphi_{i-1}$, $(\pi_1: X^1\to X^1_0)$, так что $f=f_n$ — искомое сечение.

3.2. Доказательство теоремы 1.3.1.

3.2.1. В обстановке из 1.3.1 предположим, не нарушая общности, что слои расслоения $X\to V$ не имеют края. X можно покрыть множествами Y_j, $j\in J$, каждое из которых лежит над некоторым кубом $I^n_j\subset V$, расслаивается над этим кубом, и возникающее расслоение тривиальное: $I^n_j\times\mathbf{R}^q\to I^n_j$, а множество $\Omega\subset X^1$ обильно над каждым Y_j в координатных направлениях куба I^n_j.

3.2.2. Теперь вывод 1.3.1 из 3.1.2 очевиден. Можно, например, достаточно мелко протриангулировать многообразие V и действовать стандартной индукцией по остовам, оперируя в каждый момент в пределах одного куба.

Мы поступим несколько иначе, доказав следующий факт:

3.2.3. ТЕОРЕМА УСТРАНИМОСТИ. *В обстановке из* 1.3.1 *особенность* $\Sigma=X^1\setminus\Omega\subset X^1$ *равномерно устранима* [см. ([4]), пп. 2.4, 2.6].

Доказательство. Из леммы 3.1.3 следует равномерная устранимость особенностей $Y_j^1\cap\Sigma$, а в силу 2.6.3 из ([4]) и самой особенности Σ.

3.2.4. Устранимость включает в себя e-принцип. Что касается $w.h.e$-принципа, то он выводится из устранимости вспомогательных особенностей (см. пп. 1.4.3, 1.4.4 из ([4])), для которых, очевидно, выполняются предпосылки из 1.3.1.

Итак, теорема 1.3.1 доказана.

3.2.5. Отметим в заключение, что устранимость дает больше чем e-принцип, в частности, теоремы аппроксимации данного сечения $V \to X$ неособыми и критерии продолжимости Σ-неособого сечения с данного множества из V на большее. Подробности см. в ([4]).

§ 4. Решение дифференциальных уравнений

4.1. Обширные окрестности и метаокрестности.

4.1.1. Рассмотрим множество $Q \subset \mathbf{R}^q$ с отмеченной точкой $x \in Q$ и открытый шар $D_\varepsilon(x)$ радиуса ε с центром в этой точке.

Обозначим через $\mathrm{Conv}_\varepsilon(Q, x)$ внутренность выпуклой оболочки компоненты $\mathrm{Conn}(Q \cap D_\varepsilon(x), x)$.

Будем называть *метаокрестностями* множества Q открытые множества вида $\bigcup\limits_{x \in Q} \mathrm{Conv}_{\varepsilon(x)}(Q, x)$, где $\varepsilon(x)$ — какая-нибудь положительная непрерывная функция на Q.

Очевиден следующий факт.

4.1.2. *Пусть $Q \subset \mathbf{R}^q$ — локально линейно связное множество. Для совпадения замыкания множества Q с пересечением замыканий всех его метаокрестностей необходимо и достаточно, чтобы Q было нигде не плоско* (см. п. 1.4.1).

4.1.3. Фиксируем окрестность $Q_0 \supset Q$, предположим наличие ретракции $Q_0 \to Q$, которую также фиксируем и обозначаем через R.

Окрестность $U \subset Q_0$ точки $x \in Q_0$ назовем *обширной*, если для некоторого ε множество $\mathrm{Conv}_\varepsilon(U \cap Q, R(x))$ содержит x.

Сформулируем еще один очевидный факт.

4.1.4. *Для любой непрерывной положительной функции $\delta(x)$, $x \in Q_0$, найдется такая метаокрестность $Q' \subset Q_0$ множества Q, что каждая точка $x_0 \in Q'$ обладает обширной окрестностью диаметра, меньшего $\delta(x_0)$.*

4.1.5. Обратимся теперь к эвклидову расслоению $\pi: Z \to K$ со слоями $Z_k = \mathbf{R}^q$, $k \in K$.

Назовем открытое множество $U \subset Z$ *послойной метаокрестностью* множества $\Omega \subset Z$, если каждое из пересечений $U \cap Z_k$, $k \in K$, есть метаокрестность множества $\Omega \cap Z_k \subset Z_k = \mathbf{R}^q$.

Множество $\Omega \subset Z$ будем называть *послойно нигде не плоским*, если пересечения $\Omega \cap Z_k$, $k \in K$, нигде не плоские.

Отображение $h: \Omega_0 \to \Omega$, Ω_0, $\Omega \subset Z$, называется *послойным*, если $\pi h(x) = \pi(x)$, $x \in \Omega_0$; соответственно вводятся понятия *послойной ретракции* и *послойного окрестного ретракта*. Отметим, что свойство множества $\Omega \subset Z$ быть послойным окрестностным ретрактом весьма ограничительно. Например, для компакта $\Omega \subset Z$ такого сорта проекция $\pi|_\Omega: \Omega \to K$ оказывается расслоением Серра, хотя и не обязательно локально тривиальным.

4.1.6. Пусть $\Omega \subset Z$ — послойно нигде не плоский послойный окрестностный ретракт. Очевидны два его свойства, первое из которых аналогично 4.1.2:

1) *Замыкание множества* Ω *совпадает с пересечением замыканий всех его послойных метаокрестностей.*

2) *Для любого сечения* $\varphi : K \to \Omega$ *и любой послойной метаокрестности* Ω' *множества* Ω *найдется сколь угодно близкое (в тонком* C^0*-смысле) к* φ *сечение* $K \to \Omega'$.

4.1.7. В обстановке 4.1.6 фиксируем окрестность $\Omega_0 \supset \Omega$ и послойную ретракцию $R : \Omega_0 \to \Omega$.

Рассмотрим множество $V' \subset \Omega_0$, которое пересекается с каждым слоем Z_k, $k \in K$, не более, чем по одной точке, и назовем окрестность $U \supset V'$, $U \subset \Omega_0$ послойно обширной, если таковое свойство (см. 4.1.3) выполнено для каждой точки $v \in V'$ в пересечении со слоем Z_k, проходящим через v.

4.1.8. Обобщая 4.1.4, получаем:

Для любой положительной непрерывной функции δ *на* Ω_0 *найдется такая метаокрестность* $\Omega' \subset \Omega_0$ *множества* Ω, *что всякое* $V' \subset \Omega'$ *обладает обширной метаокрестностью* $U \subset \Omega_0$, *пересечение которой со слоем, проходящим через* $u \in U$, *имеет диаметр меньше, чем* $\delta(u)$.

4.2. Доказательство теорем 1.5.1, 1.5.2.

4.2.1. Вернемся к расслоению $p : X \to V$ с $V = V_0 \times V_1$ из п. 1.4.2. «Послойные» термины предыдущих пп. 4.1.5—4.1.8 применяются отныне к расслоению $\pi_1 : X^1 \to X_0^1$ (см. п. 1.4.2).

4.2.2. Уточнение приближенного решения. *Пусть* $\Omega \subset X^1$ — *послойно нигде не плоский послойный окрестностный ретракт с ретракцией* $R : \Omega_0 \to \Omega$, *а* $f_0 : V \to X$ — *такое* C^1*-сечение, что образ* $V' \subset X^1$ *струи* $J^1(f_0) : V \to X^1$ *содержится в* Ω_0 *и существует послойно обширная окрестность* $U \subset \Omega_0$ *множества* V'. *Тогда для любой послойной метаокрестности* U_1 *множества* Ω *найдется* C^1*-сечение* $f : V \to X$, *струя* $J^1(f) : V \to X^1$ *которого переводит* V *в* $U \cap U_1$.

Доказательство. Предположим сначала, что V_0 компактно, а $V_1 = [0, 1]$. Сформируем расслоение $Y \to V$ из слоев расслоения $X^1 \to X_0^1$, проходящих через V', и множество $Q \subset Y$ из пересечений этих слоев с $U \cap U_1$. Построим сечение $\varphi_0 : V \to Q$, применив сначала к струе $J^1(f_0)$ ретракцию R, а затем использовав свойство 2) из 4.1.6. Сглаживая сечение φ_0 и интерпретируя φ_0 и f_0 как отображения $V \to \mathbf{R}^q$ (что возможно ввиду тривиальности расслоения $Y \to V$), мы добьемся выполнения всех предпосылок леммы 3.1.2, за исключением граничного равенства $\varphi_0 = \frac{\partial f_0}{\partial t}$, которого можно всегда достичь, слегка увеличив многообразие V (и соответственно множество Q) и надлежащим образом продолжив f_0 и φ_0. Итак, в компактном случае требуемое следует из 3.1.2.

В общем случае нужно протриангулировать V_0 и V_1, а затем строить требуемое f последовательным продолжением на остовы произведения триангуляций в V_0 и V_1, используя на каждом шаге лемму 3.1.2.

4.2.3. Переход от приближенного решения к точному. *В обстановке из 4.2.2 существует C^1-сечение $V \to X$, струя $J^1(f): V \to X^1$ которого переводит V в замыкание множества Ω.*

Доказательство. Построим достаточно быстро убывающую последовательность послойных метаокрестностей U_j, $j=1, 2, \ldots$, множества Ω и, применяя 4.2.2, будем строить последовательность сечений $f_j: V \to X$ так, чтобы струя $J^1(f_j)$ переводила V в пересечение множества U_j с малой и убывающей вместе с ростом j послойно обширной окрестностью образа струи $J^1(f_{j-1})$. Малость обширной окрестности достигается малостью U_{j-1} с помощью 4.1.8 и в свою очередь гарантирует существование предела $f = \lim\limits_{j\to\infty} f_j$, понимаемого в C^1-смысле. В силу свойства 1) из 4.1.6, $f: V \to X$ — искомое сечение.

4.2.4. Итак, вопрос о разрешимости замкнутого соотношения сведен к решению открытого соотношения Ω_0. Очевидные дополнительные соображения позволяют распространить подобную редукцию и на $w.h.e$-принцип, так что теорема 1.5.1 выводится из 3.1.2.

Что же касается 1.5.2, то здесь разрешимость вспомогательного открытого соотношения тривиальна, и остается лишь проконтролировать сходимость f_j к f с $f|_{V_0 \times 0} = f_0|_{V_0 \times 0}$, а это не вызывает затруднений.

Теоремы 1.5.1 и 1.5.2 доказаны.

Поступило
20.II.1972

Литература

1 Громов М. Л., Стабильные отображения слоений в многообразия, Изв. АН СССР. Сер. матем., 33 (1969), 707—734.

2 Громов М. Л., Изометрические вложения и погружения, Докл. АН СССР, 192, № 6 (1970), 1206—1209.

3 Громов М. Л., Рохлин В. А., Вложения и погружения в римановой геометрии, Успехи матем. наук, XXV: 5 (155) (1970), 3—62.

4 Громов М. Л., Элиашберг Я. М., Устранение особенностей гладких отображений, Изв. АН СССР. Сер. матем., 35 (1971), 600—627.

5 Кейпер Н., О C^1-изометричных вложениях, Сб. «Математика», 1 : 2 (1957), 17—28.

6 Нэш Дж., C^1-изометричные вложения, Сб. «Математика», 1 : 2 (1957), 3—16.

7 Feit S., k-mersions of manifolds, Acta math., 122 : 3, 4 (1969), 173—196.

8 Hirsch M., Immersions of manifolds, Tranc. Amer. Math. Soc., 93 (1959), 242—276.

9 Whitney H., The self-intersections of a smooth n-manifold in $2n$-space, Ann. Math., 45 : 2 (1944), 220—246.