Séminaire BOURBAKI Octobre 2021
74e année, 2021–2022, no 1181

# GROUPES DE SURFACE DANS LES RÉSEAUX DES GROUPES DE LIE SEMI-SIMPLES
## [d'après J. Kahn, V. Marković, U. Hamenstädt, F. Labourie et S. Mozes]

par **Fanny KASSEL**

**Table des matières**



Un *réseau* d'un groupe de Lie $G$ est un sous-groupe discret $\Gamma$ tel que le quotient $G/\Gamma$ soit de volume fini pour la mesure de Haar ; on dit que $\Gamma$ est cocompact si $G/\Gamma$ est compact.

Tout réseau cocompact sans torsion $\Gamma$ de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ est un groupe *de surface*, c'est-à-dire isomorphe au groupe fondamental d'une surface compacte $S$ de genre au moins deux. En effet, on peut prendre pour $S$ le quotient du plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$ par $\Gamma$.

Le but de cet exposé est de présenter le résultat suivant.

Théorème principal (Kahn–Marković, Hamenstädt, Kahn–Labourie–Mozes)
*Soit $G$ un groupe de Lie simple complexe*[1]*, ou l'un des groupes* $\mathrm{SO}(2p-1,1)$, $\mathrm{SU}(p,q)$ *ou* $\mathrm{Sp}(p,q)$ *pour* $p > q \geq 1$. *Tout réseau cocompact de $G$ contient un sous-groupe de surface.*

Le cas $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ est dû à Kahn et Marković (2012), les cas $G = \mathrm{SO}(2p-1,1)$, $\mathrm{SU}(p,1)$ et $\mathrm{Sp}(p,1)$ à Hamenstädt (2015), et le cas général à Kahn, Labourie et Mozes (arXiv 2018). Récemment, Hamenstädt (2021) a annoncé une nouvelle démonstration du cas général, qui étend les méthodes de son article de 2015.

Dans la partie 1 nous présentons diverses motivations du théorème, puis dans la partie 2 nous en énonçons des versions plus précises, pour une classe plus générale

1. Par exemple $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$ ou $\mathrm{SO}(n,\mathbb{C})$ ; cf. Helgason (2001, Ch. X, § 2) pour une description explicite de tous les groupes de Lie simples classiques.

de groupes de Lie semi-simples $G$. La stratégie de la preuve est expliquée dans la partie 3. Elle comporte trois étapes : géométrique (partie 4), dynamique (partie 5) et combinatoire (partie 6).

**Remerciements**

Je remercie chaleureusement Jonas Beyrer, Pierre-Louis Blayac, Jean-Philippe Burelle, León Carvajales, Balthazar Fléchelles, Olivier Glorieux, Jeremy Kahn, François Labourie, Daniel Monclair, Alan Reid, Ilia Smilga, Katie Vokes, ainsi que Nicolas Bourbaki, pour leur aide dans la préparation de cet exposé. Je suis particulièrement reconnaissante à Jonas Beyrer, Pierre-Louis Blayac, Olivier Glorieux et François Labourie pour de nombreuses discussions autour des articles présentés ici.

## 1. MOTIVATIONS

Soit $G$ un groupe de Lie réel semi-simple linéaire non compact, par exemple $\mathrm{PSL}(n, \mathbb{K})$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

### 1.1. Comprendre les sous-groupes des réseaux

Un point de vue fécond en théorie des groupes est de chercher à comprendre certains groupes en étudiant quels types de sous-groupes ils admettent. Il résulte des travaux de Tits (1972) que tout réseau de $G$ contient un groupe libre non abélien à deux générateurs. On peut voir les groupes de surface comme les groupes de type fini (non résolubles à indice fini près) les plus « simples » après les groupes libres [(2)]. La question suivante est alors naturelle dans le cadre de l'étude des réseaux des groupes de Lie semi-simples.

*Question 1.1.* — Soit $G$ un groupe de Lie réel semi-simple linéaire non compact. Tout réseau de $G$ admet-il des sous-groupes de surface ?

Le théorème principal répond affirmativement à cette question pour les réseaux cocompacts des groupes de Lie simples complexes et des groupes $\mathrm{SO}(2p-1, 1)$, $\mathrm{SU}(p, q)$, $\mathrm{Sp}(p, q)$ pour $p > q \geq 1$.

Lorsque $G$ est de rang réel un (c'est-à-dire localement isomorphe à $\mathrm{SO}(n, 1)$, $\mathrm{SU}(n, 1)$, $\mathrm{Sp}(n, 1)$ ou à la forme réelle de rang un du groupe exceptionnel $F_4$), les réseaux cocompacts de $G$ sont des groupes hyperboliques au sens de Gromov. La question 1.1 pour ces réseaux est alors un cas particulier d'une question de Gromov (cf. Bestvina, 2000, Q. 1.6) : tout groupe hyperbolique à un bout admet-il un sous-groupe de surface ? Voir par exemple Gordon, Long et Reid (2004) pour une réponse affirmative dans le cadre des groupes de Coxeter, et Calegari (2008) pour des conditions homologiques

2. Par exemple en considérant la dimension cohomologique : les groupes sans torsion de dimension cohomologique 1 sont les groupes libres (Stallings, 1968) ; les groupes de surface sont de dimension cohomologique 2.

suffisantes. Notons qu'un groupe hyperbolique ne peut contenir qu'un nombre fini de classes de conjugaison de sous-groupes de surface correspondant à des surfaces de genre donné, comme suggéré par Gromov (1987) et démontré par Delzant (1995) ; voir Thurston (1997) pour les groupes de 3-variétés hyperboliques.

En rang réel supérieur, il est facile de construire, de manière arithmétique, des exemples de réseaux contenant des groupes de surface.

*Exemple 1.2.* — (cf. Benoist, 2009, § 2.1, exemples 5 et 8) Soit $n \geq 3$. L'automorphisme $\sigma$ d'ordre deux de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ définit un plongement $\iota : g \mapsto (g, g^\sigma)$ de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ dans $G := \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, et $\Gamma := \iota(\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}[\sqrt{2}]))$ est un réseau non cocompact de $G$. Il contient $\Lambda := \iota(H \cap \mathrm{SL}(3, \mathbb{Z}[\sqrt{2}]))$, où $H \simeq \mathrm{SO}(2,1)_0 \simeq \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ est la composante neutre du groupe orthogonal associé à la forme quadratique $x^2 + y^2 - \sqrt{2}\, z^2$ sur $\mathbb{R}^3$. Le groupe $\Gamma_0 := H \cap \mathrm{SL}(3, \mathbb{Z}[\sqrt{2}])$ est un réseau cocompact de $H$. Ainsi, $\Lambda = \iota(\Gamma_0)$ est un sous-groupe de surface de $\Gamma$.

Afin d'établir que *tout* réseau contient des groupes de surface, nous verrons que la démonstration du théorème principal repose, non pas sur des considérations arithmétiques, mais sur des arguments géométriques et dynamiques.

### 1.2. Sous-groupes de surface « bien positionnés dans $G$ »

La manière peut-être la plus simple d'obtenir des sous-groupes discrets isomorphes à des groupes de surface dans des groupes de Lie semi-simples $G$ est de considérer des réseaux cocompacts $\Gamma_0$ de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ et de les voir comme des sous-groupes discrets de $G$ via un plongement $\tau$ de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ dans $G$. Autrement dit, on part d'une surface compacte $S$ de genre au moins deux ; on la munit grâce au théorème d'uniformisation d'une structure hyperbolique, ce qui définit une représentation injective de $\pi_1(S)$ dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, d'image un réseau cocompact $\Gamma_0$ de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ ; puis on applique le plongement $\tau$ ou l'un de ses conjugués. Nous appellerons ces sous-groupes *$\tau$-fuchsiens*, par analogie avec la terminologie classique pour $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$.

*Définition 1.3.* — Soient $G$ un groupe de Lie semi-simple et $\tau : \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ un plongement. Un sous-groupe de $G$ est *$\tau$-fuchsien* s'il est l'image d'une *représentation $\tau$-fuchsienne* d'un groupe de surface $\pi_1(S)$, c'est-à-dire d'une représentation de la forme

$$\rho_0 : \pi_1(S) \xhookrightarrow{\varrho} \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \xhookrightarrow{\tau} G \xrightarrow{\mathrm{conj}} G,$$

où $\varrho$ est injective d'image discrète et conj est la conjugaison par un élément de $G$.

Il se peut qu'un réseau $\Gamma$ de $G$ contienne des sous-groupes de surface $\tau$-fuchsiens pour un certain plongement $\tau : \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ : c'est le cas dans l'exemple 1.2 pour $\tau : \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \simeq H \xhookrightarrow{\iota} G$. En général, étant donné un réseau $\Gamma$, on pourrait espérer qu'à défaut de sous-groupes $\tau$-fuchsiens, il contienne au moins des *déformations* de sous-groupes $\tau$-fuchsiens. De telles petites déformations sont encore des groupes de surface par la proposition suivante.

Proposition 1.4. — *Soient $G$ un groupe de Lie semi-simple, $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$ un plongement et $\rho_0 : \pi_1(S) \to G$ une représentation $\tau$-fuchsienne d'un groupe de surface $\pi_1(S)$ (définition 1.3). Il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de $\rho_0$ dans $\mathrm{Hom}(\pi_1(S), G)$ formé entièrement de représentations injectives d'image discrète.*

On note ici $\mathrm{Hom}(\pi_1(S), G)$ l'espace des représentations de $\pi_1(S)$ dans $G$, muni de sa topologie naturelle (topologie de la convergence sur une partie génératrice finie de $\pi_1(S)$). La proposition 1.4 est initialement due à Guichard (2004) ; c'est désormais une conséquence facile de la théorie des représentations anosoviennes, cf. paragraphe 1.4.

Pour un ouvert $\mathcal{U}$ comme ci-dessus, l'image de toute représentation $\rho \in \mathcal{U}$ est un sous-groupe de surface discret de $G$ ; par analogie avec le cas classique $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, on dira qu'il est *$\tau$-quasi-fuchsien* dès que $\mathcal{U}$ est connexe.

*Définition 1.5.* — Soient $G$ un groupe de Lie semi-simple et $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$ un plongement. Un sous-groupe de $G$ est *$\tau$-quasi-fuchsien* s'il est de la forme $\rho(\pi_1(S))$ pour un groupe de surface $\pi_1(S)$ et une représentation $\rho : \pi_1(S) \to G$ appartenant à un ouvert connexe $\mathcal{U}$ de $\mathrm{Hom}(\pi_1(S), G)$ comme dans la proposition 1.4.

**1.2.1.** *Ouverts de déformations de groupes $\tau$-fuchsiens.* — Des ouverts $\mathcal{U}$ comme dans la proposition 1.4 ont été beaucoup étudiés dans plusieurs cas.

*Exemple 1.6.* — Soient $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ et $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$ le plongement standard. Toute représentation $\tau$-fuchsienne $\rho_0 : \pi_1(S) \to G$ d'un groupe de surface $\pi_1(S)$ est contenue dans l'ouvert $\mathcal{U}$ des *représentations quasi-fuchsiennes* de $\pi_1(S)$, c'est-à-dire des représentations injectives de $\pi_1(S)$ dans $G$ dont l'image est un sous-groupe discret dans lequel tous les éléments non triviaux sont hyperboliques (c'est-à-dire diagonalisables sur $\mathbb{C}$ et dont les valeurs propres sont de modules différents de 1). Cet ouvert $\mathcal{U}$ joue un rôle important dans la théorie des groupes kleiniens. Il est connexe (Bers a montré que, modulo conjugaison par $G$ au but, il est naturellement paramétré par le produit de deux copies de l'espace de Teichmüller de $S$) et dense dans l'ensemble des représentations injectives d'image discrète de $\pi_1(S)$ dans $G$.

*Exemple 1.7.* — Soient $G = \mathrm{PSL}(n,\mathbb{R})$ et $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$ le plongement irréductible (voir l'exemple 2.1 ci-dessous). D'après Choi et Goldman (pour $n = 3$), Labourie ($n$ quelconque), Fock et Goncharov ($n$ quelconque), pour toute représentation $\tau$-fuchsienne $\rho_0 : \pi_1(S) \to G$, la composante connexe de $\rho_0$ dans $\mathrm{Hom}(\pi_1(S), G)$ est entièrement formée de représentations injectives et discrètes. D'après Hitchin, cette composante connexe est, modulo conjugaison par $G$ au but, homéomorphe à une boule de dimension $(n^2-1)(2\mathsf{g}-2)$, où $\mathsf{g} \geq 2$ est le genre de la surface $S$. Désormais appelée *composante de Hitchin*, elle joue un rôle important en *théorie de Teichmüller–Thurston de rang supérieur* (cf. Pozzetti, 2019).

Il est remarquable qu'il existe ainsi des sous-groupes discrets de $G$ (sous-groupes de surface $\tau$-fuchsiens) avec de gros espaces de déformations continues. Par contraste, les réseaux de $G$ ont souvent de fortes propriétés de rigidité, qui ont donné lieu à des travaux célèbres. Par exemple, pour $G$ non localement isomorphe à $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ (resp. non localement isomorphe à $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ ni à $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$) et sans facteur compact, les réseaux cocompacts (resp. non cocompacts) irréductibles de $G$ sont localement rigides, d'après Selberg, Calabi, Weil, Garland et Raghunathan. Pour $G$ sans facteur localement isomorphe à $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ et sans facteur compact, la rigidité de Mostow implique que toute représentation injective et discrète d'un réseau irréductible de $G$ à valeurs dans $G$ est la restriction d'un automorphisme de $G$. Pour $G$ de rang réel supérieur et sans facteur compact, Margulis a montré que les réseaux irréductibles de $G$ ont de surcroît une propriété plus forte de super-rigidité, qui implique que ce sont des groupes arithmétiques. Voir Pansu (1995) pour plus de détails.

**1.2.2.** *Retour aux sous-groupes des réseaux.* — Voici une version plus précise de la question 1.1.

*Question 1.8.* — Soient $G$ un groupe de Lie réel semi-simple et $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$ un plongement. Tout réseau de $G$ admet-il des sous-groupes de surface $\tau$-quasi-fuchsiens (définition 1.5) ?

Dans une série de papiers, Long, Reid et Thistlethwaite (2011), Long et Reid (2013, 2016), Long et Thistlethwaite (2018, 2020) montrent que, pour $G = \mathrm{PSL}(n,\mathbb{R})$ et $\tau$ le plongement irréductible, c'est le cas de certains réseaux de $G$, à savoir tous les réseaux non cocompacts pour $n = 3$, une famille infinie de réseaux cocompacts pour $n = 3$, et le réseau non cocompact $\mathrm{PSL}(n,\mathbb{Z})$ pour $n = 4$ et $n \geq 5$ impair. Pour cela, ils considèrent des groupes discrets $\Delta$ d'isométries de $\mathbb{H}^2$ engendrés par les réflexions orthogonales dans les côtés de certains triangles de $\mathbb{H}^2$ ; ces groupes admettent des sous-groupes d'indice fini sans torsion, qui sont alors des groupes de surface. L'analogue pour $\Delta$ de la composante de Hitchin de l'exemple 1.7 (cf. Alessandrini, Lee et Schaffhauser, 2022) est une composante connexe de $\mathrm{Hom}(\Delta, \mathrm{PGL}(n,\mathbb{R}))$ formée entièrement de représentations injectives et discrètes, dont les auteurs montrent que certaines prennent leurs valeurs dans des sous-groupes arithmétiques de $\mathrm{PGL}(n,\mathbb{R})$. Ceci fournit, pour certains réseaux donnés de $G$, une infinité de classes de conjugaison de sous-groupes de surface correspondant à des surfaces de même genre, par contraste avec la situation de rang un mentionnée au paragraphe 1.1.

En allant encore plus loin, on peut poser la question suivante.

*Question 1.9.* — Soient $G$ un groupe de Lie réel semi-simple et $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$ un plongement. Tout réseau de $G$ admet-il des sous-groupes de surface $\tau$-quasi-fuchsiens qui soient « arbitrairement proches » de groupes $\tau$-fuchsiens, dans un sens à spécifier ?

Les théorèmes 2.4 et 2.17 ci-dessous suggèrent une réponse affirmative à cette question dans le cas des réseaux cocompacts, pour certains couples $(G,\tau)$ qui couvrent tous les groupes $G$ du théorème principal.

Les constructions de Long–Reid–Thistlethwaite, Hamenstädt et Kahn–Labourie–Mozes permettent, pour nombre de réseaux arithmétiques de $G$, d'obtenir des sous-groupes de surface qui sont Zariski-denses dans $G$ : ce sont alors des sous-groupes *fins* (*thin* en anglais) de $G$, à savoir des sous-groupes d'indice infini de groupes arithmétiques qui sont encore Zariski-denses dans $G$. Voir Kontorovich, Long, Lubotzky et Reid (2019) pour plus de détails sur les groupes fins et leur importance.

## 1.3. Motivations spécifiques en basse dimension

Les questions 1.1, 1.8 et 1.9 ont donné lieu à une riche littérature pour $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ et $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, motivée par les considérations géométriques suivantes.

**1.3.1.** *Variétés hyperboliques compactes de dimension trois.* — Soient $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ et $\tau : \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ le plongement standard. Tout sous-groupe discret sans torsion $\Gamma$ de $G$ définit une variété hyperbolique de dimension trois, à savoir le quotient de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3$ par $\Gamma$. La question 1.1 pour les réseaux cocompacts de $G$ appartient à une série de grandes conjectures de Thurston sur les variétés hyperboliques compactes de dimension trois (cf. Bergeron, 2013, 2014). Une réponse affirmative à cette question a été donnée par Lackenby (2010) dans le cas des réseaux arithmétiques de $G$, puis par Kahn et Marković (2012) en général. Plus précisément, Kahn et Marković ont montré que pour tout réseau cocompact de $G$, la variété hyperbolique correspondante contient des surfaces immergées $\pi_1$-*injectives* (c'est-à-dire telles que l'inclusion induise une injection au niveau des groupes fondamentaux) ; les sous-groupes de surface correspondants peuvent être pris « arbitrairement proches » de groupes fuchsiens, dans un sens quantitatif précis, répondant affirmativement aux questions 1.8 et 1.9. Agol (2013) a ensuite utilisé ce résultat et les travaux de Wise et ses collaborateurs (cf. Wise, 2021) pour démontrer la *conjecture de Haken virtuelle*, qui affirme que toute variété hyperbolique compacte orientable de dimension trois possède un revêtement fini qui est de Haken, c'est-à-dire qui contient une surface *plongée* $\pi_1$-injective. Grâce aux travaux de Perelman, ceci résout une conjecture de Waldhausen (1968) affirmant que toute variété compacte, connexe, orientable, irréductible de dimension trois possède un revêtement fini qui est de Haken.

**1.3.2.** *Conjecture d'Ehrenpreis.* — La question 1.9 dans le cas de $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ et du plongement diagonal $\tau : \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$, pour les réseaux cocompacts de $G$ de la forme $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ où $\Gamma_i \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, est motivée par une célèbre conjecture d'Ehrenpreis (1970) : pour tout réel $k > 1$ et toute paire de surfaces de Riemann compactes de genre au moins deux, on peut trouver des revêtements finis des deux surfaces qui sont $k$-quasi-conformes. Kahn et Marković (2015) ont démontré cette conjecture en construisant, pour tout réseau cocompact $\Gamma_i$ de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, des sous-groupes d'indice fini « arbitrairement proches » de réseaux d'une forme particulière (dits *R-parfaits*), cf. paragraphe 3.2.

**1.3.3.** *Variétés hyperboliques de volume fini de dimension trois.* — Revenons à $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ et au plongement standard $\tau$, et considérons à présent des réseaux *non cocompacts* $\Gamma$ de $G$. Cooper, Long et Reid (1997) ont répondu affirmativement à la question 1.1 dans ce cas en montrant que la variété hyperbolique de volume fini $M = \Gamma\backslash\mathbb{H}^3$ contient une surface compacte immergée $\pi_1$-injective essentielle de genre au moins deux, qui de plus se relève en une surface *plongée* non séparante dans un revêtement fini de $M$. Les sous-groupes de surface de $\Gamma$ ainsi obtenus contiennent des éléments paraboliques (c'est-à-dire non diagonalisable sur $\mathbb{C}$), dits accidentels. D'autres sous-groupes de surface, quasi-fuchsiens au sens de l'exemple 1.6, ont ensuite été construits par Masters et Zhang (2008, 2009) et Baker et Cooper (2015).

Rappelons que l'ensemble limite d'un sous-groupe discret $\Lambda$ de $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ est l'ensemble des points d'accumulation, dans le bord à l'infini $\partial\mathbb{H}^3 \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ de $\mathbb{H}^3$, des $\Lambda$-orbites de $\mathbb{H}^3$. Lorsque $\Lambda$ est fuchsien (contenu dans un conjugué de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$), son ensemble limite est un cercle (bord à l'infini d'une copie de $\mathbb{H}^2$ dans $\mathbb{H}^3$). Lorsque $\Lambda$ est quasi-fuchsien, son ensemble limite est un *quasi-cercle* (c'est-à-dire l'image d'un cercle par une application quasi-conforme), dont la géométrie permet de mesurer combien $\Lambda$ est proche d'être fuchsien. Dans ce cas l'enveloppe convexe dans $\mathbb{H}^3$ de l'ensemble limite de $\Lambda$ est un convexe fermé de $\mathbb{H}^3$ sur lequel $\Lambda$ agit avec quotient compact : on dit que $\Lambda$ est *convexe cocompact* dans $\mathbb{H}^3$.

En s'appuyant sur les travaux de Kahn et Marković (2012), Cooper et Futer (2019) ont récemment répondu affirmativement à la question 1.9 en montrant que pour tout réseau non cocompact $\Gamma$ de $G$, les sous-groupes de surface quasi-fuchsiens de $\Gamma$ vérifient la propriété d'« ubiquité » suivante : pour toute paire de cercles disjoints dans $\partial\mathbb{H}^3$, on peut trouver un sous-groupe de surface quasi-fuchsien de $\Gamma$ dont l'ensemble limite est contenu dans la région de $\partial\mathbb{H}^3$ bordée par les deux cercles. Kahn et Wright (2021) ont obtenu une version plus forte de ce résultat : pour tout $k > 1$ on peut choisir les sous-groupes de surface $\Lambda$ de telle sorte que leur action sur $\partial\mathbb{H}^3$ soit conjuguée de manière $k$-quasi-conforme à l'action d'un groupe fuchsien. Ces résultats répondent à une question d'Agol (Delp, Hoffoss et Manning, 2015, Q. 3.5). Ils ont récemment été utilisés par Cooper et Futer (2019) et Groves et Manning (2021) pour donner de nouvelles démonstrations de résultats de Wise (2021) affirmant que $\Gamma$ agit librement et cocompactement sur un complexe cubique CAT(0) et que le quotient de ce complexe par un certain sous-groupe d'indice fini de $\Gamma$ est *spécial*.

**1.3.4.** *Groupe modulaire.* — Rappelons que le groupe modulaire $\mathrm{Mod}(S)$ d'une surface compacte $S$ de genre $\mathsf{g} \geq 2$ est le groupe des classes d'isotopie de difféomorphismes de $S$ ; il s'identifie au groupe des automorphismes extérieurs de $\pi_1(S)$ par un résultat classique de Dehn, Nielsen et Baer. Il agit proprement par isométries sur un complexe simplicial hyperbolique au sens de Gromov (bien que localement infini), le *complexe des courbes* $C(S)$ de $S$, et Ivanov a montré qu'en genre $\mathsf{g} > 2$ il s'identifie au groupe tout entier des isométries simpliciales de $C(S)$. Comme au paragraphe 1.1, on cherche à comprendre $\mathrm{Mod}(S)$ en étudiant quels types de sous-groupes il admet.

Un point de vue fécond est d'étudier $\mathrm{Mod}(S)$ via son action sur $C(S)$ par analogie avec les réseaux non cocompacts de $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ agissant sur $\mathbb{H}^3$, cf. Reid (2006). Il est facile de construire des sous-groupes de $\mathrm{Mod}(S)$ qui sont des groupes libres non abéliens, en faisant « jouer au ping pong » des éléments, dits *pseudo-Anosov*, qui admettent une dynamique analogue à celle des éléments hyperboliques de $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. Se pose alors la question de l'existence de sous-groupes de $\mathrm{Mod}(S)$ qui soient isomorphes à des groupes de surface. Cette question a été résolue affirmativement par González-Diez et Harvey (1999) pour $\mathsf{g} \geq 4$ et par Leininger et Reid (2006) pour $\mathsf{g} \geq 2$. Comme pour $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ (cf. paragraphe 1.3.3), il existe une notion de sous-groupe *convexe cocompact* de $\mathrm{Mod}(S)$, dont tous les éléments d'ordre infini sont pseudo-Anosov : cf. Farb et Mosher (2002), Hamenstädt (2005) et Kent IV et Leininger (2008). La question de trouver des sous-groupes de surface de $\mathrm{Mod}(S)$ qui soient convexes cocompacts reste ouverte à ce jour. Elle constitue l'une des motivations du travail récent de Kahn et Wright (2021) sur les réseaux non cocompacts de $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$.

### 1.4. Lien avec les représentations anosoviennes

Soient $G$ un groupe de Lie réel semi-simple linéaire et $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$ un plongement. Les représentations $\tau$-fuchsiennes $\rho_0 : \pi_1(S) \to G$ de la définition 1.3 sont des exemples de *représentations anosoviennes* de $\pi_1(S)$ dans $G$. Ces dernières, introduites par Labourie (2006), sont des représentations injectives et discrètes avec de fortes propriétés dynamiques. Elles ont été beaucoup étudiées ces dernières années et jouent un rôle important en théorie de Teichmüller–Thurston de rang supérieur (cf. Pozzetti, 2019) et dans des développements récents sur les sous-groupes discrets des groupes de Lie.

Leur définition dépend du choix [3], à conjugaison près, d'un sous-groupe parabolique de $G$, c'est-à-dire (disons si $G$ est algébrique) d'un sous-groupe algébrique $P$ de $G$ tel que l'espace homogène $G/P$ soit compact. On peut penser à $G/P$ comme à un « bord » de $G$ ou de son espace riemannien symétrique $G/K$, où $K$ est un sous-groupe compact maximal de $G$. Pour simplifier, on supposera $P$ symétrique (c'est-à-dire conjugué à ses opposés), une condition technique qui est satisfaite dans l'exemple important suivant.

*Exemple 1.10.* — Soit $G = \mathrm{PSL}(n,\mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Le groupe des matrices triangulaires supérieures est un sous-groupe parabolique $P$ de $G$. L'espace homogène compact $G/P$ correspondant est l'espace des drapeaux complets $(V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1})$ de $\mathbb{K}^n$. Pour $n = 2$, l'espace $G/P$ est la droite projective $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ ; il s'identifie au bord à l'infini de l'espace riemannien symétrique $G/K$ de $G$, qui est le plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et l'espace hyperbolique de dimension trois $\mathbb{H}^3$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

3. Il n'y a qu'un nombre fini de tels choix possibles, à conjugaison près.

Les représentations $P$-anosoviennes sont définies par l'existence de bonnes « applications de bord », au sens suivant. (Rappelons que l'holonomie de toute structure hyperbolique sur une surface $S$ définit une action du groupe fondamental $\pi_1(S)$ sur le bord à l'infini $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ du plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$.)

*Définition 1.11.* — Soient $\pi_1(S)$ un groupe de surface et $\rho : \pi_1(S) \to G$ une représentation. Une application $\xi : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to G/P$ est une *application de bord* pour $\rho$ si elle est équivariante relativement à l'action de $\pi_1(S)$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ donnée par une certaine structure hyperbolique sur $S$ et l'action de $\pi_1(S)$ sur $G/P$ via $\rho$ : pour tous $\gamma \in \pi_1(S)$ et $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ on a $\xi(\gamma \cdot x) = \rho(\gamma) \cdot \xi(x)$.

Par définition, une représentation $\rho : \pi_1(S) \to G$ est *$P$-anosovienne* si elle admet une application de bord continue $\xi : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to G/P$ qui :

— est injective et même *transverse* : toute paire de points distincts de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est envoyée sur une paire de points de $G/P$ en position générique ;

— préserve la dynamique : l'image par $\xi$ du point fixe attractif dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ d'un élément $\gamma \in \pi_1(S)$ est un point fixe attractif dans $G/P$ de $\rho(\gamma)$ ;

— satisfait une condition de contraction uniforme pour le relevé, à un certain fibré défini par $\rho$, du flot géodésique du fibré unitaire tangent de $S$.

Cette condition de contraction est liée à la condition définissant les *flots d'Anosov* en dynamique, d'où la terminologie. Elle implique que les représentations $P$-anosoviennes forment un ouvert de $\mathrm{Hom}(\pi_1(S), G)$. Nous n'énoncerons pas cette condition ici, mais renvoyons à Kassel (2019, § 4) pour plus de détails, et pour diverses caractérisations. La notion de représentation anosovienne se généralise à tous les groupes de type fini qui sont hyperboliques au sens de Gromov, cf. Guichard et Wienhard (2012).

Il est facile de voir qu'une représentation anosovienne $\rho : \pi_1(S) \to G$ est toujours injective. En effet, si l'image par $\rho$ d'un élément $\gamma \in \pi_1(S)$ est triviale dans $G$, alors $\rho(\gamma)$ agit trivialement sur $\xi(\mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$ ; comme l'application $\rho$-équivariante $\xi$ est injective, $\gamma$ agit trivialement sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, ce qui implique que $\gamma$ est trivial dans $\pi_1(S)$. Un raffinement de ce raisonnement (basé sur le fait que l'action de $\pi_1(S)$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est une action *de convergence*) montre que l'image d'une représentation anosovienne est un sous-groupe *discret* de $G$, dit *anosovien*.

Les sous-groupes anosoviens sont des sous-groupes discrets remarquables de $G$. Lorsque $G$ est de rang réel un (par exemple $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{K})$), ce sont exactement les sous-groupes convexes cocompacts de $G$ au sens du paragraphe 1.3.3, c'est-à-dire les sous-groupes discrets agissant avec quotient compact sur un fermé convexe non vide de l'espace riemannien symétrique $G/K$. Lorsque $G$ est de rang réel supérieur (par exemple $\mathrm{PSL}(n, \mathbb{K})$ pour $n \geq 3$), les sous-groupes anosoviens sont des sous-groupes discrets de covolume infini avec de bonnes propriétés géométriques, topologiques et dynamiques, qui en font une bonne généralisation des sous-groupes convexes cocompacts (cf. Guichard, 2019).

La question suivante précise la question 1.1.

*Question 1.12.* — Soit $G$ un groupe de Lie réel semi-simple linéaire non compact. Tout réseau de $G$ admet-il des sous-groupes de surface qui soient anosoviens ?

Notons qu'une réponse affirmative à la question 1.9 implique une réponse affirmative à la question 1.12. En effet, tout plongement $\tau : \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ définit un sous-groupe parabolique strict de $G$ qui est symétrique, à savoir le plus petit sous-groupe parabolique $P_\tau$ de $G$ contenant l'image par $\tau$ du groupe des matrices triangulaires supérieures de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ ainsi que le centralisateur dans $G$ de l'image par $\tau$ du groupe des matrices diagonales de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Par construction, l'image par $\tau$ de tout élément hyperbolique de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ admet un point fixe attractif dans $G/P_\tau$. De plus, $\tau$ induit un plongement équivariant de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ dans $G/P_\tau$ (cf. (2.1) ci-dessous) qui transmet la dynamique de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ à $G/P_\tau$. L'observation suivante en découle aisément, cf. Labourie (2006) et Guichard et Wienhard (2012).

*Remarque 1.13.* — Tout sous-groupe $\tau$-fuchsien de $G$ (définition 1.3) est $P_\tau$-anosovien.

En particulier, l'inclusion naturelle dans $G$ de tout sous-groupe $\tau$-fuchsien $\Lambda$ de $G$ admet un voisinage dans $\mathrm{Hom}(\Lambda, G)$ formé entièrement de représentations $P_\tau$-anosoviennes, donc injectives et discrètes, ce qui prouve la proposition 1.4.

## 2. ÉNONCÉS PLUS PRÉCIS ET QUANTITATIFS

Dans cette partie, nous donnons des énoncés qui répondent affirmativement aux questions 1.1 et 1.12, à la fois dans le cadre du théorème principal et dans un cadre plus général (théorèmes 2.4 et 2.17).

### 2.1. Énoncé pour les groupes $G$ du théorème principal

Considérons les exemples suivants de triplets $(G, \tau, P_\tau)$, où $n \geq 2$.

*Exemple 2.1.* — Soit $G = \mathrm{PSL}(n, \mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et soit $\tau = \tau_n : \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ le plongement irréductible. Ce plongement, unique à conjugaison par $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{K})$ près, est donné concrètement de la manière suivante : identifions $\mathbb{K}^n$ à l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X, Y]_{n-1}$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ à deux variables $X$ et $Y$ qui sont homogènes de degré $n-1$. Le groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{K})$ agit sur $\mathbb{K}[X, Y]_{n-1}$ par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right).$$

Ceci définit une représentation irréductible $\mathrm{SL}(2, \mathbb{K}) \to \mathrm{SL}(\mathbb{K}[X, Y]_{n-1}) \simeq \mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$, qui passe au quotient en un plongement $\tau_n : \mathrm{PSL}(2, \mathbb{K}) \hookrightarrow G$. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on note encore $\tau_n$ sa restriction à $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Le sous-groupe parabolique $P_{\tau_n}$ du paragraphe 1.4 est le sous-groupe de $G \simeq \mathrm{PSL}(\mathbb{K}[X, Y]_{n-1})$ formé des matrices triangulaires supérieures dans la base $(X^{i-1}Y^{n-i})_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{K}[X, Y]_{n-1}$. L'espace $G/P_{\tau_n}$ est l'espace des drapeaux complets de $\mathbb{K}^n \simeq \mathbb{K}[X, Y]_{n-1}$.

*Exemple 2.2.* — Soit $G = \mathrm{SO}(n,1)$ le sous-groupe de $\mathrm{SL}(n+1,\mathbb{R})$ formé des matrices préservant la forme quadratique $Q(x) = x_1^2 + \dots x_n^2 - x_{n+1}^2$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$. Il n'y a à conjugaison près qu'un seul plongement $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$, obtenu en identifiant $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ à $\mathrm{SO}(2,1)_0$ et en voyant $\mathrm{SO}(2,1)$ comme le sous-groupe de $\mathrm{SO}(n,1)$ agissant trivialement sur les $n-2$ premières coordonnées. Le sous-groupe parabolique $P_\tau$ est le stabilisateur d'une droite $Q$-isotrope de $\mathbb{R}^{n+1}$. L'espace $G/P_\tau$ est le fermé de l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ correspondant aux droites $Q$-isotropes de $\mathbb{R}^{n+1}$ ; il s'identifie au bord à l'infini de l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^n$, qui est l'espace riemannien symétrique $G/K$ de $G$.

L'exemple suivant est basé sur une observation élémentaire : pour $n$ impair, le plongement irréductible $\tau_n : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{PSL}(n,\mathbb{C})$ de l'exemple 2.1 se factorise par $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ et préserve une forme hermitienne sur $\mathbb{C}[X,Y]_{n-1} \simeq \mathbb{C}^n$, dont la matrice dans la base $(X^{i-1}Y^{n-i})_{1\leq i\leq n}$ est anti-diagonale à coefficient strictement positifs ; l'image $\tau_n(\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}))$ s'identifie donc à un sous-groupe de $\mathrm{SU}(q+1,q)$ pour $2q+1=n$.

*Exemple 2.3.* — Pour $p > q \geq 1$, soit $G = \mathrm{SU}(p,q)$ (resp. $\mathrm{Sp}(p,q)$), vu comme le groupe des transformations inversibles d'un espace vectoriel $V$ de dimension $p+q$ sur $\mathbb{C}$ (resp. sur les quaternions) qui préservent une forme hermitienne de signature $(p,q)$, et sont de déterminant un. Soit $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$ le plongement obtenu en composant $\tau_{2q+1}$ avec l'inclusion naturelle de $\mathrm{SU}(q+1,q)$ dans $\mathrm{SU}(p,q)$ (resp. $\mathrm{Sp}(p,q)$). Le sous-groupe parabolique $P_\tau$ est le stabilisateur d'un drapeau partiel $(V_1 \subset \cdots \subset V_q)$ de $V$ formé de sous-espaces totalement isotropes $V_i$ de dimension $i$ pour $1 \leq i \leq q$. L'espace $G/P_\tau$ est l'ensemble de tous les drapeaux partiels de $V$ de cette forme.

Voici une version plus précise du théorème principal pour les groupes $G = \mathrm{PSL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}(2p-1,1)$, $\mathrm{SU}(p,q)$ et $\mathrm{Sp}(p,q)$. L'énoncé fait intervenir les notions d'*application de bord* et de *sous-groupe anosovien* de $G$ du paragraphe 1.4, et d'*application sullivannienne* définie ci-dessous ; il donne un sens quantitatif au fait que l'on peut trouver, à l'intérieur de tout réseau cocompact de $G$, des sous-groupes de surface arbitrairement proches de groupes $\tau$-fuchsiens (définition 1.3).

THÉORÈME 2.4. — *Soit $(G,\tau,P_\tau)$ comme dans l'exemple 2.1, l'exemple 2.2 avec $n$ impair, ou l'exemple 2.3. Soit $\Gamma$ un réseau cocompact de $G$. Pour tout $\delta > 0$, on peut trouver un sous-groupe de surface de $\Gamma$ qui admet une application de bord $(\delta,\tau)$*-sullivannienne *$\xi : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to G/P_\tau$ (définition 2.9) ; en particulier, un tel sous-groupe est $P_\tau$-anosovien pour $\delta > 0$ assez petit.*

Le cas $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ résulte des travaux de KAHN et MARKOVIĆ (2012), et le cas général est démontré par KAHN, LABOURIE et MOZES (arXiv 2018). HAMENSTÄDT (2015, 2021) construit elle aussi des sous-groupes de surface de $\Gamma$ proches de groupes $\tau$-fuchsiens dans ce contexte, mais elle ne considère pas d'application de bord.

Le théorème 2.4 répond affirmativement aux questions 1.1 et 1.12 pour les réseaux cocompacts de $G = \mathrm{PSL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}(2p-1,1)$, $\mathrm{SU}(p,q)$ ou $\mathrm{Sp}(p,q)$. Pour $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, ceci implique une réponse affirmative aux questions 1.8 et 1.9, car dans ce cas les sous-groupes de surface anosoviens de $G$ sont exactement les sous-groupes quasi-fuchsiens de l'exemple 1.6. En général, il n'est pas clair que les sous-groupes de surface construits par Kahn, Labourie et Mozes (arXiv 2018) et Hamenstädt (2015, 2021) soient $\tau$-quasi-fuchsiens (définition 1.5) : la proposition 1.4 ne s'applique pas car lorsque $\delta$ tend vers zéro dans le théorème 2.4, le genre de la surface a tendance à augmenter. On s'attend toutefois à ce que ces constructions donnent une réponse affirmative aux questions 1.8 et 1.9 au moins dans le cas de $G = \mathrm{PSL}(n, \mathbb{C})$ et du plongement irréductible $\tau$. (4)

Voir le paragraphe 2.3 pour une version du théorème 2.4 dans un cadre plus général.

## 2.2. Cercles et applications sullivanniennes

On définit à présent la notion d'application sullivannienne.

Soient $G$ un groupe de Lie réel semi-simple linéaire, $\tau : \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ un plongement et $P_\tau$ le sous-groupe parabolique de $G$ associé comme à la fin du paragraphe 1.4. L'idée de Kahn, Labourie et Mozes est la suivante : toute représentation $\tau$-fuchsienne $\rho : \pi_1(S) \to G$ préserve un *$\tau$-cercle* dans $G/P_\tau$ (définition 2.5) ; pour $\delta > 0$, ils considèrent une représentation $\rho : \pi_1(S) \to G$ comme « $\delta$-proche de $\tau$-fuchsienne » si elle préserve une « $\delta$-approximation de $\tau$-cercle », qu'ils appellent *application* $(\delta, \tau)$-*sullivannienne* (définition 2.9).

**2.2.1.** *$\tau$-cercles.* — Le plongement $\tau$ envoie le sous-groupe $B$ des matrices triangulaires supérieures de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ dans $P_\tau$, et passe donc au quotient en un plongement $\tau$-équivariant

$$\underline{\tau} : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})/B \longrightarrow G/P_\tau. \tag{2.1}$$

*Définition 2.5.* — Un *$\tau$-cercle* est une application de la forme $g \circ \underline{\tau} : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to G/P_\tau$ où $g \in G$.

Si $g \circ \underline{\tau}$ est un $\tau$-cercle, alors toute reparamétrisation $g \circ \underline{\tau} \circ h : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to G/P_\tau$, où $h \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, est encore un $\tau$-cercle, par équivariance de $\underline{\tau}$.

*Exemple 2.6.* — Soient $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ et $\tau : \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ le plongement standard. Les images des $\tau$-cercles de $G/P_\tau = \partial \mathbb{H}^3$ sont les bords des plans totalement géodésiques de $\mathbb{H}^3$ (cf. figure 1, à gauche).

*Exemple 2.7.* — Soit $G = \mathrm{PSL}(n, \mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et soit $\tau = \tau_n : \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ le plongement irréductible. Si l'on identifie $\mathbb{K}^n$ à $\mathbb{K}[X, Y]_{n-1}$ comme dans l'exemple 2.1, alors $\underline{\tau}$ envoie tout point $[\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ sur le drapeau $(V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1})$ où $V_i$ est le sous-espace de $\mathbb{K}[X, Y]_{n-1}$ formé des polynômes divisibles par $(-\beta X + \alpha Y)^{n-i}$. En particulier, la première coordonnée de $\underline{\tau}$ est le plongement $[\alpha : \beta] \mapsto [(-\beta X + \alpha Y)^{n-1}]$ de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{P}(\mathbb{K}[X, Y]_{n-1}) \simeq \mathbb{P}(\mathbb{K}^n)$ (« plongement de Veronese »). Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $n = 3$, son image est une conique du plan projectif $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ ; l'image de $\underline{\tau}$ est l'ensemble

4. Dans ce cas on pourrait espérer utiliser par exemple les coordonnées de Fock et Goncharov (2006) pour des sous-surfaces ouvertes.

des drapeaux $(V_1, V_2)$ de $\mathbb{R}^3$ où le projectivisé de $V_1$ est un point de la conique et le projectivisé de $V_2$ est tangent à la conique en ce point (cf. figure 1, à droite).

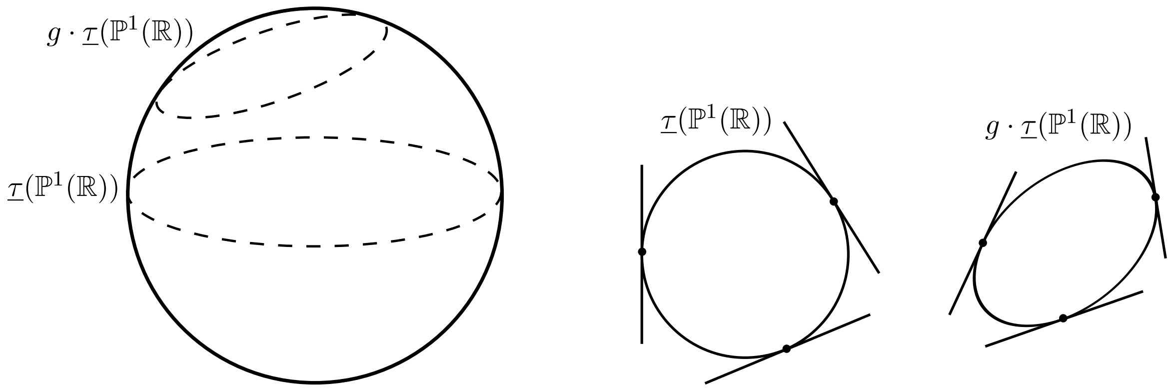


FIGURE 1. Images de $\tau$-cercles dans $G/P_\tau$. À gauche : $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ et $G/P_\tau = \partial\mathbb{H}^3$. À droite : $G = \mathrm{PSL}(3,\mathbb{R})$ et $G/P_\tau$ est l'espace des drapeaux de $\mathbb{R}^3$, représentés comme des couples (point $\in$ droite projective) dans $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$.

Une observation importante est que si $\pi_1(S)$ est un groupe de surface et $\rho_0 = g(\tau \circ \varrho(\cdot))g^{-1} : \pi_1(S) \to G$ une représentation $\tau$-fuchsienne (définition 1.3), où $g \in G$ et $\varrho : \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, alors $\rho_0$ préserve le $\tau$-cercle $g \circ \underline{\tau} : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to G/P_\tau$ : ce $\tau$-cercle est une application de bord pour $\rho_0$ (définition 1.11), faisant de $\rho_0$ une représentation $P_\tau$-anosovienne au sens du paragraphe 1.4.

On suppose désormais que le centralisateur $Z^\tau$ de $\tau(\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}))$ dans $G$ est compact, ce qui est vérifié dans le cadre du théorème 2.4 (et plus généralement dans le cadre 2.16 ci-dessous). Pour $G = \mathrm{PSL}(n,\mathbb{C})$ et $\tau = \tau_n$ le plongement irréductible, ce centralisateur $Z^\tau$ est même trivial. La remarque suivante affirme que les $\tau$-cercles sont alors essentiellement les applications de bord des représentations $\tau$-fuchsiennes.

*Remarque 2.8.* — Soit $\pi_1(S)$ un groupe de surface. En supposant $Z^\tau$ compact, une représentation $\rho : \pi_1(S) \to G$ admet une application de bord de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ dans $G/P_\tau$ qui est un $\tau$-cercle si et seulement si $\rho$ est le produit d'une représentation $\tau$-fuchsienne $g(\tau \circ \varrho(\cdot))g^{-1}$, où $g \in G$ et $\varrho : \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, et d'une représentation de $\pi_1(S)$ à valeurs dans le groupe compact $gZ^\tau g^{-1}$.

**2.2.2.** *Applications $(\delta,\tau)$-sullivanniennes.* — Munissons $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ de sa distance riemannienne standard $d_{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}$, invariante par $\mathrm{PSO}(2)$, telle que $d_{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}(0,t) = |\arctan(t)|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Soit $K$ un sous-groupe compact maximal de $G$ contenant $\tau(\mathrm{PSO}(2))$. Munissons $G/P_\tau$ d'une distance riemannienne $d_\tau$, invariante par $K$, telle que le $\tau$-cercle $\underline{\tau}$ de (2.1) soit isométrique. Tout $\tau$-cercle $g \circ \underline{\tau} : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to G/P_\tau$, où $g \in G$, est alors isométrique pour la distance riemannienne $d_\tau^g := d_\tau(g^{-1}\cdot, g^{-1}\cdot)$ sur $G/P_\tau$.

*Définition 2.9* (KAHN, LABOURIE et MOZES, arXiv 2018). — Soient $G$ un groupe de Lie réel semi-simple linéaire, $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$ un plongement et $P_\tau$ le sous-groupe parabolique de $G$ associé. Soit $\delta \geq 0$. Une application $\xi : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to G/P_\tau$ est $(\delta, \tau)$-*sullivannienne* si pour tout $h \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, il existe $g \in G$ tel que pour tout $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$,

$$d_\tau^g\big(\xi(x), g \circ \underline{\tau} \circ h^{-1}(x)\big) \leq \delta.$$

En d'autres termes, l'application $\xi$ est « une $\delta$-approximation de $\tau$-cercle vu depuis n'importe quel triplet de points » : pour tout triplet $T = h \cdot (0, \infty, -1)$ de points deux à deux distincts positivement orientés de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, où $h \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, il existe $g \in G$ tel que le triplet $\xi(T)$ soit $\delta$-proche de $g \circ \underline{\tau}(0, \infty, -1)$ pour la distance $d_\tau^g$ et la courbe $\xi$ tout entière soit point par point $\delta$-proche du $\tau$-cercle $g \circ \underline{\tau} \circ h^{-1}$ pour $d_\tau^g$.

Pour $\delta = 0$, une application $(\delta, \tau)$-sullivannienne est un $\tau$-cercle. Plus $\delta > 0$ est petit, mieux l'application approche un $\tau$-cercle, globalement comme localement (considérer un triplet $T$ de points de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ très proches entre eux comme sur la figure 2).

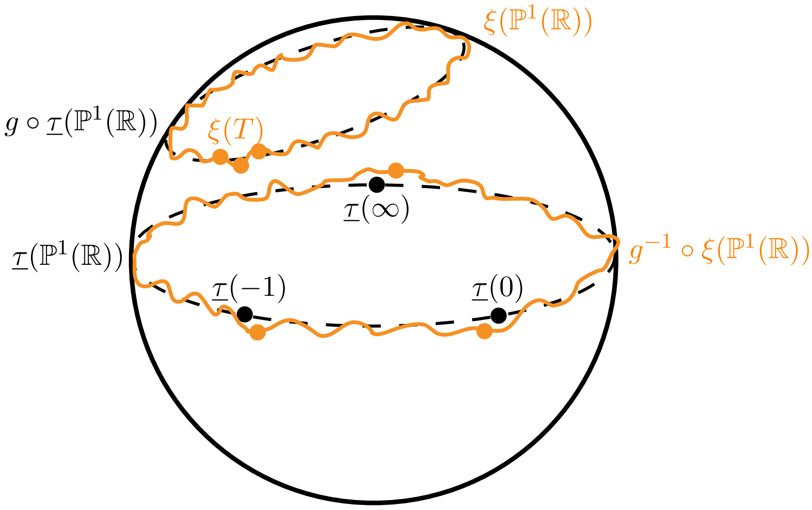


FIGURE 2. Application $(\delta, \tau)$-sullivannienne $\xi : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to G/P_\tau$ pour $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ et $G/P_\tau = \partial \mathbb{H}^3$. Le triplet $g^{-1} \circ \xi(T)$ est $\delta$-proche de $\underline{\tau}(0, \infty, -1)$ pour $d_\tau$ et la courbe $g^{-1} \circ \xi$ tout entière est $\delta$-proche de $\underline{\tau} \circ h^{-1}$ pour $d_\tau$.

Cette définition est étroitement liée aux birapports. Par exemple, l'observation suivante est élémentaire, où $[w : x : y : z]$ est le birapport (à valeurs dans $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$) de quatre points $w, x, y, z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

*Remarque 2.10.* — Soient $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ et $\tau : \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ le plongement standard. Il existe une fonction $\delta \mapsto k_\delta$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $]1, +\infty[$, tendant vers 1 en 0, telle que pour tout $\delta > 0$ assez petit, toute application $(\delta, \tau)$-sullivannienne $\xi : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = G/P_\tau$ soit $k_\delta$-quasi-symétrique au sens suivant : pour tous $w, x, y, z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ deux à deux distincts vérifiant $[w : x : y : z] = -1$, on a $k_\delta^{-1} \leq |[\xi(w) : \xi(x) : \xi(y) : \xi(z)]| \leq k_\delta$.

En effet, pour tous $w, x, y, z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ deux à deux distincts, il existe $h \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ envoyant $(w, x, y, z)$ sur $(0, \infty, -1, t)$ où $t := -1/[w : x : y : z] \in \mathbb{R}$. Comme $\xi$ est $(\delta, \tau)$-sullivannienne, il existe $g \in G$ tel que, dans $G/P_\tau = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ muni de sa distance $\mathrm{PSU}(2)$-invariante $d_\tau$, le quadruplet $g^{-1} \circ \xi(w, x, y, z)$ soit point par point $\delta$-proche du quadruplet $(0,\infty,-1,t)$. Pour $\delta$ suffisamment petit et $t=1$, ceci implique que $|[g^{-1}\circ\xi(w):g^{-1}\circ\xi(x):g^{-1}\circ\xi(y):g^{-1}\circ\xi(z)]|$ appartient à $[k_\delta^{-1},k_\delta]$ pour un certain $k_\delta>1$ ne dépendant que de $\delta$, et tendant vers 1 lorsque $\delta$ tend vers 0. On conclut par l'invariance du birapport par $G=\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$.

Il est probable que ce lien entre applications sullivanniennes et birapports se généralise à des groupes semi-simples $G$ de rang supérieur, pour de bonnes notions de birapports (cf. par exemple Beyrer, 2021).

L'observation facile suivante montre que, lorsque le centralisateur $Z^\tau$ de $\tau(\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}))$ dans $G$ est compact, on peut quantifier le fait qu'une représentation soit proche d'être $\tau$-fuchsienne par l'existence d'une application de bord $(\delta,\tau)$-sullivannienne pour $\delta$ petit.

*Remarque 2.11.* — Supposons $Z^\tau$ compact. Pour toute surface hyperbolique compacte $S$ et toute suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de représentations de $\pi_1(S)$ dans $G$, si $\rho_n$ admet une application de bord $(\delta_n,\tau)$-sullivannienne pour tout $n$ et si $\delta_n\to 0$, alors, quitte à conjuguer les $\rho_n$, elles convergent vers une représentation $P_\tau$-anosovienne d'application de bord un $\tau$-cercle, comme à la remarque 2.8.

**2.2.3.** *Quelques propriétés des applications sullivanniennes.* — Les propriété suivantes seront utiles au paragraphe 4.6.

Proposition 2.12 (Kahn, Labourie et Mozes, arXiv 2018)

*Soient $G$ un groupe de Lie réel semi-simple linéaire, $\tau:\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})\hookrightarrow G$ un plongement et $P_\tau$ le sous-groupe parabolique de $G$ associé. On suppose que le centralisateur $Z^\tau$ de $\tau(\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}))$ dans $G$ est compact. Alors il existe $\delta_0,C,\alpha>0$ tels que*

1. *toute application $(\delta_0,\tau)$-sullivannienne $\xi:\mathbb{P}^1(\mathbb{R})\to G/P_\tau$ est $\alpha$-höldérienne ; plus précisément, pour tous $h\in\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ et $g\in G$ comme à la définition 2.9, on a $d_\tau^g(\xi(x),\xi(y))\le C\,d_{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}(h^{-1}(x),h^{-1}(y))^\alpha$ pour tous $x,y\in\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ ;*
2. *pour tout groupe de surface $\pi_1(S)$ et toute représentation $\rho:\pi_1(S)\to G$, si $\rho$ admet une application de bord $(\delta,\tau)$-sullivannienne pour $\delta<\delta_0$, alors*
   - *(a) $\rho$ est $P_\tau$-anosovienne (donc en particulier injective) ;*
   - *(b) $\rho$ admet, pour tout $\varepsilon>0$, un voisinage dans $\mathrm{Hom}(\pi_1(S),G)$ formé entièrement de représentations $P_\tau$-anosoviennes d'application de bord $(\delta+\varepsilon,\tau)$-sullivannienne.*

Le point (1) repose sur une version précise, dans $G/P_\tau$, du lemme de Morse de Kapovich, Leeb et Porti (2014, 2018), qui requiert un contrôle fin de la convergence de parties imbriquées de $G/P_\tau$ (« lunules ») et fait l'objet des parties 4 à 7 de Kahn, Labourie et Mozes (arXiv 2018). Le point (2a) repose sur cette même propriété d'imbrication (mais sans nécessiter un contrôle aussi fin), dans l'esprit de la caractérisation des représentations anosoviennes en termes de multicônes de Bochi, Potrie et Sambarino (2019). Le point (2b) résulte de (2a) et du fait que l'application de bord d'une représentation $P_\tau$-anosovienne varie continûment avec la représentation (cf. Guichard et Wienhard, 2012).

### 2.3. Un cadre général pour le théorème principal

Dans ce paragraphe, nous décrivons les couples $(G, \tau)$, où $G$ est un groupe de Lie réel semi-simple linéaire et $\tau : \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ un plongement, pour lesquels le théorème principal et le théorème 2.4 sont démontrés. Ces couples sont ceux qui satisfont deux conditions : l'une de *régularité* et l'autre, que nous noterons (R), de *retournement*. Le lecteur peu familier avec la théorie de Lie pourra ignorer ce paragraphe et se concentrer sur l'exemple 2.1 de $(\mathrm{PSL}(n, \mathbb{C}), \tau_n)$, ou plus généralement sur les exemples du paragraphe 2.1, où les deux conditions sont satisfaites.

**2.3.1.** *La condition de régularité sur* $\mathsf{h}$. — Soient $G$ un groupe de Lie réel semi-simple linéaire, $\tau : \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ un plongement et $\mathrm{d}\tau : \mathfrak{psl}(2, \mathbb{R}) \to \mathfrak{g}$ le morphisme d'algèbres de Lie correspondant. Posons

$$\mathsf{h} := \mathrm{d}\tau\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right). \tag{2.2}$$

On demande que $\mathsf{h}$ soit *régulier* au sens classique suivant.

Soit $K$ un sous-groupe compact maximal de $G$ contenant $\tau(\mathrm{PSO}(2))$ ; c'est l'ensemble des points fixes d'une involution $\theta$ de $G$, dite de Cartan. On a la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{k}^{\perp}$ où $\mathfrak{k}$ est l'algèbre de Lie de $K$ et $\mathfrak{k}^{\perp}$ l'ensemble des points fixes de $-\mathrm{d}\theta$ (l'orthogonal de $\mathfrak{k}$ pour la forme de Killing). L'élément $\mathsf{h}$ appartient à $\mathfrak{k}^{\perp}$. Soit $\mathfrak{a}$ un sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{k}^{\perp}$ contenant $\mathsf{h}$ (*sous-espace de Cartan*). Le groupe de Weyl $W = N_G(\mathfrak{a})/Z_G(\mathfrak{a})$ agit sur $\mathfrak{a}$ ; l'ensemble des points qui sont fixés par au moins un élément non trivial de $W$ est une union d'hyperplans appelés murs. On dit que $\mathsf{h}$ est *régulier* s'il n'appartient à aucun mur. (Autrement dit, $\mathsf{h}$ appartient à l'*intérieur* d'une chambre de Weyl $\mathfrak{a}^+$ de $\mathfrak{a}$, où une chambre de Weyl est par définition un cône convexe de $\mathfrak{a}$ qui est l'adhérence d'une composante connexe du complémentaire dans $\mathfrak{a}$ de l'union des murs.)

*Exemple 2.13.* — Soient $G = \mathrm{PSL}(n, \mathbb{K})$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $\tau = \tau_n : \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ le plongement irréductible (exemple 2.1). Dans la base $(X^{i-1}Y^{n-i})_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{K}[X, Y]_{n-1} \simeq \mathbb{K}^n$, l'élément $\mathsf{h}$ est diagonal de coefficients $(n-1, n-3, \ldots, -(n-3), -(n-1))$. L'unique sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{psl}(n, \mathbb{K})$ contenant $\mathsf{h}$ est l'espace des matrices diagonales dans cette base, de trace nulle. Les murs de $\mathfrak{a}$ sont les hyperplans donnés par l'égalité entre $i$-ième et $j$-ième coefficients diagonaux pour $1 \leq i < j \leq n$. L'élément $\mathsf{h}$ est ici régulier : ses coefficients sont deux à deux distincts.

*Remarques 2.14.* —

1. La régularité de $\mathsf{h}$ implique que le centralisateur $Z^{\tau}$ de $\tau(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}))$ dans $G$ est compact. La réciproque est fausse : cf. exemple 2.25.
2. L'élément $\mathsf{h}$ est toujours régulier lorsque $G$ est de rang réel un.
3. Des plongements $\tau$ différents peuvent avoir le même élément $\mathsf{h}$ régulier : cf. exemple 2.22.

**2.3.2.** *La condition (R) sur* $(G, \tau)$. — Soit $Z_G(\mathsf{h})$ le centralisateur de $\mathsf{h}$ dans $G$, et soit $\underline{\tau} : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow G/P_\tau$ comme en (2.1). Hamenstädt et Kahn–Labourie–Mozes considèrent la condition supplémentaire suivante, dite de *retournement* (*flip* en anglais) :

(R) il existe un élément $j \in G$ d'ordre deux, appartenant à l'intersection du centre de $Z_G(\mathsf{h})$ et de la composante neutre de $Z_G(\mathsf{h})$, tel que $j \cdot \underline{\tau}(0, \infty, -1) = \underline{\tau}(0, \infty, 1)$.

Cette condition exprime le fait que l'on peut utiliser une famille continue d'éléments de $G$ pour « retourner » $\underline{\tau}(0, \infty, -1)$ en $\underline{\tau}(0, \infty, 1)$ en fixant $\underline{\tau}(0)$ et $\underline{\tau}(\infty)$ (cf. figure 11, paragraphe 5.5).

*Exemple 2.15.* — Soient $G = \mathrm{PSL}(n, \mathbb{C})$ et $\tau = \tau_n$ le plongement irréductible. Le centralisateur $Z_G(\mathsf{h})$ de $\mathsf{h}$ dans $G$ est le groupe des matrices diagonales de $G$, c'est un groupe connexe et abélien. La condition (R) est satisfaite en prenant $j = \tau\big(\big(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\big)\big)$.

**2.3.3.** *Le résultat général.* — Dans toute la suite, on travaille dans le cadre suivant.

*Cadre 2.16.* — Soient $G$ un groupe de Lie réel semi-simple linéaire sans facteur compact et $\tau : \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ un plongement. On suppose $\mathsf{h} := \mathrm{d}\tau\big(\big(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\big)\big) \in \mathfrak{g}$ régulier comme au paragraphe 2.3.1, ce qui implique que le centralisateur $Z^\tau$ de $\mathrm{d}\tau(\mathfrak{psl}(2, \mathbb{R}))$ dans $G$ est compact. On note $P_\tau$ le sous-groupe parabolique minimal de $G$ contenant l'image par $\tau$ du groupe des matrices triangulaires supérieures de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ ; son algèbre de Lie est la somme des sous-espaces propres de $\mathrm{ad}(\mathsf{h})$ associés à des valeurs propres positives ou nulles.

On dit qu'un réseau $\Gamma$ de $G$ est *irréductible* si les seuls sous-groupes distingués $G'$ de $G$ tels que la projection de $\Gamma$ sur $G/G'$ soit discrète sont les sous-groupes finis ou d'indice fini de $G$. Voici une version générale du théorème 2.4.

THÉORÈME 2.17. — *Dans le cadre 2.16, supposons que la condition (R) du paragraphe 2.3.2 est vérifiée. Soit* $\Gamma$ *un réseau cocompact irréductible de* $G$. *Pour tout* $\delta > 0$, *on peut trouver un sous-groupe de surface de* $\Gamma$ *qui admet une application de bord* $(\delta, \tau)$-*sullivannienne* $\xi : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to G/P_\tau$ *(définition 2.9) ; en particulier, un tel sous-groupe est* $P_\tau$-*anosovien au sens du paragraphe 1.4 pour* $\delta$ *assez petit.*

Comme au paragraphe 2.1, le cas $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ résulte des travaux de KAHN et MARKOVIĆ (2012), et le cas général est traité par KAHN, LABOURIE et MOZES (arXiv 2018). HAMENSTÄDT (2015, 2021) construit dans ce contexte des sous-groupes de surface de $\Gamma$ proches de groupes $\tau$-fuchsiens mais sans considérer d'application de bord.

On s'attend à ce que le théorème 2.17 reste vrai sans la condition (R). Voir KAHN et MARKOVIĆ (2015) pour $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ et le plongement diagonal $\tau : \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$, pour des réseaux cocompacts non irréductibles.

*Remarque 2.18.* — KAHN, LABOURIE et MOZES (arXiv 2018) n'ont en fait pas besoin de supposer que $\mathsf{h}$ est régulier : il suffit que le centralisateur $Z^\tau$ de $\tau(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}))$ dans $G$ soit compact. Lorsque $\mathsf{h}$ n'est pas régulier, ils remplacent la condition (R) par une condition plus forte : au lieu de l'intersection du centre et de la composante neutre de $Z_G(\mathsf{h})$, ils demandent que la composante neutre du centre de $Z_G(\mathsf{h})$ contienne un élément $j$ d'ordre deux tel que $j \cdot \underline{\tau}(0, \infty, -1) = \underline{\tau}(0, \infty, 1)$. Pour $\mathsf{h}$ non régulier, le sous-groupe parabolique $P_\tau$ de $G$ est non minimal : cf. exemple 2.25. Par souci de simplicité, nous supposerons ici $\mathsf{h}$ régulier.

**2.3.4.** *Exemples relatifs à la condition (R).* — On pourra utiliser les observations suivantes.

*Remarques 2.19.* —

1. Si $\tau$ est la restriction à $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ d'un plongement $\tau_\mathbb{C} : \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) \hookrightarrow G$ tel que le tore complexe $\exp \circ \mathrm{d}\tau_\mathbb{C}\big(\mathbb{C}\big(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\big)\big)$ soit contenu dans le centre de $Z_G(\mathsf{h})$, alors la condition (R) est satisfaite pour $j = \mathrm{d}\tau_\mathbb{C}\big(\big(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\big)\big)$.
2. Soit $Z_K(\mathsf{h})_0$ la composante neutre du centralisateur de $\mathsf{h}$ dans $K$. Si $\mathsf{h}$ est régulier et si le centre de $Z_K(\mathsf{h})_0$ est trivial, ou plus généralement contenu dans le centralisateur $Z^\tau$ de $\tau(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}))$ dans $G$, alors la condition (R) n'est pas satisfaite.

Le point (1) est immédiat. Pour (2), rappelons que si $\mathsf{h}$ est régulier, alors la composante neutre de $Z_G(\mathsf{h})$ est le produit direct de $A := \exp(\mathfrak{a})$ et de $Z_K(\mathsf{h})_0$. Les éléments de $A$ fixent $\underline{\tau}(0)$ et $\underline{\tau}(\infty)$, et préservent $\underline{\tau}(\mathbb{R}_+^*)$. Les éléments de $Z^\tau$ fixent $\underline{\tau}(\mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$ point par point.

*Exemple 2.20.* — Pour $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ et $\tau$ l'identité, ainsi que pour $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ et $\tau : \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ le plongement diagonal, la condition (R) n'est pas satisfaite car $Z_K(\mathsf{h})_0$ est trivial (cf. remarque 2.19.(2)).

*Exemple 2.21.* — Pour $G = \mathrm{SO}(n, 1)$, de rang réel un, il n'y a à conjugaison près qu'un seul plongement $\tau : \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$, obtenu en identifiant $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ à la composante neutre de $\mathrm{SO}(2, 1)$ comme dans l'exemple 2.2. Le groupe $Z_K(\mathsf{h})_0$ est isomorphe à $\mathrm{SO}(n-1)$. Pour $n$ pair, la condition (R) n'est pas satisfaite car le centre de $\mathrm{SO}(n-1)$ est trivial (cf. remarque 2.19.(2)). Pour $n$ impair, la condition (R) est satisfaite pour $j := -\mathrm{id} \in \mathrm{SO}(n-1) \simeq Z_K(\mathsf{h})_0$.

*Exemple 2.22.* — Soit $G = \mathrm{PU}(n, 1)$ (c'est-à-dire $\mathrm{U}(n, 1)$ divisé par son centre), de rang réel un. Pour $n \geq 2$, il existe à conjugaison près deux plongements $\tau : \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ :
- — le plongement dit *totalement réel* obtenu en identifiant $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ avec la composante neutre de $\mathrm{PO}(2, 1)$ ;
- — le plongement dit *complexe* obtenu en identifiant $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ avec $\mathrm{PU}(1, 1)$.

Dans les deux cas, le groupe $Z_K(\mathsf{h})_0$ est isomorphe à un quotient de $\mathrm{U}(n)$ par un sous-groupe fini, et le centre de $Z_K(\mathsf{h})_0$ est un tore compact de dimension un. La condition (R) est satisfaite pour le plongement totalement réel, mais non satisfaite pour le plongement complexe car dans ce cas $Z_K(\mathsf{h})_0$ centralise $\tau(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}))$ (cf. remarque 2.19.(2)).

*Exemple 2.23.* — Pour $G = \mathrm{PSL}(n, \mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'hypothèse de régularité de $\mathsf{h}$ impose que $\tau : \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ soit, à conjugaison près, le plongement irréductible $\tau_n$ de l'exemple 2.1. La condition (R) est satisfaite pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ par la remarque 2.19.(1)

(cf. exemple 2.15), et non satisfaite pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ par la remarque 2.19.(2), car pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ le groupe $Z_K(\mathsf{h})_0$ est trivial.

On montre de même que la condition (R) est satisfaite si $G$ est un groupe de Lie simple complexe de centre trivial et $\mathrm{d}\tau : \mathfrak{psl}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathfrak{g}$ le plongement principal, alors qu'elle n'est jamais satisfaite si $G$ est un groupe de Lie simple réel déployé.

*Exemple 2.24.* — Soit $G = \mathrm{SU}(p,q)$ ou $\mathrm{Sp}(p,q)$, où $p > q$. Soit $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$ le plongement obtenu en composant $\tau_{2q+1}$ avec l'inclusion naturelle de $\mathrm{SU}(q+1,q)$ dans $G$, comme dans l'exemple 2.3. L'élément $\mathsf{h}$ est régulier. La condition (R) est satisfaite par la remarque 2.19.(1).

*Exemple 2.25.* — Soient $G = \mathrm{SO}(4,2)$ et $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \simeq \mathrm{SO}(2,1)_0 \hookrightarrow G$ le plongement obtenu en plongeant $\mathrm{SO}(2,1)$ diagonalement dans $\mathrm{SO}(2,1) \times \mathrm{SO}(2,1) \subset G$. L'élément $\mathsf{h}$ n'est pas régulier, mais le centralisateur $Z^\tau$ de $\tau(\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}))$ dans $G$ est compact. La composante neutre de $Z_G(\mathsf{h})$ est isomorphe à $\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SO}(2)$, et l'élément $j = -\mathrm{id}$ du facteur $\mathrm{SO}(2)$ échange $\underline{\tau}(1)$ et $\underline{\tau}(-1)$ : la condition (R) est satisfaite (version forte de la remarque 2.18). Le sous-groupe parabolique $P_\tau$ est ici le stabilisateur d'un plan totalement isotrope de $\mathbb{R}^{4,2}$.

**2.3.5.** *Classification des plongements $\tau$.* — Pour $G$ fixé, il n'y a qu'un nombre fini de plongements $\tau$ possibles à conjugaison près. On peut les classifier de la manière suivante. Posons

$$(\mathsf{h}_0, \mathsf{e}_0, \mathsf{f}_0) := \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \in \mathfrak{psl}(2,\mathbb{R})^3. \tag{2.3}$$

Les plongements $\tau$ de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ ou $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ dans $G$ sont en bijection avec les morphismes d'algèbres de Lie $\mathrm{d}\tau : \mathfrak{psl}(2,\mathbb{R}) \to \mathfrak{g}$ d'image non nulle, ou encore, via l'évaluation en $(\mathsf{h}_0, \mathsf{e}_0, \mathsf{f}_0)$, avec les $\mathfrak{sl}(2)$*-triplets* de $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire les triplets $(\mathsf{h}, \mathsf{e}, \mathsf{f}) \in \mathfrak{g}^3$ non nuls tels que

$$[\mathsf{h}, \mathsf{e}] = 2\mathsf{e}, \qquad [\mathsf{h}, \mathsf{f}] = -2\mathsf{f} \qquad \text{et} \qquad [\mathsf{e}, \mathsf{f}] = \mathsf{h}.$$

Le théorème de Jacobson–Morozov affirme que tout élément nilpotent non nul $\mathsf{e}$ de $\mathfrak{g}$ peut être complété en un $\mathfrak{sl}(2)$-triplet, et un résultat classique de Kostant dit que ceci induit une bijection entre l'ensemble des éléments nilpotents non nuls de $\mathfrak{g}$ modulo l'action adjointe de $G$ et l'ensemble des $\mathfrak{sl}(2)$-triplets de $\mathfrak{g}$ modulo l'action adjointe de $G$.

*Remarque 2.26.* — Kahn, Labourie et Mozes (arXiv 2018) expriment la condition (R) du paragraphe 2.3.2 en termes du $\mathfrak{sl}(2)$-triplet $(\mathsf{h}, \mathsf{e}, \mathsf{f}) = \mathrm{d}\tau(\mathsf{h}_0, \mathsf{e}_0, \mathsf{f}_0)$ : il existe un élément $j \in G$ d'ordre deux, appartenant à l'intersection du centre de $Z_G(\mathsf{h})$ et de la composante neutre de $Z_G(\mathsf{h})$, qui envoie (via l'action adjointe) $\mathsf{e} + \mathsf{f}$ sur $-(\mathsf{e} + \mathsf{f})$.

## 3. STRATÉGIE DE DÉMONSTRATION

La stratégie générale de démonstration du théorème principal et des théorèmes 2.4 et 2.17 remonte à Kahn et Marković (2012) ; nous la résumons brièvement au paragraphe 3.2. Elle fait intervenir la notion de structure hyperbolique $R$-parfaite, introduite au paragraphe 3.1, et comporte trois grandes étapes, décrites aux paragraphes 3.3 à 3.5.

### 3.1. Rappels de géométrie hyperbolique

Soit $S$ une surface compacte connexe orientée de genre $\mathsf{g} \geq 2$. On peut la décomposer en une union disjointe de $3\mathsf{g} - 3$ courbes fermées simples et de $2\mathsf{g} - 2$ *pantalons*, où un pantalon est par définition une sous-surface ouverte homéomorphe à une sphère à trois trous. On appelle *décomposition en pantalons* l'ensemble $\mathcal{P}$ des $2\mathsf{g} - 2$ pantalons ainsi obtenus ; les $3\mathsf{g} - 3$ courbes fermées simples sont appelées *courbes de bord*. La décomposition est *bipartie* si $\mathcal{P}$ est l'union disjointe de deux sous-ensembles $\mathcal{P}^+$ et $\mathcal{P}^-$ tels que pour toute paire de pantalons adjacents le long d'une courbe de bord, l'un des pantalons appartient à $\mathcal{P}^+$ et l'autre à $\mathcal{P}^-$ ; dans ce cas, aucun pantalon n'est adjacent à lui-même. Soit $\mathcal{G}$ un graphe fini sur $S$ avec :

— $2\mathsf{g} - 2$ sommets : un à l'intérieur de chaque pantalon de $\mathcal{P}$,

— $3\mathsf{g} - 3$ arêtes : une pour chaque courbe de bord entre deux pantalons de $\mathcal{P}$,

de sorte que $S$ se rétracte sur $\mathcal{G}$ (cf. figure 3, à gauche). Le graphe $\mathcal{G}$ permet d'associer, à toute courbe de bord orientée $a$ d'un pantalon $\Pi \in \mathcal{P}$, un élément privilégié de $\pi_1(\Pi)$ dans la classe de conjugaison définie par $a$. Si $\Pi^+ \in \mathcal{P}^+$ et $\Pi^- \in \mathcal{P}^-$ sont adjacents le long de $a$, on peut orienter $a$ et les autres courbes de bord $b^\pm, c^\pm$ comme sur la figure 3, à droite, de sorte que les éléments correspondants de $\pi_1(\Pi^\pm)$ (notés par les mêmes lettres) vérifient $c^+b^+a = 1$ et $c^-b^-a = 1$.

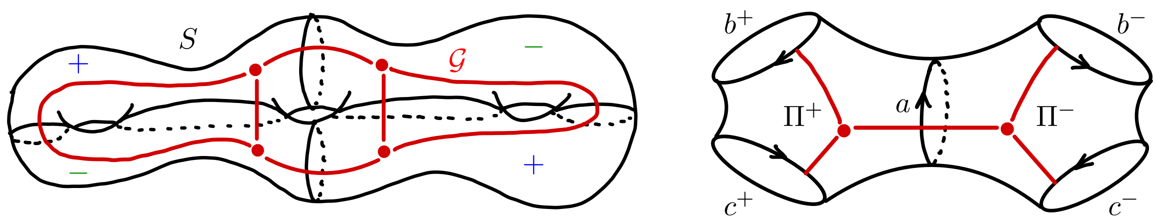


Figure 3. À gauche : décomposition en pantalons bipartie de $S$ avec un graphe associé $\mathcal{G}$ ; à droite : configuration de deux pantalons adjacents

Soient $a_1, \ldots, a_{3\mathsf{g}-3}$ les courbes de bord de la décomposition en pantalons $\mathcal{P}$. À toute représentation injective et discrète $\varrho$ de $\pi_1(S)$ dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, on peut associer une *structure hyperbolique marquée* sur $S$, ce qui définit $6\mathsf{g} - 6$ invariants (cf. Hubbard, 2006, § 7.6), à savoir, pour tout $i \in \{1, \ldots, 3\mathsf{g} - 3\}$,

— la longueur du représentant géodésique de la courbe de bord $a_i$ pour la structure hyperbolique sur $S$ définie par $\varrho$, c'est-à-dire la longueur de translation dans $\mathbb{H}^2$ de $\varrho(\alpha_i)$ où $\alpha_i \in \pi_1(S)$ correspond à $a_i$ ;

— un « paramètre de décalage » au niveau de $a_i$, qui reflète le fait que l'on peut changer la structure hyperbolique marquée en faisant « tourner » l'un des deux pantalons adjacents à $a_i$ par rapport à l'autre.

Les $3\mathsf{g}-3$ longueurs peuvent prendre n'importe quelles valeurs strictement positives, et les $3\mathsf{g}-3$ paramètres de décalage n'importe quelles valeurs réelles, lorsque $\varrho$ varie parmi les représentations injectives et discrètes de $\pi_1(S)$ dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Un résultat classique de Fenchel et Nielsen affirme que ces $6\mathsf{g}-6$ invariants paramètrent complètement l'espace de Teichmüller de $S$, c'est-à-dire l'espace des structures hyperboliques marquées sur $S$, ou de manière équivalente l'espace des représentations injectives et discrètes de $\pi_1(S)$ dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ modulo conjugaison au but par $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$.

L'idée de Kahn et Marković (2012) est de considérer le cas particulier suivant : pour $R>0$, on dit qu'une représentation injective et discrète $\varrho:\pi_1(S)\to\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ est *$R$-parfaite* si les $3\mathsf{g}-3$ longueurs des courbes de bord sont toutes égales à $2R$ et les $3\mathsf{g}-3$ paramètres de décalage sont tous égaux à 1 (voir le paragraphe 4.6.1 pour une interprétation en termes de pavages de $\mathbb{H}^2$ par des hexagones à angles droits). La valeur précise 1 n'a pas d'importance particulière : ce qui compte est de choisir une valeur non nulle, ce qui rend vrai le fait important suivant (cf. Kahn et Marković, 2012, Lem. 2.7).

Fait 3.1. — *Le diamètre de $S$ munie d'une structure hyperbolique $R$-parfaite (c'est-à-dire le diamètre de $\varrho_R(\pi_1(S))\backslash\mathbb{H}^2$) est uniformément borné lorsque $R$ tend vers l'infini.*

### 3.2. Bref résumé de l'approche de Kahn et Marković

Soient $\Gamma$ un réseau cocompact de $G=\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ et $M=\Gamma\backslash\mathbb{H}^3$ la variété hyperbolique compacte de dimension trois correspondante. Afin de répondre affirmativement aux questions 1.1, 1.8 et 1.9, Kahn et Marković (2012) construisent, pour tout $\varepsilon>0$ et tout $R>0$ assez grand par rapport à $\varepsilon$ :

— une surface compacte $S$ de genre au moins deux munie d'une décomposition en pantalons bipartie et d'un graphe fini comme au paragraphe 3.1 ;

— une immersion $f:S\to M$ envoyant chaque pantalon de $S$ sur une sous-surface de $M$ dont les courbes de bord sont des géodésiques de longueurs complexes $\varepsilon$-proches de $2R$, avec des paramètres de décalage $(\varepsilon/R)$-proches de 1

(ces longueurs complexes et paramètres de décalage sont des généralisations naturelles des notions correspondantes du paragraphe 3.1, cf. Bergeron, 2013, § 2). L'immersion $f$ induit un morphisme de groupes $\rho:\pi_1(S)\to\pi_1(M)\simeq\Gamma$. Soit $\varrho_R:\pi_1(S)\to\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ une représentation $R$-parfaite au sens du paragraphe 3.1. Pour $\varepsilon>0$ assez petit, Kahn et Marković montrent, grâce aux conditions sur l'immersion $f$ (longueurs de bord et paramètres de décalage), qu'elle induit une application de bord $(\varrho_R,\rho)$-équivariante de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ qui est $(1+C\varepsilon)$-quasi-symétrique, pour une certaine constante $C>0$ indépendante de $\varepsilon$. En particulier, pour $\varepsilon$ assez petit et $R$ assez grand par rapport à $\varepsilon$, la représentation $\rho:\pi_1(S)\to\Gamma$ est injective et son image est « proche » d'être fuchsienne.

La même stratégie est utilisée par KAHN et MARKOVIĆ (2015) pour démontrer la conjecture d'EHRENPREIS (1970) du paragraphe 1.3.2. En effet, considérons deux surfaces de Riemann compactes de genre au moins deux, vues comme des surfaces hyperboliques $\Gamma_1\backslash\mathbb{H}^2$ et $\Gamma_2\backslash\mathbb{H}^2$ via le théorème d'uniformisation. Appliquée à $M = \Gamma_i\backslash\mathbb{H}^2$ pour $i \in \{1,2\}$, la stratégie ci-dessus donne, pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit et tout $R > 0$ assez grand par rapport à $\varepsilon$, une surface compacte $S_i$ de genre au moins deux, une représentation $\rho_i : \pi_1(S_i) \to \pi_1(M) = \Gamma_i$, une représentation $R$-parfaite $\varrho_{R,i} : \pi_1(S_i) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ et une application de bord $(\varrho_{R,i}, \rho_i)$-équivariante de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ dans lui-même qui est $(1 + C\varepsilon)$-quasi-symétrique, pour une certaine constante $C > 0$ indépendante de $\varepsilon$. Pour $\varepsilon$ assez petit la représentation $\rho_i$ est injective, ce qui implique que $\rho_i(\pi_1(S_i))\backslash\mathbb{H}^2$ est un revêtement fini de $\Gamma_i\backslash\mathbb{H}^2$. Ce revêtement est quasi-conforme à une surface hyperbolique compacte $R$-parfaite, avec une constante de quasi-conformité bien contrôlée. La conjecture d'Ehrenpreis s'en déduit.

Notons que l'idée de construire des revêtements de surfaces hyperboliques compactes à l'aide de pantalons immergés bien recollés remonte à BOWEN (2004).

### 3.3. Étape géométrique : conditions suffisantes d'injectivité pour les représentations de groupes de surface

Expliquons à présent comment l'approche de Kahn–Marković a été généralisée par Hamenstädt et Kahn–Labourie–Mozes pour démontrer le théorème principal et les théorèmes 2.4 et 2.17.

Soit $S$ une surface compacte connexe orientée munie d'une décomposition en pantalons bipartie $\mathcal{P} = \mathcal{P}^+ \sqcup \mathcal{P}^-$ et d'un graphe fini $\mathcal{G}$ comme au paragraphe 3.1. Soient $G$ un groupe de Lie semi-simple et $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$ un plongement.

Au paragraphe 3.1 nous avons vu une notion de représentation $R$-parfaite de $\pi_1(S)$ dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Pour une telle représentation $\varrho_R : \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ et pour des pantalons $\Pi^+ \in \mathcal{P}^+$ et $\Pi^- \in \mathcal{P}^-$, on dira que la restriction de $\tau \circ \varrho_R$ à $\pi_1(\Pi^+)$ est une représentation *$R$-parfaite* à valeurs dans $G$ et que la restriction de $\tau \circ \varrho_R$ à $\pi_1(\Pi^-)$ est une représentation *$(-R)$-parfaite* à valeurs dans $G$.[5]

Étendant l'approche de Kahn–Marković (paragraphe 3.2) à des groupes $G$ plus généraux que $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, Hamenstädt et Kahn–Labourie–Mozes ont introduit, pour $\varepsilon, R > 0$, les notions suivantes :

- pour $\Pi \in \mathcal{P}$, une notion de *représentation $(\varepsilon, \pm R)$-presque parfaite* de $\pi_1(\Pi)$ dans $G$, à valeurs dans $\Gamma$ : il s'agit d'une représentation qui est « proche à $\varepsilon$ près » d'un conjugué d'une représentation $(\pm R)$-parfaite à valeurs dans $G$, ce qui se traduit par l'existence d'une bonne *donnée géométrique* associée à la représentation, décrivant une situation proche de celle du paragraphe 3.1 ;
- pour des pantalons $\Pi^+ \in \mathcal{P}^+$ et $\Pi^- \in \mathcal{P}^-$ adjacents le long d'une courbe de bord $a$, et pour des représentations $(\varepsilon, \pm R)$-presque parfaites $\rho^\pm : \pi_1(\Pi^\pm) \to \Gamma$ telles que $\rho^+(a) = \rho^-(a)$, une notion pour $\rho^+$ et $\rho^-$ d'être *$\varepsilon$-bien recollées* le long

5. Cette terminologie reflète les orientations opposées considérées sur $\Pi^+$ et $\Pi^-$, cf. figure 3, à droite.

de $a$ via leurs données géométriques : cela signifie qu'elles « diffèrent à $\varepsilon$ près par un décalage hyperbolique de 1 » comme sur la figure 10 (cf. paragraphe 4.6.1), le long d'une copie de $\mathbb{H}^2$ induite par $\tau$.

Les données géométriques sont exprimées en termes d'éléments de $\Gamma\backslash G$, vus comme des « repères de direction $\tau$ » dans l'espace tangent à l'espace localement symétrique $\Gamma\backslash G/K$ (pour Hamenstädt) ou comme des raffinements de triplets de points sur un même $\tau$-cercle dans la variété de drapeaux $G/P_\tau$, modulo l'action de $\Gamma$ (pour Kahn, Labourie et Mozes). Les orbites de ces éléments par le flot $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ sur $\Gamma\backslash G$ correspondant à la multiplication à droite par $\tau\big(\big(\begin{smallmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2}\end{smallmatrix}\big)\big)$ doivent « presque » se refermer modulo l'application de certaines symétries (inversion ou rotation d'ordre trois) : cf. figure 8, paragraphes 4.1–4.2.

Une observation importante est que l'ensemble des classes de conjugaison de représentations $(\varepsilon, R)$-presque parfaites de $\pi_1(\Pi)$ dans le groupe discret $\Gamma$ est fini. Cela résulte du fait (cf. corollaire 4.13.(2)) que si $\pi_1(\Pi) = \langle a, b, c \,|\, cba = 1\rangle$ où $a, b, c$ correspondent aux courbes de bord de $\Pi$, alors une telle représentation envoie, à conjugaison près, le triplet $(a, b, c)$ sur un triplet d'éléments de $\Gamma$ proche de

$$\tau\left(\begin{pmatrix} e^{R/2} & 0 \\ 0 & e^{-R/2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{-R/2} & e^{-R/2} - e^{R/2} \\ 0 & e^{R/2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{-R/2} & 0 \\ e^{R/2} - e^{-R/2} & e^{R/2}\end{pmatrix}\right) \in G^3.$$

Un raisonnement analogue vaut pour les représentations $(\varepsilon, -R)$-presque parfaites.

La donnée géométrique associée à une représentation $(\varepsilon, \pm R)$-presque parfaite n'est pas unique, mais varie dans un espace continu (compact).

La première étape de la démonstration des théorèmes 2.4 et 2.17 consiste à donner les conditions suffisantes suivantes pour qu'une représentation $\rho : \pi_1(S) \to \Gamma$ soit injective (et donc que son image soit un sous-groupe de $\Gamma$ isomorphe à $\pi_1(S)$).

Proposition 3.2. — *Dans le cadre du théorème 2.4, ou plus généralement dans le cadre 2.16, soient $\Gamma$ un réseau cocompact irréductible de $G$ et $S$ une surface compacte munie d'une décomposition en pantalons bipartie $\mathcal{P} = \mathcal{P}^+ \sqcup \mathcal{P}^-$ et d'un graphe fini $\mathcal{G}$ comme au paragraphe 3.1. Pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit et tout $R > 0$ assez grand par rapport à $\varepsilon$, si une représentation $\rho : \pi_1(S) \to \Gamma$ vérifie que*

1. *pour tout $\Pi^\pm \in \mathcal{P}^\pm$, la restriction de $\rho$ à $\pi_1(\Pi^\pm)$ est $(\varepsilon/R, \pm R)$-presque parfaite, et*
2. *on peut choisir les données géométriques associées de sorte que pour toute paire $(\Pi^+, \Pi^-) \in \mathcal{P}^+ \times \mathcal{P}^-$ de pantalons adjacents, les restrictions de $\rho$ à $\pi_1(\Pi^+)$ et à $\pi_1(\Pi^-)$ soient $(\varepsilon/R)$-bien recollées,*

*alors $\rho$ est injective.*

Dans la version de Kahn, Labourie et Mozes (arXiv 2018), les auteurs montrent de plus que $\rho$ admet une application de bord $(\delta, \tau)$-sullivannienne de paramètre $\delta$ arbitrairement petit : cf. proposition 4.19.

Dans la version de Hamenstädt (2015, 2021), les conditions de $(\varepsilon/R, \pm R)$-presque perfection et de $(\varepsilon/R)$-bon recollement dans la proposition 3.2 sont remplacées par des conditions plus simples mais plus fortes de $(e^{-\kappa R}, \pm R)$-presque perfection et de $e^{-\kappa R}$-bon recollement, où $\kappa > 0$ est une constante indépendante de $R$.

**3.3.1.** *Injectivité selon* HAMENSTÄDT *(2015, 2021).* — Soient $G/K$ l'espace riemannien symétrique de $G$, où $K$ est un sous-groupe compact maximal de $G$, et $M = \Gamma\backslash G/K$ l'espace localement symétrique compact associé à $\Gamma$. Soit $\rho : \pi_1(S) \to \Gamma$ une représentation vérifiant les conditions (1) et (2) de la proposition 3.2 pour $R > 0$ assez grand.

Pour montrer que $\rho$ est injective, Hamenstädt suit une approche géométrique : à partir d'une structure hyperbolique $R$-parfaite sur $S$ (cf. paragraphe 3.1) et des données géométriques des restrictions de $\rho$ aux $\pi_1(\Pi)$ pour $\Pi \in \mathcal{P}$, elle construit :

— une surface $S'$ homéomorphe à $S$, découpée en un nombre fini de « morceaux » (triangles, bandes ou anneaux), chaque morceau étant muni d'une structure hyperbolique ou euclidienne pour laquelle son bord est géodésique ;

— une application continue $f : S' \to M$, de morphisme induit $\rho = f_* : \pi_1(S) = \pi_1(S') \to \pi_1(M) = \Gamma$, qui est une immersion en restriction à chaque morceau ; elle se relève en une immersion par morceaux continue $\rho$-équivariante $\widetilde{f} : \widetilde{S'} \to G/K$.

La surface $S'$ est obtenue à partir de la surface hyperbolique $R$-parfaite $S$ en rajoutant, au niveau de chaque courbe de bord entre pantalons adjacents de $\mathcal{P}$, un fin anneau euclidien (réduit à un cercle lorsque $G$ est de rang réel un). Les « morceaux » sont ces anneaux et, pour chaque pantalon de $\mathcal{P}$, deux triangles équilatéraux (dont le diamètre est borné lorsque $R$ tend vers l'infini) et trois bandes hyperboliques (dont la longueur est proche de $R$) qui partitionnent le pantalon : cf. figure 4. La condition (1) de la proposition 3.2 permet de construire $f$ de sorte que sa restriction à chaque morceau soit presque isométrique, et la condition (2) de sorte que les angles de recollements soient proches de $\pi$ et que les décalages entre pantalons soient proches de décalages hyperboliques de longueur 1 comme au paragraphe 3.1.

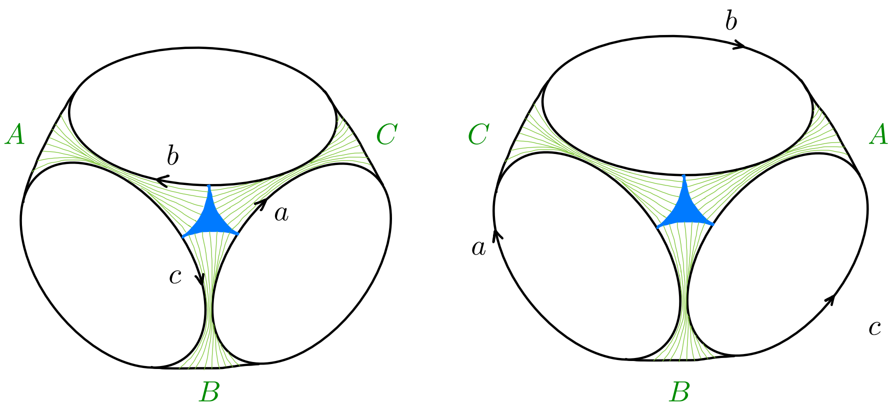


FIGURE 4. Découpage d'un pantalon hyperbolique en deux triangles équilatéraux et trois bandes $A, B, C$ (vues de devant et de derrière)

L'application $\widetilde{f}$ définit une métrique des chemins $\pi_1(S')$-invariante sur $\widetilde{S'}$ : par définition, la distance entre deux points $x, y$ de $\widetilde{S'}$ est la borne inférieure des longueurs, dans $G/K$, des images par $\widetilde{f}$ de chemins de $x$ à $y$ dans $\widetilde{S'}$. Cette borne inférieure est en fait un minimum : l'espace métrique $\widetilde{S}'$ est géodésique par le théorème de Hopf–Rinow. Par un contrôle fin de la géométrie de l'immersion par morceaux, Hamenstädt montre, pour $R > 0$ suffisamment grand, que l'on peut trouver, pour toute droite géodésique $\mathcal{L}$ de $\widetilde{S}'$, une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de points de $\mathcal{L}$ tels que

— la distance dans $\widetilde{S}'$ entre $x_n$ et $x_{n+1}$ soit uniformément majorée,
— la distance dans $G/K$ entre $\widetilde{f}(x_n)$ et $\widetilde{f}(x_{n+1})$ soit uniformément minorée,
— l'angle entre $[\widetilde{f}(x_n), \widetilde{f}(x_{n-1})]$ et $[\widetilde{f}(x_n), \widetilde{f}(x_{n+1})]$ soit suffisamment proche de $\pi$,
— la direction de $[\widetilde{f}(x_n), \widetilde{f}(x_{n+1})]$ soit suffisamment proche de la direction régulière $\mathsf{h} = \mathrm{d}\tau\big(\big(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\big)\big) \in \mathfrak{a}^+$.

(On note ici $\mathfrak{a}^+$ une chambre de Weyl d'un sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}$ comme au paragraphe 2.3.1. Rappelons que tout segment orienté $[z_1, z_2]$ dans $G/K$ est de la forme $[gK, g\exp(\mathsf{h}')K]$ où $g \in G$ et $\mathsf{h}' \in \mathfrak{a}^+$ ; l'élément $\mathsf{h}'$ modulo $\mathbb{R}_+^*$ est la *direction* de $[z_1, z_2]$.)

Un résultat de Kapovich, Leeb et Porti (2014, Th. 7.2 & Cor. 7.13) (« lemme de Morse ») implique alors que le chemin géodésique par morceaux $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[f(x_n), f(x_{n+1})]$ est une quasi-géodésique de $G/K$, à distance bornée d'un plat de $G/K$. En appliquant ceci à une droite géodésique $\mathcal{L}$ invariante par $\gamma \in \pi_1(S) \smallsetminus \{1\}$, on voit que la représentation $\rho$ est injective. En fait, le lemme de Morse donne une uniformité sur les quasi-géodésiques, ce qui permet de voir que $\rho$ est $P_\tau$-anosovienne au sens du paragraphe 1.4.

**3.3.2.** *Injectivité selon* Kahn, Labourie *et* Mozes *(arXiv 2018).* — Soit $G/P_\tau$ la variété de drapeaux associée à $\tau$, comme aux paragraphes 1.4, 2.1 et 2.2.3. Pour démontrer la proposition 3.2 et son raffinement (proposition 4.19), Kahn, Labourie et Mozes observent que, grâce à la condition (1), pour tout $\gamma \in \pi_1(S)$ correspondant à une courbe de bord d'un pantalon de $\mathcal{P}$, l'élément $\rho(\gamma) \in G$ admet un unique point fixe attractif dans $G/P_\tau$ (corollaire 4.13.(1)) ; on a donc une application $(\varrho_R, \rho)$-équivariante naturelle d'un sous-ensemble dense de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ vers $G/P_\tau$, qui au point fixe attractif dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ de $\varrho_R(\gamma)$ associe le point fixe attractif dans $G/P_\tau$ de $\rho(\gamma)$. Ils utilisent alors la condition (2) pour montrer que cette application se prolonge en une application $(\varrho_R, \rho)$-équivariante *continue* $\xi : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to G/P_\tau$, avec un contrôle suffisant pour établir qu'à $\delta > 0$ petit fixé, l'application $\xi$ est $(\delta, \tau)$-sullivannienne (définition 2.9) dès que $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit. La proposition 2.12.(2a) assure alors que $\rho$ est $P_\tau$-anosovienne au sens du paragraphe 1.4, donc injective. Voir la partie 4 pour plus de détails.

### 3.4. Étape dynamique

La deuxième étape de la démonstration des théorèmes 2.4 et 2.17 consiste à établir les propriétés d'existence suivantes, qui font intervenir les notions du paragraphe 3.3.

Proposition 3.3. — *Dans le cadre 2.16, soit $\Gamma$ un réseau cocompact irréductible de $G$, et soient $\Pi^+$ et $\Pi^-$ deux pantalons adjacents le long d'une courbe de bord $a$ comme sur la figure 3, à droite. Il existe $C > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $R > 0$ assez grand par rapport à $\varepsilon$,*

1. *il existe des représentations $(\varepsilon/R, \pm R)$-presque parfaites de $\pi_1(\Pi^\pm)$ dans $\Gamma$ ;*

2. *pour toute donnée géométrique associée à une représentation $(\varepsilon/R, R)$-presque parfaite de $\pi_1(\Pi^+)$ dans $\Gamma$, on peut trouver une donnée géométrique associée à une représentation $(\varepsilon/R, -R)$-presque parfaite de $\pi_1(\Pi^-)$ dans $\Gamma$ de sorte que les représentations soient $(C\varepsilon/R)$-bien recollées le long de a via ces données géométriques.*

On peut quantifier le point (2) en utilisant des mesures sur un espace continu $\mathrm{Geom}_{\varepsilon,\pm R}$ qui paramètre, dans chacune des approches de Hamenstädt (2015, 2021) ou de Kahn, Labourie et Mozes (arXiv 2018), les données géométriques des représentations $(\varepsilon/R, \pm R)$-presque parfaites de $\pi_1(\Pi^\pm)$ dans $\Gamma$ modulo conjugaison.

Proposition 3.4. — *Dans le cadre de la proposition 3.3,*

*(2)' il existe des mesures $\mu_{\varepsilon,R}$ sur $\mathrm{Geom}_{\varepsilon,R}$ et $\mu_{\varepsilon,-R}$ sur $\mathrm{Geom}_{\varepsilon,-R}$, de même masse totale, telles que pour tout sous-ensemble mesurable $A$ de $\mathrm{Geom}_{\varepsilon,R}$, l'ensemble des éléments de $\mathrm{Geom}_{\varepsilon,-R}$ qui sont $(C\varepsilon/R)$-bien recollés à au moins un élément de $A$ soit de $(\mu_{\varepsilon,-R})$-mesure supérieure ou égale à $\mu_{\varepsilon,R}(A)$.*

Dans la partie 5, nous détaillons la démonstration des propositions 3.3 et 3.4 en suivant l'approche développée par Kahn, Labourie et Mozes (arXiv 2018). La démonstration de Hamenstädt est analogue, mais avec un formalisme un peu différent, dû à sa définition différente des données géométriques.

Dans les deux approches, et déjà chez Kahn et Marković (2012), la démonstration repose crucialement sur la propriété de mélange suivante, appliquée à $\mathsf{h}' = \mathsf{h}$ comme au cadre 2.16. Cette propriété, classique, provient de la décroissance exponentielle des coefficients matriciels des représentations tempérées (cf. la partie 4 de Bergeron, 2013 ou l'appendice B de Kahn, Labourie et Mozes, arXiv 2018).

Fait 3.5. — *Soient $\mathfrak{a}$ un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{g}$ comme au paragraphe 2.3.1 et $\Gamma$ un réseau irréductible de $G$. Pour tout $\mathsf{h}' \in \mathfrak{a}$, le flot $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ sur $\Gamma\backslash G$ donné par la multiplication à droite par $\exp(t\mathsf{h}')$ est exponentiellement mélangeant : il existe $k \in \mathbb{N}$ et $C, q > 0$ tel que pour toutes fonctions $\psi, \theta \in C^k(\Gamma\backslash G, \mathbb{R})$ et tout $R > 0$,*

$$\left| \int_{[g]\in\Gamma\backslash G} \psi([g])\,(\theta\circ\varphi_R)([g])\,\mathrm{d}[g] - \left(\int_{\Gamma\backslash G} \psi\right)\left(\int_{\Gamma\backslash G} \theta\right) \right| \le C e^{-qR}\, \|\psi\|_{C^k}\, \|\theta\|_{C^k}.$$

Kahn et Marković (2012), Hamenstädt (2015), et Kahn, Labourie et Mozes (arXiv 2018) n'ont en fait pas besoin du mélange exponentiel (décroissance en $e^{-qR}$), seulement d'un mélange polynomial (décroissance en $1/R^\ell$ pour un certain $\ell \ge 2$).

### 3.5. Étape combinatoire

Pour conclure la démonstration des théorèmes 2.4 et 2.17, il s'agit de prendre les représentations de groupes de pantalons $(\varepsilon/R, \pm R)$-presque parfaites $(C\varepsilon/R)$-bien recollées des propositions 3.3 et 3.4, avec les données géométriques appropriées correspondantes, et de montrer qu'on peut les agencer de manière adéquate pour obtenir une représentation d'une surface *compacte* $S$, avec une décomposition en pantalons bipartie et un graphe fini associé, vérifiant les hypothèses de la proposition 3.2. Pour cela, Kahn et MARKOVIĆ (2012) et KAHN, LABOURIE et MOZES (arXiv 2018) utilisent le lemme classique suivant (cf. la remarque 6.1 pour l'approche de Hamenstädt).

FAIT 3.6 (Lemme des mariages de HALL, 1935). — *Soient $\mathcal{E}^+$ et $\mathcal{E}^-$ deux ensembles finis de même cardinal et $\mathcal{M} \subset \mathcal{E}^+ \times \mathcal{E}^-$ un sous-ensemble. Alors il existe une bijection $\psi : \mathcal{E}^+ \to \mathcal{E}^-$ telle que $(x, \psi(x)) \in \mathcal{M}$ pour tout $x \in \mathcal{E}^+$ dès que la condition suivante est vérifiée :*

$$\forall A \subset \mathcal{E}^+, \qquad \# \bigcup_{x \in A} \{y \in \mathcal{E}^- \mid (x,y) \in \mathcal{M}\} \geq \# A. \tag{3.1}$$

On pense à $\mathcal{M}$ comme à l'ensemble des mariages possibles entre éléments de $\mathcal{E}^+$ et de $\mathcal{E}^-$. La condition (3.1) dit que pour tout sous-ensemble $A$ de $\mathcal{E}^+$, il existe au moins $\#A$ éléments de $\mathcal{E}^-$ avec la propriété de pouvoir être marié à au moins un élément de $A$.

Dans notre contexte, $\mathcal{E}^\pm$ sera un ensemble fini obtenu en prenant certaines données géométriques de représentations $(\varepsilon/R, \pm R)$-parfaites de groupes de pantalons, avec certaines multiplicités bien choisies données par les mesures $\mu_{\varepsilon,\pm R}$ de la proposition 3.4, et $\mathcal{M}$ correspondra à l'ensemble des paires $(C\varepsilon/R)$-bien recollées : cf. paragraphe 6.3. La bijection $\psi$ du lemme des mariages permet de construire un graphe fini biparti trivalent $\mathcal{G}$ de sommets $\mathcal{P} = \mathcal{P}^+ \sqcup \mathcal{P}^-$ de la manière suivante : les sommets $\mathcal{P}^\pm$ sont obtenus en prenant le quotient de $\mathcal{E}^\pm$ par la transformation d'ordre trois correspondant à la permutation cyclique des courbes de bord (cf. (6.1)) ; pour tout $x \in \mathcal{E}^+ \sqcup \mathcal{E}^-$, on relie la classe de $x$ et celle de $\psi(x)$ par une arête. En épaississant ce graphe, on obtient une surface compacte $S$ avec une décomposition en pantalons bipartie étiquetée par $\mathcal{P}$ et, pour tout pantalon $\Pi^\pm$ correspondant à un élément de $\mathcal{P}^\pm$, une classe de conjugaison de représentations $(\varepsilon/R, \pm R)$-presque parfaites de $\pi_1(\Pi^\pm)$ dans $\Gamma$ ; de plus, les classes de deux pantalons adjacents admettent des représentants $(C\varepsilon/R)$-bien recollés. On en déduit (cf. lemme 6.3) une représentation $\rho$ de $\pi_1(S)$ dans $\Gamma$ à laquelle la proposition 3.2 s'applique, et qui est donc injective.

## 4. ÉTAPE GÉOMÉTRIQUE

Dans cette partie, nous présentons les notions de Kahn, Labourie et Mozes de *représentation $(\varepsilon, R)$-presque parfaite* d'un groupe de pantalon (paragraphe 4.2) et de représentations *$\varepsilon$-bien recollées* (paragraphe 4.5). Nous donnons les grandes lignes de leur démonstration de la proposition 4.19 ci-dessous, qui est une version plus précise de la proposition 3.2, faisant intervenir la notion d'application sullivannienne du paragraphe 2.2.

*Dans toute la partie, on travaille dans le cadre 2.16 ; la condition (R) du paragraphe 2.3.2 n'a pas besoin d'être satisfaite. On fixe un réseau cocompact irréductible $\Gamma$ de $G$ et un sous-groupe compact maximal $K$ de $G$ contenant $\tau(\mathrm{PSO}(2))$.*

## 4.1. Préliminaires : $\tau$-triangles et tripodes

**4.1.1.** *$\tau$-triangles.* — Rappelons que le groupe $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ agit simplement transitivement sur (et donc s'identifie à) l'ensemble $\mathcal{T}$ des triplets de points deux à deux distincts positivement orientés de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. Ainsi, tout élément de $\mathcal{T}$ est de la forme $h\cdot(0,\infty,-1)$ où $h \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ est unique. (L'ensemble $\mathcal{T}$ s'identifie également à l'ensemble des repères de $\mathbb{H}^2$ (où un repère est par définition une base orthonormée positivement orientée d'un espace tangent $T_x\mathbb{H}^2$ où $x \in \mathbb{H}^2$), ainsi qu'au fibré unitaire tangent $T^1\mathbb{H}^2$ de $\mathbb{H}^2$.)

Comme au paragraphe 2.2.1, le plongement $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$ induit un plongement $\tau$-équivariant $\underline{\tau} : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow G/P_\tau$. On note encore $\underline{\tau}$ le plongement induit de $(\mathbb{P}^1(\mathbb{R}))^n$ dans $(G/P_\tau)^n$ pour $n \geq 2$. La $G$-orbite de $\underline{\tau}(0,\infty)$ (pour l'action diagonale de $G$) est un ouvert dense de $(G/P_\tau)^2$ formé des couples de points dits *transverses*, ou encore en position générique.

*Définition 4.1.* — Un *$\tau$-triangle de $G/P_\tau$* est un triplet de points deux à deux transverses de $G/P_\tau$ de la forme $g \cdot \underline{\tau}(0,\infty,-1)$ où $g \in G$.

Notons que $g\cdot\underline{\tau}(T)$ est un $\tau$-triangle pour tout $g \in G$ et tout $T \in \mathcal{T}$, par équivariance de $\underline{\tau}$. Un $\tau$-triangle détermine de manière unique un $\tau$-cercle $g \circ \underline{\tau} : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to G/P_\tau$ au sens du paragraphe 2.2.1.

Par définition, le groupe $G$ agit transitivement sur l'espace des $\tau$-triangles de $G/P_\tau$. Le stabilisateur de $\underline{\tau}(0,\infty,-1)$ est le centralisateur $Z^\tau$ de $\mathrm{d}\tau(\mathfrak{psl}(2,\mathbb{R}))$ dans $G$ (supposé compact, cf. cadre 2.16). Ainsi, $[g] \mapsto g \cdot \underline{\tau}(0,\infty,-1)$ est une bijection $G$-équivariante entre $G/Z^\tau$ et l'espace des $\tau$-triangles de $G/P_\tau$.

*Remarque 4.2.* — L'espace des $\tau$-triangles de $G/P_\tau$ est en général strictement inclus dans l'espace des triplets ordonnés de points deux à deux transverses de $G/P_\tau$. Par exemple, pour $G = \mathrm{PSL}(n,\mathbb{C})$ et $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$ le plongement irréductible, ces espaces sont de dimensions complexes respectives $(n+1)(n-1)$ et $3n(n-1)/2$.

**4.1.2.** *Tripodes.* — Afin de définir les représentations $(\varepsilon, R)$-presque parfaites, on a besoin d'objets un peu plus précis que les $\tau$-triangles de $G/P_\tau$, qui soient paramétrés par $G$ plutôt que $G/Z^\tau$. Pour cela, Kahn, Labourie et Mozes introduisent une notion de *tripode*, qui est par définition un isomorphisme d'une copie abstraite $G_0$ du groupe $G$ vers $G$ ou, de manière équivalente, un automorphisme de $G$. En réalité, pour démontrer les théorèmes 2.4 et 2.17 il n'est pas nécessaire de considérer tous les automorphismes de $G$ : les automorphismes intérieurs (donnés par la conjugaison par un élément de $G$) suffisent. Dans la suite de cet exposé, nous travaillerons donc directement avec le groupe $G$ plutôt qu'avec les tripodes de Kahn, Labourie et Mozes.

**4.1.3.** *Transformations.* — Kahn, Labourie et Mozes considèrent les transformations suivantes de l'espace $G/Z^\tau$ des $\tau$-triangles de $G/P_\tau$ (cf. figure 5) :

— l'involution inv (« inversion ») qui envoie $g \cdot \underline{\tau}(0,\infty,-1)$ sur $g \cdot \underline{\tau}(\infty,0,1)$ ; elle correspond dans $G/Z^\tau$ à la multiplication à droite par $\tau(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right))$ ;

— le flot $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ qui envoie $g\cdot\underline{\tau}(0,\infty,-1)$ sur $g\cdot\underline{\tau}(0,\infty,-e^t)$ ; il correspond dans $G/Z^\tau$ à la multiplication à droite par $\tau\left(\left(\begin{smallmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2}\end{smallmatrix}\right)\right)$ ;

— la transformation rot (« rotation ») d'ordre trois qui envoie $g\cdot\underline{\tau}(0,\infty,-1)$ sur $g\cdot\underline{\tau}(\infty,-1,0)$ ; elle correspond dans $G/Z^\tau$ à la multiplication à droite par $\tau\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0\end{smallmatrix}\right)\right)$.

Ces transformations se relèvent en des transformations de $G$, encore notées inv, $\varphi_t$ et rot, données par la multiplication à droite par les mêmes éléments. Elles commutent avec l'action de $G$ par multiplication à gauche (que nous noterons parfois avec un point pour éviter toute confusion : $g_1\cdot g_2 := g_1g_2$).

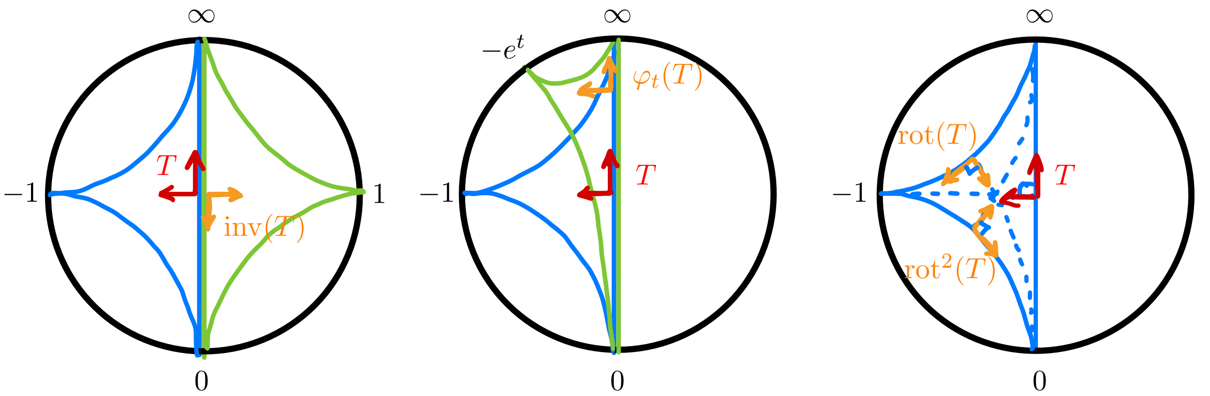


FIGURE 5. Les transformations inv, $\varphi_t$ et rot de $G/Z^\tau$ proviennent de transformations inv, $\varphi_t$ et rot de $\mathcal{T}\simeq\{$repères de $\mathbb{H}^2\}$ représentées ici ; en identifiant $\mathcal{T}$ au fibré unitaire tangent $T^1\mathbb{H}^2$, le flot $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ s'identifie au flot géodésique

**4.1.4.** *Points de vue équivalents.* — Le plongement $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$ induit un plongement $\tau$-équivariant $\underline{\underline{\tau}} : \mathbb{H}^2 \hookrightarrow G/K$. On appellera *$\tau$-copie de* $\mathbb{H}^2$ une surface totalement géodésique de $G/K$ de la forme $g\cdot\underline{\underline{\tau}}(\mathbb{H}^2)$ où $g\in G$. Il est facile de voir (en utilisant par exemple la condition des *systèmes de triplets de Lie*, cf. HELGASON, 2001, Ch. IV, § 7) que toute surface totalement géodésique de $G/K$ est soit contenue dans un plat, soit égale à une $\tau'$-copie de $\mathbb{H}^2$ pour un certain plongement $\tau'$ de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ (ou $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$) dans $G$.

Les objets suivants s'identifient de manière $G$-équivariante :

— les $\tau$-triangles de $G/P_\tau$,

— les triplets ordonnés de points du bord visuel de l'espace symétrique $G/K$, correspondant à trois rayons géodésiques de $G/K$ contenus dans une même $\tau$-copie de $\mathbb{H}^2$, incidents en un point, et formant des angles de $2\pi/3$ en ce point,

— les triangles idéaux de $\tau$-copies de $\mathbb{H}^2$ dans $G/K$,

— les repères de $\tau$-copies de $\mathbb{H}^2$.

Chacune de ces classes d'objets est paramétrée par $G/Z^\tau$ où $Z^\tau$ est compact.

Là où Kahn, Labourie et Mozes travaillent avec les $\tau$-triangles de $G/P_\tau$, Hamenstädt travaille avec les repères de $\tau$-copies de $\mathbb{H}^2$. Là où Kahn, Labourie et Mozes travaillent avec les tripodes, Hamenstädt travaille avec les « $\tau$-repères de $G/K$ », c'est-à-dire avec une $G$-orbite de repères $(v_1,v_2,\dots,v_r)$ de $G/K$ obtenus en complétant des repères $(v_1,v_2)$ de $\tau$-copies de $\mathbb{H}^2$, telle que le stabilisateur de cette $G$-orbite est trivial.

## 4.2. Représentations presque parfaites selon Kahn, Labourie et Mozes

**4.2.1.** *Intuition géométrique.* — Pour tout élément hyperbolique $\alpha \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, on note $\alpha^{\oplus}$ (resp. $\alpha^{\ominus}$) son point fixe attractif (resp. répulsif) dans $\partial\mathbb{H}^2 = \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.

Soit $\Pi$ un pantalon de groupe fondamental $\pi_1(\Pi) = \langle a, b, c \,|\, cba = 1\rangle$, où $a, b, c$ correspondent aux courbes de bord de $\Pi$. Pour $R > 0$, soit $\varrho : \pi_1(\Pi) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ une représentation *$R$-parfaite* (resp. *$(-R)$-parfaite*) comme au paragraphe 3.1, c'est-à-dire l'holonomie d'une structure hyperbolique sur $\Pi$ pour laquelle les trois courbes de bord sont de longueur $2R$ et les points fixes $\varrho(a)^{\ominus}, \varrho(a)^{\oplus}, \varrho(b)^{\ominus}, \varrho(b)^{\oplus}, \varrho(c)^{\ominus}, \varrho(c)^{\oplus} \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ sont dans un ordre cyclique positif (resp. négatif). Considérons les éléments suivants de l'espace $\mathcal{T}$ des triplets de points deux à deux distincts positivement orientés de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ :

$$\begin{cases} T & := & (\varrho(a)^{\ominus}, \varrho(b)^{\ominus}, \varrho(c)^{\ominus}), \\ T' & := & (\varrho(a)^{\ominus}, \varrho(b^{-1}a^{-1})^{\ominus}, \varrho(b)^{\ominus}) \end{cases} \quad \left(\text{resp.} \begin{cases} T & := & (\varrho(b)^{\ominus}, \varrho(a)^{\ominus}, \varrho(c)^{\ominus}), \\ T' & := & (\varrho(b^{-1}a^{-1})^{\ominus}, \varrho(a)^{\ominus}, \varrho(b)^{\ominus}) \end{cases}\right).$$

Les éléments $T, T' \in \mathcal{T}$ correspondent à des triangles idéaux de $\mathbb{H}^2$ qui se projettent en des triangles idéaux de $\Pi$, d'intérieurs disjoints, dont les côtés s'enroulent autour des courbes de bord et qui remplissent tout $\Pi$, comme sur la figure 6.

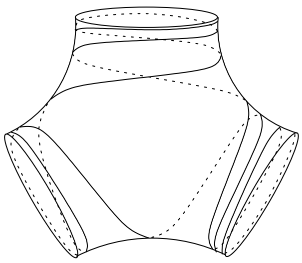

FIGURE 6. Décomposition d'un pantalon hyperbolique en deux triangles idéaux dont les côtés s'enroulent autour des courbes de bord

Adoptons la terminologie suivante, où rot, inv et $\varphi_t$ sont les transformations introduites au paragraphe 4.1.3, et où les signes $\pm$ sont pris tous égaux à $+$ si la représentation est $R$-parfaite, et tous égaux à $-$ si elle est $(-R)$-parfaite.

*Définition 4.3.* — Un élément $\alpha \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ est *$(\pm R)$-réalisé* par un couple $(T_1, T_2)$ d'éléments de $\mathcal{T}^2$ si $\mathrm{rot}^{\pm 1} \circ \mathrm{inv} \circ \varphi_{\pm R}(T_1) = T_2$ et $\mathrm{rot}^{\pm 1} \circ \mathrm{inv} \circ \varphi_{\pm R}(T_2) = \alpha \cdot T_1$.

On vérifie alors (cf. figure 7) que pour $(T, T')$ comme ci-dessus,

$$\begin{cases} \varrho(a) \text{ est } (\pm R)\text{-réalisé par } (T, T'), \\ \varrho(b) \text{ est } (\pm R)\text{-réalisé par } (\mathrm{rot}^{\pm 1}(T), \varrho(b) \cdot (\mathrm{rot}^2)^{\pm 1}(T')), \\ \varrho(c) \text{ est } (\pm R)\text{-réalisé par } ((\mathrm{rot}^2)^{\pm 1}(T), \varrho(a)^{-1} \cdot \mathrm{rot}^{\pm 1}(T')). \end{cases} \tag{4.1}$$

Une représentation $\varrho : \pi_1(\Pi) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ est $(\pm R)$-parfaite si et seulement s'il existe $(T, T') \in \mathcal{T}^2$ vérifiant ces conditions.

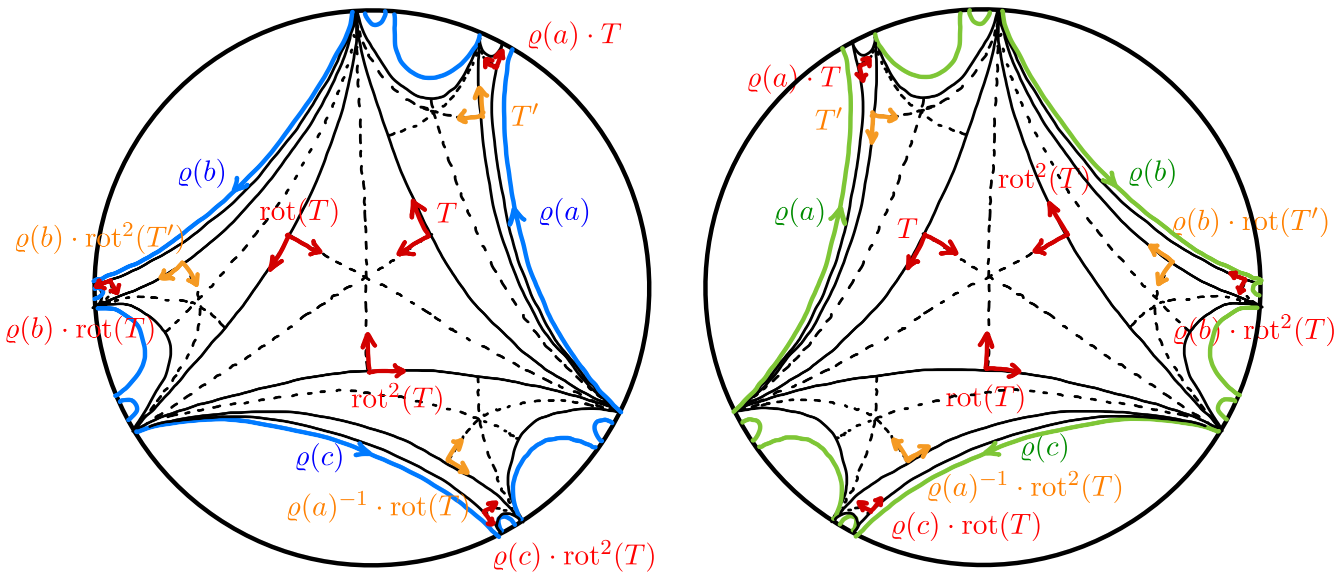


FIGURE 7. Représentations $R$-parfaite (à gauche) et $(-R)$-parfaite (à droite)

*Remarque 4.4.* — Si $\alpha$ est $(\pm R)$-réalisé par $(T, T')$ au sens de la définition 4.3 et si l'on voit $T$ comme un élément de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, alors $T^{-1}\alpha T$ est égal à $\left(\begin{smallmatrix} e^R & 0 \\ 1+e^{-R} & e^{-R}\end{smallmatrix}\right)$ (resp. $\left(\begin{smallmatrix} e^{-R} & 1+e^{-R} \\ 0 & e^R\end{smallmatrix}\right)$). En particulier, $\alpha$ est hyperbolique de longueur de translation $2R$, et ses points fixes répulsif et attractif vérifient que $T^{-1}\cdot\alpha^{\ominus}\in\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est égal à $0$ (resp. $\infty$), et $T^{-1}\cdot\alpha^{\oplus}\in\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est proche de $\infty$ (resp. $0$) pour $R$ grand.

Ainsi, lorsque $R$ tend vers $0$, les points $\varrho(a)^{\oplus}, \varrho(b)^{\oplus}, \varrho(c)^{\oplus}$ d'une représentation $(\pm R)$-parfaite $\varrho : \pi_1(\Pi)\to\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ tendent respectivement vers $\varrho(a)^{\ominus}, \varrho(b)^{\ominus}, \varrho(c)^{\ominus}$ ; autrement dit, $\varrho(a), \varrho(b), \varrho(c)\in\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ tendent vers des éléments paraboliques. Lorsque $R$ tend vers $+\infty$, les points $\varrho(a)^{\oplus}, \varrho(b)^{\oplus}, \varrho(c)^{\oplus}$ d'une représentation $(\pm R)$-parfaite $\varrho : \pi_1(\Pi)\to\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ tendent respectivement vers $\varrho(b)^{\ominus}, \varrho(c)^{\ominus}, \varrho(a)^{\ominus}$ (cf. figure 7).

*Remarque 4.5.* — Les représentations $R$-parfaites de $\pi_1(S)$ dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ sont les images des représentations $(-R)$-parfaites par la conjugaison par un élément de $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$ qui renverse l'orientation de $\mathbb{H}^2$.

**4.2.2.** *Représentations presque parfaites à valeurs dans $G$.* — Munissons $G$ d'une métrique riemannienne invariante par multiplication à gauche par $G$ (pour cela, on choisit une forme quadratique définie positive sur $\mathfrak{g}$ et on la pousse en avant par $G$). Quitte à la remplacer par sa moyenne par le groupe d'ordre trois engendré par rot, on suppose cette métrique également invariante par rot. On note $d_G$ la distance correspondante.

On a une notion naturelle de représentation $(\pm R)$-*parfaite* de $\pi_1(\Pi)$ dans $G$, à savoir la composition d'une représentation $(\pm R)$-parfaite à valeurs dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ au sens ci-dessus, avec $g\,\tau(\cdot)\,g^{-1} : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})\hookrightarrow G$ où $g\in G$. La caractérisation (4.1) permet d'affaiblir cette notion de la manière suivante.

*Définition 4.6.* — Soient $\varepsilon, R > 0$. On dit qu'un élément $\alpha \in G$ est *$(\varepsilon, \pm R)$-presque réalisé* par un couple $(g, g') \in G^2$ s'il existe $(h, h') \in G^2$ vérifiant les quatre conditions suivantes :

$$\begin{aligned} d_G(g,h) < \varepsilon, &\quad d_G(\mathrm{rot}^{\pm 1} \circ \mathrm{inv} \circ \varphi_{\pm R}(h), g') < \varepsilon, \\ d_G(g',h') < \varepsilon, &\quad d_G(\mathrm{rot}^{\pm 1} \circ \mathrm{inv} \circ \varphi_{\pm R}(h'), \alpha g) < \varepsilon. \end{aligned}$$

On considère les conditions suivantes sur un quintuplet $(\alpha, \beta, \gamma, g, g') \in G^5$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \text{ est } (\varepsilon, \pm R)\text{-presque réalisé par } (g, g'), \\ \beta \text{ est } (\varepsilon, \pm R)\text{-presque réalisé par } (\mathrm{rot}^{\pm 1}(g), \beta \cdot (\mathrm{rot}^2)^{\pm 1}(g')), \\ \gamma \text{ est } (\varepsilon, \pm R)\text{-presque réalisé par } ((\mathrm{rot}^2)^{\pm 1}(g), \alpha^{-1} \cdot \mathrm{rot}^{\pm 1}(g')). \end{array} \right. \tag{4.2}$$

*Définition 4.7.* — Soit $\Pi$ un pantalon de groupe fondamental $\pi_1(\Pi) = \langle a, b, c \,|\, cba = 1 \rangle$. On dit qu'une représentation $\rho : \pi_1(\Pi) \to G$ est *$(\varepsilon, \pm R)$-presque parfaite* s'il existe $(g, g') \in G^2$ tel que le quintuplet $Q := (\rho(a), \rho(b), \rho(c), g, g')$ vérifie (4.2). Ce quintuplet est une *donnée géométrique* associée à la représentation $(\varepsilon, \pm R)$-presque parfaite $\rho$.

*Remarque 4.8.* — Ceci ne dépend pas de l'ordre choisi pour les courbes de bord : si $Q = (\rho(a), \rho(b), \rho(c), g, g')$ vérifie (4.2), alors

$$\begin{aligned} \mathrm{sym}(Q) &:= \big(\rho(b), \rho(c), \rho(a), \mathrm{rot}^{\pm 1}(g), \rho(b) \cdot (\mathrm{rot}^2)^{\pm 1}(g')\big) \\ \text{et} \quad \mathrm{sym}^2(Q) &:= \big(\rho(c), \rho(a), \rho(b), (\mathrm{rot}^2)^{\pm 1}(g), \rho(a)^{-1} \cdot \mathrm{rot}^{\pm 1}(g')\big) \end{aligned}$$

aussi. De plus, la notion de représentation $(\varepsilon, \pm R)$-presque parfaite est invariante par conjugaison au but par $G$ : si $(\rho(a), \rho(b), \rho(c), g, g')$ vérifie (4.2), alors $(x\rho(a)x^{-1}, x\rho(b)x^{-1}, x\rho(c)x^{-1}, xg, xg')$ aussi pour tout $x \in G$.

*Remarque 4.9.* — Nous verrons à la proposition 5.11.(1) qu'en supposant la condition (R) du paragraphe 2.3.2 vérifiée, les notions de représentations $(\varepsilon, R)$-presque parfaite et $(\varepsilon, -R)$-presque parfaite coïncident, mais pour des éléments $(g, g') \in G^2$ qui diffèrent par la multiplication à droite par un certain élément de $G$ envoyant $\mathsf{h}$ sur $-\mathsf{h}$ (ceci correspond au renversement d'orientation dans la remarque 4.5).

Voir la figure 8 pour une illustration dans le cas des représentations presque parfaites à valeurs dans un réseau $\Gamma$ de $G$.

### 4.3. Rappels : proximalité

Soient $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{k}^\perp$ un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{g}$, et $\mathfrak{a}^+$ une chambre de Weyl de $\mathfrak{a}$ contenant $\mathsf{h}$, comme au paragraphe 2.3.1. Soit $Z_K(\mathfrak{a})$ le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans $K$. Comme $\mathsf{h}$ est supposé régulier (*i.e.* $\mathsf{h} \in \mathrm{Int}(\mathfrak{a}^+)$), le sous-groupe parabolique $P_\tau$ de $G$ est minimal et pour tout élément $g \in G$, les deux notions suivantes sont équivalentes :

- $g$ est *proximal dans* $G/P_\tau$, au sens où il admet un unique point fixe attractif $g^\oplus$ et un unique point fixe répulsif $g^\ominus$ dans $G/P_\tau$,
- $g$ est *loxodromique*, au sens où il est conjugué à un élément de la forme $\exp(x)k$ où $x \in \mathrm{Int}(\mathfrak{a}^+)$ et $k \in Z_K(\mathfrak{a})$ ; l'élément $x$ est unique et l'on pose $\lambda(g) := x \in \mathrm{Int}(\mathfrak{a}^+)$.

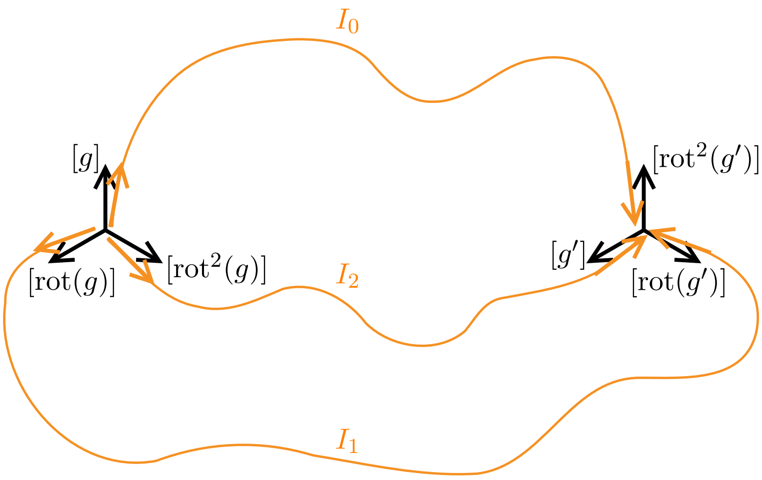


FIGURE 8. Donnée géométrique $Q = (\rho(a), \rho(b), \rho(c), g, g')$ associée à une représentation $(\varepsilon, R)$-presque parfaite $\rho : \pi_1(\Pi) \to G$ à valeurs dans un réseau $\Gamma$ de $G$ : il existe dans $\Gamma\backslash G$ un segment $I_0$ (resp. $I_1$, resp. $I_2$) d'orbite du flot $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$, de longueur $R$, qui relie un élément proche de $[g]$ (resp. $[\mathrm{rot}(g)]$, resp. $[\mathrm{rot}^2(g)]$) à un élément proche de l'inverse inv de $[\mathrm{rot}^2(g')]$ (resp. $[\mathrm{rot}(g')]$, resp. $[g']$). L'élément $\rho(a)$ (resp. $\rho(b)$, resp. $\rho(c)$) est « presque réalisé » dans $\Gamma\backslash G$ par $I_0$ (resp. $I_1$, resp. $I_2$) suivi de $I_2$ (resp. $I_0$, resp. $I_1$) parcouru en sens inverse.

Le centralisateur $Z_G(\alpha_0)$ de $\alpha_0 := \exp(\mathfrak{h})$ dans $G$ est le produit de $A := \exp(\mathfrak{a})$ et de $Z_K(\mathfrak{a})$. Pour un élément $\alpha \in G$ proximal dans $G/P_\tau$ quelconque, conjugué à $\exp(x)k$ où $x \in \mathrm{Int}(\mathfrak{a}^+)$ et $k \in Z_K(\mathfrak{a})$, le centralisateur $Z_G(\alpha)$ de $\alpha$ dans $G$ est conjugué au produit de $A$ et du groupe $Z_K(\mathfrak{a}) \cap Z_K(k)$, qui peut être plus petit que $Z_K(\mathfrak{a})$.

*Exemple 4.10.* — Soient $G = \mathrm{PSL}(n, \mathbb{C})$ et $\tau : \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ le plongement irréductible (cf. exemple 2.13). On a $K = \mathrm{PSU}(n)$. Le sous-espace $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ est constitué des matrices diagonales réelles de trace nulle, et le groupe $A = \exp(\mathfrak{a})$ (resp. $Z_K(\mathfrak{a})$) des matrices diagonales de $G$ à coefficients strictement positifs (resp. complexes de module un). Comme $Z_K(\mathfrak{a})$ est abélien, le centralisateur $Z_G(\alpha)$ de tout élément $\alpha \in G$ proximal dans $G/P_\tau$ est conjugué à $Z_G(\alpha_0) = A\, Z_K(\mathfrak{a}) \simeq (\mathbb{C}^*)^{n-1}$.

*Exemple 4.11.* — Soient $G = \mathrm{SO}(n, 1)$ et $\tau : \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \simeq \mathrm{SO}(2, 1)_0 \hookrightarrow G$ le plongement standard (cf. exemple 2.21). On a $K = \mathrm{S}(\mathrm{O}(n) \times \mathrm{O}(1))$. Le groupe $A = \exp(\mathfrak{a})$ est isomorphe à $\mathbb{R}_+^*$, et $Z_K(\mathfrak{a})$ à $\mathrm{S}(\mathrm{O}(n-1) \times \mathrm{O}(1) \times \mathrm{O}(1))$. Pour $\alpha = \exp(x)k \in G$ où $x \in \mathrm{Int}(\mathfrak{a}^+)$ et $k \in Z_K(\mathfrak{a})$, le centralisateur $Z_G(\alpha)$ de $\alpha$ dans $G$ est strictement contenu dans $Z_G(\alpha_0)$ dès que $k$ n'est pas central dans $Z_K(\mathfrak{a})$, ce qui peut se produire dès que $n \geq 4$.

### 4.4. Quelques observations utiles sur les pantalons presque parfaits

Soit $\|\cdot\|_\mathfrak{a}$ la norme euclidienne sur $\mathfrak{a}$ induite par la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. Munissons $G/P_\tau$ de la distance $d_\tau$ du paragraphe 2.2.2, invariante par $K \supset \tau(\mathrm{PSO}(2))$. On renvoie au paragraphe 4.3 pour la notion de proximalité dans $G/P_\tau$ et la définition de $\lambda$.

Lemme 4.12. — *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, tout $R > 0$ assez grand et tout $(g, g', \alpha) \in G^3$, si $\alpha$ est $(\varepsilon, R)$-presque (resp. $(\varepsilon, -R)$-presque) réalisé par $(g, g')$ au sens de la définition 4.6, alors*
- *$\alpha$ est proximal dans $G/P_\tau$ ;*
- *le point fixe attractif (resp. répulsif) de $g^{-1}\alpha g$ dans $G/P_\tau$ est à distance $\leq C(\varepsilon + e^{-R/2})$ de $\underline{\tau}(\infty)$ (resp. $\underline{\tau}(0)$) pour $d_\tau$ ;*
- *$\|\lambda(\alpha) - \lambda(\exp(R\,\mathsf{h}))\|_{\mathfrak{a}} \leq C(\varepsilon + e^{-R/2})$ ; en particulier, la longueur de translation de $\alpha$ dans $G/K$ appartient à $[2R - C(\varepsilon + e^{-R/2}), 2R + C(\varepsilon + e^{-R/2})]$ ;*
- *$g^{-1}g'$ appartient à $\mathcal{B}_\varepsilon\, \tau\big(\big(\begin{smallmatrix} e^{R/2} & 0 \\ e^{-R/2} & e^{-R/2} \end{smallmatrix}\big)\big)\, \mathcal{B}_\varepsilon$ (resp. à $\mathcal{B}_\varepsilon\, \tau\big(\big(\begin{smallmatrix} e^{-R/2} & e^{-R/2} \\ 0 & e^{R/2} \end{smallmatrix}\big)\big)\, \mathcal{B}_\varepsilon$), où $\mathcal{B}_\varepsilon$ désigne la boule fermée de rayon $\varepsilon$ centrée en l'élément neutre dans $(G, d_G)$.*

*Démonstration.* — Considérons les éléments $h_R := \big(\begin{smallmatrix} e^{R/2} & 0 \\ e^{-R/2} & e^{-R/2} \end{smallmatrix}\big)$ et $h_{-R} := \big(\begin{smallmatrix} e^{-R/2} & e^{-R/2} \\ 0 & e^{R/2} \end{smallmatrix}\big)$ de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Généralisant la remarque 4.4, on note que pour tous $\varepsilon, R > 0$, si $\alpha$ est $(\varepsilon, \pm R)$-presque réalisé par $(g, g') \in G^2$, alors il existe $g_1, g_2, g_3, g_4 \in \mathcal{B}_\varepsilon$ tels que

$$g^{-1}g' = g_1\, \tau(h_{\pm R})\, g_2 \qquad \text{et} \qquad g^{-1}\alpha g = g_1\, \tau(h_{\pm R})\, (g_2 g_3)\, \tau(h_{\pm R})\, g_4.$$

L'élément $h_R \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ est hyperbolique de point fixe répulsif $0 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ et de point fixe attractif $e^{R/2} - 1 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ à distance $\arctan(1/(e^{R/2} - 1)) \sim e^{-R/2}$ de $\infty$ pour la distance $\mathrm{PSO}(2)$-invariante de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. De même, $h_{-R}$ est hyperbolique de point fixe attractif $\infty$ et de point fixe répulsif à distance $\sim e^{-R/2}$ de $0$.

Posons $x_0^+ := \underline{\tau}(\infty) \in G/P_\tau$ et notons $H_0^-$ l'ensemble des points de $G/P_\tau$ non transverses à $\underline{\tau}(0)$. Il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{V}_{3r}(x_0^+) \cap \mathcal{V}_{3r}(H_0^-) = \emptyset$, où $\mathcal{V}_\delta(\cdot)$ désigne le $\delta$-voisinage uniforme dans $(G/P_\tau, d_\tau)$ pour $\delta > 0$. On vérifie qu'il existe $C > 0$ avec les propriétés suivantes :
- pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit et tout $g \in \mathcal{B}_\varepsilon$, la constante de Lipschitz de $g$ dans $(G/P_\tau, d_\tau)$ est $\leq 1 + C\varepsilon$ et l'on a $d_\tau(x, g \cdot x) \leq C\varepsilon$ pour tout $x \in G/P_\tau$ ;
- pour tout $R > 0$ assez grand, $\tau(h_R)$ envoie le complémentaire de $\mathcal{V}_r(H_0^-)$ dans $\mathcal{V}_{Ce^{-R/2}}(x_0^+)$ avec une constante de Lipschitz $\leq Ce^{-R}$.

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, tout $R > 0$ assez grand et tous $g_1, g_2, g_3, g_4 \in \mathcal{B}_\varepsilon$, l'élément $g_1\, \tau(h_R)\, g_2 g_3\, \tau(h_R)\, g_4 \in G$ envoie le complémentaire de $\mathcal{V}_{2r}(H_0^-)$ dans $\mathcal{V}_{C(\varepsilon + e^{-R/2})}(x_0^+)$ avec une constante de Lipschitz $\leq (1 + C\varepsilon)^4 C^2 e^{-2R}$, donc de manière uniformément contractante si $\varepsilon$ est assez petit et $R$ assez grand. On en déduit que $g_1\, \tau(h_R)\, g_2 g_3\, \tau(h_R)\, g_4$ est proximal dans $G/P_\tau$, de point fixe attractif à distance $\leq C(\varepsilon + e^{-R/2})$ de $x_0^+ = \underline{\tau}(\infty)$. En raisonnant de même, on voit que son point fixe répulsif est à distance $\leq C(\varepsilon + e^{-R/2})$ de $\underline{\tau}(0)$. La borne supérieure pour $\|\lambda(g_1\, \tau(h_R)\, g_2 g_3\, \tau(h_R)\, g_4) - \lambda(\exp(R\,\mathsf{h}))\|_{\mathfrak{a}}$ est obtenue par des raisonnements analogues, tenant compte de manière plus précise de la constante de Lipschitz, dans divers espaces projectifs associés à $\tau$, comme dans Benoist (1997). Ceci prouve les propriétés voulues de $g^{-1}\alpha g = g_1\, \tau(h_R)\, g_2 g_3\, \tau(h_R)\, g_4$ lorsque $\alpha$ est $(\varepsilon, R)$-presque réalisé par $(g, g') \in G^2$. Le cas où $\alpha$ est $(\varepsilon, -R)$-presque réalisé par $(g, g')$ est analogue. □

Corollaire 4.13. — *Si $\varepsilon > 0$ est assez petit et $R > 0$ assez grand, alors*

1. *toute représentation $(\varepsilon, \pm R)$-presque parfaite $\rho : \pi_1(\Pi) \to G$ est $\tau$-*générique *au sens où $\rho(a)$, $\rho(b)$ et $\rho(c)$ sont proximaux dans $G/P_\tau$ de points fixes attractifs $\rho(a)^\oplus, \rho(b)^\oplus, \rho(c)^\oplus \in G/P_\tau$ deux à deux transverses ;*
2. *pour tout réseau cocompact $\Gamma$ de $G$, il n'y a qu'un nombre fini de classes de conjugaison de représentations $(\varepsilon, \pm R)$-presque parfaites de $\pi_1(\Pi)$ à valeurs dans $\Gamma$.*

*Démonstration.* — (1) Les points $\underline{\tau}(\infty)$, $\underline{\tau}(-1)$ et $\underline{\tau}(0)$ sont transverses et la transversalité est une condition ouverte. Par conséquent, il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x, y \in G/P_\tau$, si $x$ est $\delta$-proche de l'un des points $\underline{\tau}(\infty)$, $\underline{\tau}(-1)$ ou $\underline{\tau}(0)$, et si $y$ est $\delta$-proche d'un autre de ces points, alors $x$ et $y$ sont transverses. Soit $(\rho(a), \rho(b), \rho(c), g, g')$ une donnée géométrique associée à $\rho$, comme à la définition 4.7. D'après le lemme 4.12, si $\varepsilon$ est assez petit et $R$ assez grand, alors $g^{-1}\rho(a)g$ (resp. $g^{-1}\rho(b)g$, resp. $g^{-1}\rho(c)g$) est proximal dans $G/P_\tau$, de point fixe attractif $\delta$-proche de $\underline{\tau}(\infty)$ (resp. $\underline{\tau}(-1)$, resp. $\underline{\tau}(0)$). On conclut en remarquant que $(g^{-1}\rho(d)g)^\oplus = g^{-1} \cdot \rho(d)^\oplus$ pour tout $d \in \{a, b, c\}$ et que l'action de $G$ préserve la transversalité.

(2) Soit $\Gamma$ un réseau cocompact de $G$ : il existe une partie compacte $K_1$ de $G$ telle que $G = \Gamma K_1$. D'après le lemme 4.12, pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit et tout $R > 0$ assez grand, il existe une partie compacte $K_2$ de $G$ telle que pour tout $(g, g', \alpha) \in G^3$, si $\alpha$ est $(\varepsilon, \pm R)$-presque réalisé par $(g, g')$ au sens de la définition 4.6, alors $g^{-1}\alpha g \in K_2$. En particulier, si $\rho : \pi_1(\Pi) \to \Gamma$ est $(\varepsilon, \pm R)$-presque parfaite, de donnée géométrique $(\rho(a), \rho(b), \rho(c), g, g')$ comme à la définition 4.7, alors $g^{-1}\rho(a)g$ et $g^{-1}\rho(b)g$ appartiennent tous deux au compact $K_2' := K_2 \cup \tau\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right)^{\pm 1} K_2 \tau\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right)^{\mp 1}$. Si l'on écrit $g = xk_1$ où $x \in \Gamma$ et $k_1 \in K_1$, alors $x^{-1}\rho(a)x$ et $x^{-1}\rho(b)x$ appartiennent tous deux à $K_1 K_2' K_1^{-1} \cap \Gamma$, qui est fini car $\Gamma$ est discret dans $G$. □

Le lemme 4.12 implique que pour $\varepsilon > 0$ assez petit et $R$ assez grand, l'image de toute représentation $(\varepsilon, \pm R)$-presque parfaite $\rho : \pi_1(\Pi) \to G$ est un groupe $\varepsilon$-*Schottky* au sens de Benoist (1997, Def. 4.1). En particulier, $\rho$ est injective et discrète, c'est un plongement quasi-isométrique (cf. Benoist, 1997) et plus précisément une représentation $P_\tau$-anosovienne au sens du paragraphe 1.4 (cf. Canary, Lee, Sambarino et Stover, 2017 ; Kapovich, Leeb et Porti, 2018).

### 4.5. Application « pied » et bons recollements selon Kahn, Labourie, Mozes

Afin de définir les bons recollements de pantalons presque parfaits, Kahn, Labourie et Mozes introduisent une notion d'application « pied », définie de la manière suivante.

Soit $\alpha \in G$ un élément proximal dans $G/P_\tau$. Soit $L_\alpha$ l'ensemble des éléments $g \in G$ dont le $\tau$-triangle $g \cdot \underline{\tau}(0, \infty, -1)$ de $G/P_\tau$ associé est de la forme $(\alpha^\ominus, \alpha^\oplus, \cdot)$. Choisissons $r > 0$ assez petit de sorte que le $r$-voisinage uniforme $\mathcal{U}_\alpha$ de $L_\alpha$ dans $(G, d_G)$ soit homéomorphe au produit direct de $L_\alpha$ avec une boule.

*Définition 4.14.* — L'*application « pied »* associée à l'élément proximal $\alpha \in G$ est la projection orthogonale $\Psi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \to L_\alpha$ sur $L_\alpha$.

On peut choisir le même $r > 0$ pour tous les éléments $\alpha$ par la remarque suivante.

*Remarque 4.15.* — Pour $\alpha_0 = \exp(\mathsf{h})$, l'ensemble $L_{\alpha_0}$ est le centralisateur $Z_G(\alpha_0) = AZ_K(\mathfrak{a})$ de $\alpha_0$ dans $G$ (cf. paragraphe 4.3). Pour un élément proximal quelconque $\alpha \in G$, on a $L_\alpha = g_\alpha L_{\alpha_0}$ et $\mathcal{U}_\alpha = g_\alpha \mathcal{U}_{\alpha_0}$ et $\Psi_\alpha = g_\alpha \Psi_{\alpha_0}(g_\alpha^{-1}\cdot)$ où $g_\alpha \in G$ envoie $(\alpha_0^{\ominus}, \alpha_0^{\oplus}) = (\underline{\tau}(0), \underline{\tau}(\infty))$ sur $(\alpha^{\ominus}, \alpha^{\oplus})$. Le stabilisateur $\mathrm{stab}_G(\alpha^{\ominus}, \alpha^{\oplus})$ de $(\alpha^{\ominus}, \alpha^{\oplus}) \in G/P_\tau \times G/P_\tau$ dans $G$ est égal à $g_\alpha L_{\alpha_0} g_\alpha^{-1} = L_\alpha g_\alpha^{-1}$ ; il agit sur $\mathcal{U}_\alpha$ et $L_\alpha$ par multiplication à gauche et $\Psi_\alpha$ est équivariante pour ces actions.

LEMME 4.16. — *1. Pour tout élément proximal $\alpha \in G$, les ensembles*

$$\mathcal{N}_\delta := \big\{ g \in G \;\big|\; d_\tau\big(g^{-1} \cdot \alpha^{\ominus}, \underline{\tau}(0)\big) \leq \delta \text{ et } d_\tau\big(g^{-1} \cdot \alpha^{\oplus}, \underline{\tau}(\infty)\big) \leq \delta \big\},$$

*pour $\delta > 0$, forment une base de voisinages* $\mathrm{stab}_G(\alpha^{\ominus}, \alpha^{\oplus})$*-invariants de $L_\alpha$ dans $G$.*

*2. En particulier, si $\varepsilon > 0$ est assez petit et $R > 0$ assez grand, alors pour toute représentation $(\varepsilon, \pm R)$-presque parfaite $\rho : \pi_1(\Pi) \to G$, de donnée géométrique $(\rho(a), \rho(b), \rho(c), g, g')$ comme à la définition 4.7, on a $g \in \mathcal{U}_{\rho(a)^{\pm 1}}$.*

*Démonstration.* — (1) Soit $g_\alpha \in G$ tel que $g_\alpha^{-1} \cdot (\alpha^{\ominus}, \alpha^{\oplus}) = (\underline{\tau}(0), \underline{\tau}(\infty))$. L'espace homogène $\mathrm{stab}_G(\alpha^{\ominus}, \alpha^{\oplus})\backslash G$ s'identifie à l'ensemble des couples de points transverses de $G/P_\tau$ via $[g] \mapsto g^{-1} \cdot (\alpha^{\ominus}, \alpha^{\oplus})$. Par conséquent, une base de voisinages de $[g_\alpha]$ dans $\mathrm{stab}_G(\alpha^{\ominus}, \alpha^{\oplus})\backslash G$ est donnée par les ensembles

$$[\mathcal{N}_\delta] := \big\{ [g] \in \mathrm{stab}_G(\alpha^{\ominus}, \alpha^{\oplus})\backslash G \;\big|\; d_\tau\big(g^{-1} \cdot \alpha^{\ominus}, \underline{\tau}(0)\big) \leq \delta \text{ et } d_\tau\big(g^{-1} \cdot \alpha^{\oplus}, \underline{\tau}(\infty)\big) \leq \delta \big\},$$

pour $\delta > 0$. Les images réciproques $\mathcal{N}_\delta$ des $[\mathcal{N}_\delta]$ par la projection naturelle $G \to \mathrm{stab}_G(\alpha^{\ominus}, \alpha^{\oplus})\backslash G$ forment alors une base de voisinages $\mathrm{stab}_G(\alpha^{\ominus}, \alpha^{\oplus})$-invariants de $L_\alpha$ dans $G$.

(2) Conséquence immédiate de (1), de la définition de $\mathcal{U}_{\rho(a)^{\pm 1}}$ et du lemme 4.12. □

Notons que le flot $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ du paragraphe 4.1.3 préserve $L_\alpha$, alors que l'involution inv échange $L_\alpha$ et $L_{\alpha^{-1}}$.

Dans la définition suivante, Kahn, Labourie et Mozes ont en tête des couples $(\Pi^+, \Pi^-)$ de pantalons adjacents le long d'une courbe de bord $a$ comme sur la figure 3, à droite.

*Définition 4.17.* — Soient $\Pi^+$ et $\Pi^-$ deux pantalons, de groupes fondamentaux $\pi_1(\Pi^{\pm}) = \langle a^{\pm}, b^{\pm}, c^{\pm} \,|\, c^{\pm} b^{\pm} a^{\pm} = 1 \rangle$. Soient $\varepsilon, R > 0$ et $\rho^{\pm} : \pi_1(\Pi^{\pm}) \to G$ des représentations $(\varepsilon, \pm R)$-presque parfaites de données géométriques $Q^{\pm} = (\rho^{\pm}(a^{\pm}), \rho^{\pm}(b^{\pm}), \rho^{\pm}(c^{\pm}), g^{\pm}, g'^{\pm})$. Pour $\varepsilon' > 0$, on dit que $\rho^+$ et $\rho^-$ (ou leurs images) sont *$\varepsilon'$-bien recollées le long de $a^+$ et $a^-$* via $Q^+$ et $Q^-$ si $\rho^+(a^+) = \rho^-(a^-) =: \alpha \in G$, si $g^{\pm} \in \mathcal{U}_{\alpha^{\pm 1}}$ et si

$$d_G\big(\Psi_\alpha(g^+), \varphi_1 \circ \mathrm{inv} \circ \Psi_{\alpha^{-1}}(g^-)\big) < \varepsilon'. \tag{4.3}$$

Lorsque $R$ est grand, l'élément $g^{\pm}$ est très proche de son image par $\Psi_{\alpha^{\pm 1}}$ (lemmes 4.12 et 4.16.(1)), et l'inégalité (4.3) signifie donc que $g^-$ est « presque » obtenu à partir de $g^+$ par inversion et décalage de 1 (cf. figure 9). En pratique, on prendra des représentations $(\varepsilon/R, \pm R)$-presque parfaites qui sont $\varepsilon'$-bien recollées pour $\varepsilon' = C\varepsilon/R$ où $C > 0$ est une constante ne dépendant que de $G$.

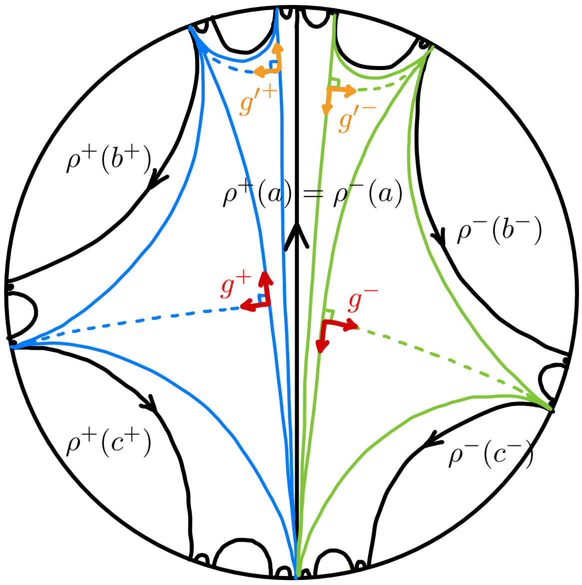


FIGURE 9. Représentations $(\varepsilon, \pm R)$-presque parfaites $\rho^{\pm}$ qui sont bien recollées au sens de Kahn, Labourie et Mozes

*Remarque 4.18.* — En utilisant le lemme 4.12, on vérifie que pour tout $\delta > 0$, si $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ sont assez petits et $R > 0$ assez grand, alors les images par $(g^-)^{-1}$ des points $\rho^{\pm}(a^{\pm})^{\ominus}$, $\rho^{\pm}(a^{\pm})^{\oplus}$, $\rho^+(b^+)^{\ominus}$, $\rho^+(b^+)^{\oplus}$, $\rho^+(c^+)^{\ominus}$, $\rho^+(c^+)^{\oplus}$, $\rho^-(b^-)^{\ominus}$, $\rho^-(b^-)^{\oplus}$, $\rho^-(c^-)^{\ominus}$ et $\rho^-(c^-)^{\oplus}$ sont à distance $\leq \delta$ pour $d_\tau$, respectivement, de $\underline{\tau}(0)$, $\underline{\tau}(\infty)$, $\underline{\tau}(\infty)$, $\underline{\tau}(-e)$, $\underline{\tau}(-e)$, $\underline{\tau}(0)$, $\underline{\tau}(\infty)$, $\underline{\tau}(1)$, $\underline{\tau}(1)$ et $\underline{\tau}(0)$ (cf. figure 9).

### 4.6. Injectivité des représentations de $\pi_1(S)$ dont les restrictions aux pantalons sont presque parfaites et bien recollées

Kahn, Labourie et Mozes établissent la version plus précise suivante de la proposition 3.2. On note $\sigma_\Pi : \{a_\Pi, b_\Pi, c_\Pi\} \to \{a_\Pi, b_\Pi, c_\Pi\}$ la permutation cyclique envoyant $a_\Pi$ sur $b_\Pi$, et l'on renvoie à la remarque 4.8 pour la définition de sym.

PROPOSITION 4.19. — *Dans le cadre 2.16, soit $\Gamma$ un réseau cocompact irréductible de $G$, et soit $S$ une surface compacte de genre au moins deux avec une décomposition en pantalons bipartie $\mathcal{P}$ et un graphe $\mathcal{G}$ comme au paragraphe 3.1, donnant une présentation $\pi_1(\Pi) = \langle a_\Pi, b_\Pi, c_\Pi \,|\, c_\Pi b_\Pi a_\Pi = 1\rangle$ pour tout $\Pi \in \mathcal{P}$. Pour tout $\delta > 0$, tout $\varepsilon > 0$ assez petit par rapport à $\delta$ et tout $R > 0$ assez grand par rapport à $\varepsilon$, si une représentation $\rho : \pi_1(S) \to \Gamma$ vérifie que*

1. *pour tout $\Pi^{\pm} \in \mathcal{P}^{\pm}$, la restriction $\rho_{\Pi^{\pm}}$ de $\rho$ à $\pi_1(\Pi^{\pm})$ est $(\varepsilon/R, \pm R)$-presque parfaite comme à la définition 4.7, et*
2. *on peut choisir les données géométriques $Q_\Pi$ des $\rho_\Pi$ (définition 4.7) de telle sorte que pour tous $\Pi^+, \Pi^- \in \mathcal{P}$ adjacents le long d'une courbe de bord correspondant à $\sigma_{\Pi^+}^{i^+}(a_{\Pi^+}) \in \pi_1(\Pi^+)$ et $\sigma_{\Pi^-}^{i^-}(a_{\Pi^-}) \in \pi_1(\Pi^-)$ où $i^+, i^- \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, les restrictions $\rho_{\Pi^+}$*

*et* $\rho_{\Pi^-}$ *sont* $(\varepsilon/R)$*-bien recollées le long de* $\sigma_{\Pi^+}^{i^+}(a_{\Pi^+})$ *et* $\sigma_{\Pi^-}^{i^-}(a_{\Pi^-})$ *via* $\mathrm{sym}^{i^+}(Q_{\Pi^+})$ *et* $\mathrm{sym}^{i^-}(Q_{\Pi^-})$*, comme à la définition 4.17,*

*alors* $\rho$ *est injective et admet une application de bord* $\xi : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to G/P_\tau$ *qui est* $(\varrho_R, \rho)$*-équivariante (pour une représentation* $R$*-parfaite* $\varrho_R$ *comme au paragraphe 3.1) et* $(\delta, \tau)$*-sullivannienne.*

Nous esquissons à présent les idées de la démonstration. Ces considérations de Kahn, Labourie et Mozes sur les applications de bord sullivanniennes, en lien avec les représentations anosoviennes en rang supérieur, constituent l'une des nouveautés importantes par rapport à l'approche originale de Kahn et Marković.

**4.6.1.** *Pavages de* $\mathbb{H}^2$ *par des hexagones.* — À toute représentation injective et discrète $\varrho : \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ est associé un pavage $\varrho(\pi_1(S))$-invariant $\mathrm{Hex}_\varrho$ de $\mathbb{H}^2$ par des hexagones à angles droits, obtenu en considérant les axes de translation dans $\mathbb{H}^2$ des images par $\varrho$ des éléments de $\pi_1(S)$ correspondant aux courbes de bord des pantalons de $\mathcal{P}$, et en rajoutant la perpendiculaire commune à toute paire d'axes *adjacents* (c'est-à-dire non séparés par un autre axe). Ainsi, chaque hexagone est bordé par trois segments d'axe de translation (« côtés principaux ») et trois perpendiculaires communes.

Si $\varrho_R : \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ est $R$-parfaite, où $R > 1$, alors les côtés principaux des hexagones de $\mathrm{Hex}_{\varrho_R}$ sont tous de longueur $R$, et deux hexagones adjacents le long d'un côté principal y sont toujours décalés de 1 (cf. figure 10).

Tout hexagone $H$ de $\mathrm{Hex}_{\varrho_R}$ définit un triplet $(a, b, c)$ d'éléments de $\pi_1(S)$, unique à permutation cyclique près, tel que les côtés principaux de $H$ sont contenus dans les axes de translation $A_{\varrho_R(a)}, A_{\varrho_R(b)}, A_{\varrho_R(c)}$ de $\varrho_R(a), \varrho_R(b), \varrho_R(c)$, et les points fixes $\varrho_R(a)^\ominus$, $\varrho_R(a)^\oplus$, $\varrho_R(b)^\ominus$, $\varrho_R(b)^\oplus$, $\varrho_R(c)^\ominus$ et $\varrho_R(c)^\oplus$ dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ sont dans un ordre cyclique positif. On dira que $(H, (a, b, c))$ et $(H, (b, c, a))$ et $(H, (c, a, b))$ sont des *hexagones marqués* de $\mathrm{Hex}_{\varrho_R}$. Comme au paragraphe 4.2.1, les points fixes de $\varrho_R(a), \varrho_R(b), \varrho_R(c), \varrho_R(b^{-1}a^{-1})$ définissent une application $(\varrho_R, \varrho_R)$-équivariante $\underline{H} \mapsto (h_{\varrho_R,\underline{H}}, h'_{\varrho_R,\underline{H}})$ de l'ensemble des hexagones marqués de $\mathrm{Hex}_{\varrho_R}$ vers $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})^2$, telle que si $\underline{H} = (H, (a, b, c))$, alors $a, b, c$ et $(T, T') := (h_{\varrho_R,\underline{H}}, h'_{\varrho_R,\underline{H}})$ vérifient (4.1) pour $\varrho = \varrho_R|_{\langle a,b,c\rangle}$.

*Remarque 4.20.* — Le fait 3.1 assure que tout point de $\mathbb{H}^2$ est à distance uniformément bornée (indépendante de $R$ et $\varrho_R$) du centre d'un hexagone du pavage $\mathrm{Hex}_{\varrho_R}$. On en déduit l'existence d'une constante $C' > 0$ (indépendante de $R$ et $\varrho_R$) telle que pour tout $h \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ et tout $R > 1$ on puisse trouver un hexagone marqué $\underline{H}$ de $\mathrm{Hex}_{\varrho_R}$ tel que $d_\tau(\tau(h^{-1}) \cdot z, \tau(h^{-1}) \cdot z') \leq C'\, d_\tau(\tau(h_{\varrho_R,\underline{H}}^{-1}) \cdot z, \tau(h_{\varrho_R,\underline{H}}^{-1}) \cdot z')$ pour tous $z, z' \in G/P_\tau$.

Suivant Kahn, Labourie et Mozes, on dira qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\pi_1(S)$ est *acceptable* si chaque $a_n$ correspond à une courbe de bord d'un pantalon de $\mathcal{P}$ et pour tout $n \geq 1$, les axes de translation $A_{\varrho_R(a_{n-1})}$ et $A_{\varrho_R(a_n)}$ d'une part, et $A_{\varrho_R(a_n)}$ et $A_{\varrho_R(a_{n+1})}$ d'autre part, bordent des hexagones du pavage $\mathrm{Hex}_{\varrho_R}$ avec des côtés qui coïncident sur une longueur de $R - 1$ dans $\mathbb{H}^2$ (cf. figure 10). On dira qu'un point $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est $\varrho_R$*-accessible* si c'est la limite, dans la compactification $\overline{\mathbb{H}^2} = \mathbb{H}^2 \sqcup \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ de $\mathbb{H}^2$, d'une

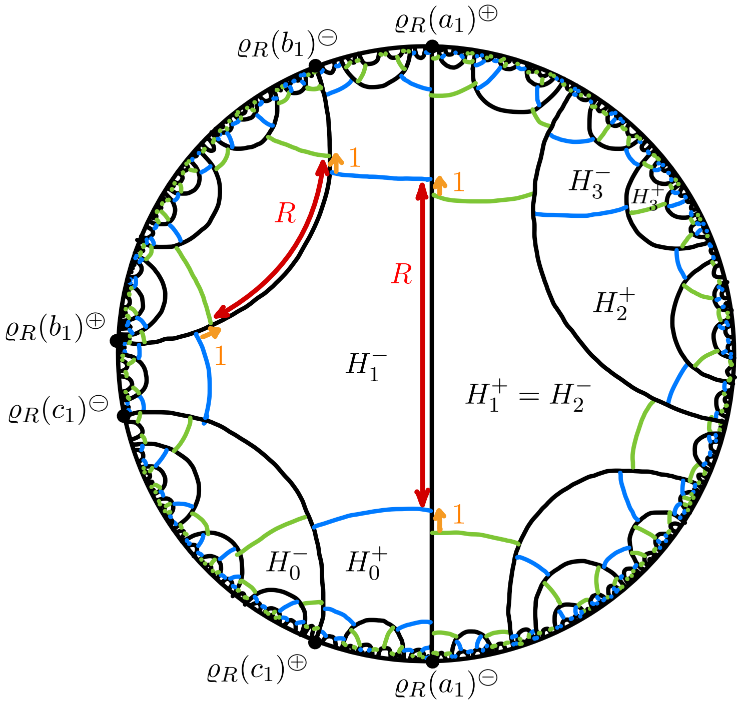


FIGURE 10. Pavage $\mathrm{Hex}_{\varrho_R}$ de $\mathbb{H}^2$ par des hexagones à angles droits, invariant par une représentation $R$-parfaite $\varrho_R : \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. On a représenté, pour plusieurs valeurs de $n$, des hexagones $H_n^-$ et $H_n^+$ ayant des côtés qui coïncident sur une longueur de $R-1$ le long d'un axe de translation $A_{\varrho_R(a_n)}$ où $a_n \in \pi_1(S)$ : la suite $(a_n)$ est $\varrho_R$-*acceptable*. On a également représenté les points fixes attractifs et répulsifs de $\varrho_R(a_1), \varrho_R(b_1), \varrho_R(c_1)$ pour trois éléments $a_1, b_1, c_1 \in \pi_1(S)$ tels que $(H_1^-, (a_1, b_1, c_1))$ est un *hexagone marqué* de $\mathrm{Hex}_{\varrho_R}$.

suite $(A_{\varrho_R(a_n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est acceptable ; dans ce cas, si $A_{\varrho_R(a_0)}$ et $A_{\varrho_R(a_1)}$ bordent un hexagone $H$ du pavage $\mathrm{Hex}_{\varrho_R}$, on dira que $x$ est $\varrho_R$-*accessible à partir de* $H$. Kahn, Labourie et Mozes font l'observation suivante.

LEMME 4.21. — *Il existe une fonction $\vartheta : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, tendant vers 0 en $+\infty$, telle que pour tout $R > 1$, toute représentation $R$-parfaite $\varrho_R : \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ et tout hexagone marqué $\underline{H} = (H, (a,b,c))$ de $\mathrm{Hex}_{\varrho_R}$, l'image par $h_{\varrho_R,\underline{H}}^{-1}$ de l'ensemble des points $\varrho_R$-accessibles à partir de $H$ est $\vartheta(R)$-dense dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ pour $d_{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}$.*

De manière analogue à l'application $\underline{H} \mapsto (h_{\varrho_R,\underline{H}}, h'_{\varrho_R,\underline{H}})$, à toute représentation $\rho : \pi_1(S) \to G$ vérifiant la condition (1) de la proposition 4.19 pour un certain $\varepsilon > 0$, on peut associer une application $(\varrho_R, \rho)$-équivariante $\underline{H} \mapsto (g_{\rho,\underline{H}}, g'_{\rho,\underline{H}})$ de l'ensemble des hexagones marqués de $\mathrm{Hex}_{\varrho_R}$ vers $G^2$, telle que si $\underline{H} = (H, (a,b,c))$, alors $(\rho(a), \rho(b), \rho(c), g_{\rho,\underline{H}}, g'_{\rho,\underline{H}})$ est une donnée géométrique associée à la représentation $(\varepsilon/R, R)$-presque parfaite $\rho|_{\langle a,b,c\rangle}$ comme à la définition 4.7.

**4.6.2.** *Applications de bord partielles et déformations.* — Le cœur de la démonstration de la proposition 4.19 est formé des deux résultats ci-dessous. Le premier, comme la proposition 2.12 sur laquelle repose le second, fait intervenir une version précise, dans

$G/P_\tau$, du lemme de Morse de Kapovich, Leeb et Porti (2014, 2018), déjà mentionnée au paragraphe 2.2.3.

Rappelons (corollaire 4.13.(1)) que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $R > 0$ assez grand par rapport à $\varepsilon$, si une représentation $\rho : \pi_1(S) \to G$ vérifie la condition (1) de la proposition 4.19, alors pour tout $a \in \pi_1(S)$ correspondant à une courbe de bord d'un pantalon de $\mathcal{P}$, l'élément $\rho(a)$ est proximal dans $G/P_\tau$ : il admet un unique point fixe attractif $\rho(a)^\oplus \in G/P_\tau$. Soit $C' > 0$ la constante de la remarque 4.20.

Proposition 4.22. — *Pour tout $\delta > 0$, tout $\varepsilon > 0$ assez petit par rapport à $\delta$, tout $R > 1$ assez grand par rapport à $\varepsilon$, toute représentation $R$-parfaite $\varrho_R : \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ et toute représentation $\rho : \pi_1(S) \to G$ vérifiant les conditions (1) et (2) de la proposition 4.19, il existe une unique application $(\varrho_R, \rho)$-équivariante $\xi$ de l'ensemble des points $\varrho_R$-accessibles de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ vers $G/P_\tau$ vérifiant la propriété suivante : pour toute suite acceptable $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\pi_1(S)$ et tout hexagone marqué $\underline{H} = (H, (a,b,c))$ de $\mathrm{Hex}_{\varrho_R}$ où $H$ est bordé par $A_{\varrho_R(a_0)}$ et $A_{\varrho_R(a_1)}$, si $(A_{\varrho_R(a_n)})$ converge dans $\overline{\mathbb{H}^2}$ vers un point $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, alors $(\rho(a_n)^\oplus)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $G/P_\tau$ vers $\xi(x)$ et*

$$d_\tau\big(g_{\rho,\underline{H}}^{-1} \circ \xi(x), \underline{\tau} \circ h_{\varrho_R,\underline{H}}^{-1}(x)\big) \leq \frac{\delta}{2C'}.$$

Proposition 4.23. — *Soit $\varrho : \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ une représentation injective et discrète. Pour tout $\delta > 0$ assez petit, il existe $\theta > 0$ tel que pour toute famille continue $(\rho_t)_{t\in[0,1]} \subset \mathrm{Hom}(\pi_1(S), G)$ de représentations et toutes applications $(\varrho, \rho_t)$-équivariantes $\xi_t : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to G/P_\tau$, si $\xi_0$ est $(\delta,\tau)$-sullivannienne et si pour tout $t \in ]0,1]$, les deux hypothèses suivantes sont satisfaites :*

1. *(« cohérence d'attraction ») pour tout $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, il existe une suite $(a_n) \in \pi_1(S)^\mathbb{N}$ telle que $\rho_t(a_n)$ soit proximal dans $G/P_\tau$ pour tout $n$ et telle que $(\varrho(a_n)^\oplus)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ vers $x$ et $(\rho_t(a_n)^\oplus)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $G/P_\tau$ vers $\xi_t(x)$,*
2. *(« condition sullivannienne sur un sous-ensemble suffisamment dense ») pour tout $h \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, il existe $g \in G$ et un sous-ensemble $D$ de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ tels que $h^{-1}(D)$ soit $\theta$-dense dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ et que $d_\tau^g(\xi_t(x), g \circ \underline{\tau} \circ h^{-1}(x)) \leq \delta/2$ pour tout $x \in D$,*

*alors $\xi_t$ est $(\delta,\tau)$-sullivannienne pour tout $t \in [0,1]$.*

*Démonstration de la proposition 4.23.* — Soient $\alpha, \delta_0, C > 0$ donnés par la proposition 2.12.(1). Prenons $\delta < \delta_0$ et $\theta$ tel que $\theta + C\,\theta^\alpha \leq \delta/2$, et montrons que l'ensemble $E$ des $t \in [0,1]$ tels que $\xi_t$ soit $(\delta,\tau)$-sullivannienne est ouvert et fermé dans $[0,1]$.

Pour montrer que $E$ est fermé, on observe que les applications $(\delta,\tau)$-sullivanniennes forment une famille équicontinue, par la proposition 2.12.(1) : ainsi, d'après le théorème d'Arzelà–Ascoli, si $(t_m) \in E^\mathbb{N}$ converge vers $t$, on peut supposer après extraction que $(\xi_{t_m})_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers une application $\xi'_t : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to G/P_\tau$. Cette application $\xi'_t$ est encore $(\delta,\tau)$-sullivannienne, et $(\varrho,\rho_t)$-équivariante. D'après la proposition 2.12.(2a), la représentation $\rho_t$ est $P_\tau$-anosovienne d'application de bord $\xi'_t$. En particulier (propriété générale des représentations anosoviennes), pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments non triviaux de $\pi_1(S)$ telle que $(\varrho(a_n)^{\oplus})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ vers $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, l'élément $\rho_t(a_n)$ est proximal dans $G/P_\tau$ pour tout $n$ et $(\rho_t(a_n)^{\oplus})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $G/P_\tau$ vers $\xi'_t(x)$. L'hypothèse (1) de la proposition implique alors $\xi'_t = \xi_t$. Ainsi, $t \in E$.

Vérifions que $E$ est ouvert dans $[0,1]$. D'après la proposition 2.12.(2b), tout $t \in E$ admet un voisinage dans $[0,1]$ formé d'éléments $s$ tels que $\xi_s$ soit $(\delta_0, \tau)$-sullivannienne. Grâce à l'hypothèse (2) ci-dessus, on en déduit que $\xi_s$ est en fait $(\delta, \tau)$-sullivannienne, *i.e.* $s \in E$. En effet, soit $h \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. D'après l'hypothèse (2) il existe $g \in G$ et, pour tout $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, un point $y \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ tels que $d_\tau(\underline{\tau} \circ h^{-1}(x), \underline{\tau} \circ h^{-1}(y)) = d_{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}(h^{-1}(x), h^{-1}(y)) \leq \theta$ et $d_\tau(g^{-1} \circ \xi_s(y), \underline{\tau} \circ h^{-1}(y)) \leq \delta/2$. D'après la proposition 2.12.(1), on a $d_\tau(g^{-1} \circ \xi_s(x), g^{-1} \circ \xi_s(y)) \leq C\, d_{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}(h^{-1}(x), h^{-1}(y))^\alpha \leq C\,\theta^\alpha$, et l'on conclut par inégalité triangulaire. $\square$

**4.6.3.** *Démonstration de la proposition 4.19.* — Fixons $\delta > 0$ (que l'on peut supposer très petit) et prenons $\varepsilon > 0$ assez petit par rapport à $\delta$ et $R > 1$ assez grand par rapport à $\varepsilon$ comme dans la proposition 4.22. Prenons de plus $R$ assez grand de sorte que le réel $\vartheta(R)$ du lemme 4.21 soit inférieur à $\theta/C'$ où $\theta$ et $C'$ sont donnés respectivement par la proposition 4.23 et la remarque 4.20.

Supposons dans un premier temps qu'il existe une famille continue $(\rho_t)_{t\in[0,1]} \subset \mathrm{Hom}(\pi_1(S), G)$ telle que $\rho_0$ soit $\tau$-fuchsienne, $\rho_1 = \rho$ et pour tout $t \in [0,1]$, la représentation $\rho_t$ vérifie les conditions (1) et (2) de la proposition 4.19. Soit $\mathrm{Hex}_{\varrho_R}$ le pavage $\varrho_R(\pi_1(S))$-invariant de $\mathbb{H}^2$ du paragraphe 4.6.1 et, pour tout $t \in [0,1]$, soit $\underline{H} \mapsto (h_{\varrho_R,\underline{H}}, h'_{\varrho_R,\underline{H}})$ (resp. $\underline{H} \mapsto (g_{\rho_t,\underline{H}}, g'_{\rho_t,\underline{H}})$) une application $(\varrho_R, \varrho_R)$-équivariante (resp. $(\varrho_R, \rho_t)$-équivariante) de l'ensemble des hexagones marqués de $\mathrm{Hex}_{\varrho_R}$ vers $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})^2$ (resp. $G^2$) comme au paragraphe 4.6.1. Soit $\xi_t$ l'application $(\varrho_R, \rho_t)$-équivariante de la proposition 4.22, allant de l'ensemble des points $\varrho_R$-accessibles de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ vers $G/P_\tau$ ; on la prolonge en une application $(\varrho_R, \rho_t)$-équivariante $\xi_t : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to G/P_\tau$ vérifiant la condition (1) de la proposition 4.23. La remarque 4.20, le lemme 4.21 et la proposition 4.22 assurent que la condition (2) de la proposition 4.23 est vérifiée. En effet, pour $t \in [0,1]$ et $h \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, soit $\underline{H} = (H, (a,b,c))$ un hexagone marqué de $\mathrm{Hex}_{\varrho_R}$ donné par la remarque 4.20. Soit $g := g_{\rho_t,\underline{H}}\, \tau(h^{-1}_{\varrho_R,\underline{H}} h) \in G$ et soit $D$ l'ensemble des points $\varrho_R$-accessibles à partir de $H$. Pour tout $x \in D$, on a

$$\begin{aligned} d^g_\tau\big(\xi_t(x), g \circ \underline{\tau} \circ h^{-1}(x)\big) &= d_\tau\big(g^{-1} \circ \xi_t(x), \underline{\tau} \circ h^{-1}(x)\big) \\ &= d_\tau\big(\tau(h^{-1} h_{\varrho_R,\underline{H}})\, g^{-1}_{\rho_t,\underline{H}} \circ \xi_t(x), \tau(h^{-1} h_{\varrho_R,\underline{H}}) \circ \underline{\tau} \circ h^{-1}_{\varrho_R,\underline{H}}(x)\big) \\ &\leq C'\, d_\tau\big(g^{-1}_{\rho_t,\underline{H}} \circ \xi_t(x), \underline{\tau} \circ h^{-1}_{\varrho_R,\underline{H}}(x)\big) \;\leq\; \delta/2, \end{aligned}$$

où les deux inégalités utilisent respectivement la remarque 4.20 et la proposition 4.22. Or, l'ensemble $h^{-1}_{\varrho_R,\underline{H}}(D)$ est $(\theta/C')$-dense dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ d'après le lemme 4.21 et notre choix de $R$, donc l'ensemble $h^{-1}(D)$ est $\theta$-dense dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ d'après la remarque 4.20. On peut alors appliquer la proposition 4.23 : on obtient que pour tout $t \in [0,1]$, l'application $(\varrho_R, \rho_t)$-équivariante $\xi_t$ est $(\delta, \tau)$-sullivannienne.

En général, Kahn, Labourie et Mozes ne construisent pas de famille continue $(\rho_t)_{t\in[0,1]} \subset \mathrm{Hom}(\pi_1(S), G)$ telle que $\rho_0$ soit $\tau$-fuchsienne et $\rho_1 = \rho$. Ils procèdent plutôt par approximation, en considérant une suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de surfaces hyperboliques compactes obtenues en doublant des surfaces hyperboliques $S'_n$ compactes à bord qui sont des unions de pantalons isométriques à des pantalons de $\mathcal{P}$, et telles que le revêtement universel de $S$ coïncide avec celui de $S'_n$ sur une boule de rayon $n$. La représentation $\rho : \pi_1(S) \to G$ définit pour tout $n$ une représentation $\rho^{(n)} : \pi_1(S_n) \to G$ dont les restrictions aux pantalons de $S_n$ sont encore $(\varepsilon/R, \pm R)$-presque parfaites et $(\varepsilon/R)$-bien recollées. Pour tout $n$, en utilisant le fait que $\pi_1(S'_n)$ est un groupe libre, ils construisent une famille continue $(\rho_t^{(n)})_{t\in[0,1]} \subset \mathrm{Hom}(\pi_1(S_n), G)$ telle que $\rho_0^{(n)}$ soit $\tau$-fuchsienne, $\rho_1^{(n)} = \rho^{(n)}$ et pour tout $t \in [0,1]$, la représentation $\rho_t^{(n)}$ vérifie les conditions (1) et (2) de la proposition 4.19. D'après le paragraphe précédent, $\rho^{(n)}$ admet donc une application de bord $(\delta,\tau)$-sullivannienne $\xi^{(n)} : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to G/P_\tau$. La famille $(\xi^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue d'après la proposition 2.12.(1). En procédant par convergence, on obtient alors une application de bord $(\delta,\tau)$-sullivannienne $\xi : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to G/P_\tau$ pour $\rho$.

## 5. ÉTAPE DYNAMIQUE : UTILISATION DU MÉLANGE

Dans cette partie, nous donnons les grandes lignes de la démonstration des propositions 3.3 et 3.4 selon le point de vue de Kahn, Labourie et Mozes (arXiv 2018). L'espace $\mathrm{Geom}_{\varepsilon,\pm R}$ de la proposition 3.4 est ici un espace $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,\pm R}$ de « couples triconnectés » que nous introduisons au paragraphe 5.3.

*Dans toute la partie, on travaille dans le cadre 2.16. On suppose à présent la condition (R) du paragraphe 2.3.2 vérifiée. On fixe un réseau cocompact irréductible $\Gamma$ de $G$. Par le lemme de Selberg, quitte à remplacer $\Gamma$ par un sous-groupe d'indice fini, on peut le supposer sans torsion ; c'est ce que nous ferons ici.*

### 5.1. Fonctions poids sur $G \times G$

Rappelons la notion de *représentation $(\varepsilon, R)$-presque parfaite* (définition 4.7), qui fait intervenir la fonction $\mathrm{rot} \circ \mathrm{inv} \circ \varphi_R$. Pour démontrer la proposition 3.3.(1), l'idée est de montrer, en utilisant le mélange (fait 3.5), que pour tous éléments $[x], [y] \in \Gamma\backslash G$, il existe « beaucoup » d'éléments $[g] \in \Gamma\backslash G$ proches de $[x]$ tels que $\mathrm{rot} \circ \mathrm{inv} \circ \varphi_R([g])$ soit proche de $[y]$.

Plus précisément, fixons une fonction cloche $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$, de support $[-1,1]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient une fonction cloche $\chi_\varepsilon \in C^\infty(G, \mathbb{R}^+)$ de support la boule de rayon $\varepsilon$ autour de l'élément neutre $\mathrm{id} \in G$, d'intégrale 1, en posant

$$\chi_\varepsilon(g) := \frac{1}{\int_G \chi(d_G(\cdot, \mathrm{id})^2/\varepsilon^2)}\, \chi(d_G(g,\mathrm{id})^2/\varepsilon^2).$$

Pour $R > 0$, on définit des fonctions « poids » $W_{\varepsilon,R}, W_{\varepsilon,-R} : G \times G \to \mathbb{R}^+$, à support compact dans $G \times G$, par

$$W_{\varepsilon,\pm R}(x,y) = \int_{g\in G} \chi_{\varepsilon/R}(x^{-1}g)\, \chi_{\varepsilon/R}\big(y^{-1}\, (\mathrm{rot}^{\pm 1} \circ \mathrm{inv} \circ \varphi_{\pm R})(g)\big)\, \mathrm{d}g. \tag{5.1}$$

La fonction $W_{\varepsilon,\pm R}$ mesure la proportion d'éléments $g \in G$ tels que $g$ soit $(\varepsilon/R)$-proche de $x$ et $\mathrm{rot}^{\pm 1} \circ \mathrm{inv} \circ \varphi_{\pm R}(g)$ soit $(\varepsilon/R)$-proche de $y$. Elle est invariante sous l'action diagonale de $G$ : on a $W_{\varepsilon,\pm R}(gx, gy) = W_{\varepsilon,\pm R}(x, y)$ pour tous $g, x, y \in G$, car rot, inv et $\varphi_R$ correspondent à des multiplications à droite. Elle induit une fonction $(\Gamma \times \Gamma)$-invariante $w_{\varepsilon,\pm R} : G \times G \to \mathbb{R}^+$ donnée par

$$w_{\varepsilon,\pm R}(x, y) = \sum_{\gamma\in\Gamma} W_{\varepsilon,\pm R}(x, \gamma y). \tag{5.2}$$

(Cette somme est finie car à $x$ fixé, la fonction $W_{\varepsilon,\pm R}(x, \cdot) : G \to \mathbb{R}^+$ est à support compact et $\Gamma$ est discret dans $G$ ; ainsi, $w_{\varepsilon,\pm R}$ est bien définie et lisse.) La fonction $w_{\varepsilon,\pm R}$ passe au quotient en une fonction $\Gamma\backslash G \times \Gamma\backslash G \to \mathbb{R}^+$, que l'on notera encore $w_{\varepsilon,\pm R}$. Celle-ci mesure la proportion d'éléments $[g] \in \Gamma\backslash G$ proches de $[x]$ tels que $\mathrm{rot}^{\pm 1} \circ \mathrm{inv} \circ \varphi_{\pm R}([g])$ soit proche de $[y]$, ou encore la proportion d'éléments $g \in G$ proches de $x$ pour lesquels il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma \cdot (\mathrm{rot}^{\pm 1} \circ \mathrm{inv} \circ \varphi_{\pm R})(g)$ soit proche de $y$.

Le lemme suivant reprend l'approche de Margulis dans sa thèse. On n'utilise ici qu'une vitesse de mélange polynomiale (cf. paragraphe 3.4), qui donne une estimée en $\varepsilon/R^2$ et suffit pour démontrer les propositions 3.3 et 3.4 ; en utilisant pleinement le mélange exponentiel (fait 3.5), on obtiendrait une estimée en $e^{-qR/2}$.

Lemme 5.1. — *Pour tout $\varepsilon > 0$, tout $R > 0$ assez grand par rapport à $\varepsilon$ et tous $[x], [y] \in \Gamma\backslash G$, on a*

$$\big|w_{\varepsilon,\pm R}([x], [y]) - 1\big| \leq \frac{\varepsilon}{R^2}. \tag{5.3}$$

*Démonstration.* — Pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction $X_\varepsilon : G \times G \to \mathbb{R}^+$ donnée par $X_\varepsilon(x, g) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \chi_\varepsilon(x^{-1}\gamma g)$ est de classe $C^\infty$ et passe au quotient en une fonction $X_\varepsilon : \Gamma\backslash G \times \Gamma\backslash G \to \mathbb{R}^+$. Soit $k \in \mathbb{N}$ donné par le fait 3.5. Il n'est pas difficile de vérifier qu'il existe $D > 0$ tel que $\|\chi_\varepsilon\|_{C^k} \leq D\,\varepsilon^{-k-D}$ pour tout $\varepsilon > 0$ ; on en déduit qu'il existe $D' > 0$ tel que $\|X_\varepsilon(x, \cdot)\|_{C^k}, \|X_\varepsilon(x, (\mathrm{rot} \circ \mathrm{inv})(\cdot))\|_{C^k} \leq D'\,\varepsilon^{-k-D'}$ pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $[x] \in \Gamma\backslash G$.

Soit $\mathcal{D}$ un domaine fondamental mesurable relativement compact de $G$ pour l'action de $\Gamma$ (rappelons que l'on a supposé $\Gamma$ sans torsion). Soient $\varepsilon, R > 0$. Pour tous $x, y \in G$, on a

$$\begin{aligned}
w_{\varepsilon,R}([x], [y]) &= \sum_{\gamma\in\Gamma} \int_{g\in G} \chi_{\varepsilon/R}(x^{-1}g)\, \chi_{\varepsilon/R}\big(y^{-1}\gamma^{-1}\, (\mathrm{rot} \circ \mathrm{inv} \circ \varphi_R)(g)\big)\, \mathrm{d}g \\
&= \sum_{\gamma,\gamma'\in\Gamma} \int_{g\in\mathcal{D}} \chi_{\varepsilon/R}(x^{-1}\gamma' g)\, \chi_{\varepsilon/R}\big(y^{-1}\gamma^{-1}\gamma'\, (\mathrm{rot} \circ \mathrm{inv} \circ \varphi_R)(g)\big)\, \mathrm{d}g \\
&= \int_{[g]\in\Gamma\backslash G} X_{\varepsilon/R}(x, [g])\, X_{\varepsilon/R}(y, (\mathrm{rot} \circ \mathrm{inv} \circ \varphi_R)([g]))\, \mathrm{d}[g].
\end{aligned}$$

Si l'on pose $\psi = X_{\varepsilon/R}(x,\cdot)$ et $\theta = X_{\varepsilon/R}(y,(\mathrm{rot}\circ\mathrm{inv})(\cdot))$, alors $\int_{\Gamma\backslash G}\psi = \int_{\Gamma\backslash G}\theta = \int_G \chi_{\varepsilon/R} = 1$, et le fait 3.5 donne

$$\big|w_{\varepsilon,R}([x],[y]) - 1\big| \leq C\, e^{-qR}\,\|\psi\|_{C^k}\,\|\theta\|_{C^k} \leq C\, D'^2\, e^{-qR}\Big(\frac{\varepsilon}{R}\Big)^{-2k-2D'}.$$

En particulier, on obtient (5.3) dès que $R$ est assez grand par rapport à $\varepsilon$. Un raisonnement analogue vaut pour $w_{\varepsilon,-R}$. □

Corollaire 5.2. — *Pour tout $\varepsilon > 0$, tout $R > 0$ assez grand par rapport à $\varepsilon$ et tous $x, y \in G$, il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $W_{\varepsilon,R}(x,\gamma y) > 0$.*

### 5.2. Fonctions poids sur $G^4$ et représentations presque parfaites : démonstration de la proposition 3.3.(1)

Pour tous $\varepsilon, R > 0$, on définit des fonctions $W^{\mathrm{tri}}_{\varepsilon,\pm R} : G^4 \to \mathbb{R}^+$ par

$$(5.4)\quad \begin{cases} W^{\mathrm{tri}}_{\varepsilon,R}(x,y_0,y_1,y_2) = W_{\varepsilon,R}(x,y_0)\, W_{\varepsilon,R}(\mathrm{rot}^2(x),\mathrm{rot}(y_1))\, W_{\varepsilon,R}(\mathrm{rot}(x),\mathrm{rot}^2(y_2)),\\ W^{\mathrm{tri}}_{\varepsilon,-R}(x,y_0,y_1,y_2) = W_{\varepsilon,-R}(x,\mathrm{rot}^2(y_1))\, W_{\varepsilon,-R}(\mathrm{rot}(x),\mathrm{rot}(y_0))\, W_{\varepsilon,-R}(\mathrm{rot}^2(x),y_2)\end{cases}$$

pour tous $x, y_0, y_1, y_2 \in G$, où $W_{\varepsilon,\pm R}$ est donnée par (5.1). Ces fonctions sont invariantes par l'action diagonale de $G$ sur $G^4$ par multiplication à gauche. Le lemme suivant fait le lien avec les données géométriques de représentations $(\varepsilon, \pm R)$-presque parfaites (définition 4.7).

Lemme 5.3. — *Soit $\Pi$ un pantalon de groupe fondamental $\pi_1(\Pi) = \langle a,b,c \,|\, cba = 1\rangle$, soit $\rho : \pi_1(\Pi) \to G$ une représentation, soient $\varepsilon, R > 0$ et soient $g, g' \in G$. Alors*

1. *la représentation $\rho$ est $(\varepsilon, R)$-presque parfaite de donnée géométrique $(\rho(a),\rho(b),\rho(c),g,g')$ si et seulement si $W^{\mathrm{tri}}_{\varepsilon R,R}(g,g',\rho(a)^{-1}g',\rho(b)g') > 0$ ;*
2. *la représentation $\rho$ est $(\varepsilon, -R)$-presque parfaite de donnée géométrique $(\rho(a),\rho(b),\rho(c),g,g')$ si et seulement si $W^{\mathrm{tri}}_{\varepsilon R,-R}(g,g'',\rho(a)g'',\rho(ba)g'') > 0$, où l'on pose $g'' := \rho(a)^{-1}\circ\mathrm{rot}(g')$.*

*Démonstration.* — Traitons le point (1) ; le point (2) est analogue. Par définition (5.1) de $W_{\varepsilon R,R}$, on a $W_{\varepsilon R,R}(g,g') > 0$ si et seulement s'il existe $h \in G$ tel que $d_G(h,g) < \varepsilon$ et $d_G(\mathrm{rot}\circ\mathrm{inv}\circ\varphi_R(h), g') < \varepsilon$. De même, on a $W_{\varepsilon R,R}(\mathrm{rot}^2(g),\rho(a)^{-1}\cdot\mathrm{rot}(g')) > 0$ si et seulement s'il existe $h'' \in G$ tel que

$$d_G(h'',\mathrm{rot}^2(g)) < \varepsilon \quad \text{et} \quad d_G(\mathrm{rot}\circ\mathrm{inv}\circ\varphi_R(h''),\rho(a)^{-1}\cdot\mathrm{rot}(g')) < \varepsilon\ ;$$

en posant $h' := \rho(a)\cdot\mathrm{inv}\circ\varphi_R(h'')$, ceci est équivalent à

$$d_G(g',h') < \varepsilon \quad \text{et} \quad d_G(\mathrm{rot}\circ\mathrm{inv}\circ\varphi_R(h'),\rho(a)\cdot g) < \varepsilon$$

(car $d_G$ est invariante par $G$ et rot, et $(\mathrm{inv}\circ\varphi_R)^2 = \mathrm{id}_G$). Ainsi, on a $W_{\varepsilon R,R}(g,g')\, W_{\varepsilon R,R}(\mathrm{rot}^2(g),\rho(a)^{-1}\cdot\mathrm{rot}(g')) > 0$ si et seulement si $\rho(a)$ est $(\varepsilon,R)$-presque réalisé par $(g,g')$ (définition 4.6). De même, $W_{\varepsilon R,R}(g,g')\, W_{\varepsilon R,R}(\mathrm{rot}(g),\rho(b)\cdot\mathrm{rot}^2(g')) > 0$ (resp. $W_{\varepsilon R,R}(\mathrm{rot}^2(g),\rho(a)^{-1}\cdot\mathrm{rot}(g'))\, W_{\varepsilon R,R}(\mathrm{rot}(g),\rho(b)\cdot\mathrm{rot}^2(g')) > 0$) si et seulement si $\rho(b)$ (resp. $\rho(c)$) est $(\varepsilon,R)$-presque réalisé par $(\mathrm{rot}(g),\rho(b)\cdot\mathrm{rot}^2(g'))$ (resp.

$(\mathrm{rot}^2(g), \rho(a)^{-1} \cdot \mathrm{rot}(g')))$. On en déduit que $(\rho(a), \rho(b), \rho(c), g, g')$ satisfait (4.2) avec les signes $+$ si et seulement si $W^{\mathrm{tri}}_{\varepsilon R,R}(g, g', \rho(a)^{-1}g', \rho(b)g') > 0$. □

*Démonstration de la proposition 3.3.*(1). — D'après le corollaire 5.2, si $R$ est assez grand par rapport à $\varepsilon$, alors pour tous $g, g'' \in G$ on peut trouver $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ tels que $W^{\mathrm{tri}}_{\varepsilon,R}(g, \gamma_0 g'', \gamma_1 g'', \gamma_2 g'') > 0$. D'après le lemme 5.3.(1), la représentation de $\pi_1(\Pi^+) = \langle a, b^+, c^+ \,|\, c^+b^+a = 1\rangle$ dans $\Gamma$ envoyant $(a, b^+)$ sur $(\gamma_0\gamma_1^{-1}, \gamma_2\gamma_0^{-1})$ est $(\varepsilon/R, R)$-presque parfaite. De même, les lemmes 5.1 et 5.3.(2) permettent de trouver des représentations $(\varepsilon/R, -R)$-presque parfaites de $\pi_1(\Pi^-)$ dans $\Gamma$. □

### 5.3. Couples triconnectés et mesures $\mu_{\varepsilon,\pm R}$ de la proposition 3.4

Soit $\Pi$ un pantalon de groupe fondamental $\pi_1(\Pi) = \langle a, b, c \,|\, cba = 1\rangle$. Dans ce paragraphe, nous introduisons l'espace $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,\pm R}$ qui paramètre les données géométriques associées aux représentations $(\varepsilon/R, \pm R)$-presque parfaites de $\pi_1(\Pi)$ dans $\Gamma$ modulo l'action de $\Gamma$. Nous introduisons des mesures $\mu_{\varepsilon,\pm R}$ dont nous montrerons plus loin (proposition 5.7) qu'elles satisfont la conclusion de la proposition 3.4.

*Définition 5.4.* — Un *couple triconnecté*[6] *dans* $\Gamma\backslash G$ est un élément de

$$\mathrm{Triconn} := \{[(x, y_0, y_1, y_2)] \in \Gamma\backslash G^4 \mid y_1, y_2 \in \Gamma y_0\}, \tag{5.5}$$

où $\Gamma$ agit diagonalement sur $G^4$ par multiplication à gauche. Pour $\varepsilon, R > 0$, on note $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,\pm R}$ l'ensemble des couples triconnectés $[(x, y_0, y_1, y_2)]$ tels que $W^{\mathrm{tri}}_{\varepsilon,\pm R}(x, y_0, y_1, y_2) > 0$ (cf. (5.4)).

Rappelons (remarque 4.8) que $\Gamma$ agit sur l'ensemble des représentations $(\varepsilon/R, \pm R)$-presque parfaites de $\pi_1(\Pi)$ dans $\Gamma$ par conjugaison au but, ce qui se traduit par une action de $\Gamma$ sur les données géométriques correspondantes donnée par $x \cdot (\alpha, \beta, \gamma, g, g') = (x\alpha x^{-1}, x\beta x^{-1}, x\gamma x^{-1}, xg, xg')$ pour tout $x \in \Gamma$. Le lemme 5.3 se reformule ainsi.

Lemme 5.5. — *Soit* $\Pi$ *un pantalon de groupe fondamental* $\pi_1(\Pi) = \langle a, b, c \,|\, cba = 1\rangle$ *et soient* $\varepsilon, R > 0$. *Alors*

1. *l'ensemble des données géométriques associées à des représentations* $(\varepsilon/R, R)$-*presque parfaites de* $\pi_1(\Pi)$ *dans* $\Gamma$, *modulo l'action de* $\Gamma$, *est paramétré par* $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,R}$ *via* $[(\rho(a), \rho(b), \rho(c), g, g')] \mapsto [(g, g', \rho(a)^{-1}g', \rho(b)g')]$ ;
2. *l'ensemble des données géométriques associées à des représentations* $(\varepsilon/R, -R)$-*presque parfaites de* $\pi_1(\Pi)$ *dans* $\Gamma$, *modulo l'action de* $\Gamma$, *est paramétré par* $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,-R}$ *via* $[(\rho(a), \rho(b), \rho(c), g, g')] \mapsto [(g, g'', \rho(a)g'', \rho(ba)g'')]$ *où* $g'' := \rho(a)^{-1} \circ \mathrm{rot}(g')$.

*On peut prendre* $\mathrm{Geom}_{\varepsilon,R} := \mathrm{Triconn}_{\varepsilon,R}$ *dans la proposition 3.4.*

6. Cette terminologie est justifiée par la figure 8 (paragraphe 4.2.2) associée au lemme 5.5.

Notons $\mathcal{A}_{\varepsilon,\pm R}$ l'ensemble des classes de conjugaison dans $\Gamma$ d'éléments $\rho(a)$ où $\rho$ : $\pi_1(\Pi) \to \Gamma$ est $(\varepsilon/R, \pm R)$-presque parfaite ; c'est un ensemble fini d'après le corollaire 4.13.(2). Pour tout $\alpha \in \Gamma$, l'ensemble

$$\text{Triconn}^{\alpha}_{\varepsilon,\pm R} := \{[(x, y_0, y_1, y_2)] \in \text{Triconn}_{\varepsilon,\pm R} \mid y_0 = \alpha^{\pm 1} y_1\} \tag{5.6}$$

ne dépend que de la classe de conjugaison $[\alpha]$ de $\alpha$ dans $\Gamma$. L'ensemble $\text{Triconn}_{\varepsilon,\pm R}$ est l'union disjointe de ses sous-ensembles $\text{Triconn}^{\alpha}_{\varepsilon,\pm R}$ où $[\alpha]$ parcourt $\mathcal{A}_{\varepsilon,\pm R}$. Tout élément de $\text{Triconn}^{\alpha}_{\varepsilon,R}$ (resp. $\text{Triconn}^{\alpha}_{\varepsilon,-R}$) est par définition de la forme $[(g, g', \alpha^{-1}g', \beta g')]$ (resp. $[(g, g', \alpha g', \beta\alpha g')]$) où $(g, g') \in G^2$ et $\beta \in \Gamma$, et définit une représentation $(\varepsilon/R, R)$-presque parfaite (resp. $(\varepsilon/R, -R)$-presque parfaite) de $\pi_1(\Pi)$ par $(a, b) \mapsto (\alpha, \beta)$ modulo conjugaison au but par $\Gamma$.

D'après la remarque 4.8, l'ensemble des représentations $(\varepsilon/R, \pm R)$-parfaites est invariant par la symétrie naturelle d'ordre trois sym de $\text{Hom}(\pi_1(\Pi), G)$ donnée par $\text{sym}(\rho)(a, b, c) = (\rho(b), \rho(c), \rho(a))$. Cette symétrie induit une symétrie d'ordre trois de l'ensemble des classes de conjugaison modulo $\Gamma$ de représentations $(\varepsilon/R, \pm R)$-parfaites, qui elle-même se relève en une symétrie d'ordre trois de $\text{Triconn}_{\varepsilon,\pm R}$, que nous noterons encore sym et qui est donnée par

$$\begin{cases} \text{sym}([(g, g', \alpha^{-1}g', \beta g')]) = [(x, x', \beta^{-1}x', \alpha^{-1}\beta^{-1}x')] & \text{sur } \text{Triconn}_{\varepsilon,R}, \\ \text{sym}([(g, g', \alpha g', \beta\alpha g')]) = [(y, y', \beta y', \alpha^{-1}y')] & \text{sur } \text{Triconn}_{\varepsilon,-R}, \end{cases} \tag{5.7}$$

où $(x, x') := (\text{rot}(g), \beta \circ \text{rot}^2(g'))$ et $(y, y') := (\text{rot}^2(g), \alpha \circ \text{rot}(g'))$.

L'observation suivante est une conséquence directe des lemmes 4.12 et 5.5 et de la définition 4.7.

*Remarque 5.6.* — Pour tout $R > 0$ assez grand par rapport à $\varepsilon$ et tout $[\alpha] \in \mathcal{A}_{\varepsilon,\pm R}$, l'adhérence de $\text{Triconn}^{\alpha}_{\varepsilon,\pm R}$ dans $\Gamma\backslash G^4$ est compacte ; ainsi, l'adhérence de $\text{Triconn}_{\varepsilon,\pm R}$ dans $\Gamma\backslash G^4$, c'est-à-dire l'image dans $\Gamma\backslash G^4$ du support de $W^{\text{tri}}_{\varepsilon,\pm R}$, est compacte.

On définit une mesure $\mu_{\varepsilon,\pm R}$ sur $\text{Triconn}_{\varepsilon,\pm R}$ de la manière suivante. La mesure de Haar de $G$ induit une mesure naturelle sur $\Gamma\backslash G^2$. L'espace Triconn de (5.5) se projette, en considérant les deux premières coordonnées, sur $\Gamma\backslash G^2$, avec des fibres dénombrables paramétrées par $\Gamma$. Soit $\lambda_{\text{Triconn}}$ la mesure localement finie sur Triconn dont le poussé en avant est la mesure naturelle de $\Gamma\backslash G^2$ et dont la restriction à chaque fibre est la mesure de comptage. On définit, sur $\text{Triconn}_{\varepsilon,\pm R}$, la mesure

$$\mu_{\varepsilon,\pm R} := W^{\text{tri}}_{\varepsilon,\pm R}\, \lambda_{\text{Triconn}} \tag{5.8}$$

(cf. (5.4)). Elle est finie d'après la remarque 5.6. On vérifie également qu'elle est invariante par la symétrie d'ordre trois sym de $\text{Triconn}_{\varepsilon,\pm R}$ de (5.7).

Soient $\Pi^+$ et $\Pi^-$ deux pantalons de groupes fondamentaux

$$\pi_1(\Pi^{\pm}) = \langle a^{\pm}, b^{\pm}, c^{\pm} \mid c^{\pm}b^{\pm}a^{\pm} = 1\rangle.$$

Pour $\varepsilon' > 0$, on dit que deux éléments $\mathtt{T}^+ \in \text{Triconn}_{\varepsilon,R}$ et $\mathtt{T}^- \in \text{Triconn}_{\varepsilon,-R}$ sont $\varepsilon'$-*bien recollés* s'ils définissent des représentations $(\varepsilon/R, \pm R)$-presque parfaites de $\pi_1(\Pi^{\pm})$

dans $G$ qui, après conjugaison par $\Gamma$, sont $\varepsilon'$-bien recollées le long de $a^+$ et $a^-$ via des données géométriques associées à $\mathtt{T}^+$ et $\mathtt{T}^-$, au sens de la définition 4.17.

Notre but est désormais d'expliquer le résultat suivant, qui implique les propositions 3.4 (avec $\mathrm{Geom}_{\varepsilon,R} = \mathrm{Triconn}_{\varepsilon,R}$) et 3.3.(2).

PROPOSITION 5.7. — *En supposant la condition (R) vérifiée, il existe $C > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $R > 0$ assez grand par rapport à $\varepsilon$, les mesures* sym-*invariantes $\mu_{\varepsilon,\pm R}$ sur* $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,\pm R}$ *de* (5.8) *satisfont la conclusion de la proposition 3.4 : on a $\mu_{\varepsilon,R}(\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,R}) = \mu_{\varepsilon,-R}(\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,-R})$ et pour tout sous-ensemble mesurable $A$ de* $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,R}$*, l'ensemble des éléments de* $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,-R}$ *qui sont $(C\varepsilon/R)$-bien recollés à au moins un élément de $A$ est de $(\mu_{\varepsilon,-R})$-mesure supérieure ou égale à $\mu_{\varepsilon,R}(A)$.*

### 5.4. Reformulation en termes de la distance de Lévy–Prokhorov

Soient $\varepsilon, R > 0$. Comme au paragraphe 5.3 précédent, notons $\mathcal{A}_{\varepsilon,\pm R}$ l'ensemble fini des classes de conjugaison dans $\Gamma$ d'éléments $\rho(a)$ où $\rho : \pi_1(\Pi^\pm) \to \Gamma$ est $(\varepsilon/R, \pm R)$-presque parfaite. Supposons $R$ assez grand par rapport à $\varepsilon$ de sorte que pour tout $[\alpha] \in \mathcal{A}_{\varepsilon,\pm R}$, l'élément $\alpha \in \Gamma \subset G$ soit proximal dans $G/P_\tau$ (corollaire 4.13.(1)), de points fixes attractif $\alpha^\oplus$ et répulsif $\alpha^\ominus$. Comme au paragraphe 4.5, notons $L_\alpha$ l'ensemble des éléments $g \in G$ tels que $g \cdot \underline{\tau}(0,\infty) = (\alpha^\ominus, \alpha^\oplus)$ ; c'est une classe à gauche du centralisateur $Z_G(\alpha_0)$ de $\alpha_0 = \exp(\mathsf{h})$ dans $G$ (remarque 4.15). Le centralisateur $Z_\Gamma(\alpha)$ de $\alpha$ dans $\Gamma$ est contenu dans le stabilisateur $\mathrm{stab}_G(\alpha^\ominus, \alpha^\oplus)$ qui agit sur $L_\alpha$ par multiplication à gauche. Dans ce paragraphe, nous reformulons la proposition 5.7 en termes de mesures sur $Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_\alpha$.

Notons que, comme $\Gamma$ est un réseau cocompact de $G$ et $\mathsf{h}$ est régulier (cadre 2.16), le quotient $Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_\alpha$ est compact (cf. WOLF, 1962, Th. 4.2).

*Exemple 5.8.* — Soient $G = \mathrm{PSL}(n,\mathbb{C})$ et $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$ le plongement irréductible (cf. exemples 2.23 et 4.10). Pour $\Gamma$ sans torsion et $\alpha \in \Gamma$ proximal dans $G/P_\tau$, les groupes $Z_G(\alpha)$ et $Z_\Gamma(\alpha)$ sont isomorphes respectivement à $(\mathbb{C}^*)^{n-1}$ et $\mathbb{Z}^{n-1}$, et $Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_\alpha \simeq Z_\Gamma(\alpha)\backslash Z_G(\alpha) \simeq \mathbb{T}^{2(n-1)}$ est un tore compact.

On peut voir l'ensemble $\mathrm{Triconn}^\alpha_{\varepsilon,\pm R}$ de (5.6) comme un sous-ensemble de $Z_\Gamma(\alpha)\backslash G^4$ plutôt que de $\Gamma\backslash G^4$ : en effet, si deux éléments de l'ensemble $\{(x, y_0, y_1, y_2) \in G^4 \,|\, y_1 = \alpha^\pm y_0,\ y_2 \in \Gamma y_0\}$ ont même image dans $\Gamma\backslash G^4$, alors ils ont déjà même image dans $Z_\Gamma(\alpha)\backslash G^4$. D'après les lemmes 4.16.(2) et 5.5, si $R$ est assez grand par rapport à $\varepsilon$, alors pour tout $[(g, g', \alpha^{-1}g', \beta g')] \in \mathrm{Triconn}^\alpha_{\varepsilon,R}$ (resp. pour tout $[(g, g', \alpha g', \beta\alpha g')] \in \mathrm{Triconn}^\alpha_{\varepsilon,-R}$), l'élément $g$ appartient au domaine de définition $\mathcal{U}_\alpha$ (resp. $\mathcal{U}_{\alpha^{-1}}$) de l'application « pied » $\Psi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \to L_\alpha$ (resp. $\Psi_{\alpha^{-1}} : \mathcal{U}_{\alpha^{-1}} \to L_{\alpha^{-1}}$), cf. définition 4.14. L'application $\Psi_{\alpha^{\pm 1}}$ est équivariante par rapport aux actions de $Z_\Gamma(\alpha) = Z_\Gamma(\alpha^{-1})$ par multiplication à gauche, donc induit une application

$$\Psi^{\mathrm{tri}}_{\alpha^{\pm 1}} : \mathrm{Triconn}^\alpha_{\varepsilon,\pm R} \longrightarrow Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_{\alpha^{\pm 1}} \tag{5.9}$$

donnée par $\Psi_\alpha^{\mathrm{tri}}[(g, g', \alpha^{-1}g', \beta g')] = [\Psi_\alpha(g)]$ (resp. $\Psi_{\alpha^{-1}}^{\mathrm{tri}}[(g, g', \alpha g', \beta\alpha g')] = [\Psi_{\alpha^{-1}}(g)]$). Soit $\mu_{\varepsilon,\pm R}$ la mesure finie sur $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,\pm R}$ de (5.8). Elle se restreint en une mesure finie $\mu^\alpha_{\varepsilon,\pm R}$ sur $\mathrm{Triconn}^\alpha_{\varepsilon,\pm R}$, qui induit sur $Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_{\alpha^{\pm 1}}$ une mesure finie

$$m^\alpha_{\varepsilon,\pm R} := (\Psi^{\mathrm{tri}}_{\alpha^{\pm 1}})_* \, \mu^\alpha_{\varepsilon,\pm R}. \tag{5.10}$$

Rappelons (cf. paragraphe 4.5) que le flot $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ du paragraphe 4.1.3 préserve $L_\alpha$, alors que l'involution inv échange $L_\alpha$ et $L_{\alpha^{-1}}$. Ainsi, $Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_{\alpha^{-1}} = (\varphi_1 \circ \mathrm{inv})(Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_\alpha)$.

La proposition 5.7 se reformule en termes de proximité des mesures $m^\alpha_{\varepsilon,R}$ et $(\varphi_1 \circ \mathrm{inv})_* \, m^\alpha_{\varepsilon,-R}$ sur $Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_\alpha$ pour la distance suivante, dite de *Lévy–Prokhorov.*

*Définition 5.9.* — Soient $\mu_1, \mu_2$ deux mesures finies sur un espace métrique $X$, telles que $\mu_1(X) = \mu_2(X)$. On pose

$$d_{LP}(\mu_1, \mu_2) := \inf \big\{ \delta \geq 0 \mid \mu_1(A) \leq \mu_2(\mathcal{V}_\delta(A)) \ \ \forall A \subset X \big\},$$

où $\mathcal{V}_\delta(A)$ désigne le $\delta$-voisinage uniforme de $A$ dans $X$.

Ceci définit une distance $d_{LP}$ sur les mesures sur $X$. (Pour vérifier la symétrie, notons que si $d_{LP}(\mu_1, \mu_2) \leq \delta$, alors pour tout $A \subset X$ on a

$$\mu_2(A) \leq \mu_2(X) - \mu_2(\mathcal{V}_\delta(X \smallsetminus \mathcal{V}_\delta(A))) \leq \mu_1(X) - \mu_1(X \smallsetminus \mathcal{V}_\delta(A)) = \mu_1(\mathcal{V}_\delta(A)),$$

d'où $d_{LP}(\mu_2, \mu_1) \leq \delta$.) Dans notre cas $X$ sera $Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_\alpha$ muni de la distance induite par $d_G$ par restriction et passage au quotient, où $\alpha \in \Gamma$ est proximal dans $G/P_\tau$.

La proposition 5.7 se reformule ainsi.

PROPOSITION 5.10. — *En supposant la condition (R) vérifiée, il existe $C > 0$ avec la propriété suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, tout $R > 0$ assez grand par rapport à $\varepsilon$ et tout $[\alpha] \in \mathcal{A}_{\varepsilon,R}$, les mesures finies $m^\alpha_{\varepsilon,R}$ et $(\varphi_1 \circ \mathrm{inv})_* \, m^\alpha_{\varepsilon,-R}$ sur $Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_\alpha$ (cf.* (5.10)*) ont même masse totale et l'on a*

$$d_{LP}\big(m^\alpha_{\varepsilon,R}, (\varphi_1 \circ \mathrm{inv})_* \, m^\alpha_{\varepsilon,-R}\big) \leq \frac{C\varepsilon}{R}. \tag{5.11}$$

*Démonstration du fait que la proposition 5.10 implique la proposition 5.7.* — Rappelons (cf. paragraphe 5.3) que $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,\pm R}$ est l'union disjointe de ses sous-ensembles $\mathrm{Triconn}^\alpha_{\varepsilon,\pm R}$ où $[\alpha]$ parcourt l'ensemble fini $\mathcal{A}_{\varepsilon,\pm R}$. Comme toute mesure a même masse totale que ses poussés en avant, on a

$$\begin{cases} \mu_{\varepsilon,R}(\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,R}) = \sum_{[\alpha]} \mu^\alpha_{\varepsilon,R}(\mathrm{Triconn}^\alpha_{\varepsilon,R}) = \sum_{[\alpha]} m^\alpha_{\varepsilon,R}(Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_\alpha), \\ \mu_{\varepsilon,-R}(\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,-R}) = \sum_{[\alpha]} m^\alpha_{\varepsilon,-R}(Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_{\alpha^{-1}}) = \sum_{[\alpha]} ((\varphi_1 \circ \mathrm{inv})_* \, m^\alpha_{\varepsilon,-R})(Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_\alpha). \end{cases}$$

Ainsi, le fait que les mesures $m^\alpha_{\varepsilon,R}$ et $(\varphi_1 \circ \mathrm{inv})_* \, m^\alpha_{\varepsilon,-R}$ sur $Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_\alpha$ aient même masse totale comme dans la proposition 5.10 implique l'égalité $\mu_{\varepsilon,R}(\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,R}) = \mu_{\varepsilon,-R}(\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,-R})$ de la proposition 5.7.

Soit $C > 0$ la constante de la proposition 5.10. Pour tout sous-ensemble mesurable $A$ de $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,R}$, l'ensemble des éléments de $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,-R}$ qui sont $(C\varepsilon/R)$-bien recollés à au moins un élément de $A$ est l'union disjointe sur $[\alpha] \in \mathcal{A}_{\varepsilon,R}$ des ensembles

$$B_\alpha := (\varphi_1 \circ \mathrm{inv} \circ \Psi^{\mathrm{tri}}_{\alpha^{-1}})^{-1}\big(\mathcal{V}_{C\varepsilon/R}\big(\Psi^{\mathrm{tri}}_\alpha\big(A \cap \mathrm{Triconn}^\alpha_{\varepsilon,R}\big)\big)\big) \subset \mathrm{Triconn}^\alpha_{\varepsilon,-R},$$

où $\mathcal{V}_{C\varepsilon/R}(\cdot)$ désigne le $(C\varepsilon/R)$-voisinage uniforme dans $Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_\alpha$. Par définition (5.10) de $m^\alpha_{\varepsilon,-R}$, on a

$$\mu^\alpha_{\varepsilon,-R}(B_\alpha) = \big((\varphi_1 \circ \mathrm{inv})_*\, m^\alpha_{\varepsilon,-R}\big)\big(\mathcal{V}_{C\varepsilon/R}\big(\Psi^{\mathrm{tri}}_\alpha\big(A \cap \mathrm{Triconn}^\alpha_{\varepsilon,R}\big)\big)\big)$$

qui, par la proposition 5.10, est supérieur ou égal à $m^\alpha_{\varepsilon,R}(\Psi^{\mathrm{tri}}_\alpha(A \cap \mathrm{Triconn}^\alpha_{\varepsilon,R}))$ lorsque $R$ est assez grand par rapport à $\varepsilon$. Par définition (5.10) de $m^\alpha_{\varepsilon,R}$, on a donc $\mu^\alpha_{\varepsilon,-R}(B_\alpha) \geq \mu^\alpha_{\varepsilon,R}(A \cap \mathrm{Triconn}^\alpha_{\varepsilon,R})$. Ainsi, la $(\mu_{\varepsilon,-R})$-mesure de l'ensemble des éléments de $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,-R}$ qui sont $(C\varepsilon/R)$-bien recollés à au moins un élément de $A$ est égale à $\sum_{[\alpha]} \mu^\alpha_{\varepsilon,-R}(B_\alpha) \geq \sum_{[\alpha]} \mu^\alpha_{\varepsilon,R}(A \cap \mathrm{Triconn}^\alpha_{\varepsilon,R}) = \mu_{\varepsilon,R}(A)$. □

### 5.5. Utilisation de la condition de retournement (R)

Nous avons vu au paragraphe 5.4 précédent que pour démontrer la proposition 3.4, il suffit de démontrer la proposition 5.10. Expliquons à présent comment la condition (R) du paragraphe 2.3.2 intervient dans la démonstration de la proposition 5.10.

La condition (R) affirme que $Z_G(\mathsf{h})$ contient, dans sa composante neutre, un élément central $j$ d'ordre deux tel qui échange $\underline{\tau}(0,\infty,-1)$ et $\underline{\tau}(0,\infty,1)$. Notons $\mathrm{refl} : G \to G$ la multiplication à droite par $j$ ; elle commute à inv. Posons

$$I := \mathrm{inv} \circ \mathrm{refl} : G \longrightarrow G. \tag{5.12}$$

Les involutions refl et $I$ de $G$ passent au quotient en des involutions de l'espace $G/Z^\tau$ des $\tau$-triangles de $G/P_\tau$ du paragraphe 4.1 :

— refl (« réflexion ») envoie $g \cdot \underline{\tau}(0,\infty,-1)$ sur $g \cdot \underline{\tau}(0,\infty,1)$,

— $I$ envoie $g \cdot \underline{\tau}(0,\infty,-1)$ sur $g \cdot \underline{\tau}(\infty,0,-1)$

(cf. figure 11). (Par exemple, si $\tau$ est la restriction à $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ d'un plongement $\tau_\mathbb{C} : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) \hookrightarrow G$ comme à la remarque 2.19.(1), alors refl et $I$ correspondent à la multiplication à droite respectivement par $\tau_\mathbb{C}(( \begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix} ))$ et $\tau_\mathbb{C}(( \begin{smallmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{smallmatrix} ))$.)

Notons que rot et $I$ engendrent un groupe de transformations de $G$ qui est relativement compact, car il préserve l'ensemble $\{\underline{\tau}(0), \underline{\tau}(\infty), \underline{\tau}(-1)\}$ et le sous-groupe $Z^\tau$ de $G$ qui fixe ces trois points est compact. Quitte à remplacer la distance riemannienne $G$-invariante à gauche $d_G$ par sa moyenne par le groupe engendré par rot et $I$, *on supposera désormais que $d_G$ est invariante par* rot *et par $I$*. Pour tout élément proximal $\alpha \in G$, l'involution refl de $G$ (resp. le flot $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ du paragraphe 4.1.3) préserve l'ensemble $L_\alpha$, et induit une involution (resp. un flot) sur $\Lambda\backslash L_\alpha$ pour tout sous-groupe $\Lambda$ de $Z_G(\alpha)$.

**5.5.1.** *Existence de l'élément $j$.* — L'existence d'un élément $j \in Z_G(\mathsf{h})$ d'ordre deux qui échange $\underline{\tau}(0,\infty,-1)$ et $\underline{\tau}(0,\infty,1)$, définissant des involutions $\mathrm{refl} : G \to G$ (multiplication à droite par $j$) et $I := \mathrm{inv} \circ \mathrm{refl} : G \to G$ comme ci-dessus, permet d'oublier les mesures $m^\alpha_{\varepsilon,-R}$ pour ne plus travailler qu'avec les mesures $m^\alpha_{\varepsilon,R}$ de (5.10).

Proposition 5.11. — *En supposant la condition (R) vérifiée, soient $\varepsilon, R > 0$.*

1. *Une représentation $\rho : \pi_1(\Pi) \to G$ est $(\varepsilon,R)$-presque parfaite de donnée géométrique $(\rho(a),\rho(b),\rho(c),g,g')$ si et seulement si $\rho$ est $(\varepsilon,-R)$-presque parfaite de donnée géométrique $(\rho(a),\rho(b),\rho(c),I(g),I(g'))$. En particulier, $\mathcal{A}_{\varepsilon,R} = \mathcal{A}_{\varepsilon,-R}$.*

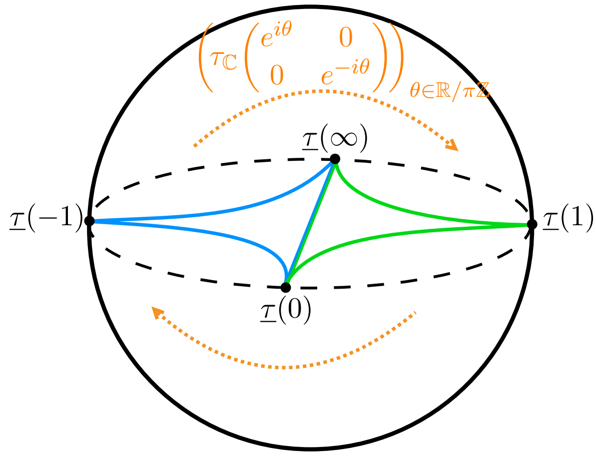


Figure 11. La transformation refl échange les $\tau$-triangles $\underline{\tau}(0,\infty,-1)$ et $\underline{\tau}(0,\infty,1)$ de $G/P_\tau$ ; la transformation $I$ échange les $\tau$-triangles $\underline{\tau}(0,\infty,-1)$ et $\underline{\tau}(\infty,0,-1)$ de $G/P_\tau$. Ici $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ et $G/P_\tau = \partial\mathbb{H}^3$. La condition de retournement (R) est satisfaite : le tore compact $\left(\begin{smallmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{smallmatrix}\right)_{\theta\in\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}}$ permet de « retourner continûment » $\underline{\tau}(0,\infty,-1)$ en $\underline{\tau}(0,\infty,1)$ en fixant $\underline{\tau}(0)$ et $\underline{\tau}(\infty)$.

*2. Pour $R$ assez grand par rapport à $\varepsilon$ comme au paragraphe 5.4 et pour $[\alpha] \in \mathcal{A}_{\varepsilon,R}$, on a $m^\alpha_{\varepsilon,-R} = I_*\, m^\alpha_{\varepsilon,R}$. En particulier, $m^\alpha_{\varepsilon,R}$ et $m^\alpha_{\varepsilon,-R}$ ont même masse totale.*

*Démonstration.* — (1) Comme $d_G$ est invariante par $I = \mathrm{inv} \circ \mathrm{refl}$, l'application cloche $\chi_{\varepsilon/R} : G \to \mathbb{R}^+$ du paragraphe 5.1 vérifie $\chi_{\varepsilon/R}(I(x)^{-1}I(g)) = \chi_{\varepsilon/R}(x^{-1}g)$ pour tous $x, g \in G$. De plus, on a $\varphi_R \circ \mathrm{inv} = \mathrm{inv} \circ \varphi_{-R}$ pour tout $R \in \mathbb{R}$ et $I \circ \mathrm{rot} = \mathrm{rot}^2 \circ I$, et $\varphi_R$ commute avec refl. On en déduit aisément, par un changement de variable, que $W_{\varepsilon,R}(I(x), I(y)) = W_{\varepsilon,-R}(x,y)$ pour tous $x, y \in G$, puis que

$$W^{\mathrm{tri}}_{\varepsilon,R} \circ I^{\mathrm{tri}} = W^{\mathrm{tri}}_{\varepsilon,-R}, \tag{5.13}$$

où $I^{\mathrm{tri}}$ : Triconn $\to$ Triconn est l'involution donnée par

$$I^{\mathrm{tri}}(x, y_0, y_1, y_2) = \big(I(x), \mathrm{rot} \circ I(y_1), \mathrm{rot} \circ I(y_0), \mathrm{rot} \circ I(y_2)\big). \tag{5.14}$$

On conclut en appliquant le lemme 5.3.

(2) D'après (5.8) et (5.13), on a $I^{\mathrm{tri}}_* \mu^\alpha_{\varepsilon,R} = \mu^\alpha_{\varepsilon,-R}$. D'autre part, on a $I(L_\alpha) = L_{\alpha^{-1}}$ et, comme $\Psi_\alpha$ est une projection orthogonale (définition 4.14) pour la métrique riemannienne associée à $d_G$, qui est par hypothèse invariante par $I$, on a $I(\mathcal{U}_\alpha) = \mathcal{U}_{\alpha^{-1}}$ et $I \circ \Psi_\alpha = \Psi_{\alpha^{-1}} \circ I : \mathcal{U}_\alpha \to L_{\alpha^{-1}}$. On en déduit $I \circ \Psi^{\mathrm{tri}}_\alpha = \Psi^{\mathrm{tri}}_{\alpha^{-1}} \circ I^{\mathrm{tri}}$, puis

$$m^\alpha_{\varepsilon,-R} = (\Psi^{\mathrm{tri}}_{\alpha^{-1}})_* \mu^\alpha_{\varepsilon,-R} = (\Psi^{\mathrm{tri}}_{\alpha^{-1}})_* I^{\mathrm{tri}}_* \mu^\alpha_{\varepsilon,R} = I_* (\Psi^{\mathrm{tri}}_\alpha)_* \mu^\alpha_{\varepsilon,R} = I_*\, m^\alpha_{\varepsilon,R}. \qquad \square$$

Pour démontrer la proposition 5.10, il suffit donc de montrer que la mesure $m^\alpha_{\varepsilon,R}$ sur $Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_\alpha$ est proche, pour la distance de Lévy–Prokhorov, de son poussé en avant par $\varphi_1 \circ \mathrm{inv} \circ I = \varphi_1 \circ \mathrm{refl}$.

**5.5.2.** *Tores compacts.* — La condition (R) requiert que l'élément $j$ soit central dans $Z_G(\mathsf{h})$ et appartienne à la composante neutre de $Z_G(\mathsf{h})$. Ceci permet d'obtenir une action d'un certain tore compact $\mathbb{S}_\alpha$, ce qui est utile de manière générale pour contrôler la distance de Lévy–Prokhorov (cf. lemme 5.17 ci-dessous).

LEMME 5.12. — *Il existe un entier $N \geq 1$, ne dépendant que de $G$, avec la propriété suivante : en supposant la condition (R) vérifiée, pour tout réseau cocompact irréductible sans torsion $\Gamma$ de $G$ et tout élément proximal $\alpha \in \Gamma$, il existe un sous-groupe $\Lambda_\alpha$ d'indice $\leq N$ de $Z_\Gamma(\alpha)$ et un tore compact $\mathbb{S}_\alpha$ de $Z_G(\Lambda_\alpha)_0$ tels que l'involution* refl : $L_\alpha \to L_\alpha$ *corresponde à la multiplication à gauche par un élément de $\mathbb{S}_\alpha$.*

Notons que $Z_G(\Lambda_\alpha)_0$ est bien contenu dans le groupe $\mathrm{stab}_G(\alpha^\ominus, \alpha^\oplus)$ qui agit à gauche sur $L_\alpha$. En effet, le sous-groupe d'indice fini $\Lambda_\alpha$ de $Z_\Gamma(\alpha)$ contient une puissance non nulle de $\alpha$.

*Démonstration.* — Soient $\Gamma$ un réseau cocompact irréductible sans torsion de $G$ et $\alpha \in \Gamma$ un élément proximal. Comme à la remarque 4.15, soit $g_\alpha \in G$ envoyant $(\underline{\tau}(0), \underline{\tau}(\infty))$ sur $(\alpha^\ominus, \alpha^\oplus)$. On a $L_\alpha = g_\alpha Z_G(\mathsf{h})$ et $Z_G(\alpha) \subset g_\alpha Z_G(\mathsf{h}) g_\alpha^{-1}$, où $Z_G(\mathsf{h}) = A Z_K(\mathsf{h})$. Comme $\Gamma$ est sans torsion, la projection de $Z_\Gamma(\alpha)$ sur $g_\alpha A g_\alpha^{-1}$ est injective, donc $Z_\Gamma(\alpha)$ est abélien. La projection de $Z_\Gamma(\alpha)$ sur $g_\alpha Z_K(\mathsf{h}) g_\alpha^{-1}$ est contenue dans un sous-groupe abélien maximal $\mathbb{S}'_\alpha$ de $g_\alpha Z_K(\mathsf{h}) g_\alpha^{-1}$. Or, il existe $N \geq 1$, ne dépendant que de $G$, tel que $\mathbb{S}'_\alpha$ admette un sous-groupe d'indice $\leq N$ qui est un tore maximal $\mathbb{S}_\alpha$ de $g_\alpha Z_K(\mathsf{h})_0 g_\alpha^{-1}$ (cf. MILNOR, 1964). On note $\Lambda_\alpha$ l'intersection de $Z_\Gamma(\alpha)$ avec l'image réciproque de $\mathbb{S}_\alpha$ par la projection sur $g_\alpha Z_K(\mathsf{h}) g_\alpha^{-1}$ : c'est un sous-groupe d'indice $\leq N$ de $Z_\Gamma(\alpha)$. Par construction, $Z_G(\Lambda_\alpha)_0$ contient le tore maximal $\mathbb{S}_\alpha$ de $g_\alpha Z_K(\mathsf{h}) g_\alpha^{-1}$.

L'involution refl : $L_\alpha \to L_\alpha$ correspond à la multiplication à droite par $j \in G$, qui appartient par définition (cf. condition (R), paragraphe 2.3.2) au centre de $Z_G(\mathsf{h})$, et même (cf. paragraphe 2.3.4) au centre de $Z_K(\mathsf{h})_0$. Elle correspond donc à l'action de $j_\alpha := g_\alpha j g_\alpha^{-1}$ sur $L_\alpha$ par multiplication à gauche. L'élément $j_\alpha$ appartient au centre de $g_\alpha Z_K(\mathsf{h})_0 g_\alpha^{-1}$, donc au tore maximal $\mathbb{S}_\alpha$ (cf. KNAPP, 2002, Cor. IV.4.47). $\square$

La distance de Lévy–Prokhorov se comporte bien par revêtement fini de degré borné (cf. KAHN, LABOURIE et MOZES, arXiv 2018, § 18), ce qui implique le fait suivant.

*Remarque 5.13.* — Pour que les mesures finies $m^\alpha_{\varepsilon,R}$ et $(\varphi_1 \circ \mathrm{inv})_* \, m^\alpha_{\varepsilon,-R}$ sur $Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_\alpha$ satisfassent la conclusion de la proposition 5.10, il suffit que leurs relevés à $\Lambda_\alpha\backslash L_\alpha$ la satisfassent, où $\Lambda_\alpha$ est donné par le lemme 5.12. (Par définition, le relevé de $m^\alpha_{\varepsilon,R}$ est la mesure sur $\Lambda_\alpha\backslash L_\alpha$ dont le poussé en avant par le revêtement fini $\Lambda_\alpha\backslash L_\alpha \to Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_\alpha$ est $m^\alpha_{\varepsilon,R}$ et dont la restriction à chaque fibre est la mesure de probabilité uniforme.)

Dans la suite, on travaille avec $\Lambda_\alpha$ plutôt que $Z_\Gamma(\alpha)$ afin de pouvoir utiliser le tore $\mathbb{S}_\alpha$ du lemme 5.12. Le lecteur pourra penser en première approximation $\Lambda_\alpha = Z_\Gamma(\alpha)$, motivé notamment par l'exemple suivant.

*Exemple 5.14.* — Soient $G = \mathrm{PSL}(n, \mathbb{C})$ et $\tau : \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ le plongement irréductible (cf. exemples 2.23 et 4.10). Pour $\Gamma$ sans torsion et $\alpha \in \Gamma$ proximal, on peut prendre $\Lambda_\alpha = Z_\Gamma(\alpha)$ et $\mathbb{S}_\alpha = g_\alpha Z_K(\mathsf{h}) g_\alpha$ où $g_\alpha \in G$ envoie $(\underline{\tau}(0), \underline{\tau}(\infty))$ sur $(\alpha^\ominus, \alpha^\oplus)$. On a $C_\alpha^\Gamma := Z_G(\Lambda_\alpha)_0 = Z_G(\alpha)$ et $C_\alpha^\Gamma/(C_\alpha^\Gamma \cap \Lambda_\alpha) \simeq \mathbb{T}^{2(n-1)}$ (cf. exemple 5.8).

**5.5.3.** *Stratégie de démonstration de la proposition 5.10.* — Prenons $R$ assez grand par rapport à $\varepsilon$ comme au paragraphe 5.4. Pour $[\alpha] \in \mathcal{A}_{\varepsilon,R}$, soit $\Lambda_\alpha$ le sous-groupe d'indice fini de $Z_\Gamma(\alpha)$ donné par le lemme 5.12. Le groupe $C_\alpha^\Gamma := Z_G(\Lambda_\alpha)_0$ agit sur $X := \Lambda_\alpha \backslash L_\alpha$ par multiplication à gauche. Cette action se factorise en une action libre du groupe quotient $C_\alpha^\Gamma/(C_\alpha^\Gamma \cap \Lambda_\alpha)$. Pour démontrer la proposition 5.10, l'idée est de :

1. trouver une mesure finie $n_{\varepsilon,R}^\alpha$ sur $Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_\alpha$, invariante par $Z_G(Z_\Gamma(\alpha))$, telle que $m_{\varepsilon,R}^\alpha$ soit absolument continue par rapport à $n_{\varepsilon,R}^\alpha$, de dérivée de Radon–Nikodym proche de 1 : c'est l'objet de la proposition 5.15, qui utilise le mélange (fait 3.5) via le lemme 5.1 ; en relevant $n_{\varepsilon,R}^\alpha$, on obtient une mesure finie sur $X = \Lambda_\alpha \backslash L_\alpha$, invariante par $C_\alpha^\Gamma = Z_G(\Lambda_\alpha)_0$, par rapport à laquelle le relevé de $m_{\varepsilon,R}^\alpha$ est absolument continu, de dérivée de Radon–Nikodym proche de 1 ;
2. observer que pour un bon sous-groupe à un paramètre $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}} \subset C_\alpha^\Gamma$ contenant $\alpha$, l'élément $\varphi_1$ agit sur $X$ « presque » comme $\alpha_1$ (proposition 5.18) ; considérer alors le tore compact $\mathbb{T}_\alpha$ de $C_\alpha^\Gamma/(C_\alpha^\Gamma \cap \Lambda_\alpha)$ engendré par les images de $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$ et du tore $\mathbb{S}_\alpha$ du lemme 5.12, et montrer en utilisant (1) et un argument général (lemme 5.17) que la mesure $m_{\varepsilon,R}$ relevée à $X = \Lambda_\alpha \backslash L_\alpha$ est proche pour la distance de Lévy–Prokhorov de sa moyenne par $\mathbb{T}_\alpha$ ; en déduire, en utilisant la remarque 5.13, que $m_{\varepsilon,R}$ est proche pour la distance de Lévy–Prokhorov de la mesure $(\varphi_1 \circ \mathrm{refl})_* m_{\varepsilon,R}^\alpha$, qui est égale à $(\varphi_1 \circ \mathrm{inv})_*\, m_{\varepsilon,-R}^\alpha$ d'après la proposition 5.11.

### 5.6. Mesures proches au sens de la dérivée de Radon–Nikodym

La première étape de la démonstration de la proposition 5.10 consiste à établir le résultat suivant, qui utilise le mélange (fait 3.5) via le lemme 5.1.

PROPOSITION 5.15. — *En supposant la condition (R) vérifiée, pour tout $\varepsilon > 0$, tout $R > 0$ assez grand par rapport à $\varepsilon$ et tout $[\alpha] \in \mathcal{A}_{\varepsilon,R}$, il existe une mesure finie $n_{\varepsilon,R}^\alpha$ sur $Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_\alpha$, invariante par $Z_G(Z_\Gamma(\alpha))$, telle que la mesure $m_{\varepsilon,R}^\alpha$ de* (5.10) *soit absolument continue par rapport à $n_{\varepsilon,R}^\alpha$ et que sa dérivée de Radon–Nikodym vérifie*

$$\left\| \frac{\mathrm{d}m_{\varepsilon,R}^\alpha}{\mathrm{d}n_{\varepsilon,R}^\alpha} - 1 \right\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{R^2}.$$

La proposition 5.15 implique que, sous la condition (R), les mesures $m_{\varepsilon,R}^\alpha$ et $(\varphi_1 \circ \mathrm{inv})_*\, m_{\varepsilon,-R}^\alpha$ sont absolument continues l'une par rapport à l'autre, avec une dérivée de Radon–Nikodym proche de 1. En effet, d'après la proposition 5.11 on a $(\varphi_1 \circ \mathrm{inv})_*\, m_{\varepsilon,-R}^\alpha = (\varphi_1 \circ \mathrm{refl})_*\, m_{\varepsilon,R}^\alpha$. En raisonnant comme à la fin de la démonstration du lemme 5.12, on voit que l'action de $\varphi_1 \circ \mathrm{refl}$ sur $Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_\alpha$ correspond à la multiplication à gauche par un élément de $Z_G(Z_\Gamma(\alpha))$. La mesure $(\varphi_1 \circ \mathrm{inv})_*\, m_{\varepsilon,-R}^\alpha$ est donc elle aussi absolument continue par rapport à $n^\alpha_{\varepsilon,R}$ et sa dérivée de Radon–Nikodym vérifie $\|\mathrm{d}((\varphi_1\circ \mathrm{inv})_*\, m^\alpha_{\varepsilon,-R})/\mathrm{d}n^\alpha_{\varepsilon,R}-1\|_\infty\leq \varepsilon/R^2$. Pour $\varepsilon/R^2\leq 1/2$, on en déduit que $(\varphi_1\circ\mathrm{refl})_*\, m^\alpha_{\varepsilon,R}$ est absolument continue par rapport à $m^\alpha_{\varepsilon,R}$ et que

$$\left\|\frac{\mathrm{d}((\varphi_1\circ\mathrm{refl})_*\, m^\alpha_{\varepsilon,R})}{\mathrm{d}m^\alpha_{\varepsilon,R}}-1\right\|_\infty\leq\frac{4\varepsilon}{R^2}.$$

Afin de construire une mesure $n^\alpha_{\varepsilon,R}$ vérifiant la conclusion de la proposition 5.15, pour tous $\varepsilon,R>0$, on définit une fonction $W^{\mathrm{bi}}_{\varepsilon,R}:G^3\to\mathbb{R}$ par

$$W^{\mathrm{bi}}_{\varepsilon,R}(x,y_0,y_1)=W_{\varepsilon,R}(x,y_0)\,W_{\varepsilon,R}(\mathrm{rot}^2(x),\mathrm{rot}(y_1)),$$

où $x,y_0,y_1\in G$. Elle est invariante par l'action diagonale de $G$ par multiplication à gauche. On appelle *couple biconnecté dans* $\Gamma\backslash G$ tout élément de

$$\mathrm{Biconn}:=\{[(x,y_0,y_1)]\in\Gamma\backslash G^3\mid y_1\in\Gamma y_0\},$$

où $\Gamma$ agit diagonalement sur $G^3$ par multiplication à gauche. Pour $\varepsilon,R>0$ et $\alpha\in\Gamma$, on pose

$$\mathrm{Biconn}^\alpha_{\varepsilon,R}:=\{[(x,y_0,y_1)]\in\mathrm{Biconn}\mid W^{\mathrm{bi}}_{\varepsilon,R}(x,y_0,y_1)>0\text{ et }y_1=\alpha^{-1}y_0\}.$$

Comme pour les couples triconnectés, on peut voir $\mathrm{Biconn}^\alpha_{\varepsilon,R}$ comme un sous-ensemble de $Z_\Gamma(\alpha)\backslash G^3$. En particulier, $Z_G(Z_\Gamma(\alpha))$ agit sur $\mathrm{Biconn}^\alpha_{\varepsilon,R}$ par multiplication à gauche. On a une projection naturelle $\pi:\mathrm{Triconn}\to\mathrm{Biconn}$, qui envoie $\mathrm{Triconn}^\alpha_{\varepsilon,R}$ sur $\mathrm{Biconn}^\alpha_{\varepsilon,R}$ de manière $Z_G(Z_\Gamma(\alpha))$-équivariante. Pour $R$ assez grand par rapport à $\varepsilon$, l'application « pied » $\Psi_\alpha:\mathcal{U}_\alpha\to L_\alpha$ de la définition 4.14 induit (par analogie avec $\Psi^{\mathrm{tri}}_\alpha$, cf. (5.9)) une application $\Psi^{\mathrm{bi}}_\alpha:\mathrm{Biconn}^\alpha_{\varepsilon,R}\to Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_\alpha$ qui à $[(g,g',\alpha^{-1}g')]$ associe $[\Psi_\alpha(g)]$. Cette application $\Psi^{\mathrm{bi}}_\alpha$ est $Z_G(Z_\Gamma(\alpha))$-équivariante car $\Psi_\alpha$ est $Z_G(\alpha)$-équivariante (remarque 4.15). Le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}\mathrm{Triconn}^\alpha_{\varepsilon,R} \arrow[r, "\pi"] \arrow[rr, bend right, "\Psi^{\mathrm{tri}}_\alpha"'] & \mathrm{Biconn}^\alpha_{\varepsilon,R} \arrow[r, "\Psi^{\mathrm{bi}}_\alpha"] & Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_\alpha\end{tikzcd}.$$

*Démonstration de la proposition 5.15.* — Comme Triconn, l'espace Biconn se projette, en considérant les deux premières coordonnées, sur $\Gamma\backslash G^2$, avec des fibres dénombrables paramétrées par $\Gamma$. Soit $\lambda_{\mathrm{Biconn}}$ la mesure localement finie sur Biconn dont le poussé en avant est la mesure naturelle de $\Gamma\backslash G^2$ (induite par la mesure de Haar de $G$) et dont la restriction à chaque fibre est la mesure de comptage. On définit, sur $\mathrm{Biconn}_{\varepsilon,R}$, la mesure $\nu_{\varepsilon,R}:=W^{\mathrm{bi}}_{\varepsilon,R}\,\lambda_{\mathrm{Biconn}}$. Soit $\nu^\alpha_{\varepsilon,R}$ sa restriction à $\mathrm{Biconn}^\alpha_{\varepsilon,R}$ pour $\alpha\in\Gamma$. Montrons que la mesure $n^\alpha_{\varepsilon,R}:=(\Psi^{\mathrm{bi}}_\alpha)_*\nu^\alpha_{\varepsilon,R}$ convient. Comme la fonction $W^{\mathrm{bi}}_{\varepsilon,R}:G^3\to\mathbb{R}$ est invariante par l'action diagonale de $G$, la mesure $\nu^\alpha_{\varepsilon,R}$ est invariante par $Z_G(Z_\Gamma(\alpha))$, donc $n^\alpha_{\varepsilon,R}=(\Psi^{\mathrm{bi}}_\alpha)_*\nu^\alpha_{\varepsilon,R}$ aussi par $Z_G(Z_\Gamma(\alpha))$-équivariance de $\Psi^{\mathrm{bi}}_\alpha$. Soit $f^\alpha_{\varepsilon,R}:\mathrm{Biconn}^\alpha_{\varepsilon,R}\to\mathbb{R}$ la fonction lisse donnée par

$$f^\alpha_{\varepsilon,R}([g,g',\alpha^{-1}g'])=w_{\varepsilon,R}([\mathrm{rot}(g)],[\mathrm{rot}^2(g')])=\sum_{\beta\in\Gamma}W_{\varepsilon,R}(\mathrm{rot}(g),\mathrm{rot}^2\circ\beta(g'))$$

(cf. (5.2)). On a $\pi_*\mu^\alpha_{\varepsilon,R} = f^\alpha_{\varepsilon,R}\,\nu^\alpha_{\varepsilon,R}$, où $\mu^\alpha_{\varepsilon,R}$ est la restriction à $\mathrm{Triconn}^\alpha_{\varepsilon,R}$ de la mesure $\mu_{\varepsilon,R}$ de (5.8), et pour $R$ assez grand par rapport à $\varepsilon$ on a $\|f^\alpha_{\varepsilon,R} - 1\|_\infty \le \varepsilon/R^2$ par le lemme 5.1. La mesure $m^\alpha_{\varepsilon,R} = (\Psi^{\mathrm{tri}}_\alpha)_*\,\mu^\alpha_{\varepsilon,R} = (\Psi^{\mathrm{bi}}_\alpha)_*\,(f^\alpha_{\varepsilon,R}\,\nu^\alpha_{\varepsilon,R})$ est absolument continue par rapport à $n^\alpha_{\varepsilon,R} = (\Psi^{\mathrm{bi}}_\alpha)_*\,\nu^\alpha_{\varepsilon,R}$, et sa dérivée de Radon–Nikodym $h^\alpha_{\varepsilon,R} = \frac{\mathrm{d}m^\alpha_{\varepsilon,R}}{\mathrm{d}n^\alpha_{\varepsilon,R}}$ vérifie $\|h^\alpha_{\varepsilon,R} - 1\|_\infty \le \|f^\alpha_{\varepsilon,R} - 1\|_\infty$. En effet, pour toute fonction $\psi \in L^1(Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_\alpha, \mathbb{R})$, on a

$$\left|\int_{Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_\alpha} \psi\,(h^\alpha_{\varepsilon,R} - 1)\,\mathrm{d}n^\alpha_{\varepsilon,R}\right| = \left|\int_{\mathrm{Biconn}^\alpha_{\varepsilon,R}} (\psi\circ\Psi^{\mathrm{bi}}_\alpha)\,(f^\alpha_{\varepsilon,R} - 1)\,\mathrm{d}\nu^\alpha_{\varepsilon,R}\right|$$

$$\le \|f^\alpha_{\varepsilon,R} - 1\|_\infty \left|\int_{\mathrm{Biconn}^\alpha_{\varepsilon,R}} (\psi\circ\Psi^{\mathrm{bi}}_\alpha)\,\mathrm{d}\nu^\alpha_{\varepsilon,R}\right| \;=\; \|f^\alpha_{\varepsilon,R} - 1\|_\infty \left|\int_{Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_\alpha} \psi\,\mathrm{d}n^\alpha_{\varepsilon,R}\right|. \qquad \square$$

### 5.7. Mesures proches au sens de la distance de Lévy–Prokhorov

On souhaite à présent déduire la proposition 5.10 de la proposition 5.15.

**5.7.1.** *Premier ingrédient.* — On utilise les observations générales suivantes sur la distance de Lévy–Prokhorov (définition 5.9). La démonstration du lemme 5.17 est esquissée au paragraphe 5.8 ci-dessous.

*Remarques 5.16.* — Soient $(X,d)$ un espace métrique, $\mu,\nu$ deux mesures finies sur $X$ et $f,g : X\to X$ deux applications mesurables.

1. Si $f$ est une isométrie bijective de $(X,d)$, alors $d_{LP}(f_*\mu, f_*\nu) = d_{LP}(\mu,\nu)$.
2. En général, $d_{LP}(f_*\mu, g_*\mu) \le \sup_{x\in X} d(f(x), g(x))$. En effet, supposons $\delta := \sup_{x\in X} d(f(x),g(x)) < +\infty$. Pour tout $A\subset X$ et tout $x\in X$, si $f(x)\in A$, alors $g(x)\in \mathcal{V}_\delta(A)$, d'où $(f_*\mu)(A) = \mu(f^{-1}(A)) \le \mu(g^{-1}(\mathcal{V}_\delta(A))) = (g_*\mu)(\mathcal{V}_\delta(A))$.

Lemme 5.17. — *Pour tout $k\ge 1$, il existe une constante $C_k > 0$ avec la propriété suivante : pour toute variété riemannienne $X$ munie d'une action par isométries d'un tore compact $\mathbb{T}$ de dimension $k$, préservant une mesure $n$ sur $X$, pour tout $\delta > 0$ et toute fonction $h : X\to\mathbb{R}^*_+$, si la moyenne $\overline{h} := \int_{g\in\mathbb{T}} h\circ g\,\mathrm{d}g$ de $h$ pour la mesure de probabilité de Haar de $\mathbb{T}$ vérifie $e^{-\delta}\,\overline{h} \le h \le e^{\delta}\,\overline{h}$, alors*

$$d_{LP}(hn, \overline{h}n) \le \delta\cdot C_k \sup_{x\in X} \mathrm{diam}(\mathbb{T}\cdot x).$$

**5.7.2.** *Second ingrédient.* — Rappelons que l'on a supposé $\Gamma$ sans torsion. Pour $[\alpha]\in\mathcal{A}_{\varepsilon,R}$, soit $\Lambda_\alpha$ le sous-groupe d'indice fini de $Z_\Gamma(\alpha)$ du lemme 5.12, et soit $C^\Gamma_\alpha = Z_G(\Lambda_\alpha)_0$. Soit $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ le flot sur $G$ du paragraphe 4.1.3. On utilise le résultat suivant, qui provient d'un raffinement du lemme 4.12, et dont la démonstration est esquissée au paragraphe 5.9 ci-dessous.

Proposition 5.18. — *Il existe $C' > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, tout $R > 0$ assez grand par rapport à $\varepsilon$ et tout $[\alpha]\in\mathcal{A}_{\varepsilon,R}$, il existe un sous-groupe à un paramètre $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$ du centre de $C^\Gamma_\alpha$ tel que $\alpha_{2R} = \alpha$ et $d_G(\varphi_t(x), \alpha_t x) \le C'(\varepsilon/R + e^{-R})$ pour tous $x\in L_\alpha$ et $t\in[0,2R]$.*

**5.7.3.** *Esquisse de démonstration de la proposition 5.10.* — Soit $\varepsilon > 0$, soit $R > 0$ assez grand par rapport à $\varepsilon$ comme au paragraphe 5.4, et soit $[\alpha] \in \mathcal{A}_{\varepsilon,R}$. On considère le quotient $X = \Lambda_\alpha \backslash L_\alpha$ de $L_\alpha$ par $\Lambda_\alpha$, muni de la métrique riemannienne induite par celle de $G$ par restriction à $L_\alpha$ et passage au quotient. Le groupe $C_\alpha^\Gamma = Z_G(\Lambda_\alpha)_0$ agit sur $X$ par multiplication à gauche, et cette action se factorise en une action du groupe quotient $C_\alpha^\Gamma/(C_\alpha^\Gamma \cap \Lambda_\alpha)$.

Soit $\mathbb{T}_\alpha \subset C_\alpha^\Gamma/(C_\alpha^\Gamma \cap \Lambda_\alpha)$ le tore compact engendré par les images dans $C_\alpha^\Gamma/(C_\alpha^\Gamma \cap \Lambda_\alpha)$ du tore compact $\mathbb{S}_\alpha \subset C_\alpha^\Gamma$ du lemme 5.12 et du sous-groupe à un paramètre $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$ de la proposition 5.18. On vérifie qu'il existe $C'' > 0$, indépendant de $\varepsilon$ et $R$, tel que le diamètre des orbites de $\mathbb{T}_\alpha$ dans $X$ est borné par $C''R$ dès que $R$ est assez grand par rapport à $\varepsilon$.

Soit $\hat{m}_{\varepsilon,R}^\alpha$ le relevé à $X = \Lambda_\alpha \backslash L_\alpha$ de la mesure $m_{\varepsilon,R}^\alpha$ sur $Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_\alpha$. La proposition 5.15 implique, pour $R$ assez grand par rapport à $\varepsilon$, l'existence d'une mesure finie $\hat{n}_{\varepsilon,R}^\alpha$ sur $X$, invariante par $C_\alpha^\Gamma$, telle que $\hat{m}_{\varepsilon,R}^\alpha = h\hat{n}_{\varepsilon,R}^\alpha$ où $h : X \to \mathbb{R}_+^*$ vérifie $\|h-1\|_\infty \leq \varepsilon/R^2$. La moyenne $\overline{h} = \int_{g\in\mathbb{T}_\alpha} h\circ g \,\mathrm{d}g$ de $h$ par $\mathbb{T}_\alpha$ vérifie alors $e^{-3\varepsilon/R^2}\,\overline{h} \leq h \leq e^{3\varepsilon/R^2}\,\overline{h}$ dès que $R$ est assez grand par rapport à $\varepsilon$. D'après le lemme 5.17 il existe $C_G > 0$, ne dépendant que de la dimension maximale d'un tore compact de $G$, tel que

$$d_{LP}\big(\hat{m}_{\varepsilon,R}^\alpha, \overline{h}\hat{n}_{\varepsilon,R}^\alpha\big) = d_{LP}\big(h\hat{n}_{\varepsilon,R}^\alpha, \overline{h}n_{\varepsilon,R}^\alpha\big) \leq \frac{3\varepsilon}{R^2}\, C_G \sup_{x\in X} \operatorname{diam}(\mathbb{T}_\alpha \cdot x) \leq 3C_GC''\frac{\varepsilon}{R}. \tag{5.15}$$

Or, d'après la proposition 5.11 on a $(\varphi_1 \circ \mathrm{inv})_*\,\hat{m}_{\varepsilon,-R}^\alpha = (\varphi_1 \circ \mathrm{refl})_*\,\hat{m}_{\varepsilon,R}^\alpha$. D'après le lemme 5.12 l'involution $\mathrm{refl} : X \to X$ correspond à l'action d'un élément de $\mathbb{S}_\alpha$ donc de $\mathbb{T}_\alpha$, et d'après la proposition 5.18, pour $R$ assez grand par rapport à $\varepsilon$, l'élément $\alpha_1 \in \mathbb{T}_\alpha$ envoie tout $x \in X$ à distance $\leq 2C'\varepsilon/R$ de $\varphi_1(x)$, où $C' > 0$ est indépendant de $\varepsilon$ et $R$. Par inégalité triangulaire, on a $d_{LP}(\hat{m}_{\varepsilon,R}^\alpha, (\varphi_1 \circ \mathrm{refl})_*\,\hat{m}_{\varepsilon,R}^\alpha) \leq d_{LP}(\hat{m}_{\varepsilon,R}^\alpha, \overline{\hat{h}}\hat{n}_{\varepsilon,R}^\alpha) + d_{LP}(\overline{\hat{h}}\hat{n}_{\varepsilon,R}^\alpha, (\alpha_1 \circ \mathrm{refl})_*\,\hat{m}_{\varepsilon,R}^\alpha) + d_{LP}((\alpha_1 \circ \mathrm{refl})_*\,\hat{m}_{\varepsilon,R}^\alpha, (\varphi_1 \circ \mathrm{refl})_*\,\hat{m}_{\varepsilon,R}^\alpha)$. Le premier terme de droite est borné par $3C_GC''\varepsilon/R$ d'après (5.15). Le deuxième terme est égal au premier par la remarque 5.16.(1), en utilisant le fait que $\alpha_1 \circ \mathrm{refl} \in \mathbb{T}_\alpha$ agit sur $X$ comme une isométrie et préserve $\overline{\hat{h}}\hat{n}_{\varepsilon,R}^\alpha$. Le troisième terme est borné par $2C'\varepsilon/R$, d'après la remarque 5.16.(2) et le fait que $\alpha_1$ envoie tout $x \in X$ à distance $\leq 2C'\varepsilon/R$ de $\varphi_1(x)$. On obtient ainsi $d_{LP}(\hat{m}_{\varepsilon,R}^\alpha, (\varphi_1 \circ \mathrm{refl})_*\,\hat{m}_{\varepsilon,R}^\alpha) \leq (6C_GC'' + 2C')\varepsilon/R$. On conclut en utilisant la remarque 5.13.

### 5.8. Démonstration du lemme 5.17

Nous traitons ici le cas où $X$ est le tore euclidien $\mathbb{T}^\ell = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^\ell$ muni de sa mesure de Haar $n$ et $\mathbb{T}^k$ est un sous-tore, pour $1 \leq k \leq \ell$. Le cas général utilise les mêmes idées : cf. Kahn, Labourie et Mozes (arXiv 2018, § 18).

Comme la distance de Lévy–Prokhorov entre deux mesures est invariante par multiplication des deux mesures par une même constante, on peut supposer que $n$ est une mesure de probabilité. On raisonne en trois étapes :

1. pour $k = \ell = 1$, si $\overline{h} \leq e^{2\delta}\, h$, alors $d_{LP}(hn, \overline{h}n) \leq \delta$ ;

2. pour $k=1$ et $\ell \geq 1$ quelconque, si $\overline{h} \leq e^{2\delta}\, h$, alors $d_{LP}(hn, \overline{h}n) \leq \delta$ ;
3. pour $1 \leq k \leq \ell$ quelconques, si $e^{-2\delta}\, \overline{h} \leq h \leq e^{2\delta}\, \overline{h}$, alors $d_{LP}(hn, \overline{h}n) \leq (2^k - 1)\, \delta$.

• Démonstration de (1) : Supposons $\overline{h} \leq e^{2\delta}\, h$ et soit $A \subset X = \mathbb{T}^1$. Si $\mathcal{V}_\delta(A) = \mathbb{T}^1$, on a

$$(hn)(\mathcal{V}_\delta(A)) = \int_{\mathbb{T}^1} h \mathrm{d}n = \overline{h} \geq \overline{h}\, n(A).$$

Si $\mathcal{V}_\delta(A) \subsetneq \mathbb{T}^1$, alors $n(A) \leq n(\mathcal{V}_\delta(A)) - 2\delta \leq (1-2\delta)\, n(\mathcal{V}_\delta(A))$ car $X = \mathbb{T}^1$, d'où

$$(hn)(\mathcal{V}_\delta(A)) \geq e^{-2\delta}\, \overline{h}\, n(\mathcal{V}_\delta(A)) \geq \frac{e^{-2\delta}}{1-2\delta}\, \overline{h}\, n(A) \geq \overline{h}\, n(A).$$

• Démonstration de (2) : Écrivons $X = \mathbb{T}^\ell$ comme le produit de $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}^1$ et d'un facteur $\mathbb{T}^{\ell-1}$. Toute mesure $m$ sur $X$ se désintègre en des mesures $m_x$ sur $\mathbb{T}^1 \times \{x\}$ pour $x \in \mathbb{T}^{\ell-1}$. D'après (1) on a $d_{LP}((hn)_x, (\overline{h}n)_x) \leq \delta$ pour tout $x \in \mathbb{T}^{\ell-1}$. Par intégration, pour tout $A \subset X$, en utilisant le fait que $(\{x\} \times \mathbb{T}^{\ell-1}) \cap \mathcal{V}_\delta(A)$ contient le $\delta$-voisinage de $(\{x\} \times \mathbb{T}^{\ell-1}) \cap A$ dans $\{x\} \times \mathbb{T}^{\ell-1}$, on voit que $(hn)(\mathcal{V}_\delta(A)) \geq (\overline{h}n)(A)$.

• Démonstration de (3) : On raisonne par récurrence sur $k$. Le cas $k=1$ est contenu dans (2). Supposons le résultat vrai pour $k-1$. Écrivons notre facteur $\mathbb{T}^k$ comme $\mathbb{T}^{k-1} \times \mathbb{T}^1$, et soit $\widetilde{h}$ la moyenne de $h$ par $\mathbb{T}^{k-1}$. Par hypothèse on a $e^{-2\delta}\, \overline{h} \leq h \leq e^{2\delta}\, \overline{h}$, d'où $e^{-2\delta}\, \overline{h} \leq \widetilde{h} \leq e^{2\delta}\, \overline{h}$ en prenant la moyenne par $\mathbb{T}^{k-1}$. On en déduit $e^{-4\delta}\, \widetilde{h} \leq h \leq e^{4\delta}\, \widetilde{h}$, et donc $d_{LP}(hn, \widetilde{h}n) \leq (2^{k-1}-1)\, 2\delta$ par hypothèse de récurrence. D'autre part, comme $\overline{h}$ est la moyenne de $\widetilde{h}$ par $\mathbb{T}^1$, on a $d_{LP}(\widetilde{h}n, \overline{h}n) \leq \delta$ par (2). Par inégalité triangulaire, on obtient

$$d_{LP}(hn, \overline{h}n) \leq d_{LP}(hn, \widetilde{h}n) + d_{LP}(\widetilde{h}n, \overline{h}n) \leq (2^{k-1}-1)\, 2\delta + \delta = (2^k - 1)\, \delta.$$

### 5.9. Démonstration de la proposition 5.18

Le lemme 4.12 affirme que pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, tout $R > 0$ assez grand et tout $(g, g', \alpha) \in G^3$, si $\alpha$ est $(\varepsilon, R)$-presque réalisé par $(g, g')$ au sens de la définition 4.6, alors $g^{-1}\alpha g$ est proche de $\exp(R\, \mathsf{h})$ au sens où les points fixes attractifs, les points fixes répulsifs et les images par $\lambda$ (projections de Jordan/Lyapounov) de ces deux éléments sont proches. Le lemme suivant affirme que dans ce contexte, l'élément $\Psi_\alpha(g)^{-1}\alpha\Psi_\alpha(g)$ est proche de $\exp(R\, \mathsf{h})$ au sens de la distance $G$-invariante à gauche $d_G$, où $\Psi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \to L_\alpha$ est l'application « pied » de la définition 4.14.

Lemme 5.19. — *Il existe $C'' > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, tout $R > 0$ assez grand et tout $(g, g', \alpha) \in G^3$, si $\alpha$ est $(\varepsilon, R)$-presque réalisé par $(g, g')$ au sens de la définition 4.6, alors*

$$d_G(\varphi_{2R}(\Psi_\alpha(g)), \alpha\, \Psi_\alpha(g)) \leq C''(\varepsilon + e^{-R}).$$

Pour démontrer le lemme 5.19, Kahn, Labourie et Mozes utilisent les propriétés suivantes de contraction et de dilatation du flot $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$. Soit $U_\tau^+$ le radical unipotent du sous-groupe parabolique $P_\tau$ de $G$ du paragraphe 1.4, de sorte que $P_\tau = Z_K(\mathfrak{a})AU_\tau^+$. Soit $U_\tau^-$ le conjugué de $U_\tau^+$ par $\tau\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right)$, de sorte que $P_\tau^- := Z_K(\mathfrak{a})AU_\tau^-$ soit un sous-groupe parabolique de $G$ opposé à $P_\tau$. Les classes à gauche de $A$ (resp. $U_\tau^+$, resp. $P_\tau$, resp. $U_\tau^-$, resp. $P_\tau^-$) forment un feuilletage de $G$, dit central (resp. stable, resp. central stable, resp. instable, resp. central instable) ; pour $t > 0$, la transformation $\varphi_t$ envoie feuille sur feuille de manière isométrique (resp. uniformément contractante, resp. contractante au sens large, resp. uniformément dilatante, resp. dilatante au sens large). Pour $x, y \in G$ suffisamment proches, la feuille stable de $x$ intersecte la feuille centrale instable de $y$ en un unique point, proche de $x$ et $y$.

*Exemple 5.20.* — Pour $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, vu comme $T^1\mathbb{H}^2$ comme au paragraphe 4.1, le flot $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est le flot géodésique. La feuille du feuilletage central stable (resp. central instable) contenant $x \in T^1\mathbb{H}^2$ est l'ensemble des vecteurs unitaires tangents pointant vers le même point à l'infini $\eta_x^+ \in \partial\mathbb{H}^2$ (resp. $\eta_x^- \in \partial\mathbb{H}^2$) dans le futur (resp. passé) que $x$. La feuille du feuilletage stable (resp. instable) contenant $x$ est l'ensemble des vecteurs unitaires tangents de la feuille centrale stable (resp. centrale instable) de $x$ qui sont basés sur le même horocycle centré en $\eta_x^+$ (resp. $\eta_x^-$) que $x$.

Kahn, Labourie et Mozes utilisent ces propriétés dynamiques du flot $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ pour établir l'existence de constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que :

1. pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, tout $R > 0$ assez grand et tout $(g, g', \alpha) \in G^3$, si $\alpha$ est $(\varepsilon, R)$-presque réalisé par $(g, g')$ (définition 4.6), alors il existe $z \in G$ tel que $d_G(z, g) \le C_1(\varepsilon + e^{-R})$ et $d_G(\varphi_{2R}(z), \alpha g) \le C_1(\varepsilon + e^{-R})$ ;
2. pour tout $\delta > 0$ assez petit, tout $R > 0$ et tous $\alpha, z \in G$, si $\alpha$ est proximal dans $G/P_\tau$, de points fixes attractif $\alpha^\oplus$ et répulsif $\alpha^\ominus$, si $d_\tau(z'^{-1} \cdot \alpha^\ominus, \underline{\tau}(0)) \le \delta$ et si $d_\tau(z'^{-1} \cdot \alpha^\oplus, \underline{\tau}(\infty)) \le \delta$ pour tout $z' \in \{z, \varphi_{2R}(z)\}$, alors
$$d_G(\Psi_\alpha \circ \varphi_{2R}(z), \varphi_{2R} \circ \Psi_\alpha(z)) \le C_2\delta.$$

Ils en déduisent alors le lemme 5.19 en utilisant le lemme 4.12 et le fait que l'application « pied » $\Psi_\alpha$, définie comme la projection orthogonale d'un petit voisinage de $L_\alpha$ sur $L_\alpha$, est lipschitzienne ; sa constante de Lipschitz ne dépend pas de $\alpha$ d'après la remarque 4.15.

*Démonstration de la proposition 5.18.* — Pour tout $[\alpha] \in \mathcal{A}_{\varepsilon,R}$, par définition, il existe $(g, g') \in G$ tel que $\alpha$ est $(\varepsilon/R, R)$-presque réalisé par $(g, g')$. Le lemme 5.19 affirme que si $R$ est assez grand par rapport à $\varepsilon$, alors il existe $y \in L_\alpha$ tel que $d_G(\varphi_{2R}(y), \alpha y) = d_G(y \exp(R\,\mathsf{h}), \alpha y) \le C'' r_{\varepsilon,R}$, où $r_{\varepsilon,R} := (\varepsilon/R + e^{-R})$ ; autrement dit, comme $d_G$ est $G$-invariante à gauche, on a $d_G(\exp(-R\,\mathsf{h})y^{-1}\alpha y, \mathrm{id}) \le C'' r_{\varepsilon,R}$.

Soit $v \in Z_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) + \mathfrak{a}$ de norme minimale tel que $\exp(2Rv) = \exp(-R\,\mathsf{h})y^{-1}\alpha y$. Pour tout $t \in [0, 2R]$, on a $d_G(\exp(tv), \mathrm{id}) \le d_G(\exp(2Rv), \mathrm{id}) \le C'' r_{\varepsilon,R}$. On considère le sous-groupe à un paramètre
$$(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}} := \Big(y \exp\Big(t\Big(\frac{\mathsf{h}}{2} + v\Big)\Big) y^{-1}\Big)_{t\in\mathbb{R}}$$
de $Z(Z_G(\alpha))_0 \subset Z(C_\alpha^\Gamma)$. On a $\alpha_{2R} = \alpha$ et $d_G(\varphi_t(y), \alpha_t y) = d_G(\exp(tv), \mathrm{id}) \le C'' r_{\varepsilon,R}$ pour tout $t \in [0, 2R]$.

En écrivant $L_\alpha$ comme une classe à gauche de $AZ_K(\mathfrak{a})$ comme à la remarque 4.15, on voit que pour tout $x \in L_\alpha$ et tout $t \in [0, 2R]$, on a $x^{-1}y \in AZ_K(\mathfrak{a})$ et

$$d_G(\varphi_t(x), \alpha_t x) = d_G((x^{-1}y) \exp(tv)(x^{-1}y)^{-1}, \mathrm{id}).$$

Les éléments $(x^{-1}y) \exp(tv)(x^{-1}y)^{-1}$ et $\exp(tv)$ de $AZ_K(\mathfrak{a})$ ne diffèrent que selon leurs composantes dans $Z_K(\mathfrak{a})$, qui sont conjuguées par un élément de $Z_K(\mathfrak{a})$ indépendant de $t$ (à savoir la composante de $x^{-1}y$ dans $Z_K(\mathfrak{a})$). On en déduit l'existence d'une constante $C' > 0$ telle que $d_G(\varphi_t(x), \alpha_t x) \leq (C'/C'')\, d_G(\varphi_t(y), \alpha_t y) \leq C' r_{\varepsilon,R}$ pour tous $x \in L_\alpha$ et $t \in [0, 2R]$. $\square$

## 6. CONCLUSION : ÉTAPE COMBINATOIRE

Dans cette partie nous concluons la démonstration des théorèmes 2.4 et 2.17 à partir des propositions 3.2 et 3.4. Nous présentons l'approche de Kahn, Labourie et Mozes (arXiv 2018), qui utilise (comme Kahn et Marković, 2012) le lemme des mariages de Hall (fait 3.6).

*Remarque 6.1.* — L'approche de Hamenstädt, plus précise, ne requiert pas le lemme des mariages. Le point clé est une version plus forte de la proposition 5.10, qui revient essentiellement à l'existence, pour tout $\alpha \in \Gamma$, d'un homéomorphisme $\psi_\alpha$ de $Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_\alpha$ tel que $(\psi_\alpha)_* m^\alpha_{\varepsilon,R} = (\varphi_1 \circ \mathrm{inv})_*\, m^\alpha_{\varepsilon,-R}$ et tel que la distance de tout point de $Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_\alpha$ à son image par $\psi_\alpha$ soit uniformément (exponentiellement) petite par rapport à $R$.

*Dans toute la partie, on travaille dans le cadre 2.16. On suppose la condition (R) du paragraphe 2.3.2 vérifiée. On fixe un réseau cocompact irréductible $\Gamma$ de $G$, que l'on suppose comme précédemment sans torsion.*

### 6.1. Idée de la démonstration : graphes enrubannés

Comme expliqué au paragraphe 3.5, pour conclure la démonstration des théorèmes 2.4 et 2.17, il s'agit de prendre les représentations de groupes de pantalons $(\varepsilon/R, \pm R)$-presque parfaites $(C\varepsilon/R)$-bien recollées des propositions 3.3 et 3.4, avec les données géométriques appropriées correspondantes, et de montrer qu'on peut les agencer de manière adéquate pour obtenir une représentation d'une surface compacte $S$, avec une décomposition en pantalons bipartie et un graphe $\mathcal{G}$ comme au paragraphe 3.1, vérifiant les hypothèses de la proposition 3.2 ou de son raffinement 4.19.

Pour trouver la surface $S$ et la décomposition en pantalons, l'idée est de commencer par construire le graphe $\mathcal{G}$. Plus précisément, $\mathcal{G}$ sera un *graphe enrubanné*, c'est-à-dire un graphe muni d'un ordre cyclique sur l'ensemble des arêtes en chaque sommet. Le point est que tout graphe enrubanné fini trivalent $\mathcal{G}$ peut être épaissi (en remplaçant chaque arête par un cylindre) pour obtenir une surface compacte $S$ de genre au moins deux. Les milieux des arêtes de $\mathcal{G}$ s'épaississent en des courbes fermées simples de $S$ qui définissent une décomposition en pantalons de $S$. On peut voir $\mathcal{G}$ comme un graphe sur $S$, contenant exactement un sommet à l'intérieur de chaque pantalon, avec une arête pour chaque courbe de bord entre deux pantalons, comme au paragraphe 3.1. Le graphe $\mathcal{G}$ est biparti si et seulement si la décomposition en pantalons l'est.

### 6.2. Le point de vue de Kahn, Labourie et Mozes

Fixons deux pantalons $\Pi^+$ et $\Pi^-$ de groupes fondamentaux

$$\pi_1(\Pi^\pm) = \langle a^\pm, b^\pm, c^\pm \mid c^\pm b^\pm a^\pm = 1 \rangle.$$

Pour $\varepsilon, R > 0$, soit $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{\varepsilon,\pm R}$ l'ensemble des classes de conjugaison modulo $\Gamma$ de représentations $(\varepsilon/R, \pm R)$-presque parfaites de $\pi_1(\Pi^\pm)$ dans $\Gamma$. Rappelons qu'il est fini d'après le corollaire 4.13.(2). Il admet une symétrie naturelle sym d'ordre trois induite par la symétrie sym de $\mathrm{Hom}(\pi_1(\Pi^\pm), G)$ donnée par

$$\mathrm{sym}(\rho)(a^\pm, b^\pm, c^\pm) = (\rho(b^\pm), \rho(c^\pm), \rho(a^\pm)) \tag{6.1}$$

pour tout $\rho \in \mathrm{Hom}(\pi_1(\Pi^\pm), G)$ (cf. remarque 4.8). Cette symétrie est sans point fixe pour $R$ assez grand par rapport à $\varepsilon$ d'après le corollaire 4.13.(1).

D'autre part, rappelons que l'ensemble $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,\pm R}$ du paragraphe 5.3 paramètre les données géométriques associées aux représentations $(\varepsilon/R, \pm R)$-presque parfaites de $\pi_1(\Pi^\pm)$ dans $\Gamma$ modulo l'action de $\Gamma$. Il est muni lui aussi d'une symétrie sym d'ordre trois, donnée par (5.7). On a une projection naturelle $\varpi : \mathrm{Triconn}_{\varepsilon,\pm R} \to \boldsymbol{\mathcal{C}}_{\varepsilon,\pm R}$, qui induit une projection naturelle de $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,\pm R}/\langle\mathrm{sym}\rangle$ vers $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{\varepsilon,\pm R}/\langle\mathrm{sym}\rangle$, encore notée $\varpi$. Comme au paragraphe 5.3, pour $\varepsilon' > 0$, la définition 4.17 induit une notion d'éléments de $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,R}$ et $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,-R}$ qui sont $\varepsilon'$-*bien recollés.*

En utilisant les mesures $\mu_{\varepsilon,\pm R}$ de la proposition 5.7 et le lemme des mariages (fait 3.6), Kahn, Labourie et Mozes établissent le résultat suivant.

Proposition 6.2. — *Supposons la condition (R) vérifiée. Soit $C > 0$ la constante de la proposition 5.7. Pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit et tout $R > 0$ assez grand par rapport à $\varepsilon$, il existe*

— *un graphe enrubanné fini $\mathcal{G}$, trivalent, biparti, de sommets $\mathcal{P} = \mathcal{P}^+ \sqcup \mathcal{P}^-$,*

— *une application $E : \mathcal{P}^\pm \to \mathrm{Triconn}_{\varepsilon,\pm R}/\langle\mathrm{sym}\rangle$ (« étiquetage »)*

*tels que pour tout sommet $v \in \mathcal{P}^\pm$, de sommets adjacents $v_1, v_2, v_3 \in \mathcal{P}^\mp$, on puisse trouver $\mathtt{T} \in \mathrm{Triconn}_{\varepsilon,\pm R}$ et $\mathtt{T}_1, \mathtt{T}_2, \mathtt{T}_3 \in \mathrm{Triconn}_{\varepsilon,\mp R}$ vérifiant $E(v) = [\mathtt{T}]$ et $E(v_i) = [\mathtt{T}_i]$, tels que $\mathrm{sym}^i(\mathtt{T})$ et $\mathtt{T}_i$ soient $(C\varepsilon/R)$-bien recollés pour tout $i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.*

Adoptons la terminologie suivante : pour une classe de conjugaison $\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{\mathcal{C}}_{\varepsilon,\pm R}$ de représentations de $\pi_1(\Pi^\pm)$, et pour un pantalon $\Pi$ quelconque, disons qu'une représentation $\rho_\Pi : \pi_1(\Pi) \to \Gamma$ est *de type* $\boldsymbol{c}$ si l'on peut identifier les courbes de bord de $\Pi$ à $a^\pm, b^\pm, c^\pm$ de sorte que $\rho_\Pi$ définisse une représentation de $\pi_1(\Pi^\pm)$ dans la classe de conjugaison $\boldsymbol{c}$. Ceci ne dépend que de la classe de $\boldsymbol{c}$ dans $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{\varepsilon,\pm R}/\langle\mathrm{sym}\rangle$.

Le graphe enrubanné $\mathcal{G}$ de la proposition 6.2 définit une surface compacte $S$ avec une décomposition en pantalons bipartie comme au paragraphe 6.1, et l'on en déduit une représentation de $\pi_1(S)$ dans $\Gamma$ par le lemme suivant.

Lemme 6.3. — *Soit $S$ une surface compacte de genre au moins deux avec une décomposition en pantalons bipartie $\mathcal{P} = \mathcal{P}^+ \sqcup \mathcal{P}^-$. Soit $\mathcal{G}$ un graphe fini sur $S$, avec un sommet à l'intérieur de chaque pantalon et une arête pour chaque courbe de bord entre deux pantalons, comme au paragraphe 3.1. Pour $\varepsilon, R > 0$, soit $E : \mathcal{P}^\pm \to \mathrm{Triconn}_{\varepsilon,\pm R}/\langle \mathrm{sym} \rangle$ un étiquetage comme à la proposition 6.2. Alors il existe une représentation $\rho : \pi_1(S) \to \Gamma$, unique à conjugaison par $\Gamma$ près, telle que pour tout $\Pi \in \mathcal{P}^\pm$, la restriction de $\rho$ à $\pi_1(\Pi)$ soit de type $\varpi \circ E(\Pi) \in \boldsymbol{\mathcal{C}}_{\varepsilon,\pm R}/\langle \mathrm{sym} \rangle$.*

Notons que $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,\pm R} \subset \mathrm{Triconn}_{C\varepsilon,\pm R}$ pour $C \geq 1$. La proposition 3.2 implique alors que pour $\varepsilon > 0$ assez petit et $R > 0$ assez grand par rapport à $\varepsilon$, la représentation $\rho : \pi_1(S) \to \Gamma$ du lemme 6.3 est injective. De plus, à $\delta > 0$ fixé, la proposition 4.19 assure que si $\varepsilon > 0$ est assez petit par rapport à $\delta$ et $R > 0$ assez grand par rapport à $\varepsilon$, alors $\rho$ admet une application de bord $(\delta, \tau)$-sullivannienne de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ dans $G/P_\tau$, ce qui démontre les théorèmes 2.4 et 2.17.

### 6.3. Démonstration de la proposition 6.2

D'après la proposition 5.7, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $R > 0$ assez grand par rapport à $\varepsilon$, il existe des mesures $\mu_{\varepsilon,\pm R}$ sur $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,\pm R}$, invariantes par la transformation sym de (5.7), vérifiant $\mu_{\varepsilon,R}(\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,R}) = \mu_{\varepsilon,-R}(\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,-R})$ et telles que pour tout sous-ensemble mesurable $A$ de $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,R}$, l'ensemble des éléments de $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,-R}$ qui sont $(C\varepsilon/R)$-bien recollés à au moins un élément de $A$ est de $(\mu_{\varepsilon,-R})$-mesure supérieure ou égale à $\mu_{\varepsilon,R}(A)$.

Les espaces $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,R}$ et $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,-R}$ étant compacts, on peut remplacer les mesures $\mu_{\varepsilon,R}$ et $\mu_{\varepsilon,-R}$ par des mesures $\mu^f_{\varepsilon,R}$ et $\mu^f_{\varepsilon,-R}$ de même masse totale, de *supports finis*, qui sont encore invariantes par sym et vérifient encore que pour tout $A \subset \mathrm{Triconn}_{\varepsilon,R}$, l'ensemble des éléments de $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,-R}$ qui sont $(C\varepsilon/R)$-bien recollés à au moins un élément de $A$ est de $\mu^f_{\varepsilon,-R}$-mesure supérieure ou égale à $\mu^f_{\varepsilon,R}(A)$. Autrement dit, en notant $\mathcal{F}^+$ (resp. $\mathcal{F}^-$) le support (fini) de $\mu^f_{\varepsilon,R}$ (resp. $\mu^f_{\varepsilon,-R}$) et $\mathcal{F}$ l'union disjointe de $\mathcal{F}^+$ et $\mathcal{F}^-$, le système d'inéquations

$$\left\{\begin{array}{ccll} \mu(\mathtt{T}) & = & \mu(\mathrm{sym}(\mathtt{T})) & \forall \mathtt{T} \in \mathcal{F}, \\ \sum_{\mathtt{T}^+ \in \mathcal{F}^+} \mu(\mathtt{T}^+) & = & \sum_{\mathtt{T}^- \in \mathcal{F}^-} \mu(\mathtt{T}^-), & \\ \sum_{\mathtt{T}^- \in \mathcal{F}^-(A)} \mu(\mathtt{T}^-) & \geq & \sum_{\mathtt{T}^+ \in A} \mu(\mathtt{T}^+) & \forall A \subset \mathcal{F}^+ \end{array}\right. \tag{6.2}$$

admet une solution $\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^+$ non nulle, où $\mathcal{F}^-(A)$ désigne l'ensemble des éléments de $\mathcal{F}^- \subset \mathrm{Triconn}_{\varepsilon,-R}$ qui sont $(C\varepsilon/R)$-bien recollés à au moins un élément de $A \subset \mathcal{F}^+ \subset \mathrm{Triconn}_{\varepsilon,R}$. Le système (6.2) étant à coefficients entiers, ceci implique l'existence d'une solution *rationnelle*, et donc (en multipliant par un entier assez grand) l'existence d'une solution *entière* non nulle $\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{N}$.

Soit $\mathcal{E}^\pm$ l'ensemble obtenu en prenant $\mu(\mathtt{T}) \in \mathbb{N}$ copies de chaque élément $\mathtt{T} \in \mathcal{F}^\pm$. La première ligne de (6.2) assure que la transformation d'ordre trois (sans point fixe) sym de $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,\pm R}$ induit une transformation d'ordre trois (sans point fixe) sym de $\mathcal{E}^\pm$. La deuxième ligne assure que $\#\mathcal{E}^+ = \#\mathcal{E}^-$. Soit $\mathcal{M} \subset \mathcal{E}^+ \times \mathcal{E}^-$ le sous-ensemble correspondant aux couples $(\mathtt{T}^+, \mathtt{T}^-) \in \mathrm{Triconn}_{\varepsilon,R} \times \mathrm{Triconn}_{\varepsilon,-R}$ qui sont $(C\varepsilon/R)$-bien recollés. La troisième ligne de (6.2) assure que la condition (3.1) est vérifiée. D'après le lemme des mariages de Hall (fait 3.6), il existe une bijection $\psi : \mathcal{E}^+ \to \mathcal{E}^-$ telle que tout couple de la forme $(x, \psi(x))$ où $x \in \mathcal{E}^+$ corresponde à un couple $(C\varepsilon/R)$-bien recollé.

Soit $\mathcal{G}$ le graphe fini biparti de sommets $\mathcal{P} = \mathcal{P}^+ \sqcup \mathcal{P}^-$ où $\mathcal{P}^\pm := \mathcal{E}^+/\langle \mathrm{sym} \rangle$, pour lequel on met une arête entre les images de $x$ et $\psi(x)$ pour tout $x \in \mathcal{E}^+$. Ce graphe est trivalent car sym est d'ordre trois sans point fixe. C'est un graphe enrubanné : sym définit un ordre cyclique sur les arêtes en chaque sommet. La projection naturelle de $\mathcal{E}^\pm$ vers $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,\pm R}$ induit une application $E : \mathcal{P}^\pm \to \mathrm{Triconn}_{\varepsilon,\pm R}/\langle \mathrm{sym} \rangle$ vérifiant les conclusions de la proposition 6.2.

### 6.4. Démonstration du lemme 6.3

On utilise l'observation suivante.

*Remarque 6.4.* — Pour $\varepsilon/R$ assez petit, si $\rho^+ : \pi_1(\Pi^+) \to \Gamma$ est $(\varepsilon/R, R)$-presque parfaite, si $\rho^- : \pi_1(\Pi^-) \to \Gamma$ est $(\varepsilon/R, -R)$-presque parfaite et si les représentations $\rho^+$ et $\rho^-$ sont $(C\varepsilon/R)$-bien recollées le long de $a^+$ et $a^-$, alors pour $\gamma \in \Gamma \smallsetminus \{\mathrm{id}\}$ les représentations $\rho^+$ et $\gamma\rho^-(\cdot)\gamma^{-1}$ ne sont pas $(C\varepsilon/R)$-bien recollées le long de $a^+$ et $a^-$.

En effet, soit $\gamma \in \Gamma$. Si $\rho^+$ et $\gamma\rho^-(\cdot)\gamma^{-1}$ sont $(C\varepsilon/R)$-bien recollées le long de $a^+$ et $a^-$, alors $\gamma\rho^-(a^-)\gamma^{-1} = \rho^+(a^+) = \rho^-(a^-) =: \alpha$, donc $\gamma$ appartient au centralisateur $Z_\Gamma(\alpha)$ de $\alpha$ dans $\Gamma$. Or, l'application « pied » $\Psi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \to L_\alpha$ (définition 4.14) est $Z_\Gamma(\alpha)$-équivariante et tout élément non trivial du groupe discret sans torsion $Z_\Gamma(\alpha)$ déplace les points de $L_\alpha$ d'au moins une certaine distance, indépendante de $\varepsilon$ et $R$. La condition (4.3) sur $(g^+, g^-)$ pour $\varepsilon' = C\varepsilon/R$ ne peut donc pas être satisfaite par $(g^+, \gamma g^-)$ pour $\gamma \in Z_\Gamma(\alpha) \smallsetminus \{\mathrm{id}\}$ si $\varepsilon/R$ est assez petit.

Dans la suite, on note $\widetilde{\mathrm{Triconn}}_{\varepsilon,\pm R} \subset G^4$ la pré-image de $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,\pm R}$ par la projection naturelle $G^4 \to \Gamma\backslash G^4$. La symétrie d'ordre trois sym de $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,\pm R}$ se relève en une symétrie d'ordre trois de $\widetilde{\mathrm{Triconn}}_{\varepsilon,\pm R}$, encore notée sym. La projection $\varpi : \mathrm{Triconn}_{\varepsilon,\pm R} \to \mathcal{C}_{\varepsilon,\pm R}$ du paragraphe 6.2 se relève en une projection $\widetilde{\varpi}$ de $\widetilde{\mathrm{Triconn}}_{\varepsilon,\pm R}$ vers l'ensemble des représentations $(\varepsilon/R, \pm R)$-presque parfaites de $\pi_1(\Pi^\pm)$ dans $\Gamma$, telle que $\widetilde{\varpi} \circ \mathrm{sym} = \mathrm{sym} \circ \widetilde{\varpi}$. On dit que des éléments de $\widetilde{\mathrm{Triconn}}_{\varepsilon,R}$ et $\widetilde{\mathrm{Triconn}}_{\varepsilon,-R}$ sont $(C\varepsilon/R)$-*bien recollés* si leurs images par $\widetilde{\varpi}$ le sont.

Dans le cadre du lemme 6.3, le groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{G})$ est un groupe libre non abélien. On peut voir $S$ comme un épaississement de $\mathcal{G}$, ce qui donne une injection $\pi_1(\mathcal{G}) \hookrightarrow \pi_1(S)$. On peut voir $\mathcal{G}$ comme l'image d'une rétraction $r : S \to \mathcal{G}$, ce qui donne une surjection $r_* : \pi_1(S) \twoheadrightarrow \pi_1(\mathcal{G})$. La composition de l'injection $\pi_1(\mathcal{G}) \hookrightarrow \pi_1(S)$ avec la surjection $r_*$ est l'identité de $\pi_1(\mathcal{G})$. On en déduit

$$\pi_1(S) = (\operatorname{Ker} r_*) \rtimes \pi_1(\mathcal{G}),$$

et il existe un revêtement infini $\widehat{S}$ de $S$ tel que $\operatorname{Ker} r_*$ s'identifie à $\pi_1(\widehat{S})$ et $\pi_1(\mathcal{G})$ au groupe de Galois du revêtement $\widehat{S} \to S$. Le graphe trivalent $\mathcal{G}$ sur $S$ se relève en un arbre trivalent $\widetilde{\mathcal{G}}$ (revêtement universel de $\mathcal{G}$) sur $\widehat{S}$ (cf. figure 12) ; notons $\widetilde{\mathcal{P}} = \widetilde{\mathcal{P}}^+ \sqcup \widetilde{\mathcal{P}}^-$ l'ensemble de ses sommets. Pour toute arête $\widetilde{A}$ de $\widetilde{\mathcal{G}}$, notons $a_{\widetilde{A}}$ un élément

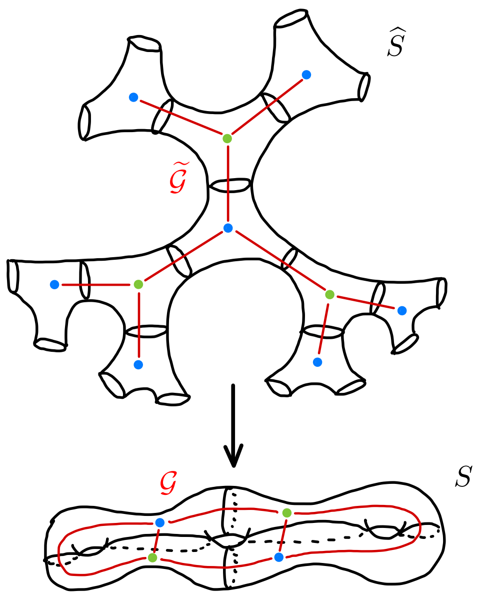


FIGURE 12. Le revêtement $\widehat{S}$ de $S$

de $\pi_1(\widehat{S})$ correspondant à la courbe de bord entre les deux pantalons de $\widehat{S}$ définis par $\widetilde{A}$, orientée de sorte que si $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, \widetilde{A}_3$ sont incidentes dans cet ordre en un même sommet, alors $a_{\widetilde{A}_3} a_{\widetilde{A}_2} a_{\widetilde{A}_1} = 1$. Le groupe $\pi_1(\widehat{S})$ admet alors la présentation par le système générateur $\{a_{\widetilde{A}} \,|\, \widetilde{A}$ arête de $\widetilde{\mathcal{G}}\}$ et les relations $a_{\widetilde{A}_3} a_{\widetilde{A}_2} a_{\widetilde{A}_1} = 1$ pour toutes arêtes $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, \widetilde{A}_3$ incidentes dans cet ordre en un même sommet.

Fixons un sommet initial de $\mathcal{G}$, appartenant à un pantalon $\Pi_0 \in \mathcal{P}^+$, et un relevé $\widetilde{\Pi}_0 \in \widetilde{\mathcal{P}}^+$ dans $\widetilde{\mathcal{G}}$. Choisissons un représentant $[\widetilde{\mathsf{T}}_{\widetilde{\Pi}_0}] \in \widetilde{\mathrm{Triconn}}_{\varepsilon,R}/\langle \mathrm{sym}\rangle$ de $E(\Pi_0) \in \mathrm{Triconn}_{\varepsilon,R}/\langle \mathrm{sym}\rangle$. Par hypothèse, pour tout sommet $\widetilde{\Pi}_1 \in \widetilde{\mathcal{P}}^-$ adjacent à $\widetilde{\Pi}_0$, se projetant en $\Pi_1 \in \mathcal{P}^-$, il existe un représentant $[\widetilde{\mathsf{T}}_{\widetilde{\Pi}_1}] \in \widetilde{\mathrm{Triconn}}_{\varepsilon,-R}/\langle \mathrm{sym}\rangle$ de $E(\Pi_1) \in \mathrm{Triconn}_{\varepsilon,-R}/\langle \mathrm{sym}\rangle$ qui est *compatible* avec $[\widetilde{\mathsf{T}}_{\widetilde{\Pi}_0}]$ au sens où il existe $i_0, i_1 \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ tels que $\mathrm{sym}^{i_0}(\widetilde{\mathsf{T}}_{\widetilde{\Pi}_0})$ et $\mathrm{sym}^{i_1}(\widetilde{\mathsf{T}}_{\widetilde{\Pi}_1})$ soient $(C\varepsilon/R)$-bien recollés ; ce représentant est unique d'après la remarque 6.4. De même, pour tout sommet $\widetilde{\Pi}_2 \in \widetilde{\mathcal{P}}^+$ adjacent à $\widetilde{\Pi}_1$, se projetant en $\Pi_2 \in \mathcal{P}^+$, il existe un unique représentant $[\widetilde{\mathsf{T}}_{\widetilde{\Pi}_2}] \in \widetilde{\mathrm{Triconn}}_{\varepsilon,R}/\langle \mathrm{sym}\rangle$ de $E(\Pi_2) \in \mathrm{Triconn}_{\varepsilon,R}/\langle \mathrm{sym}\rangle$ qui soit compatible avec $[\widetilde{\mathsf{T}}_{\widetilde{\Pi}_1}]$. On continue. Comme $\widetilde{\mathcal{G}}$ est un arbre, il n'y a pas d'autre condition de compatibilité à vérifier. En raisonnant de proche en proche, on obtient ainsi une famille $([\widetilde{\mathsf{T}}_{\widetilde{\Pi}^+}])_{\widetilde{\Pi}^+ \in \widetilde{\mathcal{P}}^+}$ d'éléments de $\widetilde{\mathrm{Triconn}}_{\varepsilon,R}/\langle \mathrm{sym}\rangle$ paramétrés par les sommets $\widetilde{\mathcal{P}}^+$, et une famille $([\widetilde{\mathsf{T}}_{\widetilde{\Pi}^-}])_{\widetilde{\Pi}^- \in \widetilde{\mathcal{P}}^-}$ d'éléments de $\widetilde{\mathrm{Triconn}}_{\varepsilon,-R}/\langle \mathrm{sym}\rangle$ paramétrés par les sommets $\widetilde{\mathcal{P}}^-$, de sorte que les éléments au-dessus de deux sommets adjacents soient compatibles. Pour toute arête $\widetilde{A}$ de $\widetilde{\mathcal{G}}$ entre $\widetilde{\Pi}^+$ et $\widetilde{\Pi}^-$, si $\mathrm{sym}^{i^+}(\widetilde{\mathsf{T}}_{\widetilde{\Pi}^+})$ et $\mathrm{sym}^{i^-}(\widetilde{\mathsf{T}}_{\widetilde{\Pi}^+})$ sont bien recollés où $i^+, i^- \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, on note

$\rho_{\widehat{S}}(a_{\widetilde{A}}) \in \Gamma$ l'image de $a_{\widetilde{A}}$ par $\widetilde{\varpi}(\mathrm{sym}^{i^+}(\widetilde{\mathtt{T}}_{\widetilde{\Pi}^+}))$. Étant donnée la présentation par générateurs et relations de $\pi_1(\widehat{S})$ décrite ci-dessus, on obtient ainsi une représentation $\rho_{\widehat{S}} : \pi_1(\widehat{S}) \to \Gamma$.

Ceci nous donne également une *représentation d'holonomie* $\rho_{\mathcal{G}} : \pi_1(\mathcal{G}) \to \Gamma$, définie de manière unique. En effet, pour tout $f \in \pi_1(\mathcal{G})$, il existe un unique élément $\rho_{\mathcal{G}}(f) \in \Gamma$ tel que $[\widetilde{\mathtt{T}}_{f\cdot\widetilde{\Pi}_0}] = \rho_{\mathcal{G}}(f) \cdot [\widetilde{\mathtt{T}}_{\widetilde{\Pi}_0}]$. Par unicité de la construction (remarque 6.4), on a $[\widetilde{\mathtt{T}}_{f\cdot\widetilde{\Pi}}] = \rho_{\mathcal{G}}(f) \cdot [\widetilde{\mathtt{T}}_{\widetilde{\Pi}}]$ pour tout sommet $\widetilde{\Pi}$ de $\widetilde{\mathcal{G}}$, et $\rho_{\mathcal{G}}(ff') = \rho_{\mathcal{G}}(f)\,\rho_{\mathcal{G}}(f')$ pour tous $f, f' \in \pi_1(\mathcal{G})$.

Par construction, pour tout $f \in \pi_1(\mathcal{G})$ et toute arête $\widetilde{A}$ de $\mathcal{G}$, on a $\rho_{\widehat{S}}(f a_{\widetilde{A}} f^{-1}) = \rho_{\mathcal{G}}(f)\,\rho_{\widehat{S}}(a_{\widetilde{A}})\,\rho_{\mathcal{G}}(f)^{-1}$. Comme les $a_{\widetilde{A}}$ engendrent $\pi_1(\widehat{S})$, on en déduit $\rho_{\widehat{S}}(f\gamma f^{-1}) = \rho_{\mathcal{G}}(f)\,\rho_{\widehat{S}}(\gamma)\,\rho_{\mathcal{G}}(f)^{-1}$ pour tout $\gamma \in \pi_1(\widehat{S})$. Ainsi, les représentations $\rho_{\widehat{S}} : \pi_1(\widehat{S}) \to \Gamma$ et $\rho_{\mathcal{G}} : \pi_1(\mathcal{G}) \to \Gamma$ se combinent en une représentation

$$\rho : \pi_1(S) = \pi_1(\widehat{S}) \rtimes \pi_1(\mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma.$$

Cette représentation est unique étant donné notre choix initial de représentant $[\widetilde{\mathtt{T}}_{\widetilde{\Pi}_0}]$ de $E(\Pi_0)$. Changer le choix initial pour $[\widetilde{\mathtt{T}}_{\widetilde{\Pi}_0}]$ revient à conjuguer $\rho : \pi_1(S) \to \Gamma$ par un élément de $\Gamma$.

Ceci conclut la démonstration du lemme 6.3, et donc des théorèmes 2.4 et 2.17.

## RÉFÉRENCES


Ian AGOL (2013). « The virtual Haken conjecture », *Doc. Math.* **18**. Avec un appendice par Agol, Groves et Manning, p. 1045-1087.

Daniele ALESSANDRINI, Gye-Seon LEE et Florent SCHAFFHAUSER (2022). « Hitchin components for orbifolds », *J. Eur. Math. Soc.* À paraître.

Mark D. BAKER et Daryl COOPER (2015). « Finite-volume hyperbolic 3-manifolds contain immersed quasi-Fuchsian surfaces », *Algebr. Geom. Topol.* **15**, p. 1199-1228.

Yves BENOIST (1997). « Propriétés asymptotiques des groupes linéaires », *Geom. Funct. Anal.* **7**, p. 1-47.

——— (2009). « Five lectures on lattices in semisimple Lie groups », in : *Géométries à courbure négative ou nulle, groupes discrets et rigidités*. T. 18. Séminaires et Congrès. Paris : Société Mathématique de France, p. 117-176.

Nicolas BERGERON (2013). « La conjecture des sous-groupes de surfaces [d'après Jeremy Kahn et Vladimir Marković] », *Astérisque* **352**. Séminaire Bourbaki, Exposé 1055, p. 429-458.

——— (2014). « La conjecture de Waldhausen est démontrée ! », *Gazette des mathématiciens* **140**, p. 31-37.

Mladen BESTVINA (2000). « Questions in geometric group theory ». `https://www.math.utah.edu/~bestvina/eprints/questions-updated.pdf`.

Jonas BEYRER (2021). « Cross ratios on boundaries of symmetric spaces and Euclidean buildings », *Transform. Groups* **26**, p. 31-68.

Jairo BOCHI, Rafael POTRIE et Andrés SAMBARINO (2019). « Anosov representations and dominated splittings », *J. Eur. Math. Soc.* **21**, p. 3343-3414.

Lewis BOWEN (2004). « Weak forms of the Ehrenpreis Conjecture and the Surface Subgroup Conjecture ». arXiv : math/0411662.

Danny CALEGARI (2008). « Surface subgroups from homology », *Geom. Topol.* **12**, p. 1995-2007.

Richard D. CANARY, Michelle LEE, Andrés SAMBARINO et Matthew STOVER (2017). « Projective Anosov Schottky groups and strongly amalgam Anosov representations », *Geom. Topol.* **21**. appendice à l'article *Amalgam Anosov representations* de Canary, Lee et Stover, p. 215-251.

Daryl COOPER et David FUTER (2019). « Ubiquitous quasi-Fuchsian surfaces in cusped hyperbolic 3-manifolds », *Geom. Topol.* **23**, p. 241-298.

Daryl COOPER, Darren D. LONG et Alan W. REID (1997). « Essential surfaces in bounded 3-manifolds », *J. Amer. Math. Soc.* **10**, p. 553-563.

Kelly DELP, Diane HOFFOSS et Jason F. MANNING (2015). « Problems in groups, geometry, and three-manifolds ». arXiv : 1512.04620.

Thomas DELZANT (1995). « L'image d'un groupe dans un groupe hyperbolique », *Comment. Math. Helv.* **70**, p. 267-284.

Leon EHRENPREIS (1970). « Cohomology with bounds », in : *Symposia Mathematica, Vol. IV (INDAM, Rome, 1968/69)*. Londres : Academic Press, p. 389-395.

Benson FARB et Lee MOSHER (2002). « Convex cocompact subgroups of mapping class groups », *Geom. Topol.* **6**, p. 91-152.

Vladimir FOCK et Alexander GONCHAROV (2006). « Moduli spaces of local systems and higher Teichmüller theory », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **103**, p. 1-211.

Gabino GONZÁLEZ-DIEZ et William J. HARVEY (1999). « Surface groups inside mapping class groups », *Topology* **38**, p. 57-69.

Cameron McA. GORDON, Darren D. LONG et Alan W. REID (2004). « Surface subgroups of Coxeter and Artin groups », *J. Pure Appl. Algebra* **189**, p. 135-148.

Mikhael GROMOV (1987). « Hyperbolic groups », in : *Essays in group theory*. T. 8. MSRI Publications. New York : Springer, p. 75-263.

Daniel GROVES et Jason F. MANNING (2021). « Quasiconvexity and Dehn filling », *Amer. J. Math.* **143**, p. 95-124.

Olivier GUICHARD (2004). « Groupes plongés quasi isométriquement dans un groupe de Lie », *Math. Ann.* **330**, p. 331-351.

——— (2019). « Groupes convexes-cocompacts en rang supérieur [d'après Labourie, Kapovich, Leeb, Porti, ...] » *Astérisque* **414**. Séminaire Bourbaki, Exposé 1138, p. 95-124.

Olivier GUICHARD et Anna WIENHARD (2012). « Anosov representations: Domains of discontinuity and applications », *Invent. Math.* **190**, p. 357-438.

Philip Hall (1935). « On representatives of subsets », *J. London Math. Soc.* **1**, p. 26-30.

Ursula Hamenstädt (2005). « Word hyperbolic extensions of surface groups ». arXiv : 0505244.

——— (2015). « Incompressible surfaces in rank one locally symmetric spaces », *Geom. Funct. Anal.* **25**, p. 815-859.

——— (2021). « Incompressible surfaces in some locally symmetric spaces of arbitrary rank ». En préparation.

Sigurdur Helgason (2001). *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces.* T. 34. Graduate Studies in Mathematics. Réimpression corrigée de l'original de 1978. Providence, RI : American Mathematical Society.

John H. Hubbard (2006). *Teichmüller theory and applications to geometry, topology, and dynamics. Vol. 1. Teichmüller theory.* Avec des contributions de A. Douady, W. Dunbar, R. Roeder, S. Bonnot, D. Brown, A. Hatcher, C. Hruska et S. Mitra. Ithaca, NY : Matrix Editions.

Jeremy Kahn, François Labourie et Shahar Mozes (arXiv 2018). « Surface groups in uniform lattices of some semi-simple groups ». arXiv : 1805.10189.

Jeremy Kahn et Vladimir Marković (2012). « Immersing almost geodesic surfaces in a closed hyperbolic three manifold », *Ann. Math.* **175**, p. 1127-1190.

——— (2015). « The good pants homology and the Ehrenpreis Conjecture », *Ann. Math.* **182**, p. 1-72.

Jeremy Kahn et Alex Wright (2021). « Nearly Fuchsian surface subgroups of finite covolume Kleinian groups », *Duke Math. J.* **70**, p. 503-573.

Michael Kapovich, Bernhard Leeb et Joan Porti (2014). « Morse actions of discrete groups on symmetric spaces ». arXiv : 1403.7671.

——— (2018). « A Morse Lemma for quasigeodesics in symmetric spaces and euclidean buildings », *Geom. Topol.* **22**, p. 3827-3923.

Fanny Kassel (2019). « Geometric structures and representations of discrete groups », in : *Proceedings of the International Congress of Mathematicians 2018 (ICM 2018).* World Scientific, p. 1113-1150.

Richard P. Kent IV et Christopher J. Leininger (2008). « Shadows of mapping class groups: capturing convex cocompactness », *Geom. Funct. Anal.* **18**, p. 1270-1325.

Anthony W. Knapp (2002). *Lie groups beyond an introduction.* T. 140. Progress in mathematics. Deuxième édition. Boston, MA : Birkhäuser Boston, Inc.

Alex Kontorovich, Darren D. Long, Alexander Lubotzky et Alan W. Reid (2019). « What is... a thin group ? », *Notices Amer. Math. Soc.* **66**, p. 905-910.

François Labourie (2006). « Anosov flows, surface groups and curves in projective space », *Invent. Math.* **165**, p. 51-114.

Mark Lackenby (2010). « Surface subgroups of Kleinian groups with torsion », *Invent. Math.* **179**, p. 175-190.

Christopher J. Leininger et Alan W. Reid (2006). « A combination theorem for Veech subgroups of the mapping class group », *Geom. Funct. Anal.* **16**, p. 403-436.

Darren D. Long et Alan W. Reid (2013). « Constructing thin groups », in : *Proceedings of the Hot Topics workshop on Thin groups and super-strong approximation*. T. 61. MSRI Publications, p. 151-166.

——— (2016). « Thin surface subgroups in cocompact lattices in SL(3,R) », *Illinois J. Math.* **60**. Special issue to celebrate the work of Wolfgang Haken, p. 39-53.

Darren D. Long, Alan W. Reid et Morwen Thistlethwaite (2011). « Zariski dense surface subgroups in SL(3,Z) », *Geom. Topol.* **15**, p. 1-9.

Darren D. Long et Morwen Thistlethwaite (2018). « Zariski dense surface subgroups in SL(4,Z) », *Exp. Math.* **27**, p. 82-92.

——— (2020). « Zariski dense surface subgroups in SL($2k+1$,Z) ». Pré-publication.

Joseph D. Masters et Xingru Zhang (2008). « Closed quasi-Fuchsian surfaces in hyperbolic knot complements », *Geom. Topol.* **12**, p. 2095-2171.

——— (2009). « Quasi-Fuchsian surfaces in hyperbolic link complements ». arXiv: 0909.4501.

John Milnor (1964). « On the Betti numbers of real varieties », *Proc. Amer. Math. Soc.* **15**, p. 275-280.

Pierre Pansu (1995). « Sous-groupes discrets des groupes de Lie : rigidité, arithméticité », *Astérisque* **227**. Séminaire Bourbaki, Exposé 778, p. 69-105.

Maria Beatrice Pozzetti (2019). « Higher rank Teichmüller theories », *Astérisque* **422**. Séminaire Bourbaki, Exposé 1159, p. 327-354.

Alan W. Reid (2006). « Surface subgroups of mapping class groups », in : *Problems on mapping class groups and related topics*. T. 74. Proc. Sympos. Pure Math. Providence, RI : American Mathematical Society, p. 257-268.

John R. Stallings (1968). « On torsion free groups with infinitely many ends », *J. Algebra* **2**, p. 312-334.

William P. Thurston (1997). *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1*. T. 35. Princeton Mathematical Series. Princeton, NJ : Princeton University Press.

Jacques Tits (1972). « Free subgroups in linear groups », *J. Algebra* **20**, p. 250-270.

Friedhelm Waldhausen (1968). « On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large », *Ann. of Math.* **87**, p. 56-88.

Daniel T. Wise (2021). *The structure of groups with a quasiconvex hierarchy*. T. 209. Annals of Mathematics Studies. Princeton, NJ : Princeton University Press.

Joseph A. Wolf (1962). « Discrete groups, symmetric spaces, and global holonomy », *Amer. J. Math.* **84**, p. 527-542.

Fanny KASSEL

CNRS et Laboratoire Alexander Grothendieck
Institut des Hautes Études Scientifiques
Université Paris-Saclay
35 route de Chartres, 91440 Bures-sur-Yvette, France
*E-mail* : kassel@ihes.fr