Sur la conjecture de Ramanujan, d'après Clozel

Jie LIN
Mémoire encadré par : Michael HARRIS

17 avril 2013

Introduction

Dans ce mémoire, nous allons étudier la démonstration de la conjecture de Ramanujan d'après Clozel [4] pour les représentations cuspidales, auto-duales et cohomologiques de $GL_n(F)$ où F est un corps réel ou un corps CM. Cette démonstration est valide seulement pour les places non ramifiées de π et de F.

L'idée principale est d'étudier la cohomologie étale sur une certaine variété de Shimura en utilisant une description de Kottwitz [13] théorème 7.2.

On va d'abord réduire notre problème au cas $F = F^+E$ où E est un corps quadratique imaginaire et F^+ est un corps totalement réel tels que E est déployé sur les places ramifiées de π et F^+ et la place p. Cette réduction est donnée par étendre le corps F et appliquer les résultats du changement de base dans la section 3.1. On va supposer aussi que n est pair et $n \geq 4$ comme les autre cas étaient démontrés dans [20].

Ensuite, on construit dans la section 3.2 G_0, un groupe unitaire sur F^+, qui est de type $(2, n-2)$ en une place infinie de F^+ et de type $(0, n)$ sur les autre places infinies. On note $G = Res_{F^+/\mathbb{Q}} G_0$ et GU le groupe similitude de G. On a $GU(\mathbb{A}_E) \simeq GL_n(\mathbb{A}_F) \times \mathbb{A}_E^\times$. On relève notre représentation π en une représentation θ-stable de $GU(\mathbb{A}_E)$ en la tordant par un caractère.

Puis, nous fixons K, un sous-groupe ouvert compact de $GU(\mathbb{A}_f)$ et on construit une variété de Shimura associée à GU et K dans la section 3.3.

Nous allons appliquer la description de Kottwitz pour la trace de $f \times Frob_v^\alpha$ sur la cohomologie étale de cette variété de Shimura où f est une fonction test de $GU(\mathbb{A}_f)$, α un entier positif et $Frob_v$ le Frobenius géométrique. Cette description sera simplifiée dans la section 5.1.

A la fin, en fixant une fonction test f isolant notre représentation, on va obtenir une relation simple entres les paramètres de Langlands de π et les valeurs propres de Frobenius qui sont des nombres de Weil. En variant α, on peut déduire que les paramètres de Langlands sont purs. Ainsi on obtient la conjecture de Ramanujan.

La démonstration est contenue dans les chapitres 3 et 5. Nous synthétisons les théories des représentations automorphes et des variétés de Shimura dans le chapitre 1. Dans le chapitre 2, nous établissons la classification des représentations pour GL_n de même que le changement de base local et global pour GL_n. Le chapitre 4 contient des idées sur le programme de Langlands, en particulier sur le transfert endoscopique et le changement de base.

Remerciements

Mes remerciements à Monsieur Michael Harris pour son aide, son orientation et son attention. Il a répondu patiemment et efficacement à mes nombreuses questions, m'a guidé par ses précieux conseils et corrigé soigneusement le texte. Je remercie, également, Monsieur Laurent Clozel pour son aide et conseils. Merci à Arthur-César Le Bras pour corriger les fautes linguistiques et me donner quelques conseils. Merci aussi à Ma Li de sa soutien et encouragement.

Table des matières

1 Notions de base

1.1 Formes modulaires et conjecture de Ramanujan

On pose $\Gamma := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et $\mathcal{H} := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$ le demi-plan de Poincaré. On rappelle qu'une forme modulaire de poids k pour Γ est une fonction holomorphe sur $\mathcal{H}$ qui satisfait $f\left(\dfrac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z)$ pour tout $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. L'ensemble des formes modulaires de poids k est noté $M_k(\Gamma)$. De plus, on note $S_k(\Gamma) \subset M_k(\Gamma)$ l'ensemble des formes modulaires cuspidales.

Il est connu que $\Delta(z) = \sum\limits_{n>0} \tau(n) q^n = q \prod\limits_{n>0} (1-q^n)^{24}$ où $q = e^{2\pi i z}$ est une forme cuspidale de poids 12. Une estimation triviale (c.f. [6] Proposition 5.9.1) donne $|\tau(n)| = O(n^6)$. Ramanujan a conjecturé que $|\tau(n)| = O(n^{11/2})$. Plus précisément :

Conjecture 1.1. ***(Conjecture de Ramanujan pour les eigenformes)*** *Soient p un nombre premier et f une eigenforme de poids k. Alors a_p, la valeur propre de f pour l'opérateur de Hecke T_p, satisfait que $|a_p| \leq 2p^{\frac{k-1}{2}}$.*

Remarque

1. On définit l'opérateur de Hecke sur M_k par $(T_p f)(z) = f(pz) + \sum\limits_{i=0}^{p-1} f\left(\dfrac{z+i}{p}\right)$.
   Une forme modulaire est dite être une eigenforme si elle est vecteur propre de T_p pour tout p premier. Si $f(z) = \sum\limits_{n \geq 0} c_n q^n$ est une eigenforme non nulle, on sait que $c_1 \neq 0$ et c_p/c_1 est la valeur propre de f pour T_p. Si la conjecture de Ramanujan est vraie pour f, on aura $|c_p| = O(p^{\frac{k-1}{2}})$. De plus, on aura $|c_n| = O(n^{\frac{k-1}{2}})$ par la proposition 5.8.5 de [6].
2. Comme les opérateurs T_p sont commutatifs et auto-adjoints, on peut trouver une base des eigenformes pour $M_k(\Gamma)$. Donc la conjecture 1.1 implique que pour toute forme modulaire $f(z) = \sum\limits_{n \geq 0} c_n q^n$ de poids k, les coefficients de Fourier satisfont $|c_n| = O(n^{\frac{k-1}{2}})$.
3. Cette conjecture était démontrée par Eichler et Shimura pour $k = 2$, et par Deligne pour $k \geq 2$.

Soit f une forme modulaire de poids k. On pose $G(\mathbb{R})^+$ l'ensemble des matrices de $G(\mathbb{R})$ de déterminant positif. Il est facile de voir que $\mathcal{H} = G(\mathbb{R})^+ \cdot i$. On peut alors définir une fonction sur $\Gamma \backslash G(\mathbb{R})^+$ par $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (ci+d)^{-k} f\left(\dfrac{ai+b}{ci+d}\right)$.

Soit $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles du corps $\mathbb{Q}$. On pose $G = GL_2$ et $K := \prod\limits_p G(\mathbb{Z}_p)$. Par le théorème d'approximation forte, on a $G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A}) / K \cong \Gamma \backslash G(\mathbb{R})^+$. Donc une forme modulaire se relève en une fonction sur $G(\mathbb{A})$. De plus, une forme nouvelle f est associée à une représentation cuspidale $\pi = \otimes_{p\leq\infty}\pi_p$ de $G(\mathbb{A})$ (c.f. [7] Théorème 5.4.2 et Théorème 10.8.5). Dans la suite, on considère l'approche adélique. On verra dans la section 2.1 que pour une forme nouvelle de poids 2, a_p, la valeur propre de T_p satisfait que $|a_p| \leq 2p^{\frac{1}{2}}$ si et seulement si π_p est tempérée (on va introduire la notion de représentation tempérée dans la section suivante). On obtient une conjecture plus générale :

Conjecture 1.2. *(**Conjecture de Ramanujan généralisée**) Soient F un corps de nombres et $\pi = \otimes_{v\leq\infty}\pi_v$ une représentation cuspidale de $GL_n(\mathbb{A}_F)$. Pour toute v place finie de F, π_v est tempérée.*

Cette conjecture est encore ouverte. Le but de cet article est de présenter la démonstration de L.Clozel [4] dans le cas suivant :

Théorème 1.1. *Soit F un corps totalement réel ou un corps CM. Soit $\pi = \otimes_{v\leq\infty}\pi_v$ une représentation cuspidale de $GL_n(\mathbb{A}_F)$. On suppose de plus que :*
(i) $\pi \cong \widetilde{\pi}$ si F est totalement réel ou $\pi \cong \widetilde{\pi}^c$ si F est un corps CM;
(ii) π est cohomologique.
Soit p un nombre premier tel que F et π soient non ramifiés sur p. Alors π_v est tempérée si v est une place de F qui divise p.

Remarque

1. On dit que π est non ramifiée sur p si pour toute place w de F qui divise p, π_w est non ramifiée.
2. Comme les résultats pour n impair et $n = 2$ étaient démontrés dans [20], on restreint au cas où $n \geq 4$ est pair dans la suite. Et on note $m = n/2 \in \mathbb{N}$.

1.2 Théorie des représentations

Dans cette section, on va introduire quelque notions de base de la théorie des représentations de GL_n.

On pose $G = GL_n$, $\mathfrak{g} = Lie(G)$ et F un corps de nombres. Pour v une place infinie de F, on définit K_v par O_n si v est réelle, U_n si v est complexe. Pour v une place finie, on définit $K_v := G(\mathcal{O}_{F_v})$. On note $\mathfrak{g}_\infty := \prod_{v|\infty} \mathfrak{g}(F_v)$ et $K_\infty := \prod_{v|\infty} K_v$.

On rappelle qu'une représentation cuspidale de $G(\mathbb{A}_F)$ est un $(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty) * G(\mathbb{A}_{F,f})$-module irréductible qui est isomorphe à un sous-quotient de l'espace des formes cuspidales adéliques de caractère central unitaire fixé. De plus, on peut échanger la condition sous-quotient par un sous module. C'est-à-dire qu'on peut réaliser une représentation cuspidale comme une sous-représentation de l'espace des formes cuspidales adéliques (proposition 9.5.8 de [7]).

Théorème 1.2. *Soit π une représentation automorphe de $G(\mathbb{A}_F)$. Alors π se factorise comme $\bigotimes_{v\leq\infty} \pi_v$ par rapport à $(\xi_v)_{v\notin S}$ où :*
- *π_v est un $(\mathfrak{g}(F_v), K_v)$-module irréductible si v est une place infinie de F.*
- *π_v est une représentation admissible irréductible de $G(F_v)$ si v est une place finie de F.*
- *S est un ensemble fini de places contenant toutes les places infinies tel que π_v est non ramifiée si $v \notin S$. Dans ce cas, ξ_v est un vecteur non nul de $\pi_v^{K_v}$.*

De plus, la factorisation est unique à isomorphisme près.

Remarque Soient $(\pi_v)_{v\leq\infty}$, S et $(\lambda_v)_{v\notin S}$ comme ci-dessus.

1. (**Produit tensoriel restreint**) On définit $\bigotimes_{v\leq\infty} \pi_v$ le produit tensoriel restrictif de $(\pi_v)_{v\leq\infty}$ par rapport à $(\xi_v)_{v\notin S}$ comme $\varinjlim_T \bigotimes_{v\in T\cup S} \pi_v \otimes \bigotimes_{v\notin T\cup S} \mathbb{C}\xi_v$ où T paramètre les ensembles finies des places finis de F. Il est facile de voir que c'est un $(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty) * G(\mathbb{A}_{F,f})$-module. Dans le cas $F = \mathbb{Q}$, voir la définition 13.7.1 de [7] pour les détails.
2. Si $v \notin S$, comme π_v est non ramifiée, on sait que $dim\pi_v^{K_v} = 1$. Donc ξ_v est unique à homothétie près.

Définition 1.1. ***(Représentation contragrédiente)***

1. *(places finies) Soient v une place finie de F et (π, V) une représentation admissible de $G(F_v)$. La **représentation contragrédiente** de π est définie par $\widetilde{V} := Hom_{lisse}(V, \mathbb{C})$ l'espace des formes linéaires f de V qui vérifient $f(\pi(k)v) = f(v)$ pour tout $k \in K_f$ et $v \in V$ où K_f est un sous-groupe ouvert compact de $G(F_v)$ associé à f.*

   Soient $f \in \widetilde{V}$ et $g \in G(F_v)$, on définit $(\widetilde{\pi}(g)f)(v) = f(\pi(g^{-1})v)$. On voit que $(\widetilde{\pi}, \widetilde{V})$ est une représentation admissible de $G(F_v)$ qui s'appelle la représentation contragrédiente de (π, V).
2. *(places infinies) Soient v une place finie de F et (π, V) un $(\mathfrak{g}(F_v), K_v)$-module. On définit $\widetilde{V}$ comme l'espace des fonctions linéaires f de V dans $\mathbb{C}$ qui vérifient l'espace des fonctions $\{v \mapsto f(\pi(k)v) | k \in K_v\}$ est de dimension finie.*

   *L'action de K_v sur $\widetilde{V}$ est défini par $(\widetilde{\pi}(k)f)(v) = f(\pi(k^{-1})v)$ pour tout $k \in K_v$ et $f \in \widetilde{V}$. Et l'action de $U(\mathfrak{g})$ sur $\widetilde{V}$ est définie par $(\widetilde{\pi}(D_\alpha)f)(v) = -f(\pi(D_\alpha)v)$ pour tout $\alpha \in \mathfrak{g}$, $f \in \widetilde{V}$ et $v \in V$. Ici D_α est l'image de $\alpha \in \mathfrak{g}$ dans $U(\mathfrak{g})$, l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$. Alors $(\widetilde{\pi}, \widetilde{V})$ est un $(\mathfrak{g}(F_v), K_v)$-module qui s'appelle le **module contragrédient** de (π, V).*

Remarque

1. Si (π, V) est une représentation irréductible admissible de $G(F_v)$, sa représentation contragrédiente est isomorphe à (π', V) où $\pi'(g) = \pi({}^t g^{-1})$. En particulier, elle est irréductible.
2. Si (π, V) est un $(\mathfrak{g}(F_v), K_v)$-module irréductible, sa représentation contragrédiente est isomorphe à (π', V) où $\pi'(k) = \pi({}^t k^{-1})$ pour tout $k \in K$ et $\pi'(D_\alpha) = -\pi(D_\alpha)$ pour tout $\alpha \in \mathfrak{g}$. En particulier, il est irréductible.

Théorème 1.3. *Soit $\pi = \bigotimes_{v \leq \infty} \pi_v$ une représentation cuspidale. Alors $\bigotimes_{v \leq \infty} \widetilde{\pi_v}$ est encore une représentation cuspidale. On l'appelle la **représentation contragrédiente** de π, noté $\widetilde{\pi}$.*

Définition 1.2. ***(Représentation cohomologique)*** *Soit $\pi = \bigotimes_{v \leq \infty} \pi_v$ une représentation automorphe. On pose π_∞ le $(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty)$-module $\bigotimes_{v | \infty} \pi_v$. On dit que π est cohomologique s'il existe W_∞, une représentation irréductible algébrique de dimension finie de $\mathfrak{g}_\infty$, telle que $H^*(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty; \pi_\infty \otimes W_\infty) \neq 0$.*

Remarque On dit qu'une représentation π de $G(\mathbb{A}_F)$ est **algébrique** si pour toute place infinie v, le paramètre de Langlands de π_v est de la forme $(z^{p_i} \overline{z}^{q_i}, 1 \leq i \leq n)$ avec $p_i, q_i \in \mathbb{Z} + \frac{n-1}{2}$ pour tout i. Pour la définition du paramètre de Langlands, voir la section 2.2.

Définition 1.3. ***(Coefficient matriciel et représentation tempérée)***

Soient v une place finie de F et (π, V) une représentation admissible de $G(F_v)$. On fixe $v \in V$ et $\tilde{v} \in \widetilde{V}$. On définit une fonction sur $G(F_v)$ par $\beta_{v,\tilde{v}}(g) =< \pi(g)v, \tilde{v} >$ pour $g \in G(F_v)$, appelée coefficient matriciel de π.

On suppose de plus π est irréductible. On fixe β un coefficient matriciel. On note Z le centre de G. On dit que π est tempérée si elle satisfait les deux conditions suivantes :

- *Le caractère central ω de π est unitaire. En particulier, on a $|\beta(zg)| = |\omega(z)||\beta(g)| = |\beta(g)|$ pour tout $z \in Z(F_v)$ et $g \in G(F_v)$. Donc $|\beta|$ se relève en une fonction sur $Z(F_v) \backslash G(F_v)$.*
- *Pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction $\beta \in \mathcal{L}^{2+\varepsilon}(Z(F_v) \backslash G(F_v))$.*

Remarque Par un astuce comme le corollaire 8.10.2 de [7], on verra que le fait d'être tempérée ne dépend pas du choix du coefficient matriciel.

1.3 La variété de Shimura

La fin de la démonstration consiste à étudier la cohomologie étale d'une variété de Shimura. On va introduire brièvement la théorie des variétés de Shimura dans cette section. Le matériel est extrait de [18]. Dans la suite, on pose $\mathbb{S} = Res_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathbb{G}_m)$. On note G^{ad} le groupe dérivé de G, i.e. $G^{ad} = Z(G)\backslash G$ et $G(\mathbb{R})^+$ la composante connexe de l'identité dans $G(\mathbb{R})$. On pose $G(\mathbb{R})_+$ le pré-image de la composante connexe de 1 de $G^{ad}(\mathbb{R})$ dans $G(\mathbb{R})$. Enfin, on note $G(\mathbb{Q})_+ = G(\mathbb{R})_+ \cap G(\mathbb{Q})$.

La variété de Shimura générale Soient G un groupe réductif sur $\mathbb{Q}$ et X une classe de $G(\mathbb{R})$-conjugaison des morphismes $h : \mathbb{S} \to G_{\mathbb{R}}$.

Définition 1.4. *On dit (G, X) est une* ***donnée de Shimura*** *si elle satisfait :*

$(SV1)$: Pour tout $h \in X$, les seuls caractères qui apparaissent dans la représentation de $\mathbb{S}$ sur $Lie(G)_{\mathbb{C}}$ définie par h sont $z/\overline{z}$, 1 ou $\overline{z}/z$.

$(SV2)$: $adh(i)$ est une involution de Cartan de $G^{ad}_{\mathbb{R}}$, i.e. $adh(i)^2 = Id$ et le groupe $\{g \in G^{ad}(\mathbb{C}) | g = adh(i)(\overline{g})\}$ est compact.

$(SV3)$: Il n'y a pas de $\mathbb{Q}$-facteur de $G^{ad}_{\mathbb{R}}$ sur lequel l'action de h est trivial.

Remarque

1. Par la condition (SV1), on sait que $h : \mathbb{S}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{C}^\times \to G(\mathbb{R})$ satisfait que $h|_{\mathbb{R}^\times}$ agit trivialement sur $Lie(G)(\mathbb{C})$. En particulier, $h|_{\mathbb{G}_m}$ ne dépend pas du choix de h dans X. On note $\omega_X : \mathbb{G}_m \to G|_{\mathbb{R}}$ l'inverse de $h|_{\mathbb{G}_m}$ pour un $h \in X$ quelconque. On l'appelle **l'homomorphisme de poids** de X.
2. X a une structure de variété complexe analytique. Dans [18], ce résultat est donné par l'étude des espaces symétriques hermitiens [18] théorème 1.21. Voici une explication d'après le cours de M. Harris au printemps 2013. On note X^+ une composante de X vue comme classes de $G(\mathbb{R})^+$-conjugaison. Soit $h \in X$, alors (SV1) implique que h induit une structure de Hodge sur $Lie(G)_{\mathbb{C}}$ par $\mathfrak{g}^{-1,1} \oplus \mathfrak{g}^{0,0} \oplus \mathfrak{g}^{1,-1}$. On pose P_h le sous-groupe de $G(\mathbb{R})^+$ avec algèbre de Lie $\mathfrak{g}^{-1,1} \oplus \mathfrak{g}^{0,0}$. Alors P_h est un sous-groupe parabolique de $G(\mathbb{R})^+$. De plus, on peut identifier l'ensemble de sous-groupes paraboliques de $G(\mathbb{R})^+$ conjugués à P_h à $G(\mathbb{R})^+/P_h$ en envoyant gP_hg^{-1} sur gP_h. Cette bijection induit un plongement (le plongement de Borel) : $X^+ \to (G/P_h)(\mathbb{C})$ qui envoie $h' = ghg^{-1}$ vers $P_{h'} = gP_h$. Notons que $(G/P_h)(\mathbb{C})$ est une variété complexe projective. Le plongement est en effet une immersion ouverte des variétés complexes. On peut alors munir X^+ et donc X d'une structure holomorphe.

On peut aussi associer à h une représentation de $\widehat{G}$, le groupe dual de G.

En effet, $h_{\mathbb{C}} : \mathbb{S}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times \to G(\mathbb{C})$ définit un cocaractère $\mu_h(z) = h_{\mathbb{C}}(z, 1) : \mathbb{C}^\times \to G(\mathbb{C})$. L'image de μ_h est contenue dans un tore maximal T de G. Notons que la classe de $G(\mathbb{C})$-conjugaison de μ_h ne dépend pas du choix de $h \in X$. On peut définir $E(G,X)$ comme le corps de définition de cette classe, appelé le **corps réflexe**. Plus précisément, soit $\Gamma \subset Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ le sous-groupe des éléments qui fixent la classe de $G(\mathbb{C})$-conjugaison de μ_h. On définit $E(G,X) := \overline{\mathbb{Q}}^{\Gamma}$.

Comme μ_h est un cocaractère de T, il correspond à $\widehat{\mu_h}$ un caractère de $\widehat{T}$. On note R_h la représentation irréductible de $\widehat{G}$ de plus haut poids $\widehat{\mu_h}$. De plus, on sait que $Gal(\overline{E(G,X)}/E(G,X))$ agit aussi sur cet espace. Donc on peut définir une représentation de ${}^L G_{E(G,X)} = \widehat{G} \rtimes Gal(\overline{E(G,X)}/E(G,X))$ (voir 4.1 pour plus de détails sur le groupe dual et le L-groupe).

Soit (G,X) une donnée de Shimura. Pour K un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A}_f)$, on définit $S_K(G,X) := G(\mathbb{Q})\backslash X \times G(\mathbb{A}_f)/K$. Elle a une structure de variété si K est assez petit. En effet, on a (lemme 5.11, 5.12 et 5.13 de [18]) :

Lemme 1.1. *Soit X^+ une composante connexe de X. Alors*

1. *L'injection naturelle*
$$G(\mathbb{Q})_+\backslash X^+ \times G(\mathbb{A}_f) \to G(\mathbb{Q})\backslash X \times G(\mathbb{A}_f)$$
est bijective.
2. *Pour tout K sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A}_f)$, l'ensemble*
$$G(\mathbb{Q})_+\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$$
est fini.
3. *On prend $\mathcal{C}$ une représentation de $G(\mathbb{Q})_+\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$ dans $G(\mathbb{A}_f)$, alors*
$$G(\mathbb{Q})\backslash X \times G(\mathbb{A}_f)/K \cong \sqcup_{g\in\mathcal{C}} \Gamma_g\backslash X^+$$
où $\Gamma_g := gKg^{-1} \cap G(\mathbb{Q})_+$.

Si K est assez petit, l'action de Γ_g sur X^+ est assez bonne. Donc $\Gamma_g\backslash X^+$ hérite d'une structure de variété induite par celle de X^+. De plus, c'est une variété algébrique par un théorème de Baily et Borel, voir théorème 3.11 de [18].

On considère le système inverse de variétés algébriques $(S_K(G,X))_K$ en faisant varier les groupes K assez petits. Soit $g \in G(\mathbb{A}_f)$, on peut définir

$$\tau(g) : S_K(G,X) \to Sh_{g^{-1}Kg}(G,X)$$
$$[x,a] \mapsto [x,ag].$$

On obtient ainsi une action de $G(\mathbb{A}_f)$ sur $(S_K(G,X))_K$.

Définition 1.5. *La **variété de Shimura** attachée à une donnée de Shimura (G,X) est le système inverse des variétés $(S_K(G,X))_K$ avec action de $G(\mathbb{A}_f)$ comme ci-dessus.*

Exemple 1.1. ***Variété de Shimura de type PEL***

On construit maintenant des variétés de Shimura de type PEL. On suit la construction de Kottwitz dans [14]. Ici, on considère F un corps CM et on note $z \mapsto \overline{z}$ la conjugaison complexe de F. En général, pour une variété de Shimura de type PEL, on peut considérer une algèbre avec involution comme dans [14] ou [18].

Soit V un F-espace vectoriel et $(\ ,\ )$ une forme Hermitienne sur $V \times V$. On note $*$ la dualité par rapport à cette forme $(\ ,\ )$.

On note G le groupe algébrique sur $\mathbb{Q}$ tel que pour tout R, une $\mathbb{Q}$-algèbre, on ait :

$$G(R) = g \in GL(V \otimes_{\mathbb{Q}} R) | (gv, gw) = \lambda(g)(v, w), \lambda(g) \in R^*\}$$

Proposition 1.1. *Si un homomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres $h : \mathbb{C} \to End_{\mathbb{R}}(V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})$ satisfait les deux conditions suivantes :*

– *$h(\overline{z}) = h(z)^*$;*

– *La forme $(u, v) \mapsto (u, h(i)(v))$ est symétrique et définie positive ;*

Alors (G, X) est une donnée de Shimura où X est la classe de $G(\mathbb{R})$-conjugaison de h.

Pour K un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A}_f)$, on écrit $S_K(G, h) := S_K(G, X)$. On définit aussi $S(G, h) := S(G, X)$.

Maintenant on fixe K assez petit. Soit $L : G(\mathbb{R}) \to GL(W)$ une représentation de dimension finie de $G(\mathbb{R})$. On peut définir un système local grâce au lemme 1.1 (3)*. En effet, il suffit de construire un système local sur $\Gamma_g \backslash X^+$. Or Γ_g agit sur $X^+ \times W$ de la façon $\gamma(x, w) = (\gamma x \gamma^{-1}, L(\gamma)w)$. Alors la projection naturelle $X^+ \times W \to X^+$ donne un système local $\mathcal{L} = \Gamma_g \backslash (X^+ \times W)$.*

1.4 Modèle canonique et réduction d'une variété de Shimura

Définition 1.6. *Soient V une variété sur $\mathbb{C}$ et M une variété sur un corps de nombres E. On dit que M est un* **modèle** *de V sur E si on a $M_{\mathbb{C}} = V$.*

Soit $h \in X$, on dit que h est un **point spécial** s'il existe un tore $T \subset G$ défini sur $\mathbb{Q}$ tel que $h(\mathbb{C}^\times) \subset T(\mathbb{R})$. On dit que (h, T) est une **paire spéciale**. On sait que points spéciaux ou paires spéciales existent toujours.

On considère une paire spéciale (T, h). On note $E(h)$ le corps de définition de μ_h. Alors $E(G, X) \subset E(h)$. Comme dans [18] P.$345 - 346$, on peut définir un morphisme $r_h : \mathbb{A}_{E(h)}^\times \to T(\mathbb{A}_f)$. Considérons la multiplication à gauche de $T(\mathbb{A}_f)$ sur $G(\mathbb{A}_f)$, on obtient ainsi une action de $\mathbb{A}_{E(h)}^\times$ sur $G(\mathbb{Q}) \backslash \{h\} \times G(\mathbb{A}_f)/K$.

On rappelle que la réciprocité d'Artin $rec_{E(h)}$ est un morphisme

$$rec_{E(h)} : \mathbb{A}_{E(h)}^\times \to Gal(\overline{E(h)}/E(h))$$

On définit $art_{E(h)} : \mathbb{A}^{\times}_{E(h)} \to Gal(\overline{E(h)}/E(h))$ par $art_{E(h)}(s) = rec_{E(h)}(s^{-1})$ pour tout $s \in \mathbb{A}^{\times}_{E(h)}$.

Définition 1.7. *Soit $M_K(G,X)$ un modèle de $S_K(G,X)$ sur $E(G,X)$. Ce modèle donne alors une action de $Gal(\overline{E(G,X)}/E(h))$ sur $G(\mathbb{Q})\backslash\{h\} \times G(\mathbb{A}_f)/K$. On a vu que $\mathbb{A}^{\times}_{E(h)}$ agit aussi sur $G(\mathbb{Q})\backslash\{h\} \times G(\mathbb{A}_f)/K$.*

*On dit que $M_K(G,X)$ est **canonique** si les deux actions sont compatibles pour tout paire spéciale. Ici on identifie $Gal(\overline{E(G,X)}/E(h))$ et $\mathbb{A}^{\times}_{E(h)}$ par la réciprocité d'Artin. En d'autres termes, on dit que $M_K(G,X)$ est canonique si*

$$\sigma[h,a] = [h, r_h(s)(a)]$$

pour tout $a \in G(\mathbb{A}_f)$, $\sigma \in Gal(\overline{E(G,X)}/E(h)) \subset Gal(\overline{E(G,X)}/E(G,X))$, $s \in \mathbb{A}^{\times}_{E(h)}$ tels que $art_{E(h)}(s) = \sigma$.

Définition 1.8. *Soit $M(G,X) = (M_K(G,X))_K$ un système inverse des variétés sur $E(G,X)$ avec une action de $G(\mathbb{A}_f)$. On dit que $M(G,X)$ est un **modèle** de $S(G,X)$ si $M(G,X)_{\mathbb{C}} = S(G,X)$ avec la même action de $G(\mathbb{A}_f)$. On dit que $M(G,X)$ est un **modèle canonique** si on a de plus que $M_K(G,X)$ est canonique pour tout K assez petit.*

Théorème 1.4. *Pour une variété de Shimura, il existe un unique modèle canonique sur son corps réflexe à isomorphisme unique près.*

On s'intéresse aussi à la réduction du modèle canonique sur les places de $E(G,X)$ au-dessus de p où p une place finie de $\mathbb{Q}$.

Définition 1.9. *Soit G un groupe réductif sur $\mathbb{Q}$ (ou plus général sur $\mathbb{Q}_p$). Soit $K \subset G(\mathbb{Q}_p)$ un sous-groupe. On dit que K est hyperspécial s'il existe un schéma en groupes plat $\mathcal{G}$ sur $\mathbb{Z}_p$ tel que*

1. *$\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p} = G$;*
2. *$\mathcal{G}_{\mathbb{F}_p}$ est un groupe réductif connexe ;*
3. *$\mathcal{G}(\mathbb{Z}_p) = K$.*

On a une conjecture sur la réduction de la variété de Shimura par Langlands.

Conjecture 1.3. *Soit $M_K(G,X)$ un modèle canonique de $S_K(G,X)$. Si K est de la forme K_pK^p où K_p est un sous-groupe ouvert compact hyperspécial de $G(\mathbb{Q}_p)$ et K^p est un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A}^p) := \prod\limits_{q \neq p} G(\mathbb{Q}_q)$, alors $M_K(G,X)$ a bonne réduction en toutes les places de $E(G,X)$ au-dessus de p.*

Dans notre exemple 1.1 (une variété de Shimura de type A par les notions dans [18]), on sait que cette conjecture est vraie.

Proposition 1.2. *Soit (G,h) comme dans l'exemple 1.1. Alors $M_K(G,X)$ a bonne réduction en toutes les places de $E(G,X)$ au-dessus de p où $M_K(G,X)$ est le modèle canonique de $S_K(G,X)$ et $K = K_pK^p$ avec K_p un sous-groupe ouvert compact hyperspécial.*

Soit G un groupe réductif sur un corps local l. On dit que G est **non ramifié** s'il est quasi-déployé sur l et déployé sur une extension non ramifiée de l.

Proposition 1.3. *Soit G un groupe réductif sur $\mathbb{Q}_p$. Alors il existe un sous-groupe hyperspécial de G si et seulement si G est non ramifié sur $\mathbb{Q}_p$.*

Exemple 1.2. ***Construction d'un sous-groupe hyperspécial***

On considère la situation de 1.1. Soit p un nombre premier tel que F est non ramifié sur p. On note $F_p = F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$. Il est un produit d'extensions non ramifiées de $\mathbb{Q}_p$. Soit $\mathcal{O}_p$ l'anneau des entiers de F_p. S'il existe Λ un réseau de $V \otimes_F F_p$ préservé par $\mathcal{O}_p$ tel que la restriction de $(\ , \ )$ sur $\Lambda \times \Lambda$ soit non dégénérée, alors K_p, le stabilisateur de Λ dans $G(\mathbb{Q}_p)$, est hyperspécial. Dans ce cas, $\mathcal{G}_{\mathbb{F}_p}$ est le stabilisateur de $\Lambda/p\Lambda$ dans $G_{\mathbb{F}_p}$.

2 Changement de base global pour GL_n

2.1 Paramètres de Langlands pour GL_n : cas non archimédien

Dans cette section, on fixe l un corps local non archimédien, par exemple $l = F_v$ où F est un corps de nombres et v est une place finie de F. On note $G = GL_n(l)$ et $K = GL_n(\mathcal{O}_l)$ comme dans la section précédente.

On rappelle qu'une représentation π de G est admissible si pour tout K' sous-groupe ouvert compact de G, la dimension de l'espace des points fixes $\pi^{K'}$ est finie. On dit que π est non ramifiée si elle est admissible irréductible et $\pi^K \neq \{0\}$. Notons que pour une représentation non ramifiée π, la dimension de π^K est égale à 1.

On verra que les représentations non ramifiées de $G(k)$ sont classifiées par des n-uplets $\in \mathbb{C}^{\times n}$ à permutation près.

Plus précisément et de façon plus élégante, on va démontrer l'existence d'une bijection (la correspondance de Langlands locale) :

$$\{\text{représentations non ramifiées de } G\}/\simeq$$

$$\updownarrow$$

$$\{\text{représentations semi-simples non ramifiées de dimension } n \text{ de } W_l\}/\simeq$$

Ici, W_l est le groupe de Weil de l. Une représentation semi-simple de dimension n de W_l est définie par n caractères à permutation près.

Comme $W_l^{ab} \cong l^\times$, tous les caractères de W_l se factorisent à travers $l^\times$. De plus, un caractère non ramifié de $l^\times$ est uniquement déterminé par sa valeur en l'uniformisante. Autrement dit, une représentation semi-simples non ramifiée de W_l de dimension n est définie par un n-uplet d'éléments de $\mathbb{C}^\times$ à permutation près.

Pour établir cette jolie correspondance, notre tâche est dont de construire un n-uplet à partir d'une représentation non ramifiée de G.

On fixe μ la mesure de Haar sur G telle que $\mu(K) = 1$. On considère l'algèbre :

$$\mathcal{H}(G,K) = \{f : G \to \mathbb{C}, \text{ à support compact}, f(k_1 g k_2) = f(g) \text{ pour tout } g \in G, k_1, k_2 \in K\}.$$

C'est une algèbre commutative et unitaire d'élément unité $\mathbb{1}_K$.

Soit (π, V) une représentation non ramifiée de G. L'algèbre $\mathcal{H}(G,K)$ agit sur V par $f.v := \int_G f(g)(g.v)d\mu$ pour $f \in \mathcal{H}(G,K)$ et $v \in V$. Comme π est lisse et f est à support compact, le $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par $supp(f).v$ est de dimension finie, donc $f.v$ est bien défini.

On fixe un vecteur non nul $v_0 \in V^K$. Donc $V^K = \mathbb{C}v_0$ comme on a vu. Pour tout $v \in V$, $k \in K$ et $f \in \mathcal{H}(G,K)$, on a

$$\begin{aligned} k.(f.v) &= k.\textstyle\int_G f(g)(g.v)d\mu \\ &= \textstyle\int_G f(g)(kg.v)d\mu \\ &= \textstyle\int_G f(k^{-1}g)(g.v)d\mu \\ &= \textstyle\int_G f(g)(g.v)d\mu \\ &= f.v \end{aligned}$$

On en déduit que $fv \in \mathbb{C}v_0$. En particulier, on a $fv_0 \in \mathbb{C}v_0$. Par conséquent, il existe un nombre $\lambda_\pi(f) \in \mathbb{C}$ tel que $f.v_0 = \lambda_\pi(f)v_0$. On obtient un morphisme d'algèbres $\lambda_\pi : \mathcal{H}(G,K) \to \mathbb{C}$.

Théorème 2.1. *Il y a une bijection entre les représentations irréductibles non ramifiées et les caractères de l'algèbre $\mathcal{H}(G,K)$. La bijection est donnée par $\pi \mapsto \lambda_\pi$.*

Pour les détails, voir [19]. Maintenant pour classifier les représentations irréductibles non ramifiées, il suffit de déterminer les caractères de $\mathcal{H}(G,K)$. Or, l'algèbre $\mathcal{H}(G,K)$ n'est pas compliquée. On en a une description explicite :

Proposition 2.1. *L'algèbre $\mathcal{H}(G,K)$ est isomorphe à $\mathbb{C}[z_1^\pm, z_2^\pm, \cdots, z_n^\pm]^{\mathfrak{S}_n}$, où l'action de $\mathfrak{S}_n$ est la permutation sur $\{z_1, z_2, \cdots, z_n\}$.*

Cet isomorphisme est donné par la transformée de Satake. En effet, la transformée de Satake est : $S : \mathcal{H}(G,K) \to \mathcal{H}(T, K \cap T)$ où $T \subset G$ l'ensemble des matrices diagonales. On peut montrer que cette transformée est injective. Son image est $\mathcal{H}(T, K \cap T)^W$ où W est le groupe de Weyl de G. Il est facile de voir $\mathcal{H}(T, K \cap T) \cong \mathbb{C}[z_1^\pm, z_2^\pm, \cdots, z_n^\pm]$ et $W \cong \mathfrak{S}_n$ avec l'action de permutation sur $\mathbb{C}[z_1^\pm, z_2^\pm, \cdots, z_n^\pm]$. Pour plus des détails, voir aussi [19].

Notre tâche est alors de déterminer les caractères de $\mathbb{C}[z_1^\pm, z_2^\pm, \cdots, z_n^\pm]^{\mathfrak{S}_n}$.

On considère le morphisme surjectif

$$Hom(\mathbb{C}[z_1^{\pm}, z_2^{\pm}, \cdots, z_n^{\pm}], \mathbb{C}) \to Hom(\mathbb{C}[z_1^{\pm}, z_2^{\pm}, \cdots, z_n^{\pm}]^{\mathfrak{S}_n}, \mathbb{C}).$$

Comme $\mathbb{C}^{\times n} \cong Hom(\mathbb{C}[z_1^{\pm}, z_2^{\pm}, \cdots, z_n^{\pm}], \mathbb{C})$, le morphisme ci-dessus donne une bijection $\mathbb{C}^{\times n}/\mathfrak{S}_n \to Hom(\mathbb{C}[z_1^{\pm}, z_2^{\pm}, \cdots, z_n^{\pm}]^{\mathfrak{S}_n}, \mathbb{C})$. Donc les représentations irréductibles non ramifiées de $G(k)$ sont classifiées par un n-uplet $\in \mathbb{C}^{\times n}$ à permutation près. Pour une telle représentation, le n-uplet est appelé son **paramètre de Langlands**.

Remarque

1. Dans la classification, une représentation non ramifiée est tempérée si et seulement si son paramètre de Langlands $(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ satisfait $|t_i| = 1$ pour tout $1 \leq i \leq n$, voir le théorème 14.5.5 et 14.6.2 de [8].
2. Dans le cas $n = 2$, $F = \mathbb{Q}$ et $\pi = \bigotimes_{p \leq \infty} \pi_p$ une représentation automorphe associée à une forme nouvelle de poids 2. Soit (t_1, t_2) le paramètre de Langlands de π_p. On sait que l'opérateur de Hecke T_p est associé à $\mathbb{1}_{K\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & p\end{pmatrix}K}$ dans $\mathcal{H}(G, K)$. Il est facile de calculer sa transformée de Satake. On obtient que l'image de T_p dans $\mathbb{C}[z_1, z_2]$ est $p^{1/2}(z_1 + z_2)$. Donc sa valeur propre est $p^{1/2}(t_1 + t_2)$. En particulier on a $t_1 + t_2 \in \mathbb{R}$ puisque le corps de définition de S_2 est $\mathbb{Q}$. On sait de plus que $t_1 t_2 = 1$ car π est automatiquement unitaire. Ensuite, on considère le polynôme $P(X) = X^2 - (t_1 + t_2)X + 1 \in \mathbb{R}[X]$. Il y a deux possibilités :
   - Soit le discriminant de P est strictement positif. Alors $|t_1 + t_2| > 2$ et P a deux racines réelles différentes. En particulier, on a $|t_1| \neq 1$ et $|t_2| \neq 1$.
   - Soit le discriminant de P est non positif. Alors $|t_1 + t_2| \leq 2$ et P a deux racines imaginaires différentes ou une double racine. De toute façon, on a $|t_1| = |t_2| = 1$.

   On en déduit que $|p^{1/2}(t_1 + t_2)| \leq 2p^{1/2}$ si et seulement si $|t_1| = |t_2| = 1$, si et seulement si π_p est tempérée. C'est à dire que la conjecture 1.2 est vraiment une généralisation de la conjecture classique 1.1.
3. Plus généralement, soient G un groupe réductif connexe non ramifié sur un corps local et K un sous-groupe ouvert compact hyperspécial de G. On a une bijection entre les représentations irréductibles non ramifiées et les caractères de $\mathcal{H}(G, K)$. Pour les détails, voir [19] P.397.

2.2 Paramètres de Langlands pour GL_n : cas archimédien

Dans cette section, soit $l = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $K = O(n)$ si $l = \mathbb{R}$, $K = U(n)$ si $l = \mathbb{C}$ comme ci-dessus. On pose $G = GL_n(l)$.

On suppose de plus $n = 2m$ un entier pair dans cette section.

Soit π une représentation de G. On dit que π est admissible si tous les représentations irréductibles de K apparaissent avec multiplicité finie dans $\pi|K$. De même que dans le cas non archimédien, on a une jolie bijection :

$$\{\text{représentations semi-simples de } W_l \text{ de dimension } n\}/\simeq$$

$$\updownarrow$$

$$\{\text{représentations irréductibles admissibles de } G\}/\simeq$$

On admet ce résultat. Pour les détails, voir [11]. Le but de cette section est d'introduire cette correspondance pour les représentations dans notre cas, i.e. les composantes infinies des représentations cuspidales auto-duales cohomologiques.

On commence par déterminer les caractères de $\mathbb{C}^\times$.

Lemme 2.1. *Tout caractère de $\mathbb{C}^\times$ est de la forme $z^p\overline{z}^q$ avec $p, q \in \mathbb{C}$, $p - q \in \mathbb{Z}$. De plus, deux caractères $z^p\overline{z}^q$ et $z^{p'}\overline{z}^{q'}$ sont isomorphes si et seulement si $p = p'$, $q = q'$.*

Remarque Soient $p, q \in \mathbb{C}$ avec $p - q \in \mathbb{Z}$, on a $z^p\overline{z}^q = z^{p-q}|z|^{2q}$ qui est bien défini.

Démonstration Soit $\chi : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$ un caractère. On pose $\chi_0 = \chi|_{\mathbb{R}^+} \circ exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}^\times$. Pour $\mathcal{H}' = \{z \in \mathbb{C}, \mathfrak{Re}(z) > 0\}$, il y a un morphisme continu $log : \mathcal{H}' \to \mathbb{C}$ qui envoie 1 vers 0. Comme $\chi_0^{-1}(\mathcal{H}')$ est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, il existe $t > 0$ tel que $\chi_0[-t, t] \in \mathcal{H}'$. On pose $I = [-t, t]$.

Alors $f = log \circ \chi_0|I : I \to \mathbb{C}$ est un morphisme continu. Il est facile de voir qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $f(s) = s\lambda$ pour tout $s \in I$. Donc $\chi_0(s) = exp(s\lambda)$ pour tout $s \in I$, et donc pour tout $s \in \mathbb{R}$ comme I engendre $\mathbb{R}$. Alors pour tout $z \in \mathbb{R}^+$, $\chi(z) = \chi_0(log(z)) = z^\lambda$.

On pose de plus $\chi_1 = \chi|_{S^1} \circ exp(2\pi i\cdot) : \mathbb{R} \to S^1 \to \mathbb{C}^\times$. De la même manière, il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $\chi_1(\theta) = exp(\theta\mu)$. Notons que $\chi_1(0) = \chi_1(1)$, on a $\mu = 2\pi iN$ avec $N \in \mathbb{Z}$. Alors $\chi(\pi i\theta) = \chi_1(\theta) = exp(2\pi iN\theta)$. C'est à dire que $\chi(z) = z^N$ si $z \in S^1$.

Comme $\mathbb{C}^\times = \mathbb{R}^+ \cdot S^1$, on a bien déterminé χ. En effet, pour tout $z \in \mathbb{C}^\times$,

$$\chi(z) = \chi(|z|\frac{z}{|z|}) = \chi(|z|)\chi(\frac{z}{|z|}) = |z|^\lambda(\frac{z}{|z|})^N$$

$$= z^N\big(z\overline{z}\big)^{(\lambda-N)/2} = z^{(\lambda+N)/2}\overline{z}^{(\lambda-N)/2}$$

comme voulu.

A la fin, il est facile de voir deux caractères $z^p\overline{z}^q$ et $z^{p'}\overline{z}^{q'}$ sont isomorphes si et seulement s'ils sont égaux, si et seulement si $p = p'$, $q = q'$.

□

Définition 2.1. *On dit qu'un caractère $\chi(z) = z^p\overline{z}^q$ est* ***algébrique*** *si $p, q \in \mathbb{Z}$.*

Après, on travaille sur les représentations semi-simples de W_l. Notons que $W_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^\times$ et $W_{\mathbb{R}} = \mathbb{C}^\times \sqcup j\mathbb{C}^\times$ où $j^2 = -1$, $jzj^{-1} = \overline{z}$ pour tout $z \in \mathbb{C}^\times$. Dans tous les cas, on a un plongement naturel $\mathbb{C}^\times \hookrightarrow W_l$.

Soit π une représentation irréductible admissible de G. On note Φ_π la représentation de dimension n de $\mathbb{C}^\times$ définie par la représentation de W_l associée à π en restreignant W_l à $\mathbb{C}^\times$. Comme Φ_π est semi-simple, on sait que Φ_π est donnée par n caractères de $\mathbb{C}^\times$ à permutation près. On note $\Phi_\pi = (\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_n)$ où $\chi_i = z^{p_i}\overline{z}^{q_i}$. On appelle $(\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_n)$ le **paramètre de Langlands** de π.

On remarque qu'une représentation admissible de $GL_n(\mathbb{C})$ est uniquement déterminée par son paramètre de Langlands. Ce n'est plus vrai pour $l = \mathbb{R}$.

Définition 2.2. *On dit qu'une représentation π de G est* ***algébrique*** *si pour tout i, on a $p_i, q_i \in \mathbb{Z} + \frac{n-1}{2}$.*

On peut maintenant établir la correspondance de Langlands pour les représentations tempérées de G.

Théorème 2.2. ***Le cas*** $l = \mathbb{C}$

Soit F un corps CM. Soit π une représentation de $GL_n(\mathbb{C})$ qui est une composante infinie d'une représentation cuspidale auto-duale cohomologique de $GL_n(\mathbb{A}_F)$. Alors π est tempérée. De plus, il existe des nombres $p_i \in \mathbb{Z} + \frac{n-1}{2}$, $1 \leq i \leq n$ tel que π est $Ind_P^G(\chi_1 \otimes \chi_2 \cdots \otimes \chi_n)$ où P est le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures de $GL_n(\mathbb{C})$, $\chi_i = z^{p_i}\overline{z}^{-p_i}$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Notons que $\chi_1 \otimes \chi_2 \cdots \otimes \chi_n$ est vue comme une représentation de P.

Dans ce cas, on a Φ_π, le paramètre de Langlands de π, est égal à $(\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_n)$.

Remarque Ici la condition que π est une composante infinie d'une représentation cuspidale implique que π est générique. Le théorème ci-dessus est obtenu en comparant la classification de Langlands pour les représentations admissibles (voir [11]) et la classification de Vogan-Zuckerman des $(\mathfrak{g}, K)$-modules unitaires cohomologiques sur les représentations génériques.

Le cas $l = \mathbb{R}$ est plus difficile. On rappelle que n est pair ici. On construit d'abord une représentation de $GL_2(\mathbb{R})$ par rapport à un caractère $\chi = z^{p_i}\overline{z}^{q_i}$ où $p, q \in \mathbb{C}$ avec $p - q \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

Soit $l = |p - q|$. On pose

$$V_l^+ = \{f \text{ analytique sur } \mathcal{H} | \parallel f \parallel := \iint |f(z)|^2 y^{l-1} dxdy < \infty\}$$

On va définir une action de $SL_2(\mathbb{R})$ sur V_l^+ par

$$(\gamma f)(z) = (bz + d)^{-(l+1)} f(\frac{az + c}{bz + d})$$

pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$. Et note $V_l = Ind_{SL_2(\mathbb{R})}^{SL_2^{\pm}(\mathbb{R})} V_l^+$. Comme $GL_2(\mathbb{R}) = SL_2^{\pm}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^+$, on peut définir une représentation $\pi_\chi := V_l \otimes |det(\cdot)|^{(p+q)/2}$. Cette représentation est admissible.

Notons que cette représentation ne dépend pas de l'ordre de p et q, donc $\pi_\chi \cong \pi_{\overline{\chi}}$.

On peut maintenant énoncer la classification du cas $l = \mathbb{R}$.

Théorème 2.3. ***Le cas*** $l = \mathbb{R}$ *Soit F un corps totalement réel. Soit P' le sous-groupe parabolique de $GL_n(\mathbb{R})$ contenant les matrices de la forme* $\begin{pmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ 0 & A_2 & * & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_m \end{pmatrix}$ *où $A_i \in GL_2(\mathbb{R})$. Si π est une représentation de $GL_n(\mathbb{C})$ qui est une composante infinie d'une représentation cuspidale auto-duale cohomologique de $GL_n(\mathbb{A}_F)$, alors π est tempérée. De plus, il existe des nombres $p_i \in \mathbb{Z} + \frac{n-1}{2}$, $1 \leq i \leq m$ tel que π est $Ind_{P'}^{G}(\pi_{\chi_1} \otimes \pi_{\chi_2} \otimes \cdots \otimes \pi_{\chi_m})$ où $\chi_i = z^{p_i}\overline{z}^{-p_i}$ pour tout $1 \leq i \leq m$.*

Dans ce cas, on a Φ_π, le paramètre de Langlands de π, $= (\chi_1, \overline{\chi_1}, \cdots, \chi_m, \overline{\chi_m})$. On remarque c'est la restriction à $\mathbb{C}^\times$ de la représentation de $W_\mathbb{R}$ associée à π.

Isomorphisme de Harish-Chandra et caractère infinitésimal

On considère G comme un $\mathbb{R}$-groupe. C'est à dire qu'on pose $G = GL_n$ si $l = \mathbb{R}$; $G = Res_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} GL_n(\mathbb{C})$ si $l = \mathbb{C}$. On définit $\mathfrak{g} = LieG_\mathbb{C}$ et K un sous-groupe ouvert compact maximal de G.

On note H le sous-groupe de G formé des matrices diagonales et $\mathfrak{h} = LieH_\mathbb{C}$. Alors $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. On note $U(\mathfrak{g})$ (resp. $U(\mathfrak{h})$) l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{h}$) et $Z(\mathfrak{g})$ le centre de $U(\mathfrak{g})$.

Notons que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}l_n(\mathbb{C})$, $\mathfrak{h} \simeq \mathbb{C}^n$ si $l = \mathbb{R}$; $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}l_n(\mathbb{C}) \times \mathfrak{g}l_n(\mathbb{C})$, $\mathfrak{h} \simeq \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ si $l = \mathbb{C}$.

Maintenant, soit π une représentation admissible irréductible de G. On sait que ses éléments K-finis et différentiables forment un $(\mathfrak{g}, K)$-module admissible irréductible. On le note encore (π, V). Comme π est irréductible, on sait que $Z(\mathfrak{g})$ agit sur V par homothéties. En d'autre termes,

Proposition 2.2. *Soit (π, V) un $(\mathfrak{g}, K)$-module irréductible. Alors il existe un caractère : $\lambda : Z(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$ tel que pour tout $z \in Z(\mathfrak{g})$ et $v \in V$, on ait $z.v = \lambda(z)v$. On appelle λ le caractère infinitésimal de π.*

Voir [12] pour la démonstration. On a un théorème sur la structure de $Z(\mathfrak{g})$ dû à Harish-Chandra (théorème 4.95 de [12]) :

Théorème 2.4. *Il y a un isomorphisme d'algèbres entre $Z(\mathfrak{g})$ et $U(\mathfrak{h})^W$ où W et le groupe de Weyl de G.*

Dans notre cas, on a $U(\mathfrak{h})^W \simeq \mathbb{C}[X_1, X_2, \cdots, X_n]^{\mathfrak{S}_n}$ si $l = \mathbb{R}$, $U(\mathfrak{h})^W \simeq \mathbb{C}[X_1, X_2, \cdots, X_n, Y_1, Y_2, \cdots, Y_n]^{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n}$ si $l = \mathbb{C}$. Grâce à ce théorème, on voit que le caractère infinitésimal de π est donné par un élément de $\mathbb{C}^n$ si $l = \mathbb{R}$, un élément de $\mathbb{C}^{2n}$ si $l = \mathbb{C}$.

Soit π une représentation de $GL_n(\mathbb{R})$ avec paramètre de Langlands $(\chi_1, \overline{\chi_1}, \cdots, \chi_m, \overline{\chi_m})$ où $\chi_i = z^{p_i}\overline{z}^{-p_i}$, on sait que son caractère infinitésimal est donné par $(p_1, -p_1, \cdots, p_m, -p_m)$.

Soit π une représentation de $GL_n(\mathbb{C})$ avec paramètre de Langlands $(\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_n)$ où $\chi_i = z^{p_i}\overline{z}^{-p_i}$, alors son caractère infinitésimal est donné par $(p_1, \cdots, p_n; -p_1, \cdots, -p_n)$ (voir le remarque en P.90 de [2]).

2.3 Changement de base quadratique pour GL_n

Soient $G = GL_n$ et L/F une extension quadratique de corps de nombres. On prend v une place finie de F et w une place de L au-dessus de v. Comme précédemment, pour tout corps local l, on pose $K(l) = G(\mathcal{O}_l)$.

On a vu dans la section 2.1 que

$$\mathcal{H}(G(L_w), K(L_w)) \cong \mathbb{C}[z_1^{\pm}, z_2^{\pm}, \cdots, z_n^{\pm}]^{\mathfrak{S}_n}$$

$$\text{et } \mathcal{H}(G(F_v), K(F_v)) \cong \mathbb{C}[z_1^{\pm}, z_2^{\pm}, \cdots, z_n^{\pm}]^{\mathfrak{S}_n}.$$

On peut alors définir :

$$BC_{L_w/F_v}(G) : \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{H}(G(L_w), K(L_w)) & \longrightarrow & \mathcal{H}(G(F_v), K(F_v)) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \mathbb{C}[z_1^{\pm}, z_2^{\pm}, \cdots, z_n^{\pm}]^{\mathfrak{S}_n} & \longrightarrow & \mathbb{C}[z_1^{\pm}, z_2^{\pm}, \cdots, z_n^{\pm}]^{\mathfrak{S}_n} \\ & & \\ f(z_i) & \longmapsto & f(z_i^{f_w}) \end{array}$$

où $f_w = [L_w : F_v]$.

Le dual de ce morphisme nous donne une application :

$$\begin{array}{c} \{\text{représentations non ramifiées de } G(F_v)\}/\simeq \\ \downarrow \\ \{\text{représentations non ramifiées de } G(L_w)\}/\simeq \end{array}$$

On appelle cette application le **changement de base** des représentations. En d'autre termes, le changement de base envoie une représentation de $G(F_v)$ de paramètre de Langlands (t_i) vers une représentation de $G(L_w)$ de paramètre de Langlands $(t_i^{f_w})$. En particulier, on a qu'une représentation non ramifiée est tempérée si et seulement si son changement de base l'est.

Maintenant soit $\pi = \otimes \pi_v$ une représentation cuspidale de $G(\mathbb{A}_F)$. On pose $\Sigma = \{v \text{ place finie} | \pi_v \text{ ramifiée}\} \cup \{v \text{ place infinie}\}$, un ensemble fini des places. Alors pour tout $v \notin \Sigma$, π_v est une représentation non ramifiée de $G(F_v)$. Donc elle est associée à une représentation non ramifiée de $G(L_w)$ pour toute place $w|v$. On dit aussi $w \notin \Sigma$ si $w|v$ avec $v \notin \Sigma$.

De la sorte, on obtient une famille des représentations $\{\pi_w\}_{w \notin \Sigma}$. Une question naturelle est de savoir si cette famille de représentations vient d'une représentation cuspidale de $G(\mathbb{A}_L)$?

On dit qu'une représentation de $G(\mathbb{A}_L)$ est induite de cuspidale s'il existe un sous-groupe parabolique P de G , M un sous-groupe de Levi de P et π_M une représentation cuspidale de $M(\mathbb{A}_L)$ tels que $\pi \cong Ind_P^G(\pi_M)$. Ici, on voit π_M comme une représentation de P.

Maintenant on peut répondre à la question posée : on peut toujours trouver $BC(\pi)$ une représentation de $G(\mathbb{A}_L)$ induite de cuspidale telle que $BC(\pi)_w \cong BC_{L_w/F_v}(G)(\pi_v)$ pour toute $w|v$, $w \notin \Sigma$. Notons que comme deux représentations induites de cuspidales localement isomorphes presque partout sont isomorphes, on sait qu'une telle représentation est unique à isomorphisme près.

On note σ l'élément non trivial dans $Gal(L/F)$ et η le caractère d'Artin de $\mathbb{A}_F^\times$ par rapport à L/F. Si n est pair, on fixe un sous-groupe parabolique $P = \{\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} | A, C \in GL_{n/2}, B \in M_{n/2}\}$ et $M = \{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} | A, C \in GL_{n/2}\} \simeq GL_{n/2} \times GL_{n/2}$ un sous-groupe de Levi associé.

Théorème 2.5. *Il existe une application*

$$BC : \{\textit{représentations cuspidales de } G(\mathbb{A}_F)\}$$
$$\downarrow$$
$$\{\textit{représentations induites de cuspidales de } G(\mathbb{A}_L)\}$$

vérifiant $BC(\pi)_w \cong BC_{L_w/F_v}(G)(\pi_v)$ *pour presque toute* v*, place de* F*, et* w*, place de* L *qui divise* v*. De plus,*

1. *Si* $\pi \ncong \pi \otimes \eta$*, alors* $BC(\pi)$ *est cuspidale. De plus, les fibres de* $BC(\pi)$ *sont* π *,*$\pi \otimes \eta$*.*
2. *Si* $\pi \cong \pi \otimes \eta$*, alors* n *est pair et il existe* Π*, une représentation cuspidale de* $GL_{n/2}(\mathbb{A}_L)$*, telle que* $BC(\pi) = Ind_P^G(\Pi \otimes \Pi^\sigma)$*. De plus, la fibre de* $BC(\pi)$ *est* π*.*
3. *Si* Π *est une représentation cuspidale de* $GL_n(\mathbb{A}_L)$ *telle que* $\Pi \cong \Pi^\sigma$*, alors* Π *est dans l'image de* BC*.*

Remarque

1. Par la définition du changement de base des représentations non ramifiées, il est facile de voir que $BC(\pi) \cong BC(\pi)^\sigma$.

2. On peut étendre le changement de base aux représentations induites de cuspidale : $\widetilde{BC}$: { représentations induites de cuspidales de $G(\mathbb{A}_F)$} $\to$ { représentations induites de cuspidales de $G(\mathbb{A}_L)$}. On sait que l'image de $\widetilde{BC}$ est $\{\Pi | \Pi \cong \Pi^\sigma\}$.
3. On a des résultats pareils pour des extensions cycliques, voir P.202 de [1].

Pour la démonstration du théorème, il faut appliquer la formule de traces du côté spectral et trouver une représentation de $GL(\mathbb{A}_F)$ qui contribue dans une certaine formule de traces pour π. Pour les détails, voir P.202 de [1].

Dans le théorème, on a $BC(\pi)_w \cong BC_{L_w/F_v}(G)(\pi_v)$ presque partout. On dit que $BC(\pi)$ est le **changement de base faible** de π. Elle est en effet un changement de base fort. C'est à dire que $BC(\pi)_w \cong BC_{L_w/F_v}(G)(\pi_v)$ pour toute v, place de F, et w, place de L qui divise v. On n'a pas défini le changement de base dans les cas où π_v est ramifiée. On va le faire toute de suite.

Définition 2.3. *Soient L, F, v et w comme ci-dessus.*

1. *v finie*
   *Soit π_v (resp. Π_w) une représentation irréductible admissible de $G(F_v)$ (resp. $G(L_w)$). On dit que Π_w est un **changement de base** de π_v s'il existe une application d'entrelacement I_σ tel que $\Pi_w \cong \Pi_w^\sigma$ et*
   $$trace(\Pi_w(g)I_\sigma) = trace(\pi_v(N(g)))$$
   pour tout $g \in G(L_w)$ avec $N(g)$ régulier.
2. *v infinie*
   *Le seul cas non trivial est $L_w = \mathbb{C}$, $F_v = \mathbb{R}$. Soit π_v une représentation admissible unitaire algébrique de $G(\mathbb{R})$. On définit **le changement de base** de π comme la représentation admissible de $G(\mathbb{C})$ de même paramètre de Langlands que π.*

Remarque

1. Le changement de base dans le cas non ramifié est vraiment un changement de base dans le sens de la définition 2.3.
2. Par la correspondance des représentations admissibles de $G(\mathbb{C})$ (resp. $G(\mathbb{R})$) et les représentations de dimension n de $W_\mathbb{C} \cong \mathbb{C}^\times$ (resp. $W_\mathbb{R} \cong \mathbb{C}^\times \sqcup j\mathbb{C}^\times$), le changement de base par rapport à $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ est donnée par la restriction de $W_\mathbb{R}$ sur $W_\mathbb{C}$.
3. Le changement de base local d'une représentation est unique.

Théorème 2.6. *Pour toute v place de F, et $w|v$ place de L, $BC(\pi)_w$ est le changement de base de π_v dans le sens de la définition 2.3.*

3 Les premières étapes

3.1 Réduction au cas CM

On note Σ un ensemble fini des places finies de $\mathbb{Q}$ tel que toutes les places ramifiées de π ou de F divisent une place dans Σ. On peut supposer que $p \in \Sigma$ et $2 \in \Sigma$. Pour w une place de F où F est une extension finie de $\mathbb{Q}$, on dit $w \in \Sigma$ (resp. $w \notin \Sigma$) si w divise une place dans Σ (où w divise une place de $\mathbb{Q}$ qui n'est pas dans Σ).

Dans cette section, on va réduire notre problème au cas $F = F^+E$ où F^+ est un corps totalement réel non ramifié hors de $\Sigma - \{p\}$ et $E = \mathbb{Q}(\sqrt{-p_0})$ est un corps quadratique imaginaire déployé dans Σ où $p_0 \notin \Sigma$ est un nombre premier différent de p à définir après.

Cas totalement réel D'abord on considère le cas où F est totalement réel. On choisit $p_0 \notin \Sigma$ une place non ramifiée de π tel que $E = \mathbb{Q}(\sqrt{-p_0})$ est un corps quadratique imaginaire déployé en tous les places dans Σ. Comme on a supposé que $2 \in \Sigma$, la seule place ramifiée de E est p_0.

On considère Π le changement de base de π par rapport à EF/F. On va montrer que Π est cuspidale, auto-duale et cohomologique.

Pour la propriété de cuspidalité, il suffit d'avoir $\pi \ncong \pi \otimes \eta$ par le théorème 2.5 où η est le caractère d'Artin de $\mathbb{A}_F^\times$ par rapport à EF/F. C'est vrai car π est non ramifiée en p_0 mais $\pi \otimes \eta$ est ramifiée en p_0. On en obtient que Π est cuspidale.

La propriété d'auto-dualité est facile à vérifier. On sait que $\Pi \cong \Pi^c$ puisque Π est dans l'image du changement de base. De plus, $\pi \cong \widetilde{\pi}$, donc $\Pi \cong \widetilde{\Pi}$. On a alors $\Pi \cong \widetilde{\Pi}^c$ comme on veut.

Il reste de vérifier la propriété cohomologique. On rappelle que π, une représentation cuspidale de $G(\mathbb{A}_F)$, est cohomologique s'il existe W, une représentation algébrique de dimension finie de $G_\infty := G(F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})$, telle que $H^*(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty; \pi \otimes W)$ est non nul. Ici $\mathfrak{g}_\infty := Lie(G_\infty)$ et K_∞ est un sous-groupe ouvert compact maximal de G_∞. Dans notre cas, il est équivalent de dire que π_∞ est algébrique et que le caractère infinitésimal de π_∞ est égal à l'inverse de celui d'un $(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty)$-module de dimension finie. On va montrer que ces deux propriétés sont préservées par le changement de base.

Il est facile de voir que le fait d'être algébrique est préservé par la définition du changement de base de $\mathbb{C}/\mathbb{R}$.

De plus, soit v est une place inifinie de $\mathbb{F}$, par le théorème 2.3, le paramètre de Langlands de π_v est de la forme $(\chi_1, \overline{\chi_1}, \cdots, \chi_m, \overline{\chi_m})$ avec $\chi_i = z^{p_i}\overline{z}^{-p_i}$, $p_i \in \mathbb{Z} + \frac{n-1}{2}$. Donc son caractère infinitésimal est donné par $(p_1, -p_1, \cdots, p_m, -p_m)$.

Par la définition du changement de base, le changement de base de π_v est de paramètre de Langlands $(z^{p_1}\overline{z}^{-p_1}, z^{-p_1}\overline{z}^{p_1}, \cdots, z^{p_m}\overline{z}^{-p_m}, z^{-p_m}\overline{z}^{-p_m})$. Son caractère infinitésimal est donné par $(p_1, -p_1, \cdots, p_m, -p_m; -p_1, p_1 \cdots, -p_m, p_m)$.

Donc, si W est un $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$-module de dimension finie avec pour caractère infinitésimal l'inverse de celui de π_v, alors $(W, \widetilde{W})$ est un $\mathfrak{g}l_n(\mathbb{C}) \times \mathfrak{g}l_n(\mathbb{C})$-module de dimension finie avec pour caractère infinitésimal l'inverse de celui du changement de base de π_v.

On en déduit que le fait d'être cohomologique est préservé par changement de base. Par conséquent, Π est cohomologique.

On a vu dans la section 2.3 que dire que π est tempérée en toutes les places divisent p est équivalent à dire que Π est tempérée en toutes les places divisent p. Donc on peut restreindre notre problème au cas $F = F^+E$ où F^+ est un corps totalement réel non ramifié hors de $\Sigma - \{p\}$ et $E = \mathbb{Q}(\sqrt{-p_0})$ est un corps quadratique imaginaire déployé en toutes les places dans Σ, non ramifié hors de p_0.

Remarque L'argument ci-dessus pour la propriété cohomologique est aussi valable pour les représentations cohomologiques générales (pas forcément cuspidales ou avec la condition n pair).

Cas CM Soit F un corps CM. On pose $E = \mathbb{Q}(\sqrt{-p_0})$ avec $p_0 \notin T$ un corps quadratique imaginaire linéairement disjoint de F tel que E soit déployé en toutes les places dans Σ. On sait que FE est encore un corps CM. De plus, on a $FE = F^+E$ où F^+ est le sous-corps totalement réel maximal de FE. Par la construction, on voit que F^+ est non ramifié hors de $\Sigma - \{p\}$ et E est déployé dans Σ, non ramifié hors de $\{p_0\}$.

On considère Π le changement de base de π par rapport à FE/F. Par le même argument que ci-dessus, on a Π est cuspidale, auto-duale et cohomologique. On se ramène au cas F^+E comme on veut.

Dans la suite on suppose que $F = F^+E$ et $S = \Sigma \cup \{p_0\}$. En composant F^+ avec un corps quadratique réel déployé en tous les places dans S et ramifié en une place non ramifiée auxiliaire de π, on peut supposer que $d = [F^+ : \mathbb{Q}]$ est pair. On peut supposer aussi (on rappelle que $p \in \Sigma$, $p_0 \notin \Sigma$ et $S = \Sigma \cup \{p_0\}$) :

- π est non ramifié hors de $S - \{p, p_0\}$;
- E est non ramifié hors p_0, déployé dans $S - \{p_0\}$;
- F^+ est non ramifié hors de $S - \{p, p_0\}$, donc F est non ramifié hors de $S - \{p\}$.

En particulier, on a π et F sont non ramifiés hors de $S - \{p\}$.

3.2 Construction du groupe unitaire similitude

On fixe $\sigma_0 : F^+ \hookrightarrow \mathbb{R}$ une place infinie de F^+.

Lemme 3.1. *Il existe un groupe unitaire G_0 sur F^+ tel que :*

1. *G_0 est non ramifié en toutes les places finies ;*

2. $G_0(F^+_{\sigma_0}) \cong U(2, n-2)$;

3. $G_0(F^+_{\sigma_0}) \cong U(0, n)$.

Ici, $U(p,q)$ *est le groupe unitaire* $\{g \in GL_n(\mathbb{C}) | g \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} \overline{g}^t = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}\}$.

Démonstration On suit la stratégie de Harris-Taylor dans [10]. On pose $V = F^n$ et $\beta_0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & (-1)^{i+1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. Pour tout $x \in GL(V)$, on pose $x' = \beta_0 \overline{x}^t \beta_0^{-1}$ et $(\ ,\ )_x : V \times V \to \mathbb{C}$ qui envoie (v_1, v_2) vers $\overline{v_1^t} x v_2$. On va trouver $\alpha \in GL(V)$ tel que $\alpha' = \alpha$ et le groupe unitaire par rapport à $(\ ,\ )_{\alpha\beta_0}$ vérifie les conditions 1, 2 et 3. En effet, par le même argument que dans le lemme $I.7.1$ de [10], un tel α définit une classe dans $H^1(F^+, G')$ où G' est le groupe dérivé du groupe unitaire par rapport à $(\ ,\ )_{\beta_0}$. Les conditions locales définissent des classes dans $H^1(F^+_v, G')$.

Le lemme 2.1 de [3], on a une suite exacte :

$$H^1(F^+, G') \to \bigotimes_v H^1(F^+_v, G') \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

De plus, le lemme 2.2 de[3] nous donne que l'invariant de $U(2, n-2)$ est $m-2 \pmod 2$ donc $m \pmod 2$; l'invariant de $U(n, 0)$ est $m \pmod 2$. Alors l'invariant total des conditions 1, 2 et 3 est $dm \pmod 2$. C'est nul puisque $2|d$. Ainsi on peut trouver un élément α globalement comme on veut.

$\square$

Dans la suite, on note $(\ ,\ ) = (\ ,\ )_{\alpha\beta_0}$ sur $V \times V$ et G_0 le groupe unitaire par rapport à $(\ ,\ )$ qui vérifie les condition ci-dessus. On pose $G = Res_{\mathbb{F}^+/\mathbb{Q}}(G_0)$ et GU le groupe de similitude de G_0, i.e. pour une $\mathbb{Q}$-algèbre $\mathbb{R}$,

$$GU(R) = \{g \in GL(V \otimes_{\mathbb{Q}} R) | (gv, gw) = \lambda(g)(v, w), \lambda(g) \in R^*\}.$$

On a alors une suite exacte :$1 \to G \to GU \to \mathbb{G}_m \to 1$.

Cette suite est scindée sur E. En effet, par la descente de Galois, il suffit de définir θ, un automorphisme de Galois, sur $G_E \times \mathbb{G}_{m,E}$ tel que de $(G_E \times \mathbb{G}_{m,E})^\theta \simeq GU_{\mathbb{Q}}$. Graçe au lemme de Yoneda, il suffit de définir un système compatible des automorphismes de Galois $\theta \in Aut(G_E(R \otimes_{\mathbb{Q}} E) \times \mathbb{G}_{m,E}(R \otimes_{\mathbb{Q}} E))$ et un système compatible des isomorphismes $(G_E(R \otimes_{\mathbb{Q}} E) \times \mathbb{G}_{m,E}(R \otimes_{\mathbb{Q}} E))^\theta \simeq GU_{\mathbb{Q}}(R)$ pour tout $\mathbb{Q}$-algèbre R.

On voit que $G_E(R \otimes_{\mathbb{Q}} E) = G_0(F_0 \otimes_{\mathbb{Q}} E \otimes_{\mathbb{Q}} R) \cong GL(V \otimes_{\mathbb{Q}} R)$ et $\mathbb{G}_{m,E}(R) = (E \otimes_{\mathbb{Q}} R)^\times$. On définit $\theta : GL(V \otimes_{\mathbb{Q}} R) \times (E \otimes_{\mathbb{Q}} R)^\times \to GL(V \otimes_{\mathbb{Q}} R) \times (E \otimes_{\mathbb{Q}} R)^\times$ en envoyant (g, λ) vers $((g^*)^{-1}\overline{\lambda}, \overline{\lambda})$ où g^* est l'adjoint de g par rapport à $(\ ,\ )$ et $\overline{\lambda}$ est la conjugaison complexe de λ. L'ensemble des points fixes est $\{g \in GL(V \otimes_{\mathbb{Q}} R) | gg^* = \lambda \in R^\times\}$ qui sont exactement $GU_{\mathbb{Q}}(R)$. On en ebtient que $G_E \otimes \mathbb{G}_{m,E} \simeq GU_E$.

En particulier, on a $GU(E) \cong G(E) \times \mathbb{G}_m(E)$ et $GU(\mathbb{A}_E) \cong G(\mathbb{A}_E) \times \mathbb{G}_m(\mathbb{A}_E) \cong GL_n(\mathbb{A}_E) \times \mathbb{A}_E^\times$.

Alors pour tout caractère χ de $\mathbb{A}_E^\times$, $\pi \otimes \chi$ est une représentation de $GU(\mathbb{A}_E)$. Comme on veut appliquer la formule des traces tordue qui ne concerne que les représentations θ-stables plus tard, il faut trouver un caractère χ tel que $\pi \otimes \chi$ est stable par θ.

Lemme 3.2. *Il existe χ, un caractère de Hecke algébrique de $\mathbb{A}_E^\times$, tel que $\pi \otimes \chi$ soit stable par θ.*

On rappelle qu'un caractère de Hecke de $\mathbb{A}_E^\times$ est un caractère de $\mathbb{A}_E^\times$ qui factorise à travers $E^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times$. On dit qu'il est algébrique si $\chi_\infty : E_\infty^\times \hookrightarrow \mathbb{A}_E^\times \to \mathbb{C}^\times$ est de la forme $z^p \overline{z}^q$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$ comme dans la section 2.2.

Démonstration On sait que pour tout $g \in G(\mathbb{A}_E)$ et $z \in \mathbb{A}_E^\times$,

$$\begin{aligned}
(\pi \otimes \chi) \circ \theta(g, z) &= \pi((g^*)^{-1}\overline{z}) \otimes \chi(\overline{z}) \\
&= \pi((g^*)^{-1}) \otimes \omega_\pi(\overline{z})\chi(\overline{z}) \\
&= \tilde{\pi}^c(g) \otimes \omega_\pi(\overline{z})\chi(\overline{z}) \\
&\cong \pi(g) \otimes \omega_\pi(\overline{z})\chi(\overline{z})
\end{aligned}$$

où $\overline{z}$ est la conjugaison complexe dans $\mathbb{A}_E^\times$, ω_π est le caractère central de π.

Pour $\pi \otimes \chi$ soit stable par θ, il suffit de trouver χ tel que $\omega_\pi(\overline{z}) = \dfrac{\chi(z)}{\chi(\overline{z})} = \chi(\dfrac{z}{\overline{z}})$ pour tout $z \in \mathbb{A}_E^\times$. On note U le tore de dimension 1 défini sur $\mathbb{Q}$ tel que $U(\mathbb{Q}) = \ker\ (N : E^\times \to \mathbb{Q}^\times)$ où N signifie la norme.

Alors $U(\mathbb{A}) = \ker\ (N : \mathbb{A}_E^\times \to \mathbb{A}^\times) = \{\dfrac{\overline{z}}{z} | z \in \mathbb{A}_E^\times\}$. La dernière égalité se déduit du théorème de Hilbert 90. Maintenant il suffit de définir un caractère algébrique χ sur $U(\mathbb{A})$ tel que $\omega_\pi(z) = \chi(\dfrac{\overline{z}}{z})$ pour tout $z \in \mathbb{A}_E^\times$.

De même par Hilbert 90, on a une suite exacte :

$$1 \to \mathbb{Q}^\times \backslash \mathbb{A}^\times \to E^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times \to U(\mathbb{Q}) \backslash U(\mathbb{A}) \to 1$$

où la flèche $E^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times \to U(\mathbb{Q}) \backslash U(\mathbb{A})$ envoie z vers $\dfrac{\overline{z}}{z}$.

On a alors un isomorphisme $\phi : E^\times \mathbb{A}^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times \to U(\mathbb{Q}) \backslash U(\mathbb{A})$. Si ω_π est trivial sur $E^\times \mathbb{A}^\times$, on a alors que $\chi := \omega_\pi \circ \phi^{-1}$ satisfait l'équation voulue. On va montrer tout de suite que ω_π est vraiment trivial sur $E^\times \mathbb{A}^\times$.

En effet, il est automatiquement trivial sur $E^\times$. De plus, il est auto-dual, donc $\omega_\pi(z^{-1}) = \omega(\overline{z})$ pour tout $z \in \mathbb{A}_E^\times$. C'est à dire que $\omega_\pi(z\overline{z}) = 1$, ω_π est trivial sur $N_{E/\mathbb{Q}}(\mathbb{A}_E^\times)$. Donc il est trivial sur $\mathbb{Q}^\times N_{E/\mathbb{Q}}(\mathbb{A}_E^\times)$. Par la théorie de corps de classes globales, on sait que $\mathbb{Q}^\times N_{E/\mathbb{Q}}(\mathbb{A}_E^\times)\backslash\mathbb{A}^\times \cong \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On pose $t = (t_p)_{p\leq\infty} \in \mathbb{A}$ avec $t_p = 1$ pour tout $p < \infty$ et $t_\infty = -1$. Alors $t \notin \mathbb{Q}^\times N_{E/\mathbb{Q}}(\mathbb{A}_E^\times)$. On a $\mathbb{A}^\times = \mathbb{Q}^\times N_{E/\mathbb{Q}}(\mathbb{A}_E^\times) \sqcup t\mathbb{Q}^\times N_{E/\mathbb{Q}}(\mathbb{A}_E^\times)$. Donc il reste à montrer que $\omega_\pi(t) = 1$.

Soit $\tau : F \hookrightarrow \mathbb{C}$ une place infinie de F. Comme π est cohomologique et auto-duale, son paramètre de Langlands est de la forme $((\frac{z}{\overline{z}})^{P_1}, (\frac{z}{\overline{z}})^{P_2}, \cdots, (\frac{z}{\overline{z}})^{P_n})$ avec $P_i \in \mathbb{Z} + \dfrac{n-1}{2}$. Donc $\omega_{\pi,\tau}(z) = (\frac{z}{\overline{z}})^{P_\tau}$ avec $P_\tau = \sum_{i=1}^n P_i \in \mathbb{Z}$.

Comme $E \hookrightarrow GL_n(\mathbb{A}_F)$ diagonalement, on sait que $\omega_\pi(z) = (\frac{z}{\overline{z}})^P$ avec $P \in \mathbb{Z}$ pour $z \in E_\infty^\times$. En particulier, $\omega_\pi(t) = 1$ comme voulu.

On obtient ainsi un caractère de Hecke χ de $\mathbb{A}_E^\times$ tel que $\omega_\pi(z) = \chi(\frac{\overline{z}}{z})$. La dernière étape est de modifier χ pour être algébrique. Notons que l'équation précédente ne changera pas si on tord χ par $|\cdot|^s$ pour tout $s \in \mathbb{C}$. Comme on l'a vu dans la section 2.2, $\chi_\infty(z) = z^p\overline{z}^q$ avec $p, q \in \mathbb{C}$ et $p - q \in \mathbb{Z}$. Donc $\chi(\frac{\overline{z}}{z}) = (\frac{z}{\overline{z}})^{q-p}$. Donc $P = q - p$. On distingue deux cas.

1. Si P est pair. On tord χ par $|\cdot|^{-(p+q)} = (z\overline{z})^{-(p+q)/2}$. Et on obtient un caractère $(\frac{z}{\overline{z}})^{(p-q)/2}$ qui est algébrique et unitaire.
2. Si P est impair. On tord χ par $|\cdot|^{-(p+q-1)} = (z\overline{z})^{-(p+q-1)/2}$. Et on obtient un caractère $z^{(p-q+1)/2}\overline{z}^{(q-p+1)/2}$ qui est algébrique mais pas unitaire.

□

Remarque Comme les places finies ramifiées de ω_π sont dans $S - \{p\}$, on peut supposer aussi que les places finies ramifiées de χ sont dans $S - \{p\}$.

Dans la suite, on note $\Pi = \pi \otimes \chi$ la représentation θ-stable de $GU(\mathbb{A})$. De plus, on suppose que tout les places finies ramifiées de Π sont dans $S - \{p\}$.

3.3 Construction de la variété de Shimura

Soient $G = GU$, V et $(\ ,\ )$ comme dans la section précédente. On définit $h : \mathbb{S}(\mathbb{R}) \to GU(\mathbb{R})$ comme suit. Notons que $GU(\mathbb{R})$ est le sous-groupe de $\prod_\sigma GU(p_\sigma, q_\sigma)$ défini par la même similitude où σ décrit les places infinis de F. On rappelle que $(p_{\sigma_0}, q_{\sigma_0}) = (2, n-2)$ et $(p_\sigma, q_\sigma) = (0, n)$ pour les autre $\sigma \neq \sigma_0$.

On définit $h(z)_{\sigma_0} = \begin{pmatrix} zI_2 & 0 \\ 0 & \overline{z}I_{n-2} \end{pmatrix}$ et $h(z)_\sigma = \overline{z}I_n$.

Il est facile de voir que h satisfait les conditions de la proposition 1.1 du premier chapitre. On pose X la classe de $GU(\mathbb{R})$-conjugaison de h. Alors (GU, X) est une donnée de Shimura.

On considère d'abord la représentation de $\widehat{G}$ associée à h. On sait que $GU(\mathbb{C}) \cong GL_n(\mathbb{C})^{d-1} \times GL_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times$ et $\widehat{GU} \cong GL_n(\mathbb{C})^{d-1} \times GL_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times$.

On a

$$h_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times \to GL_n(\mathbb{C})^{d-1} \times GL_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times$$
$$(z, \overline{z}) \mapsto ((\overline{z}I_n)^{d-1}, \begin{pmatrix} zI_2 & 0 \\ 0 & \overline{z}I_{n-2} \end{pmatrix}, z\overline{z})$$

Donc $\mu : \mathbb{C}^\times \to GL_n(\mathbb{C})^{d-1} \times GL_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times$ envoie z vers $((I_n)^{d-1}, \begin{pmatrix} zI_2 & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}, z)$. On a alors

$$\widehat{\mu} : T(\widehat{GU}) \cong T_n^{d-1} \times T_n \times T_1 \to \mathbb{C}^\times$$
$$(X, (t_1, t_2, \cdots, t_n), w) \mapsto t_1 t_2 w$$

où T_n dénote le tore des matrices diagonales dans $GL_n(\mathbb{C})$. La représentation qui lui est associée est donc $R_h = \Lambda^2(M_n(\mathbb{C})) \times \mathbb{C}$. L'action de $GL_n(\mathbb{C})^{d-1} \times GL_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times$ est donnée par l'action triviale de la première composante, l'action régulière de la deuxième sur $\Lambda^2(M_n(\mathbb{C}))$ et l'action régulière de la dernière sur $\mathbb{C}$.

L'exemple 12.4(c) de [18] montre de plus que le corps réflexe de h est F.

Pour K sous-groupe ouvert assez petit de $GU(\mathbb{A}_f)$, on va construire un système local de $S_K := S_K(GU, h)$. Comme on a vu dans la section 1.3, il suffit de construire une représentation de dimension finie de $GU(\mathbb{R})$.

En effet, Π définit un caractère infinitésimal de $GU(\mathbb{C})$. Comme elle est θ-stable, elle définit un caractère infinitésimal de $GU(\mathbb{R})$. De plus, $\Pi = \pi \otimes \chi$ avec π cohomologique, donc ce caractère infinitésimal est associé à une représentation de dimension finie de $GU(\mathbb{R})$. On note L sa représentation duale qui est aussi une représentation de dimension finie. Enfin note $\mathcal{L}$ le système local de S_K attaché à la représentation L. Ce système local est défini sur F.

Notons que Π contribue à la cohomologie étale de S_K avec coefficients dans $\mathcal{L}$. On va étudier cette cohomologie plus tard.

On fixe maintenant notre niveau K. Comme dans l'exemple 1.2, on sait que GU est non ramifié hors de $S - \{p\}$.

- En la place p, comme GU est non ramifié, on peut construire K_p, un sous-groupe ouvert compact hyperspécial maximal de $GU(\mathbb{Q}_p)$, comme dans l'exemple 1.2. Plus précisément, on peut fixer $\Lambda = \mathcal{O}_p^n$ dans l'exemple 1.2. En conséquence, pour tout K^p sous-groupe ouvert compact de $GU(\mathbb{A}^p) = \prod_{q \neq p} GU(\mathbb{Q}_q)$ assez petit, la variété de Shimura $Sh_{K^pK_p}$ a bonne réduction en p. On peut

définir de même K'_q un sous-groupe ouvert compact hyperspécial maximal de $GU(E_p)$.
- En place $q \notin S$, GU est aussi non ramifié. On peut prendre K_q (resp. K'_q) un sous-groupe ouvert compact hyperspécial maximal de $GU(\mathbb{Q}_q)$ (resp. $GU(E_p)$) comme le cas ci-dessus.
- En place $q \in S$, $q \neq p$, $q \neq p_0$, on sait E est déployé. Donc $GU(E_q) = GU(\mathbb{Q}_q) \otimes GU(\mathbb{Q}_q)$. On pose K_q un sous-groupe ouvert compact de $GU(\mathbb{Q}_q)$ assez petit tel que $\Pi_q^{K_q \otimes K_q}$ est non nul. On pose $K'_q = K_q \otimes K_q$ un sous-groupe ouvert compact de $GU(E_q)$.
- En place $q = p_0$, on va trouver K_{p_0} (resp. K'_{p_0}) un sous-groupe ouvert compacte de $GU(\mathbb{Q}_{p_0})$ (resp. $GU(E_{p_0})$) satisfait des conditions à préciser à la fin de la section 4.3.

Dans tout cas, on a Π_q a un vecteur fixé par K'_q. A la fin, on pose $K = \prod_q K_q$ un sous-groupe ouvert compact de $GU(\mathbb{A}_f)$.

4 Changement de base et transfert endoscopique

La majeure partie de ce chapitre est extraite de [9] et [17].

4.1 La correspondance de Langlands

Dans les sections 2.1 et 2.2, on a introduit la correspondance entre certaines représentations de $GL_n(l)$ et certaines représentations de dimension n de W_l. De plus, on a défini le changement de base pour les représentations non ramifiées de GL_n dans la section 2.3. Il est facile de voir que le changement de base définit une application naturelle du côté des représentations de W_l. Par exemple, dans le cas $\mathbb{C}/\mathbb{R}$, le changement de base des représentations du groupe de Weil est juste la restriction de $W_\mathbb{R}$ à $W_\mathbb{C}$.

La correspondance de Langlands est beaucoup plus énorme et profonde. On va introduire un peu sur l'idée générale dans cette section.

L-groupe et L-morphisme Soient F un corps de nombres ou un corps local et G un groupe réductif connexe quasi-déployé sur F. On pose $\Gamma = Gal(\overline{F}/F)$ si F est un corps de nombres et $\Gamma = W_F$ si F est local.

On fixe une paire (B, T) où T est un tore maximal de G et B est un sous-groupe de Borel de G contenant T. On associe à (B, T) un système de racines basé $\Phi(G) = (X^*, \Delta, X_*, \Delta^\vee)$ où X^* est le groupe de caractères rationnels de T, X_* est le cocaractère de T, Δ est une base de racines associées à (B, T) et $\Delta^\vee$ est la base duale de Δ. On définit $\widehat{G}$ le groupe dual de G comme le groupe réductif complexe défini par la donnée de racines $(X_*, \Delta^\vee, X^*, \Delta)$.

On définit un épinglage de G par $(B, T, \{X_\alpha\}_{\alpha\in\Delta})$ où X_α est un vecteur non nul dans l'espace de racines α. Une L-action de G est une action qui préserve un certain épinglage. Un L-groupe de G est un groupe $G \rtimes \Gamma$ où l'action de Γ sur G est une L-action.

On fixe un L-groupe de la façon suivante :

Soit L une extension finie de F telle que G est déployé sur L. On fixe T un tore maximal de G défini sur L. Alors $Gal(L/K)$ agit sur $\widehat{G}$ et préserve un épinglage par rapport à (B, T). Dans tous les cas (F local ou global), il y a une projection canonique $\Gamma \to Gal(L/K)$. On définit l'action de Γ sur $\widehat{G}$ en relevant l'action de $Gal(L/K)$. Il est facile de voir que cette action ne dépend pas du choix du corps L. Et on pose ${}^LG := \widehat{G} \rtimes \Gamma$ dans la suite.

Plus généralement, pour un groupe non déployé, on définit son L-groupe par le L-groupe de son forme intérieure qui est quasi déployé.

Un paramètre de Langlands est un L-morphisme $\mathcal{L}_F \to {}^LG$ où $\mathcal{L}_F$ est le groupe de Langlands qu'on ne précise pas ici (on peut prendre $\mathcal{L}_F = W_F$ pour le cas local non archimédien non ramifié ou archimédien comme dans les sections 2.1 et 2.2). On va définir la notion de L-morphisme dans un instant.

Les correspondances de Langlands sont des correspondances entre certaines L-paquets des représentations de G et certains L-paramètres de ${}^LG$ comme on l'a vu dans le chapitre 2.

Définition 4.1. *Soit $\xi : {}^LG \to {}^LG'$ un morphisme de groupes. On dit que c'est un L-morphisme si ξ est continu, $\xi|_{\widehat{G}}$ est analytique et ξ est compatible avec la projection de G et G' vers Γ, i.e. le diagramme ci-dessous commute.*

$$
\begin{tikzcd}
{}^LG \arrow[r, "\xi"] \arrow[d] & {}^LG' \arrow[dl] \\
\Gamma &
\end{tikzcd}
$$

Un L-morphisme ${}^LG \to {}^LG'$ donne naturellement une application des paramètres de Langlands de G vers ceux de G'. Donc on peut associer un L-paquets des représentations de G' à un L-paquet de représentations de G.

Dualement, un problème naturel est de construire une application des fonctions de G' vers celles de G.

Le programme de Langlands contient aussi la compatibilité des L-fonctions.

Exemple 4.1. ***Transfert : cas non ramifié***

Soit l un corps local non archimédien. $G = G(l)$ un groupe réductif connexe non ramifié sur l et $K = G(\mathcal{O}_l)$. On rappelle qu'un groupe est non ramifié sur l s'il est quasi-déployé sur l et déployé sur une extension non ramifiée de l. De plus, il existe K, un sous-groupe ouvert compact hyperspécial de G, si et seulement si G est non ramifié sur l. On prend K un sous-groupe ouvert compact hyperspécial maximal de G.

Soit T un tore maximal de G. Comme dans la section 2.1 pour $G = GL_n$, on a un isomorphisme d'algèbres $\mathcal{H}(G, K) \cong \mathbb{C}[X_{*,l}(T)]^W$ où W est le groupe de Weyl *de G et $X_{*,l}(T)$ est le groupe des cocaractères de T définis sur l. Ce résultat encore valide pour G quelconque.*

Maintenant soit G' un autre groupe réductif connexe non ramifié sur l. Si on a un L-morphisme : $\xi : {}^LG \to {}^LG'$. On prend T' un tore maximal de G' tel que $\widehat{T}'$ contient $\xi(\widehat{T})$. Alors le L-morphisme donne une application $X_{*,l}(T') \to X_{*,l}(T)$ et donc $X_{*,l}(T)^{W'} \to X_{*,l}(T)^{W}$ où W' est le groupe de Weyl de G'.

On suppose de plus que K' est un sous-groupe ouvert compact hyperspécial maximal de G'. On en déduit un morphisme d'algèbres $\mathcal{H}(G', K') \to \mathcal{H}(G, K)$, noté ξ_l^*.

Dualement, il donne une application des représentations non ramifiées de G vers celles de G'.

On introduit deux types de L-morphismes :

1. **Changement de base cyclique**
   Soient G un groupe réductif connexe quasi-déployé sur F et E/F une extension cyclique. Posons $G' = Res_{E/F}G$. Alors on peut identifier $\widehat{G'}$ avec l'ensemble des fonctions $g : Gal(\overline{F}/F) \to \widehat{G}$ tel que $g(\sigma\tau) = \sigma(g(\tau))$ pour tout $\sigma \in Gal(\overline{E}/E)$ et $\tau \in Gal(\overline{F}/F)$ avec l'action de $Gal(\overline{F}/F)$ par $(\tau g)(\tau') = g(\tau'\tau)$.
   Alors le morphisme
   $$BC : {}^LG \to {}^LG'$$
   $$h \mapsto (\tau \mapsto \tau h)$$
   est un L-morphisme.
2. **Groupe endoscopique** Soient G et F comme ci-dessus.
   Définition 4.2. *Une* ***donnée endoscopique*** *est un triplet (H, s, ξ) où*
   – *H est un groupe réductif connexe quasi-déployé sur F,*
   – *s est un élément d'ordre 2 dans $\widehat{G}$,*
   – *$\xi : {}^LH \to {}^LG$ est un L-morphisme tel que $\xi({}^LH)$ est le centralisateur de s,*
   tels que :
   (a) *ξ est Γ-équivariante à $\widehat{G}$-conjugaison près ;*
   (b) *L'image de s dans $Z(\widehat{H})/Z(\widehat{G})$ est invariante par Γ et son image dans $H^1(F, Z(\widehat{G}))$ via le connecteur $(Z(\widehat{H})/Z(\widehat{G}))^{\Gamma} \to H^1(F, Z(\widehat{G}))$ est localement triviale partout.*

   On dit que H est un groupe endoscopique de G.

Exemple 4.2. *(Notre cas) On considère $G = GU$ construit dans la section 3.2. On pose $GU' = Res_{E/\mathbb{Q}}GU$. On fixe un plongement $i : E \to \mathbb{C}$ et on pose $\Phi^+ = \{\sigma : \mathbb{F} \to \mathbb{C} : \sigma|_E = i\}$ et $\Phi^- = Hom\{F, \mathbb{C}\} - \Phi^+$. Alors $\widehat{GU} = \prod_{\sigma\in\Phi^+} GL_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times$*

et ${}^L GU = \widehat{GU} \rtimes W_{\mathbb{Q}}$ *où l'action de* $W_{\mathbb{Q}}$ *sur* $\widehat{GU}$ *est défini comme : si* $w \in W_E$, *on pose* $w((g_\sigma)_\sigma, \lambda)w^{-1} = ((g_{w^{-1}\sigma})_\sigma, \lambda)$ *; si* $w \notin W_E$, *on pose* $w((g_\sigma)_\sigma, \lambda)w^{-1} = ((\beta_0^t \overline{g}_{w^{-1}\sigma} \beta_0^{-1})_\sigma, \lambda \prod_\sigma (det g_\sigma))$.

On note $GU' = Res_{E/\mathbb{Q}} GU$. *Alors* $\widehat{GU'} = \prod_{\sigma \in \Phi^+} GL_n(\mathbb{C}) \times \prod_{\sigma \in \Phi^-} GL_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$. *On a*

$$BC : {}^L GU \to {}^L GU'$$

$$((g_\sigma)_\sigma, \lambda, w) \to ((g_\sigma)_\sigma, (g_\sigma)_{\overline{\sigma}}, \lambda, \lambda, w)$$

On note $\mathcal{E}$ *l'ensemble des données endoscopiques de* GU. *Comme dans [20], P.*21, *on sait que* $\mathcal{E}$ *contient :*

(1) (GU^*, s_n, ξ_n) *où* GU^* *est une forme intérieure de* GU *quasi-déployée sur* F, $s_n = I$ *et* $\xi_n = Id$ *;*

(2) $(GU_{n_1,n_2}, s_{n_1,n_2}, \xi_{n_1,n_2})$ *où* $GU_{n_1,n_2} = GU^* \cap GL_{n_1,n_2}$, $s_{n_1,n_2} = ((\begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & -I_{n_2} \end{pmatrix})_\sigma, 1)$.

Ici, n_1 *et* n_2 *sont deux entiers positifs tels que* $n_1 + n_2 = n$ *et* $GL_{n_1,n_2} = \{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} | A \in GL_{n_1}, B \in GL_{n_2}\}$. *Alors*

$\widehat{GU_{n_1,n_2}} = \prod_{\sigma \in \Phi^+} (GL_{n_1}(\mathbb{C}) \times GL_{n_2}(\mathbb{C})) \times \mathbb{C}^\times$ *et l'action de* $W_{\mathbb{Q}}$ *sur* $\widehat{GU_{n_1,n_2}}$ *est identique comme celle de* $\widehat{GU}$. *Comme d'habitude, on note* $\eta_{E/\mathbb{Q}}$ *le caractère d'Artin par rapport à* $E/\mathbb{Q}$. *On étend* $\eta_{EQ}^{n_1}$ *(resp.* $\eta_{EQ}^{n_2}$*) à* μ_{n_1} *(resp.* μ_{n_2}*) un caractère de Hecke de* $\mathbb{A}_E^\times$. *Et on définit* $\xi_{n_1,n_2} : {}^L GU_{n_1;n_2} \to {}^L GU$ *par :*

$$\xi_{n_1,n_2}((g_1, g_2)_\sigma, \lambda) = (\begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}_\sigma, \lambda)$$

pour tout $(g_1, g_2)_\sigma \in \prod_{\sigma \in \Phi^+} (GL_{n_1}(\mathbb{C}) \times GL_{n_2}(\mathbb{C}))$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ *;*

$$\xi_{n_1,n_2}(w) = \begin{pmatrix} \mu_{n_2} I_{n_1} & 0 \\ 0 & \mu_{n_1} I_{n_2} \end{pmatrix} \times w \text{ pour tout } w \in W_E;$$

$$\xi_{n_1,n_2}(w) = \begin{pmatrix} \beta_0(n_1) & 0 \\ 0 & \beta_0(n_2) \end{pmatrix} \times w \text{ pour tout } w \in W_{\mathbb{Q}} - W_E.$$

$$\text{Ici } \beta_0(m) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & -1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (-1)^{m+1} & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in GL_m \text{ pour tout } m \in \mathbb{N}.$$

Dans la suite, on note aussi $\mathcal{E} = \{GU^*, GU_{n_1,n_2}\}$ *l'ensemble des groupes endoscopiques de* GU. *Pour* $H \in \mathcal{E}$, *on note* s_H *la deuxième donnée dans la donnée endoscopique de* H.

Pour tout $H \in \mathcal{E}$, *on pose* $H' = Res_{E/\mathbb{Q}}(H)$. *Comme dans [20], on peut étendre le L-morphisme* ξ_n *(resp.* ξ_{n_1,n_2}*) à* $\xi'_n : {}^L GU^{*\prime} \to {}^L GU'$ *(resp.* $\xi'_{n_1,n_2} : {}^L GU'_{n_1,n_2} \to {}^L GU'$*) de telle sorte que le diagramme ci-dessous commute pour tout* $H \in \mathcal{E}$ *:*

$$\begin{tikzcd} {}^L H \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "BC"] & {}^L GU \arrow[d, "BC"] \\ {}^L H' \arrow[r, "\xi'"] & {}^L GU' \end{tikzcd}$$

4.2 Notions d'intégrale orbitale

Dans cette section, soient F un corps de nombres et G un groupe réductif quasi-déployé sur F. Pour T un tore maximal de G, on définit $R(G,T)$ l'ensemble des racines de G par rapport à T. Pour tout $\gamma \in G$, on définit $G_\gamma := \{g \in G | g\gamma g^{-1} = \gamma\}$ le centralisateur de γ.

Définition 4.3. *Soit $\gamma \in T$ un élément semi-simple.*

1. *On dit que γ est* ***elliptique*** *si la composante déployée de $Z(G_\gamma)$ est le même de celui de $Z(G)$.*
2. *On dit que γ est* ***régulier*** *si pour tout $\alpha \in R(G,T)$, $\alpha(\gamma) \neq 1$.*

Soit H un groupe endoscopique de G. Soient γ_H un élément semi-simple de H et T_H un tore maximal de H contenant γ_H. On sait qu'il existe un prolongement canonique à G-conjugaison près $j : T_H \to G$. On note $\gamma = j(\gamma_H)$ et $T = j(T_H)$. On écrit $\gamma \sim \gamma_H$ et on dit que γ est associé à γ_H.

On identifie T et T_H et on obtient que $R(H, T_H) \subset R(G,T)$.

Définition 4.4. *On dit que γ_H est (G,H)-**régulier** si pour tout $\alpha \in R(G,T) - R(H,T_H)$, $\alpha(\gamma) \neq 1$.*

Notons que cette définition ne dépend pas du choix de j.

Maintenant on introduit les fonctions tests. On définit $C_c^\infty(G(\mathbb{A}_F))$ comme l'espace des fonctions C^∞ sur les places archimédiennes, localement constantes sur les places non archimédiennes et à support compact partout.

On pose $\mathcal{L}^2 = L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)/Z^0(G(\mathbb{A}_{F,f})))$ où Z^0 est la composante connexe de l'identité de Z et Z désigne le centre comme toujours. Alors l'espace des fonctions tests agit à droite sur $\mathcal{L}^2$.

Enfin, soient $v \in \mathcal{L}^2$ et $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}_F))$, on pose

$$(R(f)v)(h) := \int_{G(\mathbb{A}_F)} f(g)v(hg)dg.$$

De plus, on sait que $\mathcal{L}^2 = \mathcal{A}_{cont}(G) \oplus \mathcal{A}_{dis}(G)$ comme représentation de $G(\mathbb{A}_F)$. La partie $\mathcal{A}_{dis}(G)$ décompose comme $\bigoplus m_\pi \pi$ où π décrit l'ensemble des représentations irréductibles unitaires de $G(\mathbb{A}_F)$, $m_\pi \in \mathbb{N}$ non nul pour un ensemble dénombrable des représentations.

Il est facile de voir que cette décomposition est aussi une décomposition comme $C_c^\infty(G(\mathbb{A}_F))$-module. On note $\pi(f)$ l'action de f sur π.

On définit $T_{dis}(f) := trace(f|\mathcal{A}_{dis}(G))$. Alors $T_{dis}(f) = \sum m(\pi) trace(\pi(f))$.

De plus, si f et décomposable, i.e. $f = \prod f_v$, on a alors $trace(\pi(f)) = \prod trace(\pi_v(f_v))$.

Voici enfin quelques notations relatives à la notion d'intégrale orbitale. Soient $L = F$, F_v ou $\mathbb{A}_F$ et $f \in C_c^\infty(G(L))$, on pose

$$O_\gamma(f) = \int_{G_\gamma \backslash G(L)} f(x^{-1}\gamma x)dx.$$

Notons que $O_\bullet(f)$ est stable par $G(L)$-conjugaison, mais pas par $G(\overline{L})$-conjugaison. On veut définir une intégrale stable par $G(\overline{L})$-conjugaison.

Soit $\gamma, \gamma' \in G(L)$, on dit que γ' est conjugaison stable de γ s'il existe $\sigma \in Gal(\overline{L}/L)$ (si $L = \mathbb{A}_F$, $Gal(\overline{L}/L)$ signifie $Gal(\overline{F}/F)$) et $g \in G(\overline{F})$ tels que $g^{-1}\gamma g = \sigma(\gamma')$.

On pose $SO_\gamma(f) = \sum_{\gamma'} e(\gamma')O_{\gamma'}(f)$ où γ' parcourt la classe de conjugaison stable de γ modulo la classe de conjugaison de γ et $e(\gamma')$ est le signe de Kottwitz, qui ne nous concerne pas dans ce mémoire. On remarque que pour les classes régulières, le signe de Kottwitz est toujours 1. On sait que $SO_\bullet(f)$ est stable par $G(\overline{L})$-conjugaison.

On définit aussi la notion d'intégrale orbitale tordue de la façon suivante :

Si $\sigma : G(L) \to G(L)$ est un morphisme de groupe, on pose $G_{\gamma,\sigma} = \{g \in G(L) | g^{-1}\gamma g^\sigma = \gamma\}$. Et on définit l'intégrale orbitale tordue :

$$TO_{\gamma,\sigma}(f) = \int_{G_{\gamma,\sigma} \backslash G(L)} f(x^{-1}\gamma x^\sigma)dx.$$

Elle est stable par σ-conjugaison.

4.3 Transfert endoscopique et changement de base local

Dans cette section, on introduit les définitions du transfert endoscopique et changement de base et on établit quelques résultats. Enfin on finit la définition de K_{p_0}.

Le transfert endoscopique local Soient l un corps local et G un groupe réductif connexe quasi-déployé sur l. On choisit $f \in C_c^\infty(G(l))$ une fonction test. Pour toute (H, s, ξ) donnée endoscopique de G, on dit que $f^H \in C_c^\infty(H(l))$ est un transfert endoscopique de f si

$$SO_\delta(f^H) = \sum_{\gamma'} \Delta(\delta, \gamma')O_{\gamma'}(f)$$

pour tout $\delta \in H(l)$ semi-simple. On a choisi $\gamma \in G(l)$ tel que $\gamma \sim \delta$ et la somme est porte sur les conjugués stables de γ modulo les conjugués de γ. Ici le facteur de transfert $\Delta(\delta, \gamma')$ est une fonction à valeurs complexes pour couples de classes de conjugaisons d'éléments semi-simples. Ce transfert $\Delta(\delta, \gamma')$ s'annule sauf quand γ' est associé à δ. Il a aussi des propriétés formelles.

On sait que ce transfert existe mais n'est pas unique. Il est unique comme élément de l'espace dual des distributions stables de H.

On rappelle qu'on a déjà défini une notion de transfert dans le cas non ramifié. On va voir toute de suite que les deux définitions coïncident.

Proposition 4.1. *On suppose de plus que l est non archimédien et G, H sont non ramifiés sur l. Soit K (resp. K_H) un sous-groupe ouvert compact hyperspécial maximal de G (resp. H). On rappelle que $\xi_l^* : \mathcal{H}(G, K) \to \mathcal{H}(H, K_H)$ est le morphisme d'algèbres défini par la donnée endoscopique. Alors*

$$SO_\delta(\xi_l^*(f)) = \sum_{\gamma'} \Delta(\delta, \gamma') O_{\gamma'}(f)$$

pour toute fonction test $f \in \mathcal{H}(G, K)$. Par conséquent, $\xi_l^*(f)$ est un transfert endoscopique de f.

En particulier, comme $\mathbb{1}_K$ (resp. $\mathbb{1}_{K_H}$) est l'unité de $\mathcal{H}(G, K)$ (resp. $\mathcal{H}(H, K_H)$), on a $\mathbb{1}_{K_H}$ est l'image de $\mathbb{1}_K$ par $\xi_l^*(f)$, on a :

Lemme 4.1. ***Lemme fondamental***

Avec les même hypothèses que dans la proposition ci-dessus, on a

$$SO_\delta(\mathbb{1}_{K_H}) = \sum_{\gamma'} \Delta(\delta, \gamma') O_{\gamma'}(\mathbb{1}_K).$$

Ainsi $\mathbb{1}_{K_H}$ est un transfert endoscopique de $\mathbb{1}_K$.

Le changement de base local Soient l, G et f comme dans le paragraphe ci-dessus. On fixe k/l une extension quadratique. On note $G' = Res_{k/l}G$. Alors $Gal(k/l)$ agit sur $G'(l)$. On note σ l'élément non trivial de $Gal(k/l)$. On a vu qu'il existe un L-morphisme $BC : {}^LG \to {}^LG'$.

On choisit $\phi \in C_c^\infty(G'(l))$ une fonction test. On dit que $f \in C_c^\infty(G(l))$ est un changement de base de ϕ si

$$O_\gamma(f) = \begin{cases} \Delta(\delta, \gamma) TO_{\delta,\sigma}(\phi) & \text{si } \gamma \text{ régulier, semi-simple et } \gamma = \delta\delta^\sigma =: N(\delta) \\ 0 & \text{si } \gamma \text{ régulier, semi-simple, mais pas une norme} \end{cases}$$

Une telle fonction toujours existe mais elle n'est pas unique. De plus, on dispose d'une compatibilité sur le changement de base des représentations et le changement de base des fonctions :

Proposition 4.2. *Soit π une représentation non ramifiée de $G(k)$. Alors on peut lui associer Π une représentation non ramifiée de $G'(k) = G(l)$ par changement de base. Pour toute $\phi \in C_c^\infty(G'(l))$, si $f \in C_c^\infty(G(l))$ est un changement de base de ϕ, on a :*

$$trace(\Pi(\phi)) = trace(\pi(f))$$

(1) Cas non archimédien non ramifié :

Cette définition est aussi compatible avec celle donnée dans le cas non ramifié :

En effet, supposons de plus que l est non archimédien et G est non ramifié sur l. Alors G' est aussi non ramifié sur l. Soit K un sous-groupe ouvert compact hyperspécial maximal de G. On a $K' = K \otimes_{\mathcal{O}_l} \mathcal{O}_k$ est un sous-groupe ouvert compact hyperspécial maximal de G'. De même, $BC^*_{k/l} : \mathcal{H}(G', K') \to \mathcal{H}(G, K)$ est un morphisme d'algèbres. Ce morphisme nous donne dualement une application des représentations non ramifiées de $G(k)$ vers celles de $G'(k) = G(l)$.

Proposition 4.3. *$BC^*_{k/l}(\phi)$ est un changement de base de ϕ.*

Lemme 4.2. ***Lemme fondamental*** *$\mathbb{1}_K$ est un changement de base de $\mathbb{1}_{K'}$.*

(2) Cas non archimédien général : un lemme sur l'image du changement de base

Dans le cas général du changement de base local non archimédien, on a un résultat sur l'image du changement de base dû à Arthur (voir [16] P.80 proposition 3.3.2 :)

Lemme 4.3. *Soit $f \in C_c^\infty(G(l))$ tel que $O_\gamma(f) = 0$ pour tout $\gamma \notin N(G(k)/G(l))$ où N désigne la norme. Alors f est dans l'image du changement de base.*

On énonce un corollaire :

Corollaire 4.1. *Soit $f \in C_c^\infty(G(l))$ à support assez petit au voisinage de l'unité, alors il existe $\phi \in C_c^\infty(G'(l))$ qui lui associée par le changement de base.*

On montrera un résultat plus fort après (voir corollaire 4.4).

(3) Cas archimédien : fonction d'Euler-Poincaré

Soit l archimédien. Le seul cas non trivial est que $l = \mathbb{R}$, $k = \mathbb{C}$.

On note $G_\infty = G(F \otimes \mathbb{R})$, $\mathfrak{g}_\infty = LieG_\infty$ et K_∞ un sous-groupe compact ouvert maximal de G_∞. Si V est une représentation de dimension finie de G_∞, on dit que f_V est la fonction d'Euler-Poincaré associée à V si $f_V \in C_c^\infty(G_\infty)$ telle que

$$trace\pi(f_V) = \sum_{q \in \mathbb{N}} (-1)^q \dim H^q(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty; \pi \otimes \widetilde{V})$$

pour toute π représentation admissible de G_∞.

Par le lemme 4.4 de [17], on sait que toute fonction d'Euler-Poincaré est associée à une fonction d'Euler-Poincaré par le changement de base.

Remarque Pour toute représentation V, on sait que sa fonction d'Euler-Poincaré existe. Voir [3] proposition 3.7 pour la construction.

Compatibilité du transfert endoscopique et du changement de base : cas non ramifié

On revient au cas qui nous intéresse. Soit H un groupe endoscopique de GU. On pose H', GU' et ξ comme précédemment. On rappelle que l'on dispose d'un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} {}^L H \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "BC"] & {}^L GU \arrow[d, "BC"] \\ {}^L H' \arrow[r, "\xi'"] & {}^L GU' \end{tikzcd}$$

Soit $q \notin S$. Alors K_q (resp. K'_q) est un sous-groupe ouvert compact hyperspécial de $GU(\mathbb{Q}_q)$ (resp. $GU'(\mathbb{Q}_q)$). On note K_q^H (resp. $K_q^{H\prime}$) un sous-groupe ouvert compact hyperspécial de $H(\mathbb{Q}_q)$ (resp. $H'(\mathbb{Q}_q)$) associé à H groupe endoscopique de GU.

On en déduit un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}(H(\mathbb{Q}_q), K_q^H) & \mathcal{H}(GU(\mathbb{Q}_p), K_q) \arrow[l] \\ \mathcal{H}(H'(\mathbb{Q}_q), K_q^{H\prime}) \arrow[u, "BC"] & \mathcal{H}(GU'(\mathbb{Q}_p), K'_q) \arrow[l] \arrow[u, "BC"'] \end{tikzcd}$$

En d'autres termes : soit $\phi_q \in \mathcal{H}(GU'(\mathbb{Q}_q), K'_q)$ avec $f_q \in \mathcal{H}(GU(\mathbb{Q}_q), K_q)$ comme un changement de base de ϕ_q. On note f_q^H (resp. ϕ_q^H) un transfert endoscopique de f_q (resp. ϕ_q). Alors f_q^H est un changement de base de ϕ_q^H.

C'est aussi vrai pour le cas ramifié. On montre un résultat plus faible mais qui suffit pour notre démonstration finale. C'est un corollaire du lemme 4.3 :

Proposition 4.4. *Soit H un groupe endoscopique de GU. Soit Ω un voisinage assez petit de l'unité dans $GU(\mathbb{Q}_q)$ invariant par $GU(\mathbb{Q}_q)$-conjugaison. Alors pour tout f à support dans Ω, f^H est dans l'image du changement de base.*

Démonstration On peut supposer que tous les élément dans Ω sont des carrés car le morphisme carré est un isomorphisme local dans un voisinage assez petit de l'unité. Alors si $\delta \in H(\mathbb{Q}_q)$ est un élément semi-simple associé à un élément $\gamma \in \Omega$, δ est aussi un carré et donc une norme.

Maintenant si $SO_\bullet(f^H)$ ne s'annule pas en un élément $\delta \in H(\mathbb{Q}_q)$, on sait qu'il existe γ associé à δ tel que $O_\gamma(f) = \int_{GU_\gamma \backslash GU(\mathbb{Q}_q)} f(x^{-1}\gamma x)dx \neq 0$. En particulier, il existe $x \in GU(\mathbb{Q}_q)$ tel que $f(x^{-1}\gamma x) \neq 0$. On a alors $x^{-1}\gamma x \in \Omega$ et donc $\gamma \in \Omega$ puisque Ω est stable par conjugaison. On obtient que δ est une norme.

Par le lemme 4.3, on en déduit que f^H est dans l'image du changement de base.

$\square$

Remarque On a énoncé les résultats de compatibilité dans notre cas. On peut voir dans les démonstrations que les résultats restent valides aussi dans le cas plus général.

Maintenant, on peut définir K_{p_0} pour notre problème. Notons que Π_{p_0} est une représentation non ramifiée θ-stable de $GU(E_{p_0})$. On sait donc qu'il existe ρ_{p_0} une représentation de $GU(\mathbb{Q}_{p_0})$ tel que Π_{p_0} est son changement de base (voir [19] P.35). On prend K_{p_0} assez petit tel que

1. $\rho_{p_0}^{K_{p_0}}$ est non nul ;
2. K_{p_0} est inclus dans un voisinage Ω qui satisfait les conditions de la proposition 4.4.

En appliquant le proposition 4.4, on voit que $\mathbb{1}_{K_{p_0}}$ et ses transferts endoscopiques sont dans l'image du changement de base. On choisit $\phi_{p_0} \in C_c^\infty(GU(\mathbb{Q}_{p_0}))$ tel que $\mathbb{1}_{K_{p_0}}$ est le changement de base de ϕ_{p_0}. Et on choisit K'_{p_0} un sous-groupe ouvert compact de $GU'(\mathbb{Q}_{p_0})$ tel que ϕ_{p_0} est stable (à droite et à gauche) par K'_{p_0}.

4.4 Résultats du changement de base global

Espace tordu Soient $H \in \mathcal{E}$ un groupe endoscopique de GU et $H' = Res_{E/\mathbb{Q}}H$. On a défini l'action de $Gal(E/\mathbb{Q}) = \{1, \theta\}$ sur $GU(E)$. On sait que l'action de $Gal(E/\mathbb{Q})$ sur H est compatible avec la donnée endoscopique. On pose $\widetilde{H} = H' \rtimes \theta$ l'espace tordu de H'.

On dit que $(\widetilde{\pi}, V)$ est une représentation de $\widetilde{H}(\mathbb{A})$ si $\widetilde{\pi}$ est une application $\widetilde{H}(\mathbb{A}) \to GL(V)$, V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel tels qu'il existe une représentation de $H'(\mathbb{A}) = H(\mathbb{A}_E) : \pi : H(\mathbb{A}_E) \to GL(V)$ avec $\widetilde{\pi}(x\delta y) = \pi(x)\widetilde{\pi}(\delta)\pi(y)$ pour tout $x, y \in H(\mathbb{A}_E)$, $\delta \in \widetilde{H}$.

On pose $\delta_0 = 1 \rtimes \theta \in \widetilde{H}(\mathbb{A})$. Alors $\pi \circ \theta(g) = \pi(\delta_0 g \delta_0^{-1}) = \widetilde{\pi}(\delta_0)\pi(g)\widetilde{\pi}(\delta)^{-1}$.

Donc $\pi \circ \theta \cong \pi$.

Réciproquement, si (π, V) est une représentation θ-stable de $H'(\mathbb{A}) = H(\mathbb{A}_E)$, i.e. s'il existe $I_\theta \in GL(V)$ tel que $\pi \circ \theta = I_\theta \pi I_\theta^{-1}$, on pose

$$\widetilde{\pi} : \widetilde{H}(\mathbb{A}) \to GL(V)$$

$$g \rtimes \theta \mapsto \pi(g) I_\theta$$

Alors $(\widetilde{\pi}, V)$ est une représentation de $\widetilde{H}(\mathbb{A})$.

Donc les représentations de $\widetilde{H}(\mathbb{A})$ sont en correspondance bijective avec les représentations θ-stable de $H(\mathbb{A}_E)$. On identifie les deux ensembles dans la suite.

Soit $\phi \in C_c^\infty(\widetilde{H}(\mathbb{A})) \cong C_c^\infty(H'(\mathbb{A}))$ telle que ϕ_∞ est une somme des fonctions d'Euler-Poincaré. Comme dans la section 4.3, on peut définir une action de $C_c^\infty(\widetilde{H}(\mathbb{A}))$ sur $\mathcal{L}^2 = L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/Z^0(G(\mathbb{A}_f)))$. On a de même $\mathcal{L}^2 = \mathcal{A}_{cont}(\widetilde{H}) \oplus \mathcal{A}_{dis}(\widetilde{H})$ et $\mathcal{A}_{dis}(\widetilde{H}) = \bigoplus m(\widetilde{\pi})\widetilde{\pi}$, π décrivent l'ensemble des représentations θ-stables unitaires de $H(\mathbb{A}_E)$. En général, on a $m(\widetilde{\pi}) \leq m(\pi)$. Mais dans notre cas (groupe unitaire similitude), on a en fait $m(\widetilde{\pi}) = m(\pi)$.

On en déduit que

$$\begin{aligned} T_{dis}^{\widetilde{H}}(\phi) : &= trace(R(\phi)|\mathcal{A}_{dis}(\widetilde{H})) \\ &= \sum m(\widetilde{\pi}) trace(\widetilde{\pi}(\phi)) \\ &= \sum m(\pi) trace(\pi(\phi) I_\theta) \end{aligned}$$

où π décrit l'ensemble des représentations unitaires σ-stables de $H(\mathbb{A}_E)$.

Le changement de base des fonctions, cas global Soient $\phi \in C_c^\infty(\widetilde{H}(\mathbb{A})) \cong C_c^\infty(H(\mathbb{A}_E))$ et v une place de $\mathbb{Q}$.

1. $v = q$ finie, déployée dans E
   Alors $\mathbb{A}_{E,q} \cong \mathbb{Q}_q \otimes \mathbb{Q}_q$.

   $$C_c^\infty(H(\mathbb{A}_E, q)) \cong C_c^\infty(H(\mathbb{Q}_q)) \otimes C_c^\infty(H(\mathbb{Q}_q))$$

   On définit le changement de base

   $$BC_{E_q/\mathbb{Q}_q}(H) := C_c^\infty(H(\mathbb{A}_E, q)) \cong C_c^\infty(H(\mathbb{Q}_q)) \otimes C_c^\infty(H(\mathbb{Q}_q)) \to C_c^\infty(H(\mathbb{Q}_q))$$

   $$f \otimes g \mapsto fg$$

   En particulier, il est surjectif.
2. $v = q$ finie, inerte ou ramifiée dans E
   Alors $\mathbb{A}_{E,q} = E_q$ est une extension quadratique de $\mathbb{Q}_p$. On note aussi $BC_{E_q/\mathbb{Q}_q}(H)$ le changement de base dans ce cas. Notons que ce n'est pas une application en général. C'est juste une correspondance $C_c^\infty(H(\mathbb{A}_E, q)) \rightsquigarrow C_c^\infty(H(\mathbb{Q}_q))$.
3. v infinie Alors $E_v = \mathbb{C}$ et $Q_v = \mathbb{R}$. le changement de base $BC_{E_v/\mathbb{Q}_v}$ est juste le changement de base de $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ étudié dans la section 4.3.

On dit $f \in C_c^\infty(H(\mathbb{A}))$ est un changement de base de ϕ si pour toute place v (finie ou infinie), f_v est un changement de base de ϕ_v.

La formule des traces On va utiliser ce théorème dans la démonstration finale. C'est une conséquence des théorèmes 5.7 et 5.8 de [17] :

Théorème 4.1. *Soit $\phi \in C_c^\infty(\widetilde{H}(\mathbb{A})) \cong C_c^\infty(H(\mathbb{A}_E))$ admettant $f \in C_c^\infty(H(\mathbb{A}))$ comme changement de base. On suppose de plus que ϕ_∞ est une fonction d'Euler-Poincaré, alors :*

$$T_{dis}^{\widetilde{H}}(\phi) = ST_e(f).$$

Remarque On va préciser dans la section suivante $ST_e(f)$, la partie elliptique du côté géométrique dans la formule de traces stable.

On a un corollaire de ce théorème sur le changement de base global (voir théorème 5.3 et 5.9 de [17])

Corollaire 4.2. *Soit* Π *une représentation cuspidale* σ*-stable de* $G(\mathbb{A}_E)$*, alors il existe* ρ *une représentation cuspidale de* $G(\mathbb{A})$*, tel que* Π *est le changement de base faible de* ρ*. De plus,* π_v *est un changement de base de* ρ_v *pour tout* v *place finie tel que* GU_v *est quasi-déployé.*

5 Les Calculs Finals

Commençons par rappeler notre problème et résumer ce qu'on a fait avant.

Soit F un corps totalement réel ou CM.

Soit π une représentation de $GL_n(\mathbb{A}_F)$ cuspidale, cohomologique et auto-duale. Si p est une place finie de $\mathbb{Q}$ pour laquelle π et F sont non ramifiées. On va montrer que π_v est tempérée si v est une place au-dessus de p.

On a fixé S, un ensemble fini des places finies de $\mathbb{Q}$ contenant p, tel que toutes les places ramifiées de π divisent une place dans S.

Dans la section 3.1, on s'est ramené au cas $F = F^+E$ où F^+ est un corps totalement réel non ramifié hors de $S - \{p, p_0\}$ et E est un corps quadratique imaginaire déployé dans $S - \{p_0\}$, non ramifié hors p_0.

Ensuit, on a construit un groupe réductif GU sur $\mathbb{Q}$ tel que $GU(\mathbb{A}_E) = GL_n(\mathbb{A}_F) \otimes \mathbb{A}_E^\times$. On a pris χ un caractère de Hecke algébrique de $\mathbb{A}_E^\times$ tel que $\Pi = \pi \otimes \chi$ est θ-stable où θ est l'élément non nul dans $Gal(E/\mathbb{Q})$. Notons que Π est non ramifiée sur les places finies hors $S - \{p, p_0\}$.

Il y a deux possibilités ici : soit $\chi(z) = (\frac{z}{\overline{z}})^{P/2}$ est un caractère unitaire où P est un entier pair, soit $\chi(z) = (\frac{z}{\overline{z}})^{(P-1)/2}|z\overline{z}|^{1/2}$ est un caractère non unitaire où P est un entier impair.

Puis dans la section 3.3, on a étudié une variété de Shimura par rapport à GU. Et on a fixé $K = \prod_q K_q$ un sous-groupe ouvert compact de $GU(\mathbb{A}_f)$.

- Si $q \in S$, $q \neq p$, $q \neq p_0$, K_q est un sous-groupe ouvert compact de $GU(\mathbb{Q}_q)$ tel que $\Pi_q^{K_q \otimes K_q}$ est non nul. Dans ce cas, on a posé $K'_q = K_q \otimes K_q$.
- Si $q \notin S$ ou $q = p$, K_q (resp. K'_q) est un sous-groupe ouvert compact hyper-spécial maximal de $GU(\mathbb{Q}_q)$ (resp. $GU(E_q)$).
- Si $q = p_0$, K_q est un sous-groupe ouvert compact de $GU(\mathbb{Q}_q)$ tel que $\rho_q^{K_q}$ est non nul où ρ_q est dans la fibre en Π_q du changement de base. K'_q est un sous-groupe ouvert compact de $GU(E_q)$ tel que $\mathbb{1}_{K_{p_0}}$ est dans l'image du changement de base de $\mathcal{H}(GU(E_q), K'_q)$.

On a abrégé $S_K(GU,h)$ en S_K. On a construit $\mathcal{L}$ un système local de S_K attaché à L où L est la représentation de dimension finie de $GU(\mathbb{R})$ qui a le caractère infinitésimal comme l'inverse de celui de Π.

On note $D = dim(S_K) = 2(n-2)$ et q_v le cardinal du corps résiduel de F_v. On va raisonner en calculant la trace d'une fonction test sur la cohomologie étale de notre variété de Shimura dans ce chapitre.

On note aussi $(t_a)_{1\leq a\leq n}$ le paramètre de Langlands de π_v. Notre but est de montrer que $|t_a| = 1$ pour tout $1 \leq a \leq n$.

5.1 Résultats de Kottwitz

Soit l un nombre premier différent de p. On fixe un isomorphisme $\overline{\mathbb{Q}_l} \to \mathbb{C}$.

On pose $H^i(S_K,\mathcal{L}) = H^i_t(S_K \times_F \overline{F}, \mathcal{L}(\overline{\mathbb{Q}_l}))$. C'est un $GU(\mathbb{A}_f) \times Gal(\overline{F}/F)$-module. On note $Frob_v \in Gal(\overline{F}/F)$ le Frobenius géométrique.

On note $H^\bullet(S_K,\mathcal{L}) = \sum\limits_{i\geq 0}(-1)^i H^i(S_K,\mathcal{L})$. C'est effectivement une somme finie car $H^i(S_K,\mathcal{L}) = 0$ pour $i > 2D$.

On commence par considérer f^p une fonction dans l'algèbre de Hecke de $GU(\mathbb{A}^p_f) := \prod\limits_{q\neq p} GU(\mathbb{Q}_q)$ par rapport à $K^p = \prod\limits_{q\neq p} K_q$. On note $f_p = \mathbb{1}_{K_p}$ et $f = f^p f_p$. On sait que les actions de f et $Frob_v$ sur $H^i(\overline{S_K},\mathcal{L})$ commutent. On va évaluer $trace(Frob_v^\alpha \times f|H^\bullet(S_K,\mathcal{L}))$ pour tout α entier positif.

Dans [13], Kottwitz a montré que (cf. [13] P.189 théorème 7.2) :

$$q_v^{\frac{-D\alpha}{2}} trace(Frob_v^\alpha \times f|H^\bullet(S_K,\mathcal{L})) = \sum_{H\in\mathcal{E}} \iota(GU,H) ST^*_e(f^H_\alpha) \tag{1}$$

Ici $f^H_\alpha = f^H_{p,\alpha} \otimes f^{p,H} \otimes f^H_\infty$ où f^H_∞ est une somme des fonctions d'Euler Poincaré de certaines représentations de $H(\mathbb{R})$ de dimension finie, $f^{p,H}$ (resp. $f^H_{p,\alpha}$) est le transfert endoscopique de f^p (resp. $f_{p,\alpha}$ où $f_{p,\alpha}$ est le changement de base de $\phi_{p,\alpha}$ défini dans [13], P.173).

Enfin, $ST^*_e(f^H_\alpha)$ est la somme des intégrales orbitales stables sur les éléments elliptiques (GU,H)-réguliers dans $H(\mathbb{Q})$. Plus précisément,

$$ST^*_e(f^H_\alpha) = \sum_{\gamma_H} \tau(H)|H_{\gamma_H}/H^\circ_{\gamma_H}(\mathbb{Q})|^{-1} SO_{\gamma_H}(f^H_\alpha)$$

où τ est le nombre de Tamagawa qui n'a pas importance dans ce mémoire et γ_H parcourt les classes de conjugaison stable des éléments elliptiques (GU,H)-réguliers semi-simples dans $H(\mathbb{Q})$.

Notons que ce résultat est une conjecture dans l'article de Kottwitz. Mais le seule point non démontré à ce moment là était le lemme fondamental. Comme le lemme fondamental est désormais connu, on peut bien sûr utiliser ce résultat.

On va d'abord simplifier la partie droite de l'équation (1). Plus précisément, on va montrer que $SO_\bullet(f^H_\infty)$ s'annule sur les éléments elliptiques non (GU,H)-réguliers. Donc on aura que

$$ST^*_e(f^H_\alpha) = ST^*(f^H_\alpha) = \sum_{\gamma_H} \tau(H)|H_{\gamma_H}/H^\circ_{\gamma_H}(\mathbb{Q})|^{-1} SO_{\gamma_H}(f^H_\alpha)$$

où γ_H parcourt les classes de conjugaison stable de tous les éléments elliptiques semi-simples dans $H(\mathbb{Q})$.

On rappelle maintenant la définition de f^H_∞. Soient T_H un tore maximal de H et $\gamma_H \in T_H$. On fixe un prolongement $j : H \to G$ et on pose $\gamma = j(\delta)$ et $T = j(T_H)$. Soit B (resp.B_H) le sous-groupe de Borel contenant T (resp. T_H) de GU (resp. H). Comme dans [13] P.182, il existe une fonction d'Euler Poincaré f^H_∞ satisfaisant $SO_{\gamma_H}(f^H_\infty) = \Delta_B(\gamma^{-1})\Delta_{B_H}(\gamma_H^{-1})^{-1}F(\gamma_H)$ pour tout γ_H (GU,H)-régulier.

Ici $\Delta_B(\gamma^{-1}) = \prod_{\alpha\in R(B,T)}(1-\alpha(\gamma))$, $\Delta_{B_H}(\gamma^{-1}) = \prod_{\alpha\in R(B_H,T_H)}(1-\alpha(\gamma))$ et $F(\gamma_H) = e(\gamma_H)\chi_{G,H}(\gamma) < \beta(\gamma), s_H > trace(L(\gamma))v^{-1}$ où L est la représentation de dimension finie de $GU(\mathbb{R})$ associée à Π. Nous ne précisons pas le signe $e(\gamma_H)$, le caractère $\gamma \mapsto < \beta(\gamma), s_H >$, le quasi caractère $\chi_{G,H}$ et le volume v (ref. [13] P.182 et 184). En particulier, on voit que $F(\gamma_H)$ est continue à signe près. De plus, on identifie T avec T_H. Donc $R(B_H,T_H) \subset R(B,T)$.

Alors f^H_∞ est une fonction telle que $SO_{\gamma_H}(f^H_\infty)\Delta_{B_H}(\gamma_H^{-1}) = \Delta_B(\gamma^{-1})F(\gamma_H)$. Maintenant on fixe $\gamma_H \in T_H$ qui n'est pas (GU,H)-régulier. On considère les deux cas suivants :

1. γ_H est H-régulier. Alors $\Delta_{B_H}(\gamma_H^{-1}) \neq 0$ et $\Delta_B(\gamma^{-1}) = 0$. Comme $F(\gamma_H)$ est continue à signe près, on obtient que $SO_{\gamma_H}(f^H_\infty) = 0$.
2. γ_H n'est plus H-régulier. Comme $SO_\bullet(f^H_\infty)$ est continue, il suffit de montrer que γ_H est une limite des éléments H-réguliers.

   On sait que $SO_\bullet(f^H_\infty)$ s'annule sur un tore non compact, il suffit donc de considérer γ_H dans un tore compact. On fixe un isomorphisme $T_H \cong T \cong U(1)^n = \{(t_1,t_2,\cdots,t_n)|t_i \in U(1)\}$. Alors l'action des racines de $R(B,T)$ sur T est de la forme t_i/t_j où $i \neq j$. Comme γ_H n'est pas (GU,H)-régulier, on sait qu'il existe $\alpha \in R(B,T)\backslash R(B_H,T_H)$ tel que $\alpha(\gamma_H) = 1$. On peut supposer que $\alpha(t_1,t_2,\cdots,t_n) = t_1/t_2$. Donc $\gamma_H = (t_1,t_2,\cdots,t_n)$ avec $t_1 = t_2$. Pour tout $k \geq 1$, on prend $\gamma^k_H = (t^k_1,t^k_2,\cdots,t^k_n)$ tel que $t^k_1 = t^k_2 = t_1$ et $t^k_i \neq t^k_j$ pour tout $2 \leq i < j \leq n$, et t^k_i tend vers t_i quand k tend vers ∞.

   Donc $\alpha(\gamma^k_H) = 1$ et $\alpha_H(\gamma^k_H) \neq 1$ pour tout $\alpha_H \in R(B_H,T_H)$. Ainsi α^k_H est H-régulier mais pas (GU,H)-régulier. Donc $SO_\bullet(f^H_\infty)$ s'annule en γ^k_H et donc en γ_H comme voulu.

On va continuer la simplification a l'aide du théorème 4.1 dans la section 4.4. On suppose maintenant que $f^p \in C^\infty_c(GU(\mathbb{A}^p_f))$ vérifie (on va construire une telle fonction test f dans la section suivante) :

1. $f_q \in \mathcal{H}(GU(\mathbb{Q}_q),K_q)$ pour toute $q \neq p$ place finie de $\mathbb{Q}$;

2. f_q est associée à $\phi_q \in \mathcal{H}(GU(E_q), K'_q)$ par le changement de base par rapport à $E/\mathbb{Q}$ pour toute $q \neq p$;
3. $f_{p_0} = \mathbb{1}_{K_{p_0}}$.

Alors $f^H \in C_c^\infty(H(\mathbb{A}))$ est associée à $\phi^H \in C_c^\infty(H(\mathbb{A}_E))$. En effet,

– Pour les places infinies, c'est vrai parce que f_∞^H est une fonction d'Euler-Poincaré. Elle est associée à une fonction d'Euler-Poincaré ϕ_∞^H comme on l'a vu dans la section 4.3.
– Pour q une place dans $S - \{p_0\}$, f_q^H est automatiquement associée a une fonction ϕ_q^H car E est déployé en q et donc le changement de base des fonctions est surjectif. Notons que dans le cas $q = p$, $f_p = f_{p,\alpha}$ dépend de α.
– Pour q une place hors de S, on est dans le cas non ramifié. On sait que le changement de base commute avec le transfert endoscopique. Donc f_q^H est le changement de base de ϕ_q^H, le transfert endoscopique de ϕ_q.
– Il reste le cas $q = p_0$. On applique le proposition 4.4 et on voit que f^H est associée à $\phi_q^H \in C_c^\infty(H(E_q))$ par le changement de base.

On a $ST_e(f_\alpha^H) = T_{dis}^{\widetilde{H}}(\phi_\alpha^H)$ par le théorème 4.1. On en déduit que :

$$q_v^{\frac{-D\alpha}{2}} trace(Frob_v^\alpha \times f|H^\bullet(S_K, \mathcal{L})) = \sum_{H \in \mathcal{E}} \iota(GU, H) T_{dis}^{\widetilde{H}}(\phi_\alpha^H) \tag{2}$$

Notons que $T_{dis}^{\widetilde{H}}(\phi_\alpha^H) = \sum m(\Pi_H) trace(\Pi_H(\phi^H) I_\theta)$ où Π_H décrit l'ensemble des représentations unitaires θ-stables de $H(\mathbb{A}_E)$.

On en déduit que :

$$q_v^{\frac{-D\alpha}{2}} trace(Frob_v^\alpha \times f|H^\bullet(S_K, \mathcal{L})) = \sum_{H \in \mathcal{E}} \iota(GU, H) \sum_{\Pi_H} m(\Pi_H) trace(\Pi_H(\phi^H) I_\theta) \tag{3}$$

5.2 Choisir les fonctions tests

Dans cette section, on va construire une fonction test

$$\phi^p \in \phi_{p_0} \times \prod_{q \in S, q \neq p, q \neq p_0} \mathcal{H}(GU(E_q), K'_q) \otimes \bigotimes_{q \notin S}{}' \mathcal{H}(GU(E_q), K'_q).$$

Ici $\phi_{p_0} \in C_c^\infty(GU(E_{p_0}))$ a pour changement de base $\mathbb{1}_{K_{p_0}}$ (voir fin de la section 4.3). On rappelle que pour $q \in S$, $q \neq p$, $q \neq p_0$, E est déployé en q. $\mathcal{H}(GU(E_q), K'_q) = \mathcal{H}(GU(\mathbb{Q}_q), K_q) \otimes \mathcal{H}(GU(\mathbb{Q}_q), K_q)$ et le changement de base des fonctions en q est juste la multiplication. Pour $q \notin S$, on sait que K_q est hyperspécial. Donc le changement de base est dans le cas non ramifié $BC^*_{E_p/\mathbb{Q}_p}$: $\mathcal{H}(GU(E_q), K'_q) \to \mathcal{H}(GU(\mathbb{Q}_q), K_q)$.

On sait alors qu'il existe une fonction

$$f^p \in \mathbb{1}_{K_{p_0}} \times \prod_{q\in S, q\neq p, q\notin p_0} \mathcal{H}(GU(\mathbb{Q}_q), K_q) \otimes \bigotimes_{q\notin S} {}'\mathcal{H}(GU(\mathbb{Q}_q), K_q)$$

comme changement de base de ϕ^p. Notons que cette fonction f^p satisfait les trois conditions de la section précédente.

Par le même argument que dans le lemme 4.2 de [5], il existe une fonction $\phi^S \in \bigotimes_{q\notin S} {}'\mathcal{H}(GU(\mathbb{Q}_q), K_q)$ telle que :

1. $trace(\Pi_H^S(\phi^{H,S})I_\theta) = 0$ sauf si $H = GU^*$ et $\Pi_H = \Pi$;
2. $trace(\Pi^S(\phi^S)I_\theta) \neq 0$.

On synthétise l'argument ci-dessous.

Comme le niveau K est fixé, on sait que l'ensemble des représentations telles que $trace(\Pi_H(\phi^H)I_\theta) \neq 0$ est fini. Par un résultat de Jacquet-Shalika, on sait que Π est linéairement indépendante des autres représentations Π_H vues comme caractères de $\bigotimes_{q\notin S} {}'\mathcal{H}(GU(E_q), K'_q)$. Plus précisément, si on fixe un groupe endoscopique H, les éléments Π_H sont linéairement indépendants. De plus, pour H qui n'est pas le sous groupe endoscopique principal, on sait que les Π_H sont de type Eisenstein. Donc ils n'affectent pas Π. La représentation Π n'est pas dans l'espace engendré pas les autres représentations en tant que caractère de $\bigotimes_{q\notin S} {}'\mathcal{H}(GU(E_q), K'_q)$.

Donc il existe une fonction $\phi^S \in \bigotimes_{q\notin S} {}'\mathcal{H}(GU(E_q), K'_q)$, telle que $trace(\Pi_H^S(\phi^{H,S})I_\theta) = 0$ sauf si $H = GU^*$ et $\Pi_H^S = \Pi^S$, $trace(\Pi^S(\phi^S)I_\theta) \neq 0$. De plus, par le théorème de multiplicité un fort, on a $\Pi_H^S = \Pi^S$ si et seulement si $\Pi_H = \Pi$.

Travaillons maintenant sur les places dans S. Pour $q \in S, q \neq p, q \neq p_0$, on pose $\phi_q = \mathbb{1}_{K_q} \otimes \mathbb{1}_{K_q}$. Alors son changement de base est $f_q = \mathbb{1}_{K_q}$. De plus, on sait que $\Pi_q^{K'_q}$ est non nul. Donc l'action de Π_q sur $\mathcal{H}(GU(E_q), K'_q)$ est non nulle. Comme ϕ_q est l'unité de $\mathcal{H}(GU(E_q), K'_q)$, on sait que $trace(\Pi_q(\phi_q)I_{\theta,q})$ est non nul. Pour $q = p_0$, on sait que $trace(\Pi_q(\phi_q)I_{\theta,q}) = trace(\widetilde{\Pi_q}(\phi_q)) = trace(\rho_q(f_q))$. Notons que $f_q = \mathbb{1}_{K_q}$ et $\rho_q^{K_q} \neq 0$. On a $trace(\Pi_q(\phi_q)I_{\theta,q}) = trace(\rho_q(\mathbb{1}_{K_q})) \neq 0$ par le même argument comme $q \in S$, $q \neq p_0$.

On pose $\phi^p = (\bigotimes_{q\in S, q\neq p} \phi_q) \otimes \phi^S$. Alors on a :

1. $trace(\Pi_H^S(\phi^{H,S})I_\theta) = 0$ sauf que $H = GU^*$ et $\Pi_H = \Pi$;
2. $trace(\Pi^p(\phi^p)I_\theta) \neq 0$;
3. f_q, le changement de base de ϕ_q, est égale à $\mathbb{1}_{K_q}$ pour toute place $q \in S, q \neq p$.

5.3 Comparer et raisonner

On peut évaluer la valeur $trace(\Pi^p(\phi^p)I_\theta)$ par les propriétés de ϕ construit dans la section précédente. De plus, en places infinies, on sait que $trace(\Pi_\infty(\phi_\infty)I_\theta)$ est non nul par le lemme 4.7 du [17]. On voit facilement que la partie droite de (3) est égale à $c * trace(\Pi_p(\phi_{p,\alpha})I_\theta)$ avec c un constant non nul. Par définition de $\phi_{p,\alpha}$, on sait que $trace(\Pi_p(\phi_{p,\alpha})I_\theta) = trace(R_h(t^\alpha_{\pi,v}))$ où R_h est la représentation de $\widehat{GU}$ définie dans la section 3.3.

On note $\mathfrak{P}$ la place de E au-dessous de v et ω_v l'uniformisante de F_v. On note q_v le cardinal du corps résiduel de F_v.

La partie droite d'équation (3) est alors :

$$c * trace(\Lambda^2 t^\alpha_{\pi,v}\chi^\alpha(N_{F_v/E_\mathfrak{P}}\omega_v)) = c * \sum_{1\leq a<b\leq n}(t_a t_b s)^\alpha \tag{4}$$

Ici $s = \chi(N_{F_v/E_\mathfrak{P}}\omega_v)$. Comme F est non ramifié en p, on sait que $|s| = 1$ si χ est unitaire, $|s| = q_v^{1/2}$ si χ n'est pas unitaire.

Étudions maintenant la partie gauche de (3). On rappelle la décomposition de Matsushima :

$$H^i(S_K(\mathbb{C}), \mathcal{L}) = \bigoplus_{\rho=\rho_\infty\otimes\rho_f} H^i(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty; \rho_\infty \otimes L) \otimes \rho_f^K$$

où $\mathfrak{g}_\infty = LieGU(\mathbb{R})$, K_∞ un sous-groupe compact ouvert maximal de $GU(\mathbb{R})$ et ρ décrit l'ensemble des représentations automorphes de $GU(\mathbb{A})$ si χ est unitaire. Dans le cas χ non unitaire, il faut tordre l'espace des fonctions automorphes comme dans [4]. Nous considérons juste le cas où χ unitaire dans la suite. Pour le cas non unitaire, il faut tordre un caractère partout mais cela ne change pas notre argument.

Pour la cohomologie étale, on a un isomorphisme de $Gal(\overline{F}/F)$-modules en fixant un isomorphisme $\overline{\mathbb{Q}_l} \to \mathbb{C}$ (voir [15], section 1) :

$$H^i(S_K, \mathcal{L}) = \bigoplus_{\rho_f} H^i_\infty(\rho_f) \otimes \rho_f^K$$

où $H^i_\infty(\rho_f)$ est un sous-espace de $\bigoplus_{\rho_\infty\in L(\rho_f)} H^i(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty; \rho_\infty \otimes L)$ qui est muni une action de $Gal(\overline{F}/F)$. Ici $L(\rho_f)$ est l'ensemble de $(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty)$-modules tels que $\rho_f \otimes \rho_\infty$ est une représentation automorphe de $GU(\mathbb{A})$.

On a alors

$$trace(Frob_v^\alpha \times f|H^i(S_K, \mathcal{L})) = \sum_{\rho_f} trace(f|\rho_f^K) * trace(Frob_v|H^i_\infty(\rho_f)).$$

D'une part, comme $f_S = \mathbb{1}_{K_S}$, on a

$$\begin{aligned} trace(f|\rho_f^K) &= trace(f_S|\rho_S^{K_S}) * trace(f^S|(\rho_f^S)^{K^S}) \\ &= trace(\mathbb{1}_{K_S}|\rho_S^{K_S}) * trace(f^S|(\rho_f^S)^{K^S}) \\ &= dim(\rho_S^{K_S}) * trace(f^S|(\rho_f^S)^{K^S}) \\ &= dim(\rho_S^{K_S}) * trace(f^S|\rho_f^S) \end{aligned}$$

La dernière égalité est du fait que $f^S(\rho_f^S) \subset (\rho_f^S)^{K^S}$. Si $trace(f^S|\rho_f^S) \neq 0$, on sait que ρ_f^S est non ramifiée. On peut appliquer le changement de base non ramifié ici. On pose $\rho_f'^S$ un changement de base de ρ_f^S par rapport à $E/\mathbb{Q}$. On a $trace(f^S|\rho_f^S) = trace(\phi^S|\rho_f'^S)$ qui est nulle sauf si $\rho_f' = \Pi_f$ par la construction de ϕ. Dans ce cas, on a $trace(f^S|\rho_f^S) = trace(\phi^S|\rho_f'^S) = trace(\phi^S|\Pi_f^S) = c' \neq 0$.

D'autre part, par le théorème 1 de [15], on sait que les valeurs propres de $Frob_v$ sur $H^i_\infty(\rho_\infty)$ sont des nombres de Weil de poids i. On a alors

$$trace(Frob_v^\alpha|H^i_\infty(\rho_f)) = \sum_{j\in J(i,\rho_f)} \lambda_{i,j}^\alpha$$

où $\lambda_{i,j} \in \mathbb{C}$ est de module $q_v^{i/2}$, $J(i,\rho_f)$ est un ensemble fini d'indices.

Donc la partie gauche de (3) est égale à

$$c' * q_v^{\frac{-D\alpha}{2}} \sum_{i\geq 0}(-1)^i \sum_{\rho_f} dim(\rho_S^K) \sum_{j\in J(i,\rho_f)} \lambda_{i,j}^\alpha$$

où ρ_f décrit l'ensemble des représentations automorphes de $GU(\mathbb{A}_f)$ telles que le changement de base de ρ_f est Π_f.

On la récrit :

$$c' * q_v^{\frac{-D\alpha}{2}} \sum_{i,j}(-1)^i c_j(\lambda_{i,j})^\alpha \tag{5}$$

où c_j sont des entiers positifs ou nuls.

Finalement, on pose $s' = s * q_v^{D/2} \in q_v^{\mathbb{Z}/2}$ et $C = c/c' \neq 0$. En comparant (4) et (5), on obtient que :

$$\sum_{i,j}(-1)^i c_j \lambda_{i,j}^\alpha = C \sum_{1\leq a<b\leq n} (t_a t_b s')^\alpha \tag{6}$$

Notons que cette équation est valable pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$.

Lemme 5.1. *Soient $(X_i)_{1\leq i\leq N} \in \mathbb{C}^N$ et $(c_i)_{1\leq i\leq N} \in \mathbb{C}^N$ tels que $\sum c_i X_i^\alpha = 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$. Alors pour tout i, $\sum_{j:X_j=X_i} c_j = 0$.*

C'est un exercice simple d'algèbre linéaire.

On applique ce lemme à l'équation (6), et on obtient que pour tout $1 \leq a < b \leq n$, on a

$$C|\{(a',b')|t_{a'}t_{b'} = t_a t_b\}| = \sum_{\lambda_{ij}=t_a t_b s'} (-1)^i c_j \tag{7}$$

On rappelle que les c_j sont des entiers non négatifs. Donc la partie droite de (7) est un entier. Comme $|\{(a',b')|t_{a'}t_{b'} = t_a t_b\}|$ est un entier positif, alors C est un nombre rationnel. On a vu que $C \neq 0$. Donc C est un nombre réel non nul. La partie gauche de (7) est un réel non nul du même signe que C.

Il y a deux possibilités : soit C est positif non nul, soit C est négatif non nul.

1. Si C est positif non nul, la partie gauche de (7) est aussi positive non nulle. Alors il existe un terme positif non nul dans la somme de la partie droite de (7). Donc pour tout a, b, il existe i, j avec i pair, tels que $\lambda_{ij} = t_a t_b s'$.
2. Si C est négatif non nul, par le même argument que ci-dessus, on sait que pour tout a, b, il existe i, j avec i impair tels que $\lambda_{ij} = t_a t_b s'$.

On rappelle que $|\lambda_{ij}| = q_v^{i/2}$. Donc si C est positif non nul, on a $|t_a t_b s'| \in q_v^{\mathbb{Z}}$ pour tous a, b. Si C est négatif non nul, on a $|t_a t_b s'| \in q_v^{\mathbb{Z}+\frac{1}{2}}$ pour tout a, b. Dans tous les cas, on voit que $|\frac{t_a}{t_b}| \in q_v^{\mathbb{Z}}$ car $n \geq 4$.

Mais on sait aussi $q_v^{-1/2} < |t_a| < q_v^{1/2}$, donc $q_v^{-1} < |\frac{t_a}{t_b}| < q_v$. On a alors $|t_a| = |t_b|$ pour tous a, b.

En fin de compte, comme π est unitaire, on a $\prod |t_a| = 1$. Donc $|t_a| = 1$ pour tout a comme on le voulait. On en déduit la conjecture de Ramanujan.

Remarque Dans la démonstration, on voit que les conditions "auto-duale" et "cohomologique" sont essentielles dans notre méthode. Sans la condition cohomologique, on ne peut pas attacher certain système local sur notre variété de Shimura. Sans la condition d'auto-duale, notre représentation ne contribue plus à la cohomologie étale.

Références

[1] J. Arthur, L. Clozel, *Simple algebras, base change, and the advanced theory of the trace formula*, Annals of Math. Studies 120, Princeton University Press, 1989.

[2] L. Clozel, *Motifs and formes automorphes*, dans le livre *Automorphic Forms, Shimura Varieties, and L-functions vol.I*, Perspective in Maths. 10, Academic Press, 1990.

[3] L. Clozel, *Représentations galoisiennes associées aux représentations automorphes auto-duales de $GL(n)$*, Pulb. IHES 73, 1991.

[4] L. Clozel, *Purity reigns supreme*, dans le livre *The stable trace formula, Shimura varieties, and arithmetic applications. Volume II*, prépublication.

[5] L. Clozel, M. Harris, J. P. Labesse, *Endoscopic transfer*, dans le livre *The stable trace formula, Shimura varieties, and arithmetic applications. Volume I*, Boston : International Press, 2011.

[6] F. Diamond, J. Shurman, *A first course in modular forms*, Springer 2005.

[7] D. Goldfeld, J. Hundley, *Automorphic representations and L-functions for the general linear group, Volume 1*, CSAM 129, Cambridge University Press, 2011.

[8] D. Goldfeld, J. Hundley, *Automorphic representations and L-functions for the general linear group, Volume 2*, CSAM 130, Cambridge University Press, 2011.

[9] M. Harris, *Arithmetic applications of the Langlands program*, Japanese J. Math., 3rd series, 5, P. $1-71$, 2010.

[10] M. Harris, R. Taylor, *The geometry and cohomology of some simple Shimura Varieties*, Annals of Math. Studies 151, Princeton University Press, 2001.

[11] A. W. Knapp, *Local Langlands correspondence : the archimedean case*, dans le livre *Motives*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol 55, Part 2, P. $393-410$, American Mathematical Society, 1994.

[12] A. W. Knapp et D. A. Vogan, *Cohomological induction and unitary representations*, Princeton mathematical series 045, Princeton University Press, 1995.

[13] R. Kottwitz, *Shimura varieties and λ-adic representations*, dans le livre *Automorphic Forms, Shimura Varieties, and L-functions vol.I*, Perspective in Maths. 10, Academic Press, 1990.

[14] R. Kottwitz, *Points on some Shimura varieties over finite fields*, J.A.M.S 5, 1992.

[15] R. Kottwitz, *On the λ-adic representations associated to simple Shimura varieties*, Inv. Math., 108, 1992.

[16] J. P. Labesse, *Cohomologie, stabilisation et changement de base*, Astérisque 257, Soc. Math. France, 1999.

[17] J. P. Labesse, *Changement de base CM et séries discrètes*, dans le livre *The stable trace formula, Shimura varieties, and arithmetic applications. Volume I*, Boston : International Press, 2011.

[18] J. S. Milne, *Introduction to Shimura varieties*, dans le livre *Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties*, American MAthematical Society Clay Mathematics Institute, 2005.

[19] A. Minguez, *Unramified representations of unitary groups*, dans le livre *The stable trace formula, Shimura varieties, and arithmetic applications. Volume I*, Boston : International Press, 2011.

[20] S. W. Shin, *Galois representations arising from some compact Shimura varieties*, Annals of Math. Studies 173, 2011.