

Brief Research Statement  
**Graham Andrew Craig Smith**

<https://www.ihes.fr/~moriarty/>

[g\\*a\\*a\\*d\\*e\\*s\\*i\\*h@gmail.com](mailto:g*a*a*d*e*s*i*h@gmail.com)

## A - Une sélection de mes activités de recherche.

### A.1 - Résumé.

Dans cette section, je vais résumer une sélection de mes activités de recherche. Les thèmes suivants seront abordés.

#### Le problème de Plateau convexe

*Nous fournissons une solution générale au problème de Plateau non-linéaire pour des hypersurfaces localement strictement convexes dans des variétés de Cartan-Hadamard.*

#### Le problème de Plateau asymptotique

*Dans [23], François Labourie définit le problème de Plateau asymptotique pour les surfaces à courbure extrinsèque constante dans des variétés de Cartan-Hadamard. Nous fournissons une solution complète de ce problème.*

#### La construction de surfaces par perturbation singulière

*Nous nous servons d'un argument de perturbation singulière pour construire les premiers exemples connus de solitons de translation du flot de courbure moyenne dans  $\mathbb{R}^3$ , de topologie finie et de genre fini quelconque.*

#### $k$ -surfaces de type fini

*Nous développons une théorie des  $k$ -surfaces de type fini dans  $\mathbb{H}^3$ . Nous étudions des relations entre des fonctions naturellement définies sur l'espace de modules  $\mathcal{S}_k$  de cette classe de surfaces. Nous utilisons ces fonctions pour étudier, d'un côté, individuellement la structure géométrique des  $k$ -surfaces et, de l'autre, la structure locale de ces espaces de modules.*

### A.2 - Le problème de Plateau convexe.

**Résumé:** *Nous fournissons une solution générale au problème de Plateau non-linéaire pour des hypersurfaces localement strictement convexes dans des variétés de Cartan-Hadamard.*

Le problème de Plateau - qui est un des problèmes les plus classiques de la théorie des sous-variétés riemanniennes - peut être formulé de la manière suivante. Soit  $X := X^{m+1}$  une variété riemannienne, soit  $\Gamma := \Gamma^{m-1}$  une sous-variété compacte immergée et de codimension 2 dans  $X$ , soit  $K$  une fonction de courbure (comme, par exemple, la courbure moyenne, la courbure extrinsèque, etc.), et soit  $k$  un nombre réel. Nous disons qu'une hypersurface compacte  $\Sigma$  immergée dans  $X$  est solution au **problème de Plateau**  $(\Gamma, K, k)$  lorsque son bord  $\partial\Sigma$  coïncide avec  $\Gamma$  et sa  $K$ -courbure est constante et égale à  $k$ . Un problème de Plateau est dit **non-paramétrique** lorsque les solutions recherchées sont des graphes au dessus d'un certain domaine, et le problème est dit **paramétrique** sinon. Dans la suite, nous allons nous intéresser seulement au cas paramétrique, qui est le plus général.

Bien que la version la plus connue du problème de Plateau concerne les surfaces à courbure moyenne constante, il ne manque pas de fonctions de courbure pour lesquelles le problème de Plateau peut être formulé. Entre ces fonctions de courbure, il existe une sous-famille de fonctions, dites **fonctions de courbure convexes**, qui présente des problèmes plus abordables avec des techniques d'EDP existantes. Un exemple d'une fonction de courbure convexe bien connue est la **courbure extrinsèque**,

$$K_m := \text{Det}(A)^{1/m}, \tag{A.1}$$

où  $A$  désigne ici l'opérateur de Weingarten de l'hypersurface. D'autres exemples sont donnés par les **quotients de courbure**

$$K_{m,n} := (\sigma_m(A)/\sigma_n(A))^{\frac{1}{m-n}}, \tag{A.2}$$

où  $\sigma_0, \dots, \sigma_m$  désignent ici les polynômes homogènes élémentaires, définis uniquement par la relation

$$\text{Det}(\text{Id} + tA) = \sum_{i=0}^m t^i \sigma_i(A). \quad (\text{A.3})$$

Un problème de Plateau est dit **convexe** lorsqu'il concerne une fonction de courbure convexe.

À partir de l'oeuvre fondamentale [5] de Caffarelli-Nirenberg-Spruck, un grand nombre de résultats ont été obtenus pour les problèmes de Plateau convexes dans  $\mathbb{R}^{m+1}$  and  $\mathbb{H}^{m+1}$ , ainsi que dans certains autres espaces élémentaires, comme des produits cartésiens et certains produits tordus (voir, par exemple, [14], [15], [16], [33] et [35]). Pourtant, malgré tous ces résultats, il y avait dans cette théorie deux importantes limitations qui ressortissaient, et que mes recherches ont eu pour but de remédier (voir la Figure 1).

$\mathbb{R}^{m+1}, \mathbb{H}^{m+1}$ Type Fini	$\mathbb{R}^{m+1}, \mathbb{H}^{m+1}$ Type Générale
Variété Générale Type Fini	Variété Générale Type Générale

**Figure 1** - Une représentation schématique et approximative des objectifs de mes travaux sur le problème de Plateau pour les fonctions de courbure convexes. Les résultats antérieurs, qui traitaient seulement des problèmes dans des espace-formes et des fonctions de courbure de type infini (ainsi que certains cas particuliers de fonctions de type fini) sont représentés par la case en haut à gauche.

La première limitation concernait les espaces ambiants. En effet, les résultats les plus généraux connus jusqu'alors s'appuyaient lourdement sur la structure géométrique de l'espace ambiant, au point d'exclure des extensions à des espaces ambiants plus généraux. En effet, même dans les espaces ambiants aussi simples que le produit cartésien  $\mathbb{H}^m \times \mathbb{R}$  et l'espace hyperbolique complexe  $\mathbb{C}\mathbb{H}^m$ , le problème de Plateau général restait encore ouvert.

La seconde limitation était plus subtile, et concernait les propriétés asymptotiques des fonctions de courbure. Afin de les décrire correctement, il convient d'abord de définir plus précisément ce qu'on entend par fonction de courbure. Une fonction de courbure est une fonction lisse  $K$  des courbures principales de l'hypersurface qui satisfait une certaine liste de conditions naturellement données par des considérations géométriques et analytiques.<sup>1</sup> Dans le cas convexe, nous nous intéressons aux fonctions concaves définies sur le cône

$$\Lambda_m^+ := \{(x_1, \dots, x_m) \mid x_i > 0 \forall i\}. \quad (\text{A.4})$$

Il découle, en particulier, de la concavité que la limite

$$K_\infty(x_1, \dots, x_{m-1}) := \lim_{t \rightarrow +\infty} K(x_1, \dots, x_{m-1}, t) \quad (\text{A.5})$$

existe en tout point de  $\Lambda_{m-1}^+$  et est, ou bien finie en tout point, ou bien infinie en tout point. Disons alors que la fonction de courbure est **de type fini** ou **de type infini** selon la valeur de cette limite.

<sup>1</sup> Ces conditions, ainsi que leur motivations, sont énoncées explicitement dans l'introduction de la ref. **P9**.

La famille de fonctions de courbure de type fini comprend plusieurs fonctions de courbure naturelles, comme, par exemple, la courbure spéciale lagrangienne (voir ref. **P24**) et les quotients de courbure, mentionnés ci-dessus. Pourtant, comme les fonctions de courbure de type fini entraînent un niveau plus élevé de complexité, elles n'avaient pas été traitées dans le travail initial [5] de Caffarelli-Nirenberg-Spruck et, pendant les décennies qui ont suivies, ont seulement été traitées partiellement dans certains cas exceptionnels. Pour résumer : le problème des fonctions de courbure convexes de type fini était un problème dur et subtil, qui n'avait pas encore été traité en toute généralité.

Dans ref. **P9**, nous franchissons ces deux limitations. D'un côté, nous fournissons une solution générale au problème de Plateau convexe pour des hypersurfaces dans des variétés de Cartan-Hadamard quelconques et, de l'autre, nous résolvons complètement le problème des fonctions de courbure de type fini. Ce travail s'appuie sur trois innovations. Premièrement, nous développons une manière purement géométrique d'aborder les arguments de barrière introduits dans [5]. Ensuite, nous obtenons une nouvelle estimée a priori pour les immersions localement strictement convexes et à bord non-trivial dans des variétés riemanniennes générales. Troisièmement, nous développons une nouvelle théorie topologique du degré pour les hypersurfaces immergées. Enfin, les arguments élaborés dans ref. **P9** s'appliquent également aux hypersurfaces dans toute variété riemannienne, bien que, dans le cas général, il devient nécessaire de tenir en compte aussi de la géométrie globale de l'espace ambiant.

**Problèmes ouverts:** Traiter le cas des fonctions de courbure non-convexes. Étudier le problème dans des variétés semi-riemanniennes. Le cas  $K = \sigma_2$  est d'un intérêt particulier, puisqu'il est lié à la courbure scalaire de l'hypersurface.

### A.3 - Le problème de Plateau asymptotique.

**Résumé:** Dans [23], Labourie définit le problème de Plateau asymptotique pour les surfaces à courbure extrinsèque constante dans des variétés de Cartan-Hadamard. Nous fournissons une solution complète de ce problème.

Les surfaces complètes et à courbure extrinsèque constante immergées dans les espaces-formes ont été d'un intérêt fondamental pour les géomètres depuis la publication par Gauss de son célèbre article de 1827. Au début, les résultats de Hopf, Volkov-Vladimirova, Sasaki et Hilbert nous auraient amenés à croire en l'existence d'une classification presque triviale de ces objets. Pourtant, il était vite devenu clair que dans chacun des trois cas qui n'avaient pas été considérés par ces résultats - à savoir, le cas des surfaces à courbure constante égale à  $-1$  dans  $\mathbb{S}^3$ , celui des surfaces à courbure nulle dans  $\mathbb{H}^3$ , et celui des surfaces à courbure constante  $0 < k < 1$  dans  $\mathbb{H}^3$  - il existe une théorie riche ayant des applications profondes dans divers domaines de la mathématique moderne.

Le travail de Labourie concerne le troisième cas mentionné ci-dessus, c'est-à-dire, celui des surfaces immergées dans  $\mathbb{H}^3$  à courbure extrinsèque égale à  $0 < k < 1$ . Dans une série d'articles (voir, par exemple, [19], [20], [21] et [22]), Labourie se sert d'une relation entre les surfaces à courbure extrinsèque constante et des courbes pseudo-holomorphes dans le fibré unitaire pour poser les bases d'une théorie des surfaces à courbure extrinsèque constante qui aujourd'hui trouve diverses applications dans un grand nombre de domaines différents, comme, par exemple, la géométrie hyperbolique, la relativité générale, la théorie de Teichmüller, etc. (voir, par exemple [2], [3], [4] et [31]).

Un élément central de la théorie de Labourie est ce qu'il appelle le "problème de Plateau asymptotique". Afin de l'énoncer correctement, il faut d'abord introduire quelques définitions. Soit  $X$  une variété de Cartan-Hadamard. Une **surface immergée** dans  $X$  est une paire  $(S, e)$ , où  $S$  est une surface topologique et  $e : S \rightarrow X$  est une immersion. Notons  $\nu_e$  son champ de vecteurs normal unitaire;  $I_e$ ,  $II_e$  et  $III_e$  ses trois formes fondamentales;  $A_e$  son opérateur de Weingarten; et  $K_e := \text{Det}(A_e)$  sa courbure extrinsèque. Disons que la surface est **localement strictement convexe** (LSC) lorsque  $II_e$  est en tout point définie positive, et disons qu'elle est **quasicomplète** lorsqu'elle est complète par rapport à la métrique  $I_e + III_e$ . Remarquons, en particulier, que toute surface complète est trivialement quasicomplète. Pour  $0 < k < 1$ , disons que  $(S, e)$  est une  **$k$ -surface** lorsqu'elle est LSC, quasicomplète et de courbure extrinsèque constante égale à  $k$ .

Nous aurons également besoin du concept d'application de Gauss asymptotique qui se définit de la manière suivante. Notons d'abord  $UX$  le fibré en sphères unitaires de  $X$  et  $\partial_\infty X$  le bord à l'infini de  $X$ . L'**application d'horizon** de  $X$  est la fonction  $f : UX \rightarrow \partial_\infty X$  qui envoie tout vecteur  $\xi$  de  $UX$  en

l'unique point idéal qu'il indique. L'**application de Gauss asymptotique** de  $(S, e)$  est alors la fonction  $\phi_e : S \rightarrow \partial_\infty \mathbb{H}^3$  définie par

$$\phi_e := h \circ \nu_e. \tag{A.6}$$

Lorsque  $(S, e)$  est une  $k$ -surface (et, plus généralement, lorsque  $(S, e)$  est LSC), cette fonction est un homéomorphisme local.

Le problème de Plateau asymptotique de Labourie concerne la prescription unique des  $k$ -surfaces par leurs applications de Gauss asymptotiques. Soit  $S$  une surface, soit  $\phi : S \rightarrow \partial_\infty X$  un homéomorphisme local, et soit  $0 < k < 1$  un nombre réel. Pour  $0 < k < 1$ , disons qu'une immersion  $e : S \rightarrow X$  est solution du **problème de Plateau asymptotique**  $(S, \phi, k)$  lorsque  $(S, e)$  est une  $k$ -surface dont l'application de Gauss asymptotique est égale à  $\phi$ . Remarquons que ce problème identifie des objets géométriques dans  $X$  à des objets topologiques dans son bord à l'infini  $\partial_\infty X$ . Pour cette raison, il peut être conçu comme une manifestation du principe holographique de la correspondance AdS-CFT, connue de la physique théorique. Dans [23], Labourie montre une série de résultats partiels sur l'existence et l'unicité des solutions du problème de Plateau asymptotique. Pourtant, le cas général est resté ouvert.

Dans ref. **S1** fournissons une solution complète à ce problème de Plateau asymptotique. Nous déterminons des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de solutions, et montrons que ces solutions, lorsqu'elles existent, sont toujours uniques. En outre, nous travaillons dans un cadre qui est plus général que celui considéré par Labourie dans deux sens. Premièrement, alors que Labourie traite seulement le cas des variétés ambiantes de géométrie bornée (c'est-à-dire, qui sont sujettes à des restrictions géométriques à l'infini), nous supposons seulement que la courbure sectionnelle de la variété est pincée. Ensuite, alors que Labourie étudie seulement le cas des variétés ambiantes de dimension 3, nous utilisons le concept de courbure spéciale Lagrangienne (que nous avons introduit dans ref. **P24**) pour résoudre ce problème dans les espaces ambiants de dimension quelconque.

**Problèmes ouverts:** Étudier les propriétés dynamiques de l'espace des  $k$ -hypersurfaces, suivant [23]. En particulier, l'étude de certaines entropies définies en termes de l'espace des  $k$ -surfaces - suivant des idées récentes de Calegari-Marques-Neves (voir [6]) - nous paraît être prometteuse. Le cas de surfaces à courbure intrinsèque constante ainsi que le cas d'espaces ambiants semi-riemanniens sont également intéressants.

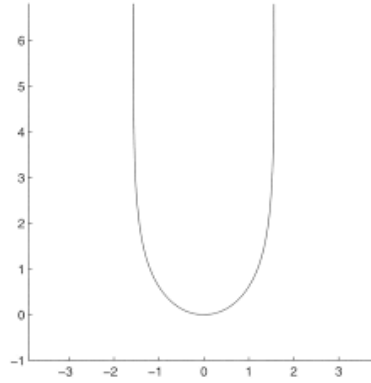
#### A.4 - La construction de surfaces par perturbation singulière.

**Résumé:** *Nous nous servons d'un argument de perturbation singulière pour construire les premiers exemples connus de solitons de translation du flot de courbure moyenne dans  $\mathbb{R}^3$ , de topologie finie et de genre fini quelconque.*

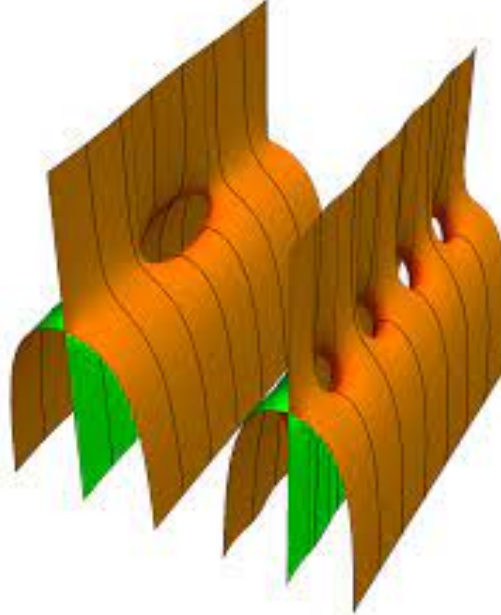
Nous disons qu'une hypersurface  $\Sigma$  plongée dans  $\mathbb{R}^{m+1}$  est un **soliton de translation** du flot de courbure moyenne lorsque son évolution par ce flot est donnée par des translations de l'espace ambiant. Le problème de classification de ces solitons nous intéresse pour deux raisons. D'abord, ils fournissent des exemples non-triviaux de flots de courbure moyenne définis pour tout temps, c'est-à-dire, des flots de courbure moyenne dits éternels. Ensuite, ils fournissent aussi des modèles infinitésimaux des singularités qui peuvent apparaître dans des limites de flots de courbure moyenne plus généraux.

Tout hyperplan affine est trivialement un soliton de translation, où la direction de translation est parallèle à l'hyperplan. L'exemple le plus simple d'un soliton de translation non-trivial est donné par ce qu'on appelle la courbe "grim reaper" dans  $\mathbb{R}^2$  (voir la Figure 2). Le produit cartésien de cette courbe avec une droite donne ensuite un soliton de translation dans  $\mathbb{R}^3$ . Enfin, en désingularisant l'union de ce dernier avec un hyperplan autour d'une tour de Sherk, Nguyen obtient dans [28] et [29] des exemples de solitons de translation de topologie infinie, qu'elle a baptisé "translating tridents" (voir la Figure 3).

Malgré la diversité d'exemples de solitons de translation qui avaient été construits jusqu'alors, il n'y avait pas encore d'exemples connus de solitons de translation dans  $\mathbb{R}^3$  de topologie **finie** et non-triviale. Dans ref. **S5**, indépendamment de, mais simultanément avec [7], nous construisons les premiers exemples connus de solitons de translation du flot de courbure moyenne de genre fini. Plus précisément, en désingularisant l'union de trois bouts catenoïdaux autour d'une surface de Costa-Hoffman-Meeks (CHM), nous obtenons des solitons de translation avec trois bouts et de genre égal à  $g$ , pour tout  $g \in \mathbb{N}$ . Remarquons que la construction de [7] est plus faible, ne valant que pour  $g \gg 1$ .



**Figure 2** - La courbe “grim reaper” est, à une isométrie et une dilatation près, la graphe du logarithme de la sécante. L’évolution de cette courbe par le flot de courbure moyenne est donnée par des translations parallèles à l’axe  $y$ .



**Figure 3** - Les “translating tridents” de Nguyen sont des exemples de solitons du flot de courbure moyenne de topologie non-triviale. Leurs évolutions par le flot de courbure moyenne sont données par des translations parallèles à l’axe  $z$ .

L’utilisation des surfaces CHM dans les constructions de désingularisation pose un problème subtil. En effet, bien que cette classe de surfaces a déjà été utilisée dans des constructions antérieures (comme, par exemple, dans [18] et [27]), dans chacun de ces cas-là, les auteurs ont fait appel à des propriétés asymptotiques qui ne sont pas satisfaites par les solitons de translation. C’est pour cette raison que nous avons dû déterminer des estimées explicites pour des opérateurs définis sur ces surfaces, ce qui nous a amené alors à un problème fondamental, à savoir, l’ordre bas de symétrie des surfaces CHM.

Pour comprendre la relation entre la symétrie et les estimées des opérateurs et des fonctions, il est instructif de revoir d’abord le cas des fonctions harmoniques et bornées définies sur le demi-cylindre  $C^+ := \mathbb{S}^1 \times ]0, \infty[$ . En effet, en utilisant la méthode de séparation de variables, nous montrons que toute fonction

de ce type est de la forme

$$f(\theta, t) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos(m\theta) + b_m \sin(m\theta)) e^{-mt}. \quad (\text{A.7})$$

En particulier, lorsque  $f$  est symétrique par rotation de  $2\pi/M$  autour de l'axe  $t$ , les coefficients  $a_m$  et  $b_m$  s'annulent tous pour  $0 < m < M$  et la différence  $(f - a_0)$  décroît alors exponentiellement avec  $e^{-Mt}$ . Ce phénomène, archétype des arguments qui produisent des normes d'opérateurs et de fonctions à partir de la symétrie, ne se produit trivialement pas dans les cas où peu de symétries existent.

Dans notre travail, nous contournons le manque de symétrie de notre construction en observant que les difficultés qui se présentent proviennent de la perte d'information qui se produit lorsque les propriétés des fonctions sont exprimées en termes de normes fonctionnelles. Par exemple, lorsque la dérivée seconde d'une fonction  $f$  est grande, sa norme  $C^2$  ne fournit aucune information sur la taille de sa première dérivée ! Nous compensons cette perte d'information en introduisant une certaine combinaison bien choisie de normes de Hölder et de Sobolev, que nous appelons **norme hybride**. Nous montrons que cette norme hybride résume efficacement le comportement asymptotique de notre construction, et nous permet alors d'obtenir les estimées dont nous avons besoin pour construire des solitons du flot de courbure moyenne par désingularisation autour des surfaces CHM.

**Problèmes ouverts:** Construire des solitons du flot de courbure moyenne de type hélicoïdal et de topologie non-triviale. Les techniques que nous avons développées ici peuvent également être appliquées à d'autres constructions qui impliquent des surfaces CHM.

#### A.5 - $k$ -surfaces de type fini (c.f. Section A.3).

**Résumé:** Nous développons une théorie de  $k$ -surfaces de type fini dans  $\mathbb{H}^3$ . Nous étudions des relations entre quelques fonctions naturellement définies sur l'espace de modules  $\mathcal{S}_k$  de cette classe de surfaces. Utilisons ces fonctions pour étudier, d'un côté, la structure géométrique des  $k$ -surfaces individuelles et, de l'autre, la structure locale de ces espaces de modules.

Disons qu'une  $k$ -surface  $(S, e)$  est de **type fini** lorsqu'elle est complète (par opposition à quasi-complète) et d'aire finie. L'étude de cette classe de surfaces a été initiée dans ma thèse de doctorat. Notons  $\mathcal{S}_k$  l'espace des  $k$ -surfaces de type fini dans  $\mathbb{H}^3$ , où deux  $k$ -surfaces sont identifiées lorsqu'elles sont équivalentes par reparamétrisation. Nous montrons d'abord que l'étude de  $\mathcal{S}_k$  est équivalente à l'étude de l'espace des revêtements ramifiés pointés de la sphère de Riemann  $\hat{\mathbb{C}}$ . En effet, rappelons qu'un **revêtement ramifié pointé** de  $\hat{\mathbb{C}}$  est un triplet  $(\Sigma, P, \phi)$ , où  $\Sigma$  est une surface de Riemann fermée,  $P \subseteq \Sigma$  est un sous-ensemble fini, et  $\phi : \Sigma \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  est une fonction holomorphe non-constante dont l'ensemble des points de ramification est contenu dans  $P$ . Notons  $\mathcal{R}$  l'espace des revêtements ramifiés pointés de  $\hat{\mathbb{C}}$ , où deux éléments sont identifiés lorsqu'ils sont équivalents par biholomorphisme. Montrons dans ref. **P6** que les espaces  $\mathcal{S}_k$  et  $\mathcal{R}$  sont naturellement homéomorphes par rapport à leurs topologies naturelles.

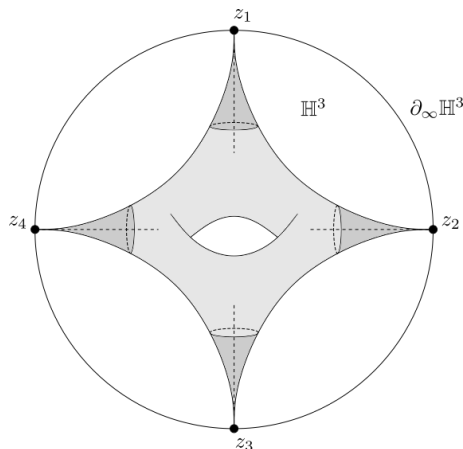


Figure 4 - Toute  $k$ -surface se découpe en une partie compacte et un nombre fini de " $k$ -ends".

L'homéomorphisme  $\Phi_k : \mathcal{S}_k \rightarrow \mathbb{R}$  est construit de la manière suivante. D'abord, nous montrons dans ref. **P30 un théorème de structure** qui affirme que toute  $k$ -surface de type fini se découpe naturellement en une composante compacte  $(S_0, e)$ , et une collection finie  $(S_1, e), \dots, (S_m, e)$  de "bouts", dont chacun est asymptotique à un cylindre autour d'une géodésique de rayon qui décroît exponentiellement. Nous appelons des bouts de ce type des " $k$ -ends" (voir la Figure 4). Remarquons que tout  $k$ -end se termine en un point idéal de  $\partial_\infty \mathbb{H}^3$ , que nous appelons son **extrémité**. Rappelons maintenant que  $\partial_\infty \mathbb{H}^3$  s'identifie naturellement avec  $\hat{\mathbb{C}}$ . Ainsi, comme l'application de Gauss asymptotique  $\phi_e$  de  $e$  est un homéomorphisme local, celle-ci engendre une structure holomorphe sur  $S$ , que nous notons  $\phi_e^* \hat{\mathbb{C}}$ . Il découle du théorème de structure que  $(S, \phi_e^* \hat{\mathbb{C}})$  est biholomorphe au complément d'un sous-ensemble fini  $P$  d'une surface de Riemann fermée  $\Sigma$  et que  $\phi_e$  s'étend en une fonction holomorphe de cette surface dans  $\hat{\mathbb{C}}$ . Le triplet  $(\Sigma, P, \phi_e)$  est un revêtement ramifié pointé de  $\hat{\mathbb{C}}$ . Notons alors

$$\Phi_k(S, e) := (\Sigma, P, \phi_e). \quad (\text{A.8})$$

Dans ref. **P6** nous montrons que, pour tout  $0 < k < 1$ ,  $\Phi_k : \mathcal{S}_k \rightarrow \mathcal{R}$  est un homéomorphisme.

Dans ref. **S3**, nous approfondissons notre compréhension des  $k$ -surfaces de type fini. Nous identifions d'abord des fonctions et des objets géométriques qui sont liés entre eux par une formule de type Schläfli. En effet, une étude asymptotique des  $k$ -ends nous permet de montrer que chaque  $k$ -end possède un axe bien défini, que nous appelons sa **géodésique de Steiner**. Alors qu'une des extrémités de cette géodésique est bien sûr l'extrémité du  $k$ -end, l'autre extrémité définit bien évidemment un autre point de  $\partial_\infty \mathbb{H}^3$ , que nous appelons **point de Steiner** du  $k$ -end. Nous montrons ensuite que tout  $k$ -surface a un volume bien défini (même lorsqu'elle n'est pas plongée), ainsi qu'une **énergie renormalisée**, bien définie à une fonction quadratique des extrémités près.

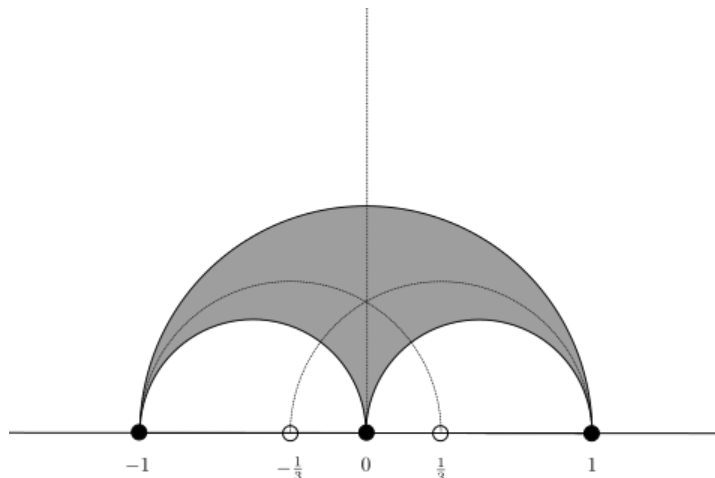
Nous obtenons une formule de type Schläfli qui relie les extrémités, le volume, les points de Steiner et l'énergie renormalisée, et nous en trouvons deux applications intéressantes. D'abord, en appliquant cette formule aux champs de Killing de l'espace ambiant, nous obtenons une série de **conditions d'équilibre** satisfaite par les extrémités et les points de Steiner. En particulier, ces conditions d'équilibre nous permettent de déterminer les points de Steiner de certaines  $k$ -surfaces de type fini ayant un grand nombre de symétries (voir la Figure 5). Ensuite, la formule de Schläfli nous permet de montrer que les extrémités et les points de Steiner définissent ensemble des immersions lagrangiennes lisses des strates de  $\mathcal{S}_k$  dans des variétés Kähleriennes. En particulier, cela signifie que les extrémités et les points de Steiner définissent des variables conjuguées sur  $\mathcal{S}_k$ .

**Problèmes ouverts:** Étudier les dérivées secondes de ces fonctionnelles. Étudier le cas équivariant. Étudier le cas de variétés ambiantes de courbure non-constante. Étudier le cas de dimension plus grande. Étudier les relations entre les fonctionnelles étudiées jusqu'ici et des fonctionnelles holomorphes sur  $\mathcal{R}$ .

## B - Teaching experience and orientations.

### B.1 - Disciplines taught.

- 1 - "An introduction to Gromov-Witten Invariants", Max Planck Institute, Leipzig, Alemanha, 8 hours, 04/2007-06/2007
- 2 - "Symplectic Gromov-Witten Invariants", Max Planck Institute, Bonn, Alemanha, 2 hours, 2008
- 3 - "An introduction to Morse/Floer Homology", Centro de Recerca Matemática, Barcelona, Espanha, 10 hours, 2012
- 4 - Cálculo 1, Undergraduate UFRJ, 2 classes of 60 hours, 2013-1
- 5 - Cálculo 4, Undergraduate UFRJ, 1 classes of 40 hours, 2013-2
- 6 - Tópicos em Geometria, Graduate UFRJ, 1 class of 40 hours, 2014-1
- 7 - Cálculo 1, Undergraduate UFRJ, 2 classes of 60 hours, 2014-2
- 8 - Cálculo 4, Undergraduate UFRJ, 1 class of 40 hours, 2015-1
- 9 - Geometria Diferencial, Graduate UFRJ, 1 class of 40 hours, 2015-1
- 10 - Cálculo 4, Undergraduate UFRJ, 1 class of 40 hours, 2015-2
- 11 - Cálculo 4, Undergraduate UFRJ, 1 class of 40 hours, 2016-1
- 12 - Cálculo 4, Undergraduate UFRJ, 1 class of 40 hours, 2016-2
- 13 - Análise Geométrica, Graduate UFRJ, 1 class of 40 hours, 2016-2



**Figure 5 - Géodésiques de Steiner et points de Steiner** - Une  $k$ -surface plongée avec 3 extrémités en  $-1$ ,  $0$  et  $1$  est obtenu en “enfant” l’enveloppe convexe de ces trois points dans  $\mathbb{H}^3$ . Dans ce cas, par la symétrie, les géodésiques de Steiner sont indépendantes de  $k$  et leurs points de Steiner respectifs se trouvent en  $1/3$ ,  $\infty$  et  $-1/3$ .

- 14 - Cálculo 4, Undergraduate UFRJ, 1 class of 40 hours, 2017-1
- 15 - Geometria Diferencial, Undergraduate UFRJ, 1 class of 40 hours, 2017-2
- 16 - Cálculo 4, Undergraduate UFRJ, 1 class of 40 hours, 2018-1
- 17 - Topologia Diferencial, Graduate UFRJ, 2018-1
- 18 - Cálculo 4, Undergraduate UFRJ, 1 class of 40 hours, 2018-2
- 19 - Topologia Diferencial, Graduate UFRJ, 1 class of 40 hours, 2019-1
- 20 - Geometria Riemanniana, Graduate UFRJ, 1 class of 40 hours, 2019-2
- 21 - Geometria Diferencial, Graduate UFRJ, 1 class of 40 hours, 2020-1
- Classes available online at [http://im.ufrj.br/~moriarty/GD\\_2020\\_1/index.php](http://im.ufrj.br/~moriarty/GD_2020_1/index.php)
- 22 - Geometria Riemanniana, Graduate UFRJ, 1 class of 40 hours, 2020-4 (PLE)
- Classes available online at [http://im.ufrj.br/~moriarty/GD\\_PLE/index.php](http://im.ufrj.br/~moriarty/GD_PLE/index.php)
- 23 - Geometria Diferencial, Graduate UFRJ, 1 class of 40 hours, 2021-1
- Classes available online at [http://im.ufrj.br/~moriarty/GD\\_2021\\_1/index.php](http://im.ufrj.br/~moriarty/GD_2021_1/index.php)
- 24 - Análise Geométrica, Graduate UFRJ, 1 class of 40 hours, 2021-1
- Classes available online at [http://im.ufrj.br/~moriarty/AG\\_2021\\_1/index.php](http://im.ufrj.br/~moriarty/AG_2021_1/index.php)
- 25 - Cálculo 4, Undergraduate UFRJ, 1 class of 40 hours, 2021-1
- Classes available online at <https://www.youtube.com/playlist?list=PLgiGE2bd21CrnKRL1E8JGv5QXQ4VlV8VY>

## B.2 - Orientations.

- 1 - Dennis Leonardo Becerra Hernandez, Master’s Thesis entitled “Espaços homogêneos e grupos de Lie”, defendida 10/10/2017
- 2 - Claudia Veronica Salas Magaña, PhD Thesis entitled, “Sobre fluxos de curvatura média eternos em perturbações de  $S^3$ ”, defendida 02/06/2020
- 3 - Pedro Henrique Birindiba Batista, PhD Orientation, in progress.
- 4 - Ian Mateus Brito Perreira, Master’s Orientation, in progress.
- 5 - Lejzer Javier Castro Tapia, Master’s Orientation, in progress.

## C - Academic output.

### C.1 - Papers published or accepted for publication.

- P1 - Smith G., Möbius structures, hyperbolic ends and  $k$ -surfaces in hyperbolic space, to appear in “In the Tradition of Thurston, Vol. II”, (Ohshika K., Papadopoulos A. ed.), Springer Verlag, (2022)



- P2** - Smith G., Stern A., Tran H., Zhou D., On the Morse index of higher-dimensional free boundary minimal catenoids, to appear in *Calc. Var. PDEs*.
- P3** - Alvarez S., Prescription de courbure des feuilles des laminations: retour sur un théorème de Candel, to appear in *Ann. Inst. Fourier*
- P4** - Smith G., On the Weyl problem in Minkowski space, *Int. Math. Res. Not.*, (2021)
- P5** - Kilian M., Smith G., On the elliptic sinh-Gordon equation with Durham boundary conditions, *Non-linearity*, **34**, no. 8, 5119–5135
- P6** - Smith G., On an Enneper-Weierstrass-type representation of constant Gaussian curvature surfaces in 3-dimensional hyperbolic space, in "Minimal surfaces: Integrable systems and Visualisation" (Hoffmann T., Kilian M., Leschke K., Martin G. ed.), Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, **349**, (2021)
- P7** - Alvarez S., Smith G., Earthquakes and graftings of hyperbolic surface laminations, *Int. Math. Res. Not.*, (2020)
- P8** - Smith G., A short proof of an assertion of Thurston concerning convex hulls, in "In the tradition of Thurston", (Alberge V., Ohshika K., Papadopoulos A. ed.), Springer Verlag, (2020)
- P9** - Smith G., The Plateau problem for convex curvature functions, *Ann. Inst. Fourier*, **70**, no. 1, 1–66, (2020)
- P10** - Fillastre F., Smith G., A note on invariant constant curvature immersions in Minkowski space, *Geom. Dedicata*, **206**, no. 1, 75–82, (2020)
- P11** - Rosenberg H., Degree Theory of Immersed Hypersurfaces, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **265**, no. 1290, (2020)
- P12** - Smith G., Eternal forced mean curvature flows II - Existence, *Pacific J. Math.*, **299**, no. 1, 191–235, (2019)
- P13** - Smith G., Zhou D., The Morse index of the critical catenoid, *Geom. Dedicata*, **201**, 13–19, (2019)
- P14** - Fillastre F., Smith G., Group actions and scattering problems in Teichmüller theory, in The Handbook of Group Actions, Vol. III, Advanced Lectures in Mathematics, 40, International Press, Boston, (2018)
- P15** - Smith G., Constant scalar curvature hypersurfaces in  $(3 + 1)$ -dimensional GHMC Minkowski space-times, *J. Geometry Phys.*, **128**, 99–117, (2018)
- P16** - Máximo D., Nuñez I., Smith G., Free boundary minimal annuli in convex three-manifolds, *J. Diff. Geom.*, **106**, No. 1, (2017)
- P17** - Smith G., Bifurcation of solutions to the Allen-Cahn equation, *J. London Math. Soc.*, **94**, no. 3, (2016), 667–687
- P18** - Smith G., Global Singularity Theory for the Gauss Curvature Equation, *Ensaos Matemáticos*, **28**, (2015), 1–114
- P19** - Smith G., Eternal forced mean curvature flows I - a compactness result, *Geom. Dedicata*, **176**, no. 1, (2014), 11–29
- P20** - Smith G., Hyperbolic Plateau problems, *Geom. Dedicata*, **176**, no. 1, (2014), 31–44
- P21** - Smith G., Compactness results for immersions of prescribed Gaussian curvature II - geometric aspects, *Geom. Dedicata*, **172**, no. 1, (2014), 303–350
- P22** - Clarke A., Smith G., The Perron Method and the Non-Linear Plateau problem, *Geom. Dedicata*, **163**, no. 1, (2013), 159–165
- P23** - Smith G., The non-linear Plateau problem in non-positively curved manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **365**, (2013), 1109–1124
- P24** - Smith G., Special Lagrangian curvature, *Math. Annalen*, **335**, no. 1, (2013), 57–95
- P25** - Smith G., Compactness results for immersions of prescribed Gaussian curvature I - analytic aspects, *Adv. Math.*, **229**, (2012), 731–769
- P26** - Smith G., Moduli of Flat Conformal Structures of Hyperbolic Type, *Geom. Dedicata*, **154**, no. 1, (2011), 47–80
- P27** - Smith G., Equivariant Plateau problems, *Geom. Dedicata*, **140**, no. 1, (2009), 95–135
- P28** - Smith G., An Arzela-Ascoli Theorem for Immersed Submanifolds, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.*, **16**, no. 4, (2007), 817–866
- P29** - Smith G., Problmes de Plateau equivariants, *Sémin. Théor. Spectr. Géom.*, **24**, (2007), 67–78
- P30** - Smith G., Pointed k-surfaces, *Bull. Soc. Math. France*, **134**, no. 4, (2006), 509–557

## C.2 - Translations.

**T1** - Tradução de alemão para inglês de Hüber A., Zum potentialtheoretischen Aspekt der Alexandrowschen Flächentheorie, *Comm. Math. Helv.*, **34**, 99–126, (1960)

### C.3 - Completed papers submitted for review.

**S1** - Smith G, On the asymptotic Plateau problem in Cartan-Hadamard manifolds, arXiv:2107.14670

**S2** - Magaña C., Smith G, On eternal mean curvature flows of tori in perturbations of the unit sphere, arXiv:2004.00054

**S3** - Smith G., On the asymptotic geometry of finite-type k-surfaces in three-dimensional hyperbolic space, arXiv:1908.04834

**S4** - Jiménez-Grande A., Smith G., On embedded minimal surfaces of Costa-Hoffman-Meeks type in hyperbolic space, arXiv:1805.12194

**S5** - Smith G., On complete embedded translating solitons of the mean curvature flow that are of finite genus, arXiv:1501.04149

### C.4 - Completed papers awaiting revision.

Although I am satisfied with the content of the following papers, I find that their presentation requires a complete revision.

**R1** - Smith G., Eternal forced mean curvature flows III - Morse homology, arXiv:1601.03437

**R2** - Smith G., Constant curvature hyperspheres and the Euler Characteristic, arXiv:1103.3235

### C.5 - Others.

**O1** - On groups of diffeomorphisms of Hölder type,

[http://im.ufrj.br/~moriarty/fragments/diffeomorphism\\_groups\\_170719.pdf](http://im.ufrj.br/~moriarty/fragments/diffeomorphism_groups_170719.pdf)

**O2** - On the Hausdorff property of the Cheeger-Gromov topology,

[http://im.ufrj.br/~moriarty/fragments/cheeger\\_gromov\\_171118.pdf](http://im.ufrj.br/~moriarty/fragments/cheeger_gromov_171118.pdf)

**O3** - On the Rauch and Topogonov comparison theorems,

[http://im.ufrj.br/~moriarty/fragments/rauch\\_180306.pdf](http://im.ufrj.br/~moriarty/fragments/rauch_180306.pdf)

**O4** - The non-linear Dirichlet problem in Hadamard manifolds, arXiv:0908.3590

**O5** - Finite area and volume of pointed k-surfaces, arXiv:0709.0393

**O6** - A Brief Note on Foliations of Constant Gaussian Curvature, arXiv:0802.2202

**O7** - A Brief Note on Special Lagrangian Submanifolds in Euclidean Space,

<https://www.mis.mpg.de/publications/preprints/2007/prepr2007-80.html>

## D - Bibliography.

- [1] Andrews B., Contraction of convex hypersurfaces in Euclidean space, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, **2**, (1994), no. 2, 151–171
- [2] Barbot T., Béguin F., Zeghib A., Prescribing Gauss curvature of surfaces in 3-dimensional spacetimes, Application to the Minkowski problem in the Minkowski space, *Ann. Inst. Fourier*, **61**, no. 2, (2011), 511–591
- [3] Bonsante F., Mondello G., Schlenker J. M., A cyclic extension of the earthquake flow I., *Geom. Topol.*, **17**, no. 1, (2013), 157–234
- [4] Bonsante F., Mondello G., Schlenker J. M., A cyclic extension of the earthquake flow II., *Ann. Sci. Ec. Norm. Supér.*, **48**, no. 4, (2015), 811–859
- [5] Caffarelli L., Nirenberg L., Spruck J., Nonlinear second-order elliptic equations. V. The Dirichlet problem for Weingarten hypersurfaces, *Comm. Pure Appl. Math.* **41** (1988), no. 1, 47–70
- [6] Calegari D., Marques F. C., Neves A., Counting minimal surfaces in negatively curved 3-manifolds, to appear in *Duke Math. Journ.*
- [7] Dávila J., Nguyen X. H., Del Pino M., Finite topology self-translating surfaces for the mean curvature flow in  $\mathbb{R}^3$ , *Adv. Math.*, **320**, 674–729
- [8] Devyver B., Index of the critical catenoid, arXiv:1609.023
- [9] Donaldson S. K., Kronheimer P. B., *The geometry of four-manifolds*, Oxford Mathematical Monographs, New York, Oxford University Press, (1990)

- [10] Floer A., The unregularized gradient flow of the symplectic action, *Comm. Pure Appl. Math.*, **41** (1988), no. 6, 775–813
- [11] Fraser A., Schoen R., Sharp eigenvalue bounds and minimal surfaces in the ball, *Invent. Math.*, 203, (2016), no. 3, 823–890
- [12] Fraser A., Extremal eigenvalue problems and free boundary minimal surfaces in the ball, in **Geometric Analysis**, Lecture Notes in Mathematics, 1–40, Springer/Fondazione C.I.M.E., (2020)
- [13] Gromov M. L., Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds, *Inventiones Mathematicae*, **82** (1985), 82: 307–347
- [14] Guan B., Spruck J., The existence of hypersurfaces of constant Gauss curvature with prescribed boundary, *J. Differential Geom.* **62** (2002), no. 2, 259–287
- [15] Guan B., Spruck J., Locally convex hypersurfaces of constant curvature with boundary, *Comm. Pure Appl. Math.* **57** (2004), no. 10, 1311–1331
- [16] Guan B., Spruck J., Hypersurfaces of constant curvature in hyperbolic space. II., *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **12** (2010), no. 3, 797–817
- [17] Harvey F. R., Lawson H. B., Pseudoconvexity for the special Lagrangian potential equation, *Calc. Var. PDEs.*, **60**, (2021)
- [18] Hauswirth L., Pacard F., Minimal surfaces of finite genus with two limit ends, *Invent. Math.*, **169**, no. 3, (2007), 569–620
- [19] Labourie F., Immersions isométriques elliptiques et courbes pseudoholomorphes, *J. Diff. Geom.*, **30**, (1989), 395–424
- [20] Labourie F., Problème de Minkowski et surfaces à courbure constante dans les variétés hyperboliques, *Bull. Soc. Math. Fr.*, **119**, (1991), 307–325
- [21] Labourie F., Métriques prescrites sur le bord des variétés hyperboliques de dimension 3, *Journal of Diff. Geo.* **35**, 609–626 (1992)
- [22] Labourie F., Problèmes de Monge-Ampère, courbes pseudo-holomorphes et laminations, *G.A.F.A.*, **7**, (1997), 496–534
- [23] Labourie F., Un lemme de Morse pour les surfaces convexes (French), *Invent. Math.* **141** (2000), no. 2, 239–297
- [24] Lawson H. B., *The Theory of Gauge Fields in Four Dimensions*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, American Mathematical Society, (1985)
- [25] Li M., Free boundary minimal surfaces in the unit ball: recent advances and open questions, *Proceedings of the International Consortium of Chinese Mathematicians 2017 (First Annual Meeting)*, 401–436, International Press of Boston, Inc. (2020)
- [26] Marques F. C., Neves A., Min-max theory and the Willmore conjecture, *Ann. Math.*, **179**, no. 2, (2014), 683–782
- [27] Mazzeo R., Pacard F., Constant mean curvature surfaces with Delaunay ends, *Comm. Anal. Geom.*, **9**, no. 1, (2001), 169–237
- [28] Nguyen X. H., Complete embedded self-translating surfaces under mean curvature flow, *J. Geom. Anal.*, **23**, (2013), 1379–1426
- [29] Nguyen X. H., Translating tridents, *Comm. Partial Differential Equations*, **34**, (2009), 257–280
- [30] McDuff D., Salamon D., *J-Holomorphic Curves and Symplectic Topology*, American Mathematical Society Colloquium Publications, (2004)
- [31] Schlenker J. M., Hyperbolic manifolds with convex boundary, *Invent. Math.*, **163**, (2006), 109–169
- [32] Schwarz M., *Morse Homology*, Progress in Mathematics, **111**, Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, (1993)
- [33] Sheng W., Urbas J., Wang X. J., Interior curvature bounds for a class of curvature equations, *Duke Math. J.*, **123**, (2004), no. 2, 235–264
- [34] Tran H. T., Index characterization for free boundary minimal surfaces, to appear in *Comm. Anal. Geom.*
- [35] Trudinger N. S., Wang X., On locally locally convex hypersurfaces with boundary, *J. Reine Angew. Math.* **551** (2002), 11–32
- [36] White B., Every three-sphere of positive Ricci curvature contains a minimal embedded torus, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **21**, (1989), no. 1, 71–75
- [37] White B., Personal communication.

- [38] Ye R., Foliation by constant mean curvature spheres, *Pacific J. Math.*, **147**, (1991), no. 2, 381–396