

UNIVERSITÉ DE PARIS XI
UFR SCIENTIFIQUE D'ORSAY

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS XI ORSAY

par

Graham SMITH

Sujet :

**PROBLÈMES ELLIPTIQUES POUR DES
SOUS-VARIÉTÉS RIEMANNIENNES**

Soutenue le 13 décembre 2004 devant la commission d'examen composée de :

M. Gerard BESSON, rapporteur
M. Jean-Pierre BOURGUIGNON, président du jury
M. Frédéric HÉLEIN, examinateur
M. François LABOURIE, directeur de thèse
M. Pierre PANSU, examinateur
M. Jean-Marc SCHLENKER, rapporteur

To A.S.

THERE BEING so many people who deserve to be thanked that it would be impossible to give an exhaustive list. Consequently, I prefer to mention only those who have had a direct influence on the content of this work. As for the rest, you know who you are.

First, I would like to thank François Labourie for having had the patience to direct this work, and the good nature not to hit me every time I criticised his own. Indeed, without his guidance, no part of this work would have been realised.

Second, I would like to thank Gerard Besson and Jean-Marc Schlenker for the time they have taken to referee and correct this work, a task rendered all the harder by my unreadable writing style. I would like to also thank Jean-Pierre Bourguignon, Frédéric Hélein and Pierre Pansu for having agreed to participate on the board of examiners.

Next, I would like to thank (in alphabetical order) Kevin Costello, for a quick introduction to characteristic classes of fiber bundles; Mark Haskins, for general tips and comments regarding special lagrangian structures; Frédéric Le Roux, for showing me the theorem 4.5.1; John Loftin, for useful comments regarding elliptic regularity theory for non-linear problems; and Pierre Pansu, for more general hints and tips.

Finally, I would like to thank all those people who have so kindly taken the time to correct my french.

Cheers...

This work was begun whilst the author was still benefitting from funding provided for by the Leverhulme Trust.

*“Ever tried?
Ever failed?
No matter.
Try again.
Fail again.
Fail better.”*

Samuel Beckett

Sommaire

0 - Introduction	11
0.1 - Summary	11
0.2 - Special lagrangian problems	12
0.3 - The hyperbolic Plateau problem	15
0.4 - Pointed k -surfaces	17
0.5 - Homomorphisms of fundamental groups	19
1 - Problèmes spéciaux legendriens	21
1.1 - Présentation	21
1.2 - Des structures spéciales lagrangiennes classiques	25
1.2.1 - Définitions	25
1.2.2 - $\text{Im}(\Omega_\theta)$ est une calibration	25
1.2.3 - L'invariance de Ω_θ	27
1.3 - Le fibré tangent et le fibré unitaire d'une variété	28
1.3.1 - Définitions	28
1.3.2 - Le fibré unitaire de M	29
1.3.3 - Le crochet de Lie, la dérivée covariante et la structure de contact	30
1.3.4 - Une formule pour la dérivée covariante	31
1.4 - Structures spéciales legendriennes sur le fibré unitaire	31
1.4.1 - Définitions	31
1.4.2 - La dérivée extérieure de Ω_θ	32
1.5 - Hypersurfaces à courbure SL constante	35
1.5.1 - Définitions	35
1.5.2 - Les cas dégénérés	36

1.5.3 - Quelques Exemples	38
1.5.4 - Les hypersurfaces de révolution	41
1.5.5 - La déformation des hypersurfaces à courbure SL constante	44
1.6 - Les variétés rideaux	51
1.6.1 - Définitions	51
1.6.2 - La symétrie des dérivées de II	53
1.6.3 - Le cas des hypersurfaces à courbure spéciale lagrangienne constante	56
1.6.4 - L'existence des variétés rideaux	58
1.6.5 - La géométrie des variétés rideaux	62
1.7 - Le théorème de compacité	66
1.7.1 - Quelques résultats préliminaires	66
1.7.2 - Le théorème de compacité	68
2 - Problème de Plateau hyperbolique	75
2.1 - Présentation	75
2.2 - Surface immergées : Notions élémentaires	77
2.2.1 - Définitions	77
2.2.2 - Champs de vecteurs normaux, seconde forme fondamentale, convexité	77
2.2.3 - Courbure	77
2.2.4 - Un peu de topologie	78
2.3 - Le fibré unitaire d'une variété riemannienne	79
2.3.1 - Structures géométriques sur UM	79
2.3.2 - Courbes holomorphes, k -surfaces	80
2.4 - Structures complexes des k-surfaces dans \mathbb{H}^3	80
2.4.1 - Définitions	80
2.4.2 - Les structures complexes	81
2.4.3 - Les applications quasiconformes	84
2.5 - Le problème de Plateau	85
2.5.1 - Définitions	85
2.5.2 - Espace de solutions	85
2.5.3 - Les propriétés de l'espace de solutions	85
2.6 - Le lemme de Schwarz	86
2.6.1 - Des lemmes de Schwarz	86
2.6.2 - La démonstration des lemmes	88
2.7 - Un lemme de compacité	91
2.7.1 - La problématique	91
2.7.2 - Le résultat de compacité	92
2.7.3 - La précompacité	95
2.8 - Les résultats principaux	98
2.8.1 - L'existence et la continuité	98
2.8.2 - Un homéomorphisme	99
3 - k-surfaces à points	101
3.1 - Présentation	101

3.2 - Le comportement à l'infini	103
3.2.1 - Le résultat clé	103
3.3 - La géométrie du problème (\mathbb{D}^* , $z \mapsto z$)	105
3.3.1 - Résumé des propriétés géométriques de la solution	105
3.3.2 - Un graphe au-dessus de \mathbb{D}^*	107
3.3.3 - Les propriétés de i^*g	109
3.3.4 - La convergence de Hausdorff	113
3.4 - Des revêtements ramifiés	115
3.4.1 - L'emplacement de $\hat{i}(p)$ près des points de ramification	115
3.4.2 - Les tubes autour des géodésiques	116
3.4.3 - Les tubes d'ordre fini autour des géodésiques	120
3.5 - Les surfaces asymptotiquement tubulaires d'ordre fini	123
3.5.1 - Quelques résultats sur les anneaux	123
3.5.2 - Les surfaces tubulaires d'ordre fini aux point critiques	126
4 - Homomorphismes des groupes fondamentaux	131
4.1 - Présentation	131
4.2 - Les isométries d'une variété d'Hadamard	133
4.2.1 - Des modèles de M et de $\partial_\infty M$	133
4.2.2 - Une classification des isométries de M	134
4.2.3 - La dynamique des isométries de M	135
4.2.4 - La dynamique nord-sud	136
4.2.5 - Des twists de Dehn	139
4.3 - La géométrie dans une variété à courbure pincée	142
4.3.1 - Les triangles de comparaison	142
4.3.2 - Les théorèmes de Topogonov et l'homéomorphisme canonique	143
4.3.3 - Des triangles dégénérés ayant un point à l'infini	144
4.3.4 - Des triangles dégénérés ayant deux points à l'infini	147
4.3.5 - Une dernière majoration	149
4.3.6 - Le contrôle des géodésiques	151
4.3.7 - Les groupes de Schottky	152
4.4 - Des variétés compactes à courbure sectionnelle négative	156
4.4.1 - L'hyperbolicité des éléments de $\pi_1(M)$	156
4.4.2 - Une base de $\pi_1(\Sigma, P_0)$	157
4.4.3 - La deuxième étape	159
4.4.4 - La troisième étape	162
4.4.5 - La dernière étape	168
4.5 - Homomorphismes du groupe fondamental et le problème de Plateau	171
4.5.1 - La décomposition en pantalons	171
4.5.2 - Des tresses et la topologie de $\text{Homeo}^+(S^2)$	173
4.5.3 - Le groupe fondamental de $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$	175
4.5.4 - La reconstruction des pantalons	177
4.5.5 - Des classes homologiques	179
4.5.6 - Des relevés des applications	181

4.5.7 - Les recollements des pantalons	184
4.5.8 - La formation des poignées	185
4.5.9 - La construction d'un homéomorphisme	185
A - Quelques résultats topologiques	189
A.1 - Des résultats de base	189
A.2 - L'injectivité et la surjectivité	190
A.3 - La convergence des inverses	192
A.4 - La convergence d'Hausdorff	193
B - La géométrie en courbure négative	195
B.1 - Les triangles de comparaison	195
B.2 - Les théorèmes de Topogonov	197
B.3 - La convexité de la fonction distance	199
B.4 - Une autre fonction pour les triangles de comparaison	202
C - La géométrie différentielle du fibré tangent	205
C.1 - Des distributions sur le fibré tangent	205
C.2 - La dérivée covariante du fibré tangent	206
C.3 - Des distributions sur le fibré unitaire	208
C.4 - La structure de contact sur le fibré unitaire	208
C.5 - Les relevées d'hypersurfaces	210
C.6 - Le théorème de Darboux pour les familles	212
D - Les groupes de tresses	215
D.1 - Les groupes de tresses	215
D.2 - Le nombre d'enlacements relatif	216
D.3 - Les tresses génératrices	219
D.4 - Un isomorphisme	222
Références	227

Introduction

0.1 Summary.

This thesis presents work carried out in three related fields. The first concerns what we might like to call positive special legendrian geometry, which can be viewed as the equivalent of special lagrangian geometry for contact manifolds. We use recent results of Yuan [56] and Corlette [14] to establish a compactness result within this framework, and then we discuss the various degenerate geometries that may exist. This forms the content of the first chapter.

The second deals with k -surfaces in Hadamard manifolds and the Plateau problem for constant Gaussian curvature. We essentially extend the work of Labourie in [34] and [32] to obtain another existence and continuity result. We also describe the geometry of certain families of solutions. This forms the content of the second and third chapters.

Finally, the third deals with homomorphisms between the fundamental group of a compact surface of genus greater than or equal to 2 and that of a compact manifold of dimension 3 and of strictly negative sectional curvature. Here we prove an analogue of the result [16] of Gallo, Kapovich and Marden within this framework, permitting us to establish conditions for the existence of equivariant Plateau problems and convex immersed surfaces. This

forms the content of the fourth chapter.

The third chapter follows directly on from the second. Otherwise, all the chapters are independant. Below we provide a brief overview (in english) of the principal results in each of these chapters.

◇

0.2 Special lagrangian problems.

Let M be a riemannian manifold. Let $\Sigma = (S, i) \subseteq M$ be a locally strictly convex hypersurface immersed in M and denote by II the second fundamental form of Σ . For the rest of this section, by abuse of language, we will understand the term convex to mean locally strictly convex. We define $\kappa_{SL}(\Sigma)$, the *special lagrangian curvature* (SL curvature) of the hypersurface Σ by:

$$\kappa_{SL}(\Sigma) = \text{Arg}(\text{Det}(I + iII)) = \sum_{i=1}^n \arctan(\lambda_i)$$

where $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ are the eigenvalues of II . At first glance, this definition does not appear very intuitive. It is, however, the analogue of the classical special lagrangian equation. In particular, bearing in mind the work [23] of Harvey and Lawson, we can show that this problem arises from an n -form on the unitary bundle UM of M .

Let W be the canonical contact structure on UM . For all $\theta \in \mathbb{R}$, we construct a complex n -form Ω_θ over W which restricts to a special lagrangian form on each fibre of the bundle. In general, we say that a submanifold $\hat{\Sigma}$ immersed in UM is *special legendrian* (or SL) if and only if it is legendrian and the restriction of $\text{Re}(\Omega_\theta)$ to $T\hat{\Sigma}$ vanishes. For $N \in U_pM$, we denote by $N^\perp \subseteq T_pM$ the subspace orthogonal to N in T_pM . There exists a canonical isomorphism:

$$i_N : W_N \rightarrow N^\perp \oplus N^\perp$$

We say that the submanifold $\hat{\Sigma}$ is *positive* (resp *non-negative*) if and only if, for every $N \in \hat{\Sigma}$, the image of $T_N\hat{\Sigma}$ under the action of i_N is the graph of a positive definite (resp. positive semi-definite) matrix. We will write $SL+$ for special legendrian positive and SL_0+ for special legendrian non-negative.

In general, for $f : S \rightarrow M$ a convex immersion codimension 1 of a manifold S into another manifold M , if we denote by N the exterior normal vector field on S in M , then we define the *Gauss lifting* \hat{f} of f by :

$$\hat{f} = N$$

We define the *Gauss lifting* $\hat{\Sigma}$ of the immersed surface $\Sigma = (S, f)$ by :

$$\hat{\Sigma} = (S, \hat{f})$$

$\hat{\Sigma}$ is an immersed sub-manifold of UM . We will see that Σ is convex with constant special legendrien curvature if and only if $\hat{\Sigma}$ is $SL+$ in UM . This problem is thus equivalent to

a first order (albeit nonlinear) problem. In particular, it is uniformly elliptic, and there is no loss of ellipticity as one approaches the vertical.

In this chapter, we will apply the strategy of [32] to this new framework. We will present research which is still incomplete and in full evolution, and this chapter will thus be a collection of results obtained to this date.

In the section 1.2 we define, for E a real vector space, the special lagrangian forms on $E \oplus E$. We recall certain classical results which permit us to show that these forms define a calibration and do not depend on the orthonormal basis of E chosen to construct them.

In the section 1.3, for a riemannian manifold M of dimension n , we study the geometry of UM , the unitary bundle over M . We recall first that UM carries a canonical contact structure W , which is thus a $2n$ dimensional distribution within TUM . In the section 1.4, for all $\theta \in \mathbb{R}$, we construct an n -form on UM which restricts to a special lagrangian n -forme on each fibre of W . In particular, even though this form is not closed, we show that, when M is of constant sectional curvature, this form is closed with respect to W . Moreover, we have good reason to believe that this form remains sufficiently closed with respect to W in the more general case of M being an Einstein manifold.

In the section 1.5, we define the SL curvature of a convex hypersurface Σ immerged in a riemannian manifold M of dimension n , and we show the equivalence of constant SL curvature convex hypersurfaces and the family of $SL+$ submanifolds immerged in UM . In the section 1.5.2 we study degenerate geometries which may appear. In the rest of this section, we construct various examples of such surfaces. If M is a compact manifold of dimension n of constant sectional curvature $-\kappa < 0$, there exists a manifold \hat{M} of dimension $n + 1$ and a canonical totally geodesic embedding $i : M \rightarrow \hat{M}$ of M in \hat{M} . We call \hat{M} the *prolongation* of M , and we obtain the following result:

Lemma 1.1.1

Let M be a compact manifold of dimension n of constant sectional curvature $-\kappa < 0$. Next, let \hat{M} be the prolongation of M and let $i : M \rightarrow \hat{M}$ be the canonical totally geodesic embedding of M in \hat{M} . Let N be the normal vector field on M in \hat{M} . Define $\text{Exp} : T\hat{M} \rightarrow \hat{M}$ to be the exponential map, and for every $t \in]0, \infty[$, define i_t by:

$$i_t = \text{Exp} \circ N$$

$M_t = (M, i_t)$ is a constant SL curvature immerged hypersurface in \hat{M} . Moreover, if we denote by θ_t the SL curvature of M_t , we obtain:

$$\theta_t = n \arctan \left(\sqrt{\kappa} \tanh \left(\frac{\sqrt{\kappa} R}{2} \right) \right)$$

Under certain conditions, we may deform these hypersurfaces and thus obtain smooth families of constant SL curvature hypersurfaces. We will also study hypersurfaces of revolution in \mathbb{R}^n and \mathbb{H}^n .

In the section 1.6 we study in more detail one of the degenerate geometries which may appear. Let M be a riemannian manifold, and let $\pi : UM \rightarrow M$ be the canonical projection. Let $\hat{\Sigma}$ be a submanifold immersed in UM et let $\mathbf{N} \in \hat{\Sigma}$ be an arbitrarily chosen point. We say that $\hat{\Sigma}$ is *vertical* at \mathbf{N} if and only if:

$$\text{Dim} \left(\text{Ker}(T\pi) \cap T_{\mathbf{N}}\hat{\Sigma} \right) > 0$$

We say that $\hat{\Sigma}$, an $SL+$ submanifold immersed in UM , is a *curtain submanifold* if and only if it is everywhere vertical. Let $\hat{\Sigma} = (S, \hat{i})$ be an $SL+$ submanifold immersed in UM and let $\Sigma = (S, i)$ be a hypersurface immersed in M such that $\hat{\Sigma}$ is the Gauss lifting of Σ . Let II be the second fundamental form of Σ and define the function $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ by:

$$h = \text{Log}(\text{Det}(I + A^2))$$

In fact, h may be constructed intrinsically in terms of $\hat{\Sigma}$. Let $B \in (0, \infty)$ be a positive real number. We say that $\hat{\Sigma}$ is a *lifting B -bounded at infinity* if and only if there exists $P \in \hat{\Sigma}$ and $R \in (0, \infty)$ such that, for all $Q \in \hat{\Sigma}$:

$$d(P, Q) \geq R \Rightarrow h(Q) \leq B$$

We now have the following definition:

Definition 1.1.2

Let $\hat{\Sigma}$ be a complete immersed $SL+$ submanifold in UM . We say that $\hat{\Sigma}$ is **B -controlled** if and only if it satisfies one of the following three conditions:

- (i) $\hat{\Sigma}$ compact.
- (ii) There exists a group of isometries acting on M (and thus on UM) such that the quotient of $\hat{\Sigma}$ under the action of G is compact.
- (iii) $\hat{\Sigma}$ is a lifting B -bounded at infinity.

The B -control of a submanifold ensures that if $\|h\|_{\infty} > B$, then the function h attains its maximum at a point in S . We now obtain the following result:

Lemma 1.1.3

Let M be a manifold of constant sectional curvature and let $(\hat{\Sigma}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence of B -controlled submanifolds immersed in UM , $SL+$ relative to the special legendrian form Ω_{θ} . Suppose that $\hat{\Sigma}_n$ tends to $\hat{\Sigma}_0$ as n tends to infinity and that $\hat{\Sigma}_0$ est vertical et at least one point. If M of non-negative sectional curvature, or if θ is different de $k\pi/2$ for k a whole number, then $\hat{\Sigma}_0$ est everywhere vertical.

Next we study the geometry of curtain submanifolds. First, we define the following class of surfaces:

Definition 1.1.4

Let M be a riemannian manifold et let $\Sigma \subseteq M$ be an immersed submanifold. Let II_{Σ} be the second fundamental form of Σ . We say that the submanifold Σ is of **constant special lagrangian curvature** θ if and only if, for every vector field \mathbf{N} normal to Σ :

$$\text{Arg}(\text{Det}(I + \langle II_{\Sigma}, \mathbf{N} \rangle)) = \theta$$

We obtain the following result:

Lemma 1.1.5

Let $\hat{\Sigma} = (S, \hat{\iota})$ be a curtain surface in UM . Let $\hat{P} \in S$ be an arbitrary point in S and suppose that the $\text{Dim}(T\hat{\Sigma} \cap VUM)$ is constant in a neighbourhood of P . There exists a neighbourhood Ω of P in S and $\Sigma = (S_1, \iota)$ an immersed submanifold in M such that

- (i) the immersed submanifold $\hat{\Sigma}' = (\Omega, \hat{\iota})$ coincides with $U\Sigma$, the unitary normal bundle above Σ in UM , and
- (ii) there exists a whole number k such that the surface Σ is of constant special lagrangian curvature $\lambda - k\pi/2$.

Finally, in the section 1.7, we prove a compactness results for constant SL curvature hypersurfaces, which is the principal result of this chapter:

Theorem 1.1.6

Let M be a complete manifold of bounded geometry. Next, let $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence of points in M and let $(\Sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence of convex hypersurfaces immersed in M of constant SL curvature equal to θ such that Σ_n passes by P_n for all n . Let $(\hat{\Sigma}_n, \hat{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be the sequence of Gauss liftings of this sequence and suppose that, for every n , the immersed submanifold $\hat{\Sigma}_n$ is complete.

There exists $(\hat{\Sigma}_0, \hat{P}_0)$ an SL_0+ submanifold immersed in UM such that, after extracting a subsequence, $(\hat{\Sigma}_n, \hat{P}_n)$ tends C^∞ to $(\hat{\Sigma}_0, \hat{P}_0)$ as n tends to infinity.

Next, suppose that the sectional curvature of M is constant. If M is of positive sectional curvature, or if θ is different from $k\pi/2$ for k a whole number, and if Σ_n is B -controlled for every n , then $\hat{\Sigma}_0$ is either the Gauss lifting of a convex immersed hypersurface of constant SL curvature, or a curtain submanifold.

This result will be proved by a process of magnification, using the result [14] of Corlette and bearing in mind the result [56] of Yuan which informs us that, heuristically, on very small scales, an $SL+$ immersed submanifold is flat.

◇

0.3 The hyperbolic Plateau problem.

In [34], Labourie defined the Plateau problem for k -surfaces in a three dimensional Hadamard manifold of bounded geometry and of sectional curvature bounded above by -1 .

Let M be a riemannian manifold (during the rest of this chapter, M will be three dimensional). Let $\Sigma = (S, \iota)$ be a hypersurface immersed in M . For $k \in (0, 1)$, we will define later a metric g^ν (where $k = \nu^2$) over the unitary bundle UM of M . The surface Σ is said to be a k -surface if and only if it is of constant Gaussian curvature equal to k and its Gauss lifting $\hat{\Sigma} = (S, \hat{\iota})$, which is an immersed surface in UM , is complete with respect to the metric g^ν .

Now, according to [34], a Plateau problem is a pair (S, φ) where S is a topological surface, and $\varphi : S \rightarrow \partial_\infty M$ is a local homeomorphism. A solution to this problem is an immersion $i : S \rightarrow M$ such that the immersed surface (S, i) is a k -surface and, if one notes $\hat{i} : S \rightarrow UM$ the Gauss lifting of i , then:

$$\overrightarrow{n} \circ \hat{i} = \varphi$$

where $\overrightarrow{n} : UM \rightarrow \partial_\infty M$ is the Gauss-Minkowski application.

In [34], by establishing a link between constant gaussian curvature surfaces in a three dimensional manifold M and holomorphic curves, positive in a certain sense, in a contacte manifold associated to M (to be precise, the unitary bundle of this manifold), Labourie obtained various existence and uniqueness results for solutions of the Plateau problem for k in the interval $(0, 1)$. Using these results, we obtain an existence result for solutions of the Plateau problem in the case where $M = \mathbb{H}^3$ (and so the boundary at infinity $\partial_\infty M$ of M carries canonically the structure of the Riemann sphere $\hat{\mathbb{C}}$) and $S = \mathbb{D}$, the Poincaré disk:

Theorem 2.1.1

Let $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ be locally conformal. For every $k \in (0, 1)$, there exists a unique solution $i_k : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}^3$ to the Plateau problem (\mathbb{D}, φ) .

The same reasoning permits us to conclude that the solution i_k depends continuously on the function φ . To be precise, we obtain the following result:

Theorem 2.1.2

Choose $k \in (0, 1)$. Let $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}, \varphi_0 : \mathbb{D} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ be locally conformal mappings. Next, let $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}, i_0 : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}^3$ be such that, for every k , the function i_k is the unique solution to the Plateau problem (\mathbb{D}, φ) .

Suppose that $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tends to φ_0 locally uniformly (and thus locally C^∞) as n tends to infinity. Then $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tends to i_0 locally C^k for every k as n tends to infinity.

Remark: Since the Gauss-Minkowski application $\overrightarrow{n} : U\mathbb{H}^3 \rightarrow \partial_\infty \mathbb{H}^3$ is smooth, the converse to this result is trivial:

Lemma 2.1.3

Let $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}, \varphi_0 : \mathbb{D} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ and $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}, i_0 : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}^3$ be as in the preceding theorem.

Suppose that $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tends to i_0 locally C^k for every k as n tends to infinity, then $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tends to φ_0 locally uniformly (and thus locally C^k for every k) lorsque n tends to infinity.

We will see that these results may be expressed in terms of the existence of a homeomorphism between the space of locally conformal meromorphic functions on \mathbb{D} and a representation of the space of hyperbolique k -surfaces in \mathbb{H}^3 .

◇

0.4 Pointed k -surfaces.

Following the ideas of the preceding chapter, we will study moduli spaces arising from compact Riemann surfaces with marked points. It is trivial to show that there exists no compact k -surface immersed in \mathbb{H}^3 . Indeed, such a surface would be tangent on the interior of a sphere on at least one point, which is absurd by the geometric maximum principle (see [34]). We will thus work with non-compact surfaces having the asymptotic properties that we will describe below.

The key result in this chapter is the following theorem:

Theorem 3.1.1

Let S be a surface, and let $\varphi : S \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ be a local diffeomorphism. Let $i : S \rightarrow U\mathbb{H}^3$ be an immersion such that (S, i) is the unique solution to the Plateau problem (S, φ) .

Let $K \subseteq S$ be a compact subset, and let Ω be a connected component of $S \setminus K$. Let q be a point on the (topological) boundary of $\varphi(\Omega)$ in $\hat{\mathbb{C}}$ which is not in the image of $\overline{\Omega} \cap K$. Let $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S$ be such that $\varphi(p_n) \rightarrow q$ as n tends to infinity. Then the sequence $i(p_n)$ tends to q as n tends to infinity.

This result permits us to study the asymptotic behaviour of k -surfaces near isolated singularities. First, for $\Gamma \in \mathbb{H}^3$ a geodesic in \mathbb{H}^3 , we define N_Γ , the set of vectors normal to γ in $U\mathbb{H}^3$, by:

$$N_\Gamma = \{n_p \in U\mathbb{H}^3 \mid p \in \Gamma, n_p \perp T_p\Gamma\}$$

N_Γ is biholomorphic to $\mathbb{R} \times S^1$, where S^1 is the circle of radius 1 in \mathbb{C} . If $\hat{i} : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow N_\Gamma$ is a conformal representation, then we find that \hat{i} is unique up to horizontal and vertical translations of the cylinder. In particular, if $p_0 \in N_\Gamma$, then there exists a unique biholomorphism $i : (\mathbb{R} \times S^1, 0) \rightarrow (N_\Gamma, p_0)$. For $n \geq 1$, we define $\tau_n : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times S^1$ by:

$$\tau_n(t, e^{i\theta}) = (nt, e^{in\theta})$$

For every n , the application τ_n is locally conformal. Now, for every k , we denote $\hat{i}_k = \hat{i} \circ \tau_k$ and we define the immersed surface $T_k \subseteq U\mathbb{H}^3$ by:

$$T_k = (\mathbb{R} \times S^1, \hat{i}_k)$$

We now make the following definition:

Definition 3.1.2

T_k is said to be a **tube of order n** about Γ .

Now we define asymptotically tubular surfaces of finite order. Heuristically, if the point p_0 is a singularity of the immersed surface Σ , and if $\lambda \in \mathbb{N}$, then Σ is asymptotically tubular of finite order λ near p_0 if and only if, in a neighbourhood of p_0 , the Gauss lifting $\hat{\Sigma}$ of the surface Σ coincides with a graph above a demi-tube of order λ , which tends to zero as we approach p_0 . Formally, this gives:

Definition 3.1.3

Let S be a surface and let $\mathcal{P} \subseteq S$ be a discrete subset of S . Let $i : S \setminus \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{H}^3$ be an immersion such that the immersed surface $\Sigma = (S \setminus \mathcal{P}, i)$ is a k -surface. Let \hat{i} be the Gauss lifting of i . Denote $\hat{\Sigma} = (S \setminus \mathcal{P}, \hat{i})$.

Let $\lambda \in \mathbb{N}$ be a positive whole number. For $p_0 \in \mathcal{P}$, we say that Σ is **asymptotically tubular of order λ near p_0** if there exists:

- a neighbourhood Ω of p_0 in S such that $\mathcal{P} \cap \Omega = \{p_0\}$,
- a tube $T_\lambda = (\mathbb{R} \times S^1, \tau_\lambda)$ of order n in $U\mathbb{H}^3$,
- a smooth section $\sigma \in \Gamma(]0, \infty[\times S^1, \tau_\lambda^* NN_\Gamma)$ of $\tau_\lambda^* NN_\Gamma$ above $]0, \infty[\times S^1$ where NN_Γ is the normal bundle to N_Γ in $TU\mathbb{H}^3$, and
- a diffeomorphism $\alpha :]0, \infty[\times S^1 \rightarrow \Omega \setminus \{p_0\}$,

such that:

- $\hat{i} \circ \alpha = \text{Exp} \circ \sigma$ where $\text{Exp} : TU\mathbb{H}^3 \rightarrow U\mathbb{H}^3$ is the exponential mapping on $U\mathbb{H}^3$, and
- $\sigma(t, e^{i\theta})$ tends to zero in the C_{loc}^∞ topology as t tends to infinity.

Next, we say that Σ est **asymptotically tubular of finite order near $p_0 \in \mathcal{P}$** if and only if there existe $\lambda \in \mathbb{N}$ such that Σ is asymptotically tubular of order λ near p_0 . We say that Σ is **asymptotically tubular of finite order** if and only if it is asymptotically tubular of finite order near every point of \mathcal{P} .

We now obtain the following result:

Theorem 3.1.4

Let S be a Riemann surface and let $\mathcal{P} \subseteq S$ be a discrete subset such that $S \setminus \mathcal{P}$ is of hyperbolic type. Let $\varphi : S \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ be locally conformal in $S \setminus \mathcal{P}$. Let i be the unique solution of the Plateau problem $(S \setminus \mathcal{P}, \varphi)$. Let $p_0 \in \mathcal{P}$ be an arbitrary point, and suppose that φ has a critical point of order k at p_0 . Then, $\Sigma = (S \setminus \mathcal{P}, i)$ is asymptotically tubular of order k near p_0 .

We should not forget that critical points of order 1 are permitted, even though they are not really critical points in the strict sense of the term. We may also obtain a converse to this result:

Theorem 3.1.5

Let S be a surface and let $\mathcal{P} \subseteq S$ be a discrete subset. Let $i : S \setminus \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{H}^3$ be an immersion such that $\Sigma = (S \setminus \mathcal{P}, i)$ is a k -surface. Let \hat{i} be the Gauss lifting of i . Let $\vec{n} : U\mathbb{H}^3 \rightarrow \partial_\infty \mathbb{H}^3 \cong \hat{\mathbb{C}}$ de the Gauss-Minkowski application and define φ by:

$$\varphi = \vec{n} \circ \hat{i}$$

Finally, let \mathcal{H} be the holomorphic structure on $S \setminus \mathcal{P}$ induced by φ .

Let $p_0 \in \mathcal{P}$ be an arbitrary point. Suppose that Σ is asmpotically tubular of order λ near p_0 . There exists a unique holomorphic structure $\tilde{\mathcal{H}}$ on $(S \setminus \mathcal{P}) \cup \{p_0\}$ and a unique application $\tilde{\varphi} : (S \setminus \mathcal{P}) \cup \{p_0\} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ such that $\tilde{\mathcal{H}}$ and $\tilde{\varphi}$ extend \mathcal{H} and φ respectively. Moreover, $\tilde{\varphi}$ has a critical point of order λ at p_0 .

These two results permit us to study the moduli spaces of k -surfaces which are asymptotically tubular of finite order in terms of ramified coverings of Riemann surfaces by $\hat{\mathbb{C}}$.

◇

0.5 Homomorphisms of fundamental groups.

Let M be a compact three dimensional manifold of strictly negative sectional curvature. Let Σ be a compact Riemann surface of hyperbolic type (ie. of genus greater than or equal to 2). Let $Q_0 \in \Sigma$ and $P_0 \in M$ be base points. In this chapter, we will study homomorphisms $\theta : \pi_1(\Sigma, Q_0) \rightarrow \pi_1(M, P_0)$.

Let \tilde{M} be the universal cover of M . \tilde{M} is a Hadamard manifold. Next, let $\tilde{P}_0 \in \tilde{M}$ a lifting of the point P_0 . The group $\pi_1(M, P_0)$ acts canonically on $(\tilde{M} \cup \partial_\infty \tilde{M}, \tilde{P}_0)$. We say that a subgroup $\Gamma \subseteq \pi_1(M, P_0)$ is *non-elementary* if and only if it does not have a fixed point in $\tilde{M} \cup \partial_\infty \tilde{M}$. Otherwise, we say that it is elementary. In fact, in our case, since M is compact and of strictly negative sectional curvature, the only elementary subgroups of $\pi_1(M, P_0)$ are those which are isomorphic either to \mathbb{Z} or to $\{0\}$. Moreover, since M does not contain a totally geodesic immersed torus, these are precisely the commutative subgroups of $\pi_1(M, P_0)$. Thus, to say that a subgroup $\Gamma \in \pi_1(M, P_0)$ is non-elementary is equivalent to saying that it is different from \mathbb{Z} and $\{0\}$ or that it is non-commutative. Similarly, for Γ an arbitrary group, and for $\theta : \Gamma \rightarrow \pi_1(M, P_0)$ a homomorphism, we say that θ is *non-elementary* if and only if its image is.

The group $\pi_1(M, P_0)$ acts faithfully on \tilde{M} and on $\partial_\infty \tilde{M}$. We can thus view it as a subgroup of $\text{Homeo}^+(\partial_\infty \tilde{M})$, the groupe of homéomorphismes of $\partial_\infty \tilde{M}$ which preserve the orientation of $\partial_\infty \tilde{M}$. Denote by S^2 the sphere of radius 1 in \mathbb{R}^3 . Friberg's theorem (theorem 4.5.1) informs us that there exists a retraction of $\text{Homeo}^+(S^2)$ to $\text{SO}(3, \mathbb{R})$ which leaves $\text{SO}(3, \mathbb{R})$ invariant. It follows that the fundamental group of $\text{Homeo}^+(S^2)$ (and thus of $\text{Homeo}^+(\partial_\infty \tilde{M})$) is isomorphic to \mathbb{Z}_2 . In otherwords, we obtain the follow short exact sequence:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{i} \widetilde{\text{Homeo}}^+(\partial_\infty \tilde{M}) \xrightarrow{\pi} \text{Homeo}^+(\partial_\infty \tilde{M}) \rightarrow 0$$

For Γ an arbitrary group, and for $\varphi : \Gamma \rightarrow \text{Homeo}^+(\partial_\infty \tilde{M})$, we define a *lifting* of φ in $\widetilde{\text{Homeo}}^+(\partial_\infty \tilde{M})$ to be a homomorphism $\hat{\varphi} : \Gamma \rightarrow \widetilde{\text{Homeo}}^+(\partial_\infty \tilde{M})$ such that:

$$\pi \circ \hat{\varphi} = \varphi$$

where $\pi : \widetilde{\text{Homeo}}^+(\partial_\infty \tilde{M}) \rightarrow \text{Homeo}^+(\partial_\infty \tilde{M})$ is the canonical projection. We now make the following definition:

Definition 4.1.1

Let $\tilde{\Sigma}$ be the universal covering of Σ . A **θ -equivariant Plateau problem** is a function $\varphi : \tilde{\Sigma} \rightarrow \partial_\infty \tilde{M}$ such that, for every $\gamma \in \pi_1(\Sigma, Q_0)$ one has:

$$\varphi \circ \gamma = \theta(\gamma) \circ \varphi$$

If we suppose for the moment that M is of constant sectional curvature equal to -1 , we obtain $\tilde{M} = \mathbb{H}^3$. The ideal boundary $\partial_\infty \mathbb{H}^3$ carries canonically the structure of the Riemann sphere $\hat{\mathbb{C}}$. Moreover, since the action of the group of isometries of \mathbb{H}^3 on $\partial_\infty \mathbb{H}^3$ coincides with that of $PSL(2, \mathbb{C})$ on $\hat{\mathbb{C}}$, we may work with $PSL(2, \mathbb{C})$ instead of $\text{Homeo}^+(\partial_\infty \tilde{M})$. The result [16] of Gallo, Kapovich and Marden translates in our framework into the following theorem:

Theorem 4.1.2 [Gallo, Kapovich, Marden, 2000]

Suppose that M is of constant sectional curvature equal to -1 and that θ is non-elementary. There exists a θ -equivariant Plateau problem φ if and only if θ lifts to a homomorphism $\hat{\theta}$ of $\pi_1(\Sigma, Q_0)$ into $\mathbb{P}\tilde{S}L(2, \mathbb{C})$.

Since Σ is of hyperbolic type, its universal cover is the Poincaré disc \mathbb{D} . The theorem 2.1.1 gives us the existence of solutions to the Plateau problem with constant Gaussian curvature in this case, and we obtain the following corollary:

Corollary 4.1.3

Suppose that M is of constant sectional curvature equal to -1 and that θ is non-elementary. For every $k \in (0, 1)$, there exists an immersion $i : \Sigma \rightarrow M$ such that the immersed surface (Σ, i) is of constant Gaussian curvature k if and only if θ lifts to a homomorphism $\hat{\theta}$ of $\pi_1(\Sigma, Q_0)$ into $\mathbb{P}\tilde{S}L(2, \mathbb{C})$.

In this chapter, we obtain the following analogous result:

Theorem 4.1.4

Suppose that the sectional curvature of M is less than or equal to -1 . Suppose that θ is non-elementary and lifts to a homomorphism $\hat{\theta}$ of $\pi_1(\Sigma, Q_0)$ into $\widetilde{\text{Homeo}}^+(\partial_\infty \tilde{M})$. Then, there exists a θ -equivariant Plateau problem.

Next, using the same reasoning as in the proof of the theorem 7.3.1 in [34], we obtain the following corollary:

Corollary 4.1.5

Suppose that the sectional curvature of M is less than or equal to -1 . Suppose that θ is non-elementary and lifts to a homomorphism $\hat{\theta}$ of $\pi_1(\Sigma, Q_0)$ into $\widetilde{\text{Homeo}}^+(\partial_\infty \tilde{M})$. Then, there exists an immersion $i : \Sigma \rightarrow M$ such that the immersed surface (Σ, i) is locally strictly convex.

Problèmes spéciaux legendriens

1.1 Présentation.

SOIT M une variété riemannienne et soit $\Sigma = (S, i) \subseteq M$ une hypersurface localement strictement convexe immergée dans M et notons II la seconde forme fondamentale de Σ . Dans le reste de ce chapitre, par abus de langage, on va noter convexe pour dire localement strictement convexe. On définit $\kappa_{SL}(\Sigma)$, la *courbure spéciale lagrangienne* (courbure SL) de la hypersurface Σ par :

$$\kappa_{SL}(\Sigma) = \text{Arg}(\text{Det}(I + iII)) = \sum_{i=1}^n \arctan(\lambda_i)$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de II . Au premier abord, cette définition n'a pas l'air d'être très intuitive, mais elle est l'analogue de l'équation spéciale lagrangienne classique. En particulier, en prenant en compte les travaux [23] d'Harvey et Lawson, on peut montrer que ce problème provient d'une n -forme sur le fibré unitaire UM de M .

Soit W la structure de contact canonique sur UM . Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on construit une n -forme complexe Ω_θ sur W qui se restreint à une forme spéciale lagrangienne sur toute

fibres. En général, pour $\hat{\Sigma}$ une sous-variété immergée dans UM on dit qu'elle est *spéciale légendrienne* (où SL) si et seulement si elle est légendrienne et la restriction de $\text{Re}(\Omega_\theta)$ à $T\hat{\Sigma}$ s'annule. Pour $N \in U_p M$, on note $N^\perp \subseteq T_p M$ l'espace orthogonal à N dans $T_p M$. Il existe un isomorphisme canonique :

$$i_N : W_N \rightarrow N^\perp \oplus N^\perp$$

On dit que la sous-variété $\hat{\Sigma}$ est *positive* (resp. *non-négative*) si et seulement si, pour tout $N \in \hat{\Sigma}$ l'image de $T_N \hat{\Sigma}$ sous l'action de i_N est le graphe d'une matrice définie positive (resp. non-négative). On va noter $SL+$ pour dire spéciale légendrienne positive et SL_0+ pour dire spéciale légendrienne non-négative.

En général, pour $f : S \rightarrow M$ une immersion convexe de codimension 1 d'une variété S dans une autre variété M , si l'on note N le champ de vecteurs normal extérieur à S dans M , alors on définit le *relevé de Gauss* \hat{f} de f par :

$$\hat{f} = N$$

On définit la *relevé de Gauss* $\hat{\Sigma}$ de la surface immergée $\Sigma = (S, f)$ par :

$$\hat{\Sigma} = (S, \hat{f})$$

Dans ce chapitre, nous proposons d'utiliser la stratégie de [32] dans ce nouveau cadre. On va présenter des recherches qui sont toujours incomplètes et en pleine évolution, et donc ce chapitre sera plutôt un recueil des résultats obtenus jusqu'au jour actuel.

Dans la section 1.2 on définit les formes spéciales lagrangiennes sur $E \oplus E$, pour E un espace vectoriel réel, et l'on rappelle les résultats classiques qui servent à montrer que ces formes ne dépendent pas de la base orthonormée orientée de E choisie pour les construire.

Dans la section 1.3, pour une variété riemannienne M de dimension n , on étudie la géométrie de UM , le fibré unitaire en M . On rappelle d'abord qu'on peut munir UM canoniquement d'une structure de contact W , qui est une distribution de dimension $2n$ dans TUM . Dans la section 1.4, on construit, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, une n -forme sur UM qui se restreint à une n -forme spéciale lagrangienne sur chaque fibre de W . En particulier, bien que cette forme ne soit pas fermée, on montre qu'elle est fermée relativement à W lorsque M est à courbure sectionnelle constante. De plus, on a de bonnes raisons de croire que cette forme reste suffisamment fermée même dans le cas où M est une variété d'Einstein.

Dans la section 1.5, on définit la courbure SL d'une hypersurface convexe Σ immergée dans une variété riemannienne M de dimension n , et l'on montre l'équivalence entre les hypersurfaces convexes à courbure SL constante (qui sont des cas particuliers des hypersurfaces de Weingarten) et la famille de sous-variétés immergées $SL+$ dans UM . On étudie dans la section 1.5.2 les formes de dégénérescence qui peuvent apparaître. Dans la reste de cette section, on construit des exemples de telles surfaces. Si M est une variété compacte de dimension n à courbure sectionnelle constante $-\kappa < 0$, il existe une variété \hat{M} de dimension $n + 1$ et un plongement totalement géodésique $i : M \rightarrow \hat{M}$ canoniques. On appelle \hat{M} la *prolongation* de M . On obtient le résultat suivant :

Lemme 1.1.1

Soit M une variété compacte de dimension n et à courbure sectionnelle constante $-\kappa < 0$. Soit ensuite \hat{M} la prolongation de M et soit $i : M \rightarrow \hat{M}$ le plongement totalement géodésique canonique de M dans \hat{M} . Soit N le champ de vecteurs normal en M dans \hat{M} . Notons $\text{Exp} : T\hat{M} \rightarrow \hat{M}$ l'application exponentielle. Pour tout $t \in]0, \infty[$ posons :

$$i_t = \text{Exp} \circ N$$

Alors $M_t = (M, i_t)$ est une hypersurface immergée convexe dans \hat{M} à courbure spéciale lagrangienne constante. De plus, si l'on note θ_t la courbure spéciale lagrangienne de M_t , on obtient :

$$\theta_t = n \arctan \left(\sqrt{\kappa} \tanh \left(\frac{\sqrt{\kappa} R}{2} \right) \right)$$

Sous certaines conditions, on peut déformer ces surfaces et obtenir ainsi des familles lisses d'hypersurfaces à courbure spéciale lagrangienne constante. On va aussi étudier les hypersurfaces de révolution dans \mathbb{R}^n et dans \mathbb{H}^n .

Dans la section 1.6 on étudie une forme de dégénérescence de telles hypersurfaces. Soit M une variété riemannienne et soit $\pi : UM \rightarrow M$ la projection canonique. Soit $\hat{\Sigma}$ une sous-variété immergée dans UM et soit $N \in \hat{\Sigma}$. On dit que $\hat{\Sigma}$ est verticale en N si et seulement si :

$$\text{Dim} \left(\text{Ker}(T\pi) \cap T_N \hat{\Sigma} \right) > 0$$

Pour $\hat{\Sigma}$ une sous-variété immergée SL_0+ dans UM , on dit qu'elle est une *sous-variété rideau* si et seulement si elle est verticale partout. Soit $\hat{\Sigma} = (S, i)$ une sous-variété immergée $SL+$ dans UM et soit $\Sigma = (S, i)$ une hypersurface immergée dans M telle que $\hat{\Sigma}$ soit le relevé de Gauss de Σ . Soit II la seconde forme fondamentale de Σ et définissons la fonction $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$h = \text{Log}(\text{Det}(I + A^2))$$

En fait, f peut être construit directement en termes de $\hat{\Sigma}$. Soit $B \in]0, \infty[$. On dit que $\hat{\Sigma}$ est un *relevé B-majoré à l'infini* si et seulement s'il existe $P \in \hat{\Sigma}$ et $R \in]0, \infty[$ tels que, pour tout $Q \in \hat{\Sigma}$:

$$d(P, Q) \geq R \Rightarrow h(Q) \leq B$$

Ensuite, on a la définition suivante :

Définition 1.1.2

Soit $\hat{\Sigma}$ une sous-variété immergée complète dans UM . Alors, on dit que $\hat{\Sigma}$ est **B-sympathique** si et seulement si elle satisfait à une des trois conditions suivantes :

- (i) $\hat{\Sigma}$ compacte.
- (ii) Il existe un groupe d'isométries G agissant sur M (et donc sur UM) tel que le quotient de $\hat{\Sigma}$ sous l'action de G soit compact.
- (iii) $\hat{\Sigma}$ est un relevé B -majoré à l'infini.

La B-sympathie d'une sous-variété fait que, si $\|h\| > B$, alors la fonction h atteint son maximum en un point dans S . On obtient maintenant le résultat suivant :

Lemme 1.1.3

Soit M une variété à courbure constante et soit $(\hat{\Sigma}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de sous-variétés B-sympathiques immergées dans UM et $SL+$ par rapport à la forme spéciale legendrienne Ω_θ . Supposons que $\hat{\Sigma}_n$ tend vers $\hat{\Sigma}_0$ lorsque n tend vers l'infini et supposons que $\hat{\Sigma}_0$ est verticale en un point. Alors, si M est à courbure positive, ou si θ est différent de $k\pi/2$ pour k entier, alors $\hat{\Sigma}_0$ est verticale partout.

On étudie ensuite la géométrie des sous-variétés rideaux. D'abord, on définit la classe de sous-variétés suivante :

Définition 1.1.4

Soit M une variété riemannienne et soit $\Sigma \subseteq M$ une sous-variété immergée. Notons II_Σ la seconde forme fondamentale de Σ . On dit que la sous-variété Σ est à **courbure spéciale lagrangienne constante** θ si et seulement si pour tout champ de vecteurs \mathbf{N} normal à Σ :

$$\text{Arg}(\text{Det}(I + i\langle II_\Sigma, \mathbf{N} \rangle)) = \theta$$

On obtient alors le résultat suivant :

Lemme 1.1.5

Soit $\hat{\Sigma} = (S, \hat{\iota})$ une variété rideau dans UM . Soit $\hat{P} \in S$ et supposons que la valeur de $\text{Dim}(T\hat{\Sigma} \cap VUM)$ est localement constante dans un voisinage P . Alors, il existe un voisinage Ω de P dans S et $\Sigma = (S_1, \iota)$ une sous-variété immergée dans M tels que :

- (i) La sous-variété immergée $\hat{\Sigma}' = (\Omega, \hat{\iota})$ coïncide avec $U\Sigma$, le fibré unitaire normal au dessus de Σ dans UM , et
- (ii) Il existe un entier k tel que la sous-variété Σ soit à courbure spéciale lagrangienne constante $\theta - k\pi/2$.

Finalement, et ce qui est le résultat principal de ce chapitre, dans la section 1.7 on montre un résultat de compacité des hypersurfaces à courbure spéciale lagrangienne constante :

Théorème 1.1.6

Soit M une variété complète à géométrie bornée. Ensuite, soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points dans M et soit $(\Sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'hypersurfaces convexes immergées dans M à courbure SL constante égale à θ telle que Σ_n passe par P_n pour tout n . Soit $(\hat{\Sigma}_n, \hat{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de relevés de Gauss de cette suite et supposons que $\hat{\Sigma}_n$ est complète. Alors, après l'extraction éventuelle d'une sous-suite, il existe $(\hat{\Sigma}_0, \hat{P}_0)$ une sous-variété immergée SL_0+ dans UM telle que $(\hat{\Sigma}_n, P_n)$ tende C^∞ vers $(\hat{\Sigma}_0, P_0)$ lorsque n tend vers l'infini.

Ensuite, supposons que la courbure sectionnelle de M est constante. Si M est à courbure sectionnelle positive, ou si θ est différent de $k\pi/2$ pour k entier et si Σ_n est B-sympathique pour tout n , alors $\hat{\Sigma}_0$ est, soit le relevé de Gauss d'une hypersurface convexe à courbure SL constante, soit une variété rideau.

On va démontrer ce résultat en regardant à la loupe, en utilisant le résultat [14] de Corlette, et en prenant compte du résultat [56] de Yuan qui nous dit heuristiquement que sur les très petites échelles, une sous-variété immergée $SL+$ est plate.

◇

1.2 Des structures spéciales lagrangiennes classiques.

1.2.1 Définitions.

On étudie l'espace $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$, pour $n > 0$. Soit J la structure complexe sur $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$ définie par :

$$J(x, y) = (-y, x)$$

Définissons ensuite les fonctions des coordonnées complexes $z^1, \dots, z^n : \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ par :

$$z^k(x, y) = x^k + iy^k$$

On définit également les fonctions $\bar{z}^1, \dots, \bar{z}^n : \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ par :

$$\bar{z}^k(x, y) = x^k - iy^k$$

Ensuite, on définit la forme symplectique canonique ω sur $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$ par :

$$\omega = \frac{i}{2} \sum_{k=1}^n dz^k \wedge d\bar{z}^k$$

Maintenant, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on définit la forme Ω_θ sur $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$ par :

$$\Omega_\theta = e^{i\theta} dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n$$

On appelle Ω_θ la forme spéciale lagrangienne sur $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$.

1.2.2 $\text{Im}(\Omega_\theta)$ est une calibration.

On va rappeler que $\text{Im}(\Omega_\theta)$ définit une calibration des n -plans de $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$. D'abord, on remarque qu'un endomorphisme \mathbb{C} -linéaire de \mathbb{C}^n est aussi un endomorphisme \mathbb{R} -linéaire de cet espace (qui est un espace réel de dimension $2n$) et on rappelle le résultat suivant :

Lemme 1.2.1

Soit $M : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ un endomorphisme \mathbb{C} -linéaire. Alors :

$$\text{Det}_{\mathbb{R}}(M) = |\text{Det}_{\mathbb{C}}(M)|^2$$

Ensuite, en suivant Harvey et Lawson, on obtient le résultat suivant :

Lemme 1.2.2 [Harvey, Lawson, 1982]

Soit X_1, \dots, X_n des vecteurs dans $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$. Alors, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$|\Omega_\theta(X_1, \dots, X_n)|^2 = \|X_1 \wedge \dots \wedge X_n \wedge JX_1 \wedge \dots \wedge JX_n\|$$

Puis, on rappelle l'inégalité d'Hadamard :

Lemme 1.2.3 [Hadamard]

Soit X_1, \dots, X_k des vecteurs dans \mathbb{R}^n . Alors :

$$\|X_1 \wedge \dots \wedge X_k\| \leq \|X_1\| \dots \|X_k\|$$

Enfin, si X_1, \dots, X_k sont tous non-nuls, alors on l'égalité si et seulement s'ils sont orthogonaux.

On voit alors que, pour tout θ , la forme $\text{Re}(\Omega_\theta)$ définit une calibration de n-plans de $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$:

Corollaire 1.2.4 [Harvey, Lawson, 1982]

Soit $P \subseteq \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$ un n-plan dans $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$ et soit Vol_P la forme de volume de P . Alors, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$|\text{Re}(\Omega_\theta)| \leq |\text{Vol}_P|$$

et on a l'égalité si et seulement si :

$$\omega|_P = 0, \quad \text{Im}(\Omega_\theta)|_P = 0$$

Démonstration : Soit X_1, \dots, X_n une base orthonormée de P . Alors :

$$\begin{aligned} |\text{Re}(\Omega_\theta)(X_1, \dots, X_n)|^2 &\leq |\Omega_\theta(X_1, \dots, X_n)|^2 \\ &\leq \|X_1 \wedge \dots \wedge X_n \wedge JX_1 \wedge \dots \wedge JX_n\| \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

Comme $\text{Vol}_P(X_1, \dots, X_n) = 1$, le premier résultat en découle. Ensuite, on voit qu'on a l'égalité si et seulement si $\text{Im}(\Omega_\theta)|_P = 0$ et, pour tout i et pour tout j :

$$\langle JX_i, X_j \rangle = 0$$

Cette dernière condition est satisfaite si et seulement si $\omega|_P = 0$ et le deuxième résultat en découle. \square

On dit qu'un n-plan satisfaisant à ces deux conditions est spécial lagrangien.

1.2.3 L'invariance de Ω_θ .

Ensuite, on peut montrer l'invariance de Ω_θ :

Lemme 1.2.5

Soit $M : \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$ une application \mathbb{C} -linéaire de $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$ (c'est-à-dire, une application linéaire qui commute avec J). Alors, pour tout θ :

$$M^*\Omega_\theta = \text{Det}_{\mathbb{C}}(M)\Omega_\theta$$

On obtient alors le résultat suivant :

Corollaire 1.2.6

Soit $P \subseteq \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$ un n -plan lagrangien et soit e_1, \dots, e_n une base orthonormée de P . Pour chaque i , posons $f_i = Je_i$. Comme P est lagrangien, on voit en particulier qu'il est totalement réel et donc que $e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n$ est une base de $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$. Soit $e^1, \dots, e^n, f^1, \dots, f^n$ la base de $(\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n)^*$ duale à cette base. Pour chaque k posons :

$$dw^k = e^k + if^k$$

Alors, il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\Omega_\theta = e^{i\varphi} e^{i\theta} dw^1 \wedge \dots \wedge dw^n$$

Démonstration : Comme avant, soit $A : P \rightarrow \mathbb{R}^n$ tel que :

$$Ae_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Ensuite, prolongeons A en un endomorphisme \mathbb{C} -linéaire M de $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$. On voit que :

$$\begin{aligned} M^*dx^i &= e^i, M^*dy^i = f^i \\ \Rightarrow M^*dz^i &= dw^i \end{aligned}$$

Ensuite si l'on note M_{ij}^{-1} la matrice de M^{-1} relativement à la base complexe $\partial x_1, \dots, \partial x_n$ de $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$, et si l'on note h la métrique hermitienne canonique sur $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$, comme P est lagrangien, on obtient :

$$\begin{aligned} ((M^{-1})^T \overline{M}^{-1})_{ij} &= \sum_{k=1}^n M_{ki}^{-1} \overline{M_{kj}^{-1}} \\ &= h(M^{-1} \frac{\partial}{\partial x_i}, M^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j}) \\ &= h(e_i, e_j) \\ &= \delta_{ij} \\ \Rightarrow \overline{M} M^T &= I \end{aligned}$$

En particulier, on voit que $|\text{Det}(M)| = 1$ et donc qu'il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\text{Det}(M) = e^{-i\varphi}$$

et, par le lemme précédent, on obtient :

$$\Omega_\theta = \text{Det}(M)^{-1} M^* \Omega_\theta = e^{i\varphi} e^{i\theta} dw^1 \wedge \dots \wedge dw^n$$

et le résultat en découle. \square

On peut maintenant en déduire l'indépendance de Ω_θ de la base orthonormée de \mathbb{R}^n choisie :

Corollaire 1.2.7

Soit e_1, \dots, e_n une base orthonormée orientée de \mathbb{R}^n . Pour chaque i , posons $f_i = J e_i$. Ensuite, soit $e^1, \dots, e^n, f^1, \dots, f^n$ la base duale à $e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n$ et pour chaque i posons :

$$dw^i = e^i + i f^i$$

Alors, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\Omega_\theta = e^{i\theta} dw^1 \wedge \dots \wedge dw^n$$

Démonstration : En effet, dans ce cas-ci, la matrice M est réelle, et comme elle préserve l'orientation, on voit que :

$$\text{Det}(M) = 1$$

Par le corollaire précédent, le résultat en découle. \square

\diamond

1.3 Le fibré tangent et le fibré unitaire d'une variété.

1.3.1 Définitions.

Soit M une variété riemannienne. Dans la suite, on va construire des structures géométriques sur des distributions sur UM . Afin de comprendre les propriétés différentielles de ces structures (en particulier, si elles sont fermées ou pas), on calcule la dérivée covariante de Levi-Civita sur TM . Les définitions faites dans cette section sont récapitulées dans l'annexe C.

On note $\pi : TM \rightarrow M$ la projection canonique. On note $HTM \subseteq TTM$ le *fibré horizontal* de la dérivée covariante de M . On note $VTM \subseteq TTM$ le *fibré vertical*, c'est-à-dire, le noyau de π dans TTM . On sait que TTM est la somme directe de ces deux fibrés :

$$TTM = HTM \oplus VTM$$

On sait également que chacun de ces deux fibrés est canoniquement isomorphe à π^*TM . Notons i_H (resp. i_V), une section de $\text{End}(HTM, \pi^*TM)$ (resp. $\text{End}(VTM, \pi^*TM)$) l'isomorphisme de HTM (resp. VTM) avec π^*TM . On obtient alors un isomorphisme :

$$i_H \oplus i_V : TTM \rightarrow \pi^*TM \oplus \pi^*TM$$

Pour $X, Y \in \Gamma(M, TM)$ on définit $\{X, Y\} \in \Gamma(TM, TTM)$ par :

$$i_H \oplus i_V \{X, Y\} = (\pi^*X, \pi^*Y)$$

En trivialisant localement TM , on voit que tout champ de vecteurs sur TTM s'exprime (au moins localement) en termes d'une combinaison linéaire de tels champs de vecteurs. De la même façon, pour $p \in M$ et pour $X, Y, q \in T_pM$ on définit $\{X, Y\}_q \in T_qTTM$ par :

$$(i_H \oplus i_V)_q \{X, Y\}_q = (\pi_q^*X, \pi_q^*Y)$$

Enfin, pour X un champ de vecteurs sur M , définissons X^H et X^V par :

$$\begin{aligned} X^H &= \{X, 0\} \\ X^V &= \{0, X\} \end{aligned}$$

1.3.2 Le fibré unitaire de M .

Notons UM le fibré unitaire de M :

$$UM = \{X \in TM \mid \|X\| = 1\}$$

On définit les deux champs tautologiques T^H, T^V , qui sont des sections de TTM sur TM , par :

$$\begin{aligned} T^H(q) &= \{q, 0\} \\ T^V(q) &= \{0, q\} \end{aligned}$$

Soit $i : UM \rightarrow TM$ le plongement canonique et notons HUM et VUM les restrictions respectivement des fibrés HTM et VTM à la variété UM :

$$\begin{aligned} HUM &= i^*HTM \\ VUM &= i^*VTM \end{aligned}$$

Les champs i^*T^H et i^*T^V ne s'annulent pas et définissent alors des sous-fibrés de dimension 1 respectivement de HUM et de VUM . Pour simplifier la notation, on va appeler aussi ces champs respectivement T^H et T^V et on va noter N^HUM (resp. N^VUM) le sous-fibré de HUM (resp. VUM) engendré par T^H (resp. T^V). Ensuite, on définit les sous-fibrés E^HUM et E^VUM respectivement de HUM et de VUM par :

$$\begin{aligned} E^HUM &= N^HUM^\perp = \langle T^H \rangle^\perp \\ E^VUM &= N^VUM^\perp = \langle T^V \rangle^\perp \end{aligned}$$

On a alors l'identification :

$$i_* : TUM \simeq HUM \oplus E^VUM$$

De nouveau, pour simplifier la notation, on va considérer HUM , E^VUM et VUM également comme des sous-fibrés de TUM . Enfin, on définit le sous-fibré $WUM \subseteq TUM$ par :

$$i_*WUM = E^HUM \oplus E^VUM$$

et on appelle WUM le *fibré de contact* de UM .

1.3.3 Le crochet de Lie, la dérivée covariante et la structure de contact.

Nous rappelons le résultat suivant sur les crochets de Lie des champs de vecteurs sur TTM :

Lemme 1.3.1

On a la relation suivante :

$$[\{X, Y\}, \{U, V\}](q) = \{[X, U], \nabla_X V - \nabla_U Y - R_{XU}q\}$$

où ∇ est la dérivée covariante de Levi-Civita sur M , le tenseur R est son tenseur de courbure et q est un point quelconque de TM .

Le lecteur intéressé peut trouver une démonstration dans l'annexe C. On définit maintenant la métrique \tilde{g} sur le fibré TTM par :

$$\tilde{g}(\{X, Y\}, \{X, Y\}) = \langle X, X \rangle + \langle Y, Y \rangle$$

On note alors ∇ la dérivée covariante de Levi-Civita sur TTM associée à cette métrique, et, en appliquant la formule de Koszul, on obtient le résultat suivant :

Lemme 1.3.2

On a la relation suivante :

$$(\nabla_{\{X, Y\}} \{U, V\})(q) = \left\{ \nabla_X U + \frac{1}{2} R_{qV} X + \frac{1}{2} R_{qY} U, \nabla_X V - \frac{1}{2} R_{XU} q \right\}$$

Enfin, on obtient le résultat suivant concernant la dérivée covariante et la dérivée de Lie de T^V :

Lemme 1.3.3

On a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} [\{X, Y\}, T^V] &= \{0, Y\} \\ \nabla_{\{X, Y\}} T^V &= \{0, Y\} \end{aligned}$$

Le lecteur intéressé peut trouver une démonstration dans l'annexe C.

Ces résultats nous permettent de montrer que le fibré WUM définit une structure de contact sur UM :

Lemme 1.3.4

La distribution WUM définit une structure de contact sur UM .

Une preuve est présentée dans l'annexe C. De plus, on peut calculer la forme symplectique sur WUM :

Corollaire 1.3.5

Soit ω la forme symplectique sur WUM . Alors, pour tout $\{X_1, X_2\}, \{Y_1, Y_2\} \in WUM$:

$$\omega(\{X_1, X_2\}, \{Y_1, Y_2\}) = \langle X_2, Y_1 \rangle - \langle X_1, Y_2 \rangle$$

Une démonstration est présentée dans l'annexe C. Par la suite, on va appeler WUM le fibré de contact de UM . On le notera W .

1.3.4 Une formule pour la dérivée covariante.

Maintenant, on peut montrer que ∇^W , la dérivée covariante de Levi-Civita de W (héritée de la dérivée covariante de Levi-Civita de TTM) peut être exprimée en termes de ∇^Σ pour Σ une hypersurface immergée dans M . En effet :

Lemme 1.3.6

Soit $\Sigma = (S, i)$ une hypersurface immergée dans M et soit $\hat{\Sigma} = (S, \hat{i})$ son relevé de Gauss. Soit ensuite ∇^Σ la dérivée covariante de Σ . Alors, pour tout X, Y, Z des champs de vecteurs sur Σ :

$$\nabla_X^W \{Y, Z\} = \{\nabla_X^\Sigma Y, \nabla_X^\Sigma Z\}$$

Démonstration : Soit $P \in S$ et soit N le vecteur normal à Σ en P . On sait que la projection π_W dans $T_N T M$ coïncide avec la projection le long du plan $\langle \{N, 0\}, \{0, N\} \rangle$ engendré par les vecteurs $\{N, 0\}$ et $\{0, N\}$. En même temps, on sait que la projection π_Σ dans $T_P M$ coïncide avec la projection le long de N . On voit alors que pour $U, V \in T_P M$:

$$\pi_W \{U, V\} = \{\pi_\Sigma U, \pi_\Sigma V\}$$

Maintenant, par le lemme 1.3.2, on voit que :

$$\begin{aligned} \nabla_X^W \{Y, Z\} &= \pi_W \{\nabla_X Y, \nabla_X Z\} \\ &= \{\pi_\Sigma \nabla_X Y, \pi_\Sigma \nabla_X Z\} \\ &= \{\nabla_X^\Sigma Y, \nabla_X^\Sigma Z\} \end{aligned}$$

et le résultat en découle. \square

◇

1.4 Structures spéciales legendriennes sur le fibré unitaire.

1.4.1 Définitions.

Soit M une variété orientée et soit ∇ sa dérivée covariante. Notons R son tenseur de courbure de Riemann. On remarque que si M est à courbure sectionnelle constante égale à κ alors :

$$\langle R_{XY} Z, W \rangle = \kappa (\langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle)$$

Ensuite, soit $q_p \in UM$ et soit E_1, \dots, E_N un repère orienté de M autour de $p \in M$ telle que :

$$E_N(p) = q_p$$

E_1^H, \dots, E_N^H est une base complexe de $T_{q_p} T M$. En même temps, on voit que E_1^H, \dots, E_{N-1}^H est une base complexe de WUM . De plus, pour tout i :

$$J E_i^H = E_i^V$$

On définit alors :

$$Z^i = \langle E_i^H + iE_i^V, \cdot \rangle$$

Ensuite, on définit la forme ω par :

$$\omega = \frac{i}{2} \sum_{i=1}^N Z^i \wedge \bar{Z}^i$$

On voit que ω est la forme symplectique canonique sur TM . Puis, pour chaque $\theta \in \mathbb{R}$, on définit :

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}_\theta &= e^{i\theta} Z^1 \wedge \dots \wedge Z^n \\ \Omega_\theta &= i(-1)^N (i_{TV} \hat{\Omega}_\theta) \end{aligned}$$

On voit que $\hat{\Omega}_\theta$ ne dépend pas du repère orthonormé, orienté de M choisi, et que $\hat{\Omega}_\theta$ définit une structure spéciale lagrangienne sur chaque fibre de TTM (La N -forme $\hat{\Omega}_\theta$ n'est pas forcément fermée. En fait, elle est même rarement fermée). En même temps, on peut montrer que :

$$\Omega_\theta(q_p) = e^{i\theta} Z^1 \wedge \dots \wedge Z^{N-1}$$

et donc Ω_θ définit une structure spéciale legendrienne sur chaque fibre de WUM .

1.4.2 La dérivée extérieure de Ω_θ .

On veut calculer la dérivée extérieure de Ω_θ . D'abord, on voit que :

$$\begin{aligned} d\Omega_\theta &= i(-1)^N d(i_{TV} \hat{\Omega}_\theta) \\ &= i(-1)^N \mathcal{L}_{TV} \hat{\Omega}_\theta - i(-1)^N i_{TV} d\hat{\Omega}_\theta \end{aligned}$$

Ensuite, on a le résultat suivant :

Lemme 1.4.1

La restriction de $\hat{\Omega}_\theta$ à W s'annule. C'est-à-dire que, pour tout $U_1, \dots, U_N \in W$:

$$\hat{\Omega}_\theta(U_1, \dots, U_N) = 0$$

Démonstration : En effet, $\hat{\Omega}_\theta$ est une N -forme complexe alors que W est un sous-espace complexe de $E_H \oplus E_V$ de dimensions $N - 1$. Le résultat en découle. \square

On obtient ensuite le résultat suivant :

Lemme 1.4.2

La restriction de $\mathcal{L}_{TV} \hat{\Omega}_\theta$ à W s'annule. C'est-à-dire que, pour tout $U_1, \dots, U_N \in W$:

$$(\mathcal{L}_{TV} \hat{\Omega}_\theta)(U_1, \dots, U_N) = 0$$

Démonstration : Définissons $\Phi_t : \mathbb{R} \times TM \rightarrow TM$ par :

$$\Phi_t(t, q_p) = (e^t q)_p$$

Φ_t est le flot de T^V . Ensuite, pour tout X :

$$(\Phi_t)_* \{0, X\} = \{0, e^t X\} \circ \Phi_t$$

En particulier, Φ_t préserve $\langle T^V \rangle^\perp \subseteq VTM$. Soit X un champ de vecteurs sur M tel que $\nabla X(p) = 0$. Soit Y un autre champ de vecteurs sur M . $\{X, 0\}$ est un champ de vecteurs sur TM et, par définition, en le point $Y(p)$, on obtient :

$$\{X, 0\}(Y(p)) = TY_p \cdot X_p$$

Notons $T\Phi_t : TTM \rightarrow TTM$ l'action de Φ_t sur TTM . On obtient :

$$\begin{aligned} T\Phi_{t, Y(p)} \cdot \{X, 0\}(Y(p)) &= T\Phi_{t, Y(p)} \cdot TY_p \cdot X(p) \\ &= T(\Phi_t \circ Y)_p \cdot X_p \\ &= T(e^t Y)_p \cdot X_p \\ &= \{X, 0\}((\Phi_t \circ Y)(p)) \end{aligned}$$

Donc :

$$(\Phi_t)_* \{X, 0\} = \{X, 0\} \circ \Phi_t$$

En particulier, Φ_t préserve $\langle T^H \rangle^\perp$. L'application Φ_t envoie alors W en lui-même. Donc, $(\Phi_t)_* U_i \in W$ pour tout i et par le lemme précédent :

$$\begin{aligned} (\Phi_t)^* \hat{\Omega}_\theta(U_1, \dots, U_N) &= \hat{\Omega}_\theta((\Phi_t)_* U_1, \dots, (\Phi_t)_* U_N) \\ &= 0 \\ \Rightarrow \partial_t (\Phi_t)^* \hat{\Omega}_\theta(U_1, \dots, U_N) &= 0 \\ \Rightarrow \mathcal{L}_{T^V} \hat{\Omega}_\theta(U_1, \dots, U_N) &= 0 \end{aligned}$$

et le résultat en découle. \square

On voit alors que :

$$d\Omega_\theta|_W = -i(-1)^N i_{T^V} d\hat{\Omega}_\theta|_W$$

Maintenant, soit α_{ij}^k des fonctions définies sur M telles que :

$$\nabla E_i = \sum_{j,k} \alpha_{ij}^k E^j \otimes E_k$$

On a le résultat suivant :

Lemme 1.4.3

Soit $\pi : TM \rightarrow M$ est la projection canonique. Alors, pour tout i :

$$dZ^i = \sum_{j,k} \alpha_{ij}^k (\pi^* E^j) \wedge Z^k + i\pi^*(R..qE_i)$$

Démonstration : Soit $X : M \rightarrow TM$ une section de TM . On a :

$$\begin{aligned} (X^*Z^i)(U) &= Z^i(TX \cdot U) \\ &= Z^i(\{U, \nabla_X U\}) \\ &= E^i(U) + iE^i(\nabla_X U) \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned} d(X^*Z^i)(U, V) &= U(X^*Z^i)(V) - V(X^*Z^i)(U) - (X^*Z^i)([U, V]) \\ &= UE^i(V) + iUE^i(\nabla_V X) - VE^i(U) - iVE^i(\nabla_U X) \\ &\quad - E^i([U, V]) - iE^i(\nabla_{[U, V]} X) \\ &= (\nabla_U E^i)(V) - (\nabla_V E^i)(U) \\ &\quad + i(\nabla_U E^i)(\nabla_V X) - i(\nabla_V E^i)(\nabla_U X) \\ &\quad + iE^i(\nabla_U \nabla_V X - \nabla_V \nabla_U X - \nabla_{[U, V]} X) \\ &= \sum_{j,k} \alpha_{ij}^k E^j(U) [E^k(V) + iE^k(\nabla_V X)] \\ &\quad - \sum_{j,k} \alpha_{ij}^k E^j(V) [E^k(U) + iE^k(\nabla_U X)] \\ &\quad + iR_{UV} X E_i \\ &= \sum_{j,k} (\alpha_{ij}^k (\pi^* E^j) \otimes Z^k)(TX \cdot U, TX \cdot V) \\ &\quad - \sum_{j,k} (\alpha_{ij}^k (\pi^* E^j) \otimes Z^k)(TX \cdot V, TX \cdot U) \\ &\quad + i\pi^*(R_{UV} X E_i)(TX \cdot U, TX \cdot V) \end{aligned}$$

et le résultat en découle. \square

En particulier, en courbure constante, on obtient :

Corollaire 1.4.4

Si M est à courbure sectionnelle constante, alors :

$$dZ^i|_W = \sum_{j,k} \alpha_{ij}^k (\pi^* E^j) \wedge Z^k|_W$$

Démonstration : Soit $U, V \in W$, et notons :

$$U = \{U^H, U^V\}, \quad V = \{V^H, V^V\}$$

On sait que :

$$\langle U^H, q \rangle = \langle V^H, q \rangle = 0$$

et donc :

$$\pi^*(R_{UV} q E_i)(U, V) = 0$$

et le résultat en découle. \square

On voit alors que, dans ce cas ci, $\hat{\Omega}_\theta$ est fermée :

Corollaire 1.4.5

Si M est à courbure sectionnelle constante, alors $\hat{\Omega}_\theta$ est fermée.

Démonstration : Comme E_1, \dots, E_N est un repère orthonormé, on sait que, pour tout i et pour tout j :

$$\alpha_{ij}^i = 0$$

Mais, par le résultat précédent :

$$\begin{aligned} d\hat{\Omega}_\theta &= \sum_{i,j,k} e^{i\theta} (-1)^{i-1} Z^1 \wedge \dots \wedge \hat{Z}^i \wedge \alpha_{ij}^k (\pi^* E^j) \wedge Z^k \wedge \dots \wedge Z^N \\ &= \sum_{i,j} e^{i\theta} (-1)^{i-1} Z^1 \wedge \dots \wedge \alpha_{ij}^i (\pi^* E^j) \wedge Z^i \wedge \dots \wedge Z^N \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'où le résultat. \square

Donc, pour une variété à courbure constante, la forme Ω_θ est fermée relativement à W :

Corollaire 1.4.6

Si M est à courbure sectionnelle constante, alors Ω_θ est fermée relativement à W . C'est-à-dire que, pour tout $U_1, \dots, U_{N+1} \in W$:

$$d\Omega_\theta(U_1, \dots, U_{N+1}) = 0$$

Démonstration : En effet :

$$d\Omega|_W = i(-1)^{N+1} i_{T^v} d\hat{\Omega}_\theta|_W$$

Le résultat en découle par le corollaire précédent. \square

◇

1.5 Hypersurfaces à courbure SL constante.

1.5.1 Définitions.

Soit $\Sigma = (S, i)$ une hypersurface immergée dans \mathbb{H}^n et soit II la seconde forme fondamentale de Σ . On suppose que Σ est convexe et donc que II est définie positive. On définit κ_{SL} , la *courbure spéciale lagrangienne* (courbure SL) de Σ , par :

$$\kappa_{SL} = \text{Arg}(\text{Det}(I + iII)) = \arctan(\lambda_1) + \dots + \arctan(\lambda_n)$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de II . On s'intéresse aux hypersurfaces à courbure spéciale lagrangienne constante.

Pour $0 \leq k \leq n$, soit Ξ_k le kème fonction symétrique sur l'espace de matrices carrées de dimension n :

$$\text{Det}(I + tA) = \sum_{k=0}^n t^k \Xi_k(A)$$

On voit que Σ est à courbure SL constante si et seulement s'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\cos(\theta)(\Xi_0(II) - \Xi_2(II) + \dots) + \sin(\theta)(\Xi_1(II) - \Xi_3(II) + \dots) = 0$$

Les hypersurfaces à courbure SL constante sont alors des cas particuliers des hypersurfaces de Weingarten.

On va dire par la suite qu'un n -plan $P \subseteq WUM$ est *positif* (resp. *non-négatif*) si et seulement s'il existe une matrice A définie positive (resp. non-négative) telle que :

$$P = \{\{X, AX\} \mid X \in HUM\}$$

On va noter $SL+$ (resp. SL_0+) pour dire spécial lagrangien positif (resp. spécial lagrangien non-négatif). On obtient le résultat suivant :

Lemme 1.5.1

L'hypersurface Σ est une hypersurface convexe à courbure SL constante θ si et seulement s'il existe θ tel que son relevé de Gauss $\hat{\Sigma}$ est une sous-variété immergée $SL+$ relativement à la structure spéciale legendrienne (ω, Ω_θ) sur W .

Démonstration : Soit Σ une hypersurface convexe et soit $\hat{\Sigma}$ son relevé de Gauss. Soit $P \in S$ et soit N le vecteur normal à Σ en P . Si l'on note A la seconde forme fondamentale de Σ en P , on voit que :

$$T_N \hat{\Sigma} = \{\{X, AX\} \mid X \in T_P \Sigma\}$$

Puisque A est symétrique, le plan $T_N \hat{\Sigma}$ est legendrien. Ensuite, pour $\theta \in \mathbb{R}$, on voit que ce plan est θ -spécial legendrien si et seulement si :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(e^{i\theta} \operatorname{Det}(I + iA)) &= 0 \\ \Leftrightarrow \operatorname{Arg}(\operatorname{Det}(I + iA)) &\sim \theta \end{aligned}$$

Où \sim représente l'équivalence modulo 2π . Finalement, on remarque que Σ est convexe si et seulement si $II \geq 0$ et le résultat en découle. \square

1.5.2 Les cas dégénérés.

Soit \mathcal{SL}_θ^+ la famille de sous-variétés pointées $SL+$ immergées dans UM . Ensuite, notons $\overline{\mathcal{SL}_\theta^+}$ l'adhérence de cet ensemble dans la topologie de convergence de sous-variétés immergées. Enfin, on définit $\partial\mathcal{SL}_\theta^+$ par :

$$\partial\mathcal{SL}_\theta^+ = \overline{\mathcal{SL}_\theta^+} \setminus \mathcal{SL}_\theta^+$$

On remarque qu'il y a deux types de sous-variétés immergées dans $\partial\mathcal{SL}_\theta^+$. Soit $\pi : UM \rightarrow M$ la projection canonique. Pour $\hat{\Sigma} \leq UM$ une sous-variété immergée, et pour $p \in \hat{\Sigma}$, on dit que $\hat{\Sigma}$ est *verticale* en p si et seulement si :

$$\operatorname{Dim} \left(\operatorname{Ker}(T_p \pi) \cap T_p \hat{\Sigma} \right) > 0$$

Le premier type de sous-variété dans $\partial\mathcal{SL}_\theta^+$ comprend alors les sous-variétés immergées qui sont *verticales* en un point. Dans certains cas, qu'on va préciser plus tard, il existe des sous-familles $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{SL}_\theta^+$ telles que, si $(\hat{\Sigma}, \hat{p})$ est dans $\overline{\mathcal{G}}$, et si elle est verticale en un point, alors elle est verticale partout. Le seconde type de sous-variété dans $\partial\mathcal{SL}_\theta^+$, s'agit de celles qui ne sont nulle part verticales mais qui ne sont pas positives en au moins un point. Si $(\hat{\Sigma}, \hat{p})$ est une telle sous-variété, alors il existe une hypersurface (Σ, p) immergée dans M telle que cette sous-variété immergée soit le relevé de Gauss de (Σ, p) . Soit $\hat{q} \in \hat{\Sigma}$ tel que $T\hat{\Sigma}$ soit non-positif en \hat{q} et définissons $q \in \Sigma$ par $q = \pi(\hat{q})$. On voit que Σ n'est pas strictement convexe en q , et donc un petite déformation de Σ autour de q pourrait donner une hypersurface non-convexe. On va décrire ce qui peut se passer.

(1) D'abord, si $\theta = 0$, l'ensemble \mathcal{SL}_θ^+ ne contient que les relevés de Gauss des hypersurfaces totalement géodésiques et donc, la plupart du temps, c'est vide.

(2) Ensuite, si $\theta \in]0, \pi/2[$, on note $\Theta = \pi/2 - \theta$. Maintenant, soit $(\hat{\Sigma}, \hat{p}) \in \mathcal{SL}_\theta^+$ et soit $A_{\hat{p}}$ tel que $T_{\hat{p}}\hat{\Sigma}$ soit le graphe de $A_{\hat{p}}$ au dessus de HUM dans W . Puisque $\hat{\Sigma}$ est legendrienne, la matrice $A_{\hat{p}}$ est symétrique. Ensuite, notons $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de $A_{\hat{p}}$. Puisque $\arctan(\lambda_i) > 0$ pour tout i , on peut montrer que, pour tout i :

$$\begin{aligned} \arctan(\lambda_i) &\leq \Theta \\ \Rightarrow \lambda_i &\leq \tan(\Theta) \end{aligned}$$

Il en découle qu'il n'y a pas d'élément de $\partial\mathcal{SL}_\theta^+$ qui soit vertical en un point. Donc, la seule forme de dégénérescence qui peut apparaître, c'est la perte de convexité stricte. Or, si $(\hat{\Sigma}, \hat{p}) \in \partial\mathcal{SL}_\theta^+$ est le relevé de Gauss de (Σ, p) et si Σ n'est pas strictement convexe en p , on sait pourtant que, si l'on définit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ comme avant, alors $\lambda_n > 0$. Donc, Σ est au moins 1-strictement convexe en p .

(3) Maintenant, supposons que $\theta \in]\pi/2, \pi[$. Soit $(\hat{\Sigma}, \hat{p}) \in \mathcal{SL}_\theta^+$ et définissons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ comme avant. Ensuite, notons $\Theta = \theta - \pi/2$. Puisque $\arctan(\lambda_i) > 0$ pour tout i , on voit que, pour tout $i \leq n - 1$:

$$\arctan(\lambda_i) < \pi/2 - \Theta/2$$

Donc, en regardant des limites, si $(\hat{\Sigma}, \hat{p}) \in \partial\mathcal{SL}_\theta^+$ est verticale en \hat{p} alors :

$$\text{Dim}(\text{Ker}(T_{\hat{p}}\pi) \cap T_{\hat{p}}\hat{\Sigma}) = 1$$

En particulier, si $\hat{\Sigma}$ est verticale partout (c'est à dire, si c'est une variété rideau) alors la dimension de $\text{Ker}(T\pi) \cap T\hat{\Sigma}$ vaut constamment un. On va revenir sur ce cas plus tard dans la section 1.6. Ensuite, supposons que $(\hat{\Sigma}, \hat{p})$ est le relevé de Gauss d'une hypersurface (Σ, p) immergée dans M qui n'est pas strictement convexe en p . Alors, les mêmes réflexions qu'avant nous permettent de voir que Σ est 2-strictement convexe en p .

(4) En général, pour $\theta \in]k\pi/2, (k+1)\pi/2[$ si $(\hat{\Sigma}, \hat{p}) \in \partial\mathcal{SL}_\theta^+$ est le relevé de Gauss d'une hypersurface pointée (Σ, p) immergée dans M , qui n'est pas strictement convexe, alors cette hypersurface est toujours $(k+1)$ -strictement convexe. Dans le cas contraire, on peut supposer que $\hat{\Sigma}$ est verticale en \hat{p} , et dans ce cas :

$$\text{Dim}(\text{Ker}(T_{\hat{p}}\pi) \cap T_{\hat{p}}\hat{\Sigma}) \leq k$$

(5) Finalement, si $k = n$, et donc $\theta \in [(n-1)\pi/2, n\pi/2[$ et si $(\hat{\Sigma}, \hat{p}) \in \partial\mathcal{SL}_\theta^+$, alors cette sous-variété ne peut pas être le relevé de Gauss d'une hypersurface immergée dans M . En effet, supposons le contraire, et soit (Σ, p) une hypersurface pointée immergée dans M telle que la sous-variété soit le relevé de Gauss de cette hypersurface. Alors, puisque $k = n$, l'hypersurface Σ est partout strictement n -convexe, et donc partout strictement convexe. Il en découle que $(\hat{\Sigma}, \hat{p}) \in \mathcal{SL}_\theta^+$, ce qui est absurde. On voit alors que les seuls éléments dans $\partial\mathcal{SL}_\theta^+$ sont les sous-variétés qui sont verticales en au moins un point.

1.5.3 Quelques Exemples.

Afin de s'assurer qu'on n'étudie pas une théorie complètement vide, on va construire ici quelques exemples d'hypersurfaces immergées compactes convexes à courbure spéciale lagrangienne constante.

L'exemple le plus simple, c'est $\partial B_r(P_0)$, la sphère de rayon r pour $r \in]0, \infty[$ autour d'un point P_0 dans \mathbb{H}^n . Cette hypersurface est convexe. Ensuite, le groupe des isométries de \mathbb{H}^n qui préservent P_0 fixe aussi la sphère $\partial B_r(P_0)$. De plus, l'action de ce groupe sur la sphère est transitive. Donc pour $P, Q \in \partial B_r(P_0)$ les formes $II(P)$ et $II(Q)$ sont conjuguées, et, en particulier, $\text{Arg}(\text{Det}(I + iII))$ est constant sur $\partial B_r(P_0)$.

Ensuite, pour tout n , l'espace \mathbb{H}^n se plonge totalement géodésiquement dans \mathbb{H}^{n+1} . Notons i ce plongement. Si l'on note $N\mathbb{H}^n$ le fibré normal à ce plongement, la remarque suivant le lemme 4.2.1 du chapitre 4 nous permet de voir que $\text{Exp} : N\mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ définit un difféomorphisme. Ensuite, pour $\alpha \in \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ une isométrie de \mathbb{H}^n , il existe une unique isométrie $\hat{\alpha} \in \text{Isom}(\mathbb{H}^{n+1})$ telle que :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^n & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{H}^n \\ \downarrow i & & \downarrow i \\ \mathbb{H}^{n+1} & \xrightarrow{\hat{\alpha}} & \mathbb{H}^{n+1} \end{array}$$

De plus, si α est hyperbolique, puisque i est un plongement totalement géodésique, $\hat{\alpha}$ est aussi hyperbolique et son axe coïncide avec l'image par i de l'axe de α . En particulier :

$$\|\alpha\| = \|\hat{\alpha}\|$$

Soit maintenant M une variété compacte de dimension n et à courbure constante égale à -1 . On sait qu'il existe un homomorphisme injectif $\gamma : \pi_1(M, P_0) \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ tel que :

$$M \cong \mathbb{H}^n / \Gamma$$

où $\Gamma = \gamma(\pi_1(M, P_0))$. Le groupe Γ agit proprement discontinuement sur \mathbb{H}^n (C'est-à-dire qu'aucun élément de $\Gamma \setminus \{\text{Id}\}$ n'a de point fixe et que pour tout point $P \in \mathbb{H}^n$, l'ensemble $\Gamma(P) = \{\gamma(P) | \gamma \in \Gamma\}$ est discrète). De plus, on sait que tout membre de $\Gamma \setminus \{\text{Id}\}$ est hyperbolique. Maintenant, on rappelle le résultat suivant :

Lemme 1.5.2

Soit $G \subseteq \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ un groupe composé uniquement d'éléments hyperboliques (plus l'identité). Supposons que :

$$\text{Inf} \{ \|g\| \mid g \in G \} > 0$$

Alors G agit proprement discontinuement sur \mathbb{H}^n . De plus, si l'action de G sur \mathbb{H}^n est co-compacte, alors la réciproque est vraie.

Démonstration : Comme chaque élément de G qui est différent de l'identité est hyperbolique, le seul élément de G ayant un point fixe, c'est l'identité. Soit maintenant $P \in \mathbb{H}^n$. On sait que, pour tout $g \in G$:

$$d(P, g(P)) \geq \|g\|$$

et il en découle que G agit proprement discontinuement sur \mathbb{H}^n . Ensuite, si G agit proprement discontinuement sur \mathbb{H}^n et si son action sur cet espace est co-compacte, alors, il existe $\epsilon > 0$ tel que, pour tout $P \in \mathbb{H}^n$ et pour tout $g \in G \setminus \{Id\}$:

$$d(P, g(P)) \geq \epsilon$$

Donc, pour tout $g \in G \setminus \{Id\}$:

$$\|g\| \geq \epsilon$$

et le deuxième résultat en découle. \square

En particulier, on obtient le résultat suivant sur Γ :

Corollaire 1.5.3

Notons $\hat{\Gamma} = \{\hat{\gamma} \mid \gamma \in \Gamma\}$. Alors $\hat{\Gamma}$ agit proprement discontinuement sur \mathbb{H}^{n+1} .

Démonstration : En effet, comme \mathbb{H}^n/Γ est compact :

$$\begin{aligned} & \text{Inf} \{ \|\gamma\| \mid \gamma \in \Gamma \} > 0 \\ \Leftrightarrow & \text{Inf} \{ \|\hat{\gamma}\| \mid \hat{\gamma} \in \hat{\Gamma} \} > 0 \end{aligned}$$

et le résultat en découle. \square

En prenant des quotients, on obtient ainsi \hat{M} une variété à courbure constante égale à -1 de dimension $n + 1$ et un plongement totalement géodésique $i : M \rightarrow \hat{M}$ de M dans \hat{M} . On appelle \hat{M} la *prolongation* de M .

Maintenant, on étudie les secondes formes fondamentales des hypersurfaces à distance constante des hypersurfaces totalement géodésiques dans des variétés d'Hadamard à courbure sectionnelle constante. On a le résultat suivant :

Lemme 1.5.4

Soit M une variété d'Hadamard à courbure sectionnelle constante $-\kappa$. Soit $P \subseteq M$ une hypersurface totalement géodésique et pour $R \in]0, \infty[$ soit P_R l'hypersurface à distance constante R de P . Soit II_R la seconde forme fondamentale de P_R . Alors :

$$II_R = \sqrt{\kappa} \tanh(\sqrt{\kappa}R)$$

Démonstration : Par la symétrie, le résultat en dimension quelconque découle du résultat en dimension 2. On suppose alors que M est de dimension 2. Notons g_{Euc} la métrique Euclidienne sur \mathbb{R}^2 et, pour $\kappa \in]0, \infty[$, définissons la métrique g_κ sur le demi-espace $\mathbb{R} \times]0, \infty[$ par :

$$g_\kappa(x, y) = \frac{1}{\kappa y^2} g_{\text{Euc}}$$

On identifie M avec $(\mathbb{R} \times]0, \infty[, g_\kappa)$. Puis on peut identifier P avec la demi-droite verticale $\{(0, t) \mid t > 0\}$. Pour tout $\lambda \in]0, \infty[$, définissons $\Delta_\lambda : M \rightarrow M$ par :

$$\Delta_\lambda(x, y) = \lambda(x, y)$$

Pour tout λ , l'application Δ_λ est une isométrie de M . Puisqu'elle préserve P , elle préserve également P_R pour tout R . Donc, pour tout $R \in]0, \infty[$ il existe $\theta(R) \in]0, \pi/2[$ tel que :

$$P_R = \{t(\sin(\theta), \cos(\theta)) \mid t \in]0, \infty[\}$$

Les arcs circulaires centrés sur l'origine sont des géodésiques. Puisqu'ils rencontrent P et P_R en des angles droits, on obtient :

$$\begin{aligned} d(P, P_R) &= \int_0^\theta \frac{1}{\sqrt{\kappa} \cos(\varphi)} d\varphi \\ &= \int_0^{\sin(\theta)} \frac{1}{\sqrt{\kappa}(1-t^2)} dt \\ &= \left[\frac{1}{2\sqrt{\kappa}} \text{Log} \left(\frac{1+t}{1-t} \right) \right]_0^{\sin(\theta)} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \sin(\theta) &= \frac{e^{2\sqrt{\kappa}R} - 1}{e^{2\sqrt{\kappa}R} + 1} \\ &= \tanh(\sqrt{\kappa}R) \end{aligned}$$

Maintenant, soit ∇^κ et ∇^{Euc} les dérivées covariantes respectivement de g_κ et de g_{Euc} . Soit ω telle que :

$$\nabla^\kappa = \nabla^{\text{Euc}} + \omega$$

La formule de Koszul nous permet d'obtenir :

$$\omega = \frac{1}{y} \begin{pmatrix} \partial_2 & -\partial_1 \\ -\partial_1 & -\partial_2 \end{pmatrix}$$

On pose :

$$\begin{aligned} \partial_t &= (\sin(\theta), \cos(\theta)) \\ \mathbf{N} &= (\cos(\theta), -\sin(\theta)) \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_t}^\kappa \partial_t &= \frac{1}{y} (-2\sin(\theta)\cos(\theta), \sin^2(\theta) - \cos^2(\theta)) \\ &= \frac{-1}{y} (\sin(2\theta), \cos(2\theta)) \\ \Rightarrow g_\kappa(\nabla_{\partial_t}^\kappa \partial_t, \mathbf{N}) &= \frac{-1}{\kappa y^3} (\sin(2\theta)\cos(\theta) - \cos(2\theta)\sin(\theta)) \\ &= \frac{-1}{\kappa y^3} \sin(\theta) \end{aligned}$$

Notons λ_t la courbure principale de P_R dans la direction ∂_t . Puisque ∂_t et \mathbf{N} sont de longueur $1/(\sqrt{\kappa}y)$, on obtient :

$$\begin{aligned}\lambda_\kappa &= \sqrt{\kappa}\sin(\theta) \\ &= \sqrt{\kappa}\tanh(\sqrt{\kappa}R)\end{aligned}$$

Le résultat en découle. \square

On obtient maintenant le résultat suivant :

Lemme 1.1.1

Soit M une variété compacte de dimension n et à courbure sectionnelle constante $-\kappa < 0$. Soit ensuite \hat{M} la prolongation de M et soit $i : M \rightarrow \hat{M}$ le plongement totalement géodésique canonique de M dans \hat{M} . Soit \mathbf{N} le champ de vecteurs normal en M dans \hat{M} . Notons $\text{Exp} : T\hat{M} \rightarrow \hat{M}$ l'application exponentielle. Pour tout $t \in]0, \infty[$ posons :

$$i_t = \text{Exp} \circ \mathbf{N}$$

Alors $M_t = (M, i_t)$ est une hypersurface immergée convexe dans \hat{M} à courbure spéciale lagrangienne. De plus, si l'on note θ_t la courbure spéciale lagrangienne de M_t , on obtient :

$$\theta_t = n \arctan(\sqrt{\kappa} \tanh(\sqrt{\kappa}R))$$

Démonstration : Puisque \hat{M} est à courbure sectionnelle non-positive, et puisque $M \subseteq \hat{M}$ est totalement géodésique, la géométrie classique des variétés d'Hadamard nous permet de montrer que i_t est convexe pour tout t . Maintenant, en travaillant avec des revêtements universels, le lemme 1.5.4 nous permet de conclure. \square

1.5.4 Les hypersurfaces de révolution.

On va maintenant construire des hypersurfaces de révolution strictement convexe à courbure SL constante dans \mathbb{R}^{n+1} et dans \mathbb{H}^{n+1} .

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse définie sur I . Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit l'hypersurface immergée $\Sigma_f \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ par :

$$\Sigma_f = \{(t, x) \mid t \in I, \|x\| = f(t)\}$$

Σ_f est l'hypersurface de révolution obtenue par rotation du graphe de f autour de l'axe horizontal. On a le résultat suivant :

Lemme 1.5.5

L'hypersurface Σ_f est à courbure SL constante θ si et seulement si f satisfait à :

$$(n-1) \arctan\left(f\sqrt{1+(\partial_t f)^2}\right) + \arctan\left(\frac{\partial_t^2 f}{\sqrt{1+(\partial_t f)^2}^3}\right) = (n-1)\frac{\pi}{2} - \theta$$

Démonstration : Notons ∂_t le champ de vecteurs canonique sur I de longueur 1 orienté positivement. D'abord :

$$Tf \cdot \partial_t = (\partial_t, \partial_t f)_{(t,f)}$$

Notons F le graphe de f dans \mathbb{R}^2 et soit \mathbf{N} le champ de vecteurs normal à F orienté vers le haut. Ensuite, posons :

$$L(t) = \sqrt{1 + (\partial_t f)^2}^{-1}$$

On a :

$$\mathbf{N} = L(-\partial_t f, \partial_t)_{(t,f)}$$

Ensuite, on obtient :

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_t} \mathbf{N} &= \partial_t L(-\partial_t f, \partial_t)_{(t,f)} + L(-\partial_t^2 f, 0)_{(t,f)} \\ &= \partial_t \text{Log}(L) \mathbf{N} + L(-\partial_t^2 f, 0)_{(t,f)} \\ \Rightarrow \langle \nabla_{\partial_t} \mathbf{N}, Tf \cdot \partial_t \rangle &= -L(\partial_t^2 f) \end{aligned}$$

Donc, si l'on note λ_n la courbure principale de F dans la direction $Tf \cdot \partial_t$, alors :

$$\lambda_n = -L^3(\partial_t^2 f)$$

Or, λ_n est égale à la courbure principale de Σ_f dans la direction $(0, Tf \cdot \partial_t)$. En même temps, si l'on note $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ les autres courbures principales de Σ_f alors, puisque Σ_f est une surface de révolution, on obtient :

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = \frac{L}{f}$$

Donc, si l'on note L_{SL} la courbure SL de Σ_f , on obtient :

$$L_{SL} = (n-1) \arctan\left(\frac{L}{f}\right) + \arctan\left(\frac{-\partial_t^2 f}{\sqrt{1 + (\partial_t f)^2}^3}\right)$$

Maintenant, on remarque que la fonction \arctan est impaire, et donc, pour tout t :

$$\arctan(-t) = -\arctan(t)$$

Ensuite, par la définition de \arctan , on sait que, pour tout $t \geq 0$:

$$\arctan\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(t)$$

En réunissant tous ces éléments, et en posant $\kappa_{SL} = \theta$, on obtient la formule recherchée. \square

Maintenant, soit $I \subseteq]0, \infty[$ un intervalle ouvert et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse définie sur I . On identifie $\mathbb{H}^{(n+1)}$ avec l'espace $\mathbb{R}^n \times]0, \infty[$ muni de la métrique g , où :

$$g(x, t) = \frac{1}{t^2} g_{\text{Euc}}(x, t)$$

et où g_{Euc} est la métrique Euclidienne sur \mathbb{R}^{n+1} . Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit l'hypersurface immergée $\Sigma_f \subseteq \mathbb{H}^{n+1}$ par :

$$\Sigma_f = \{(x, t) \mid t \in I, \|x\| = f(t)\}$$

Σ_f est l'hypersurface de révolution dans \mathbb{H}^{n+1} obtenue par rotation du graphe de f autour de l'axe vertical. On obtient le résultat suivant :

Lemme 1.5.6

L'hypersurface Σ_f est à courbure SL constante θ si et seulement si f satisfait à :

$$(n-1) \arctan \left(\frac{t \sqrt{1 + (\partial_t f)^2}}{f} \right) + \arctan \left(-\frac{t(\partial_t^2 f)}{\sqrt{1 + (\partial_t f)^2}^3} + \frac{t(\partial_t f)}{\sqrt{1 + (\partial_t f)^2}} \right) = \theta$$

Démonstration : Notons ∂_t le champ de vecteurs canonique sur I de longueur 1 orienté positivement. D'abord :

$$Tf \cdot \partial_t = (\partial_t f, \partial_t)_{(f,t)}$$

Notons F le graphe de f dans $\mathbb{R} \times]0, \infty[$ et soit \mathbf{N} le champ de vecteurs normal à F orienté vers la droite. Ensuite, posons :

$$L(t) = \frac{t}{\sqrt{1 + (\partial_t f)^2}}$$

On a :

$$\mathbf{N} = L(\partial_t, -\partial_t f)_{(f,t)}$$

Soit ∇ et ∇_{Euc} les dérivées covariantes respectivement de g et de g_{Euc} . Soit ω telle que :

$$\nabla = \nabla_{\text{Euc}} + \omega$$

On sait que :

$$\omega = \frac{1}{y} \begin{pmatrix} \partial_2 & -\partial_1 \\ -\partial_1 & -\partial_2 \end{pmatrix}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_t} \mathbf{N} &= \partial_t L(\partial_t, -\partial_t f)_{(f,t)} + L(0, -\partial_t^2 f)_{(f,t)} \\ &\quad L(-1 + (\partial_t f)^2, 2\partial_t f)_{(f,t)} \\ \Rightarrow \langle \nabla_{\partial_t} \mathbf{N}, Tf \cdot \partial_t \rangle &= -t^{-2} L(\partial_t^2 f) - t^{-2} L(\partial_t f) + t^{-2} L(\partial_t f)^3 + 2t^{-2} L(\partial_t f) \\ &= -t^{-2} L(\partial_t^2 f) + L^{-1}(\partial_t f) \end{aligned}$$

Donc, si l'on note λ_n la courbure principale de F dans la direction $Tf \cdot \partial_t$, alors :

$$\lambda_n = -t^{-2} L^3(\partial_t^2 f) + L(\partial_t f)$$

Or λ_n est égale à la courbure principale de Σ_f dans la direction $(0, Tf \cdot \partial_t)$. En même temps, si l'on note $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ les autres courbures principales de Σ_f alors, puisque Σ_f est une surface de révolution, on obtient :

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = \frac{tL}{f}$$

Donc, si l'on note κ_{SL} la courbure SL de Σ_f , on obtient :

$$L_{SL} = (n-1) \arctan\left(\frac{tL}{f}\right) + \arctan\left(-t^{-2}L^3(\partial_t^2 f) + L(\partial_t f)\right)$$

et le résultat en découle. \square

En trouvant des solutions locales de ces deux équations à dérivées ordinaires, on obtient le résultat suivant :

Corollaire 1.5.7

Pour tout n et pour tout $\theta \in]0, n\pi/2[$, on peut construire des hypersurfaces de révolution dans \mathbb{R}^{n+1} et dans \mathbb{H}^{n+1} convexes et à courbure spéciale lagrangienne constante θ .

Remarque : Ces hypersurfaces ne sont pas forcément complètes.

1.5.5 La déformation des hypersurfaces à courbure SL constante.

Ayant construit quelques exemples de hypersurfaces à courbure SL constante, on va montrer qu'on peut les perturber pour obtenir ainsi des familles locales d'hypersurfaces à courbure SL constante.

Soit M une variété de dimension 3 et soit $\Sigma = (S, i)$ une hypersurface immergée à courbure SL constante dans M . Soit \mathbf{N} le champ de vecteurs normaux à Σ dans M . Maintenant, pour $f \in C^\infty(\Sigma)$, on définit la famille $\Sigma_t = (S, i_t)$ d'hypersurfaces immergées par :

$$i_t(p) = \text{Exp}_{i(p)}(tf(p)\mathbf{N}(p))$$

Maintenant, notons A_t la seconde forme fondamentale de Σ_t . C'est à dire :

$$A_t u = \nabla_u \mathbf{N}_t$$

Où \mathbf{N}_t est le champ normal à Σ_t . On définit alors \mathcal{L}_θ , l'opérateur de variation de courbure SL tel que :

$$\mathcal{L}_\theta f = \partial_t \text{Im}(e^{i\theta} \text{Det}(I + iA_t))|_{t=0}$$

On veut calculer explicitement l'opérateur \mathcal{L}_θ . On note :

- ∇ la connexion de Levi-Civita de M ,
- R son tenseur de courbure,
- \mathbf{N} le champ de vecteurs normaux à Σ ,

- W l'endomorphisme de TS défini par :

$$i_*W(u) = R_{N i_*u} \mathbf{N}$$

- $\text{Hess}(f)$ la hessienne d'une fonction quelconque f .

Suivant le raisonnement de la troisième partie de [34], on obtient le résultat suivant :

Lemme 1.5.8

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\theta d &= \sqrt{I + A_0^2} (-\text{Tr}((I + A_0^2)^{-1} \text{Hess}(f)) \\ &\quad + f \text{Tr}((I + A_0^2)^{-1} W) - f \text{Tr}((I + A_0^2)^{-1} A_0^2)) \end{aligned}$$

Démonstration : On définit l'immersion $\varphi : S \times \mathbb{R} \rightarrow M$ par :

$$\varphi(p, t) = \text{Exp}_{i(p)}(t f(t) \mathbf{N}(p))$$

On note $E = \varphi^*TM$ un fibré sur $S \times \mathbb{R}$. Ensuite, on note $F = T\varphi$ une section de $T(S \times \mathbb{R})^* \otimes E$. D'abord, on a :

$$d^\nabla F(u, v) = \nabla_u F(v) - \nabla_v F(u) - F([uv]) = 0$$

Car la dérivée covariante ∇ est sans torsion. Ensuite, on sait que, le long de $\Sigma \times \{0\}$:

$$F(\partial_t) = f \mathbf{N}$$

Soit \mathbf{N}_t le champ de vecteurs normaux à $\Sigma_t = (S, i_t)$, et notons $\tilde{\mathbf{N}}$ la section de E qui s'en déduit. Définissons la section A de $T(S \times \mathbb{R})^* \otimes E$ par :

$$A \cdot u = \nabla_u \tilde{\mathbf{N}}$$

D'abord, on obtient :

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_t} F(u)|_{t=0} &= \nabla_u F(\partial_t)|_{t=0} + F([\partial_t u])|_{t=0} \\ &= \nabla_u f \mathbf{N} \\ &= df(u) \mathbf{N} + f \nabla_u \mathbf{N} \\ &= df(u) \mathbf{N} + f A(u) \end{aligned}$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} &\langle \tilde{\mathbf{N}}, F(u) \rangle &&= 0 \\ \Rightarrow &\partial_t \langle \tilde{\mathbf{N}}, F(u) \rangle &&= 0 \\ \Rightarrow &\langle \nabla_{\partial_t} \tilde{\mathbf{N}}, F(u) \rangle + \langle \tilde{\mathbf{N}}, \nabla_{\partial_t} F(u) \rangle &&= 0 \\ \Rightarrow &\langle \nabla_{\partial_t} \tilde{\mathbf{N}}, F(u) \rangle|_{t=0} &&= -df(u) \end{aligned}$$

Car $\langle A(u), \mathbf{N} \rangle = 0$. Comme $\tilde{\mathbf{N}}$ est toujours de taille 1, on obtient :

$$\langle \nabla_{\partial_t} \tilde{\mathbf{N}}, \tilde{\mathbf{N}} \rangle = 0$$

et donc :

$$\nabla_{\partial_t} \tilde{\mathbf{N}}|_{t=0} = -F(\nabla f)$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_t} A(u)|_{t=0} &= \nabla_{\partial_t} \nabla_u \tilde{\mathbf{N}}|_{t=0} \\ &= R_{\varphi_* \partial_t \varphi_* u} \tilde{\mathbf{N}} + \nabla_u \nabla_{\partial_t} \tilde{\mathbf{N}} \\ &= f R_{\mathbf{N}u} \tilde{\mathbf{N}} - \nabla_u \nabla f \end{aligned}$$

Maintenant, soit g_t la métrique sur TS engendrée par l'application i_t . Ensuite, définissons l'endomorphisme B_t de TS par :

$$g_t(B_t u, u) = \langle A_t u, u \rangle$$

D'abord :

$$\begin{aligned} \partial_t g_t(u, v) &= \partial_t \langle Fu, Fv \rangle \\ &= \langle \nabla_{\partial_t} Fu, Fv \rangle + \langle Fu, \nabla_{\partial_t} Fv \rangle \\ &= \langle fAu + df(u)\mathbf{N}, Fv \rangle + \langle Fu, fAv + df(v)\mathbf{N} \rangle \\ &= f \langle Au, Fv \rangle + f \langle Fu, Av \rangle \\ &= f g_0(B_0 u, v) + f g_0(u, B_0 v) \\ &= 2f g_0(B_0 u, v) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \partial_t g_t(B_t u, v) &= (\partial_t g_t)(B_0 u, v) + g_0((\partial_t B_t)u, v) \\ &= g_0((\partial_t B_t)u, v) + 2f g_0(B_0 u, v) \end{aligned}$$

Mais :

$$\begin{aligned} \Rightarrow g_t(B_t u, v) &= \langle Au, v \rangle \\ \Rightarrow \partial_t g_t(B_t u, v) &= \partial_t \langle Au, v \rangle \\ &= \langle \nabla_{\partial_t} Au, v \rangle + \langle Au, \nabla_{\partial_t} v \rangle \\ &= \langle f R_{\mathbf{N}u} \tilde{\mathbf{N}} - \nabla_u \nabla f, v \rangle + f \langle Au, Av \rangle \\ &= f \langle R_{\mathbf{N}u} \tilde{\mathbf{N}}, v \rangle - \langle \nabla_u \nabla f, v \rangle + f g(B_0^2 u, v) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \Rightarrow g_0((\partial_t B_t)u, v) &= \langle fWu, v \rangle - \langle \text{Hess}(f)u, v \rangle - g_0(fB_0^2 u, v) \\ \Rightarrow (\partial_t B_t) &= fW - \text{Hess}(f) - fB_0^2 \end{aligned}$$

Maintenant, on peut calculer $\mathcal{L}_\theta f$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\theta f &= \partial_t \text{Im}(e^{i\theta} \text{Det}(I + iB_t)) \\ &= \text{Im}(e^{i\theta} \text{Det}(I + iB_t) i \text{Tr}((I + iB_t)^{-1} \partial_t B_t)) \\ &= e^{i\theta} \text{Det}(I + iB_t) \text{Re}(\text{Tr}((I + iB_t)^{-1} \partial_t B_t)) \end{aligned}$$

Ici on a utilisé le fait que $e^{i\theta} \text{Det}(I + iB_t)$ est réel. Mais :

$$\begin{aligned} (I + iB_t)(I - iB_t) &= I + B_t^2 \\ \Rightarrow (I + iB_t)^{-1} &= (I - iB_t)(I + B_t^2)^{-1} \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\theta f &= [e^{i\theta} \text{Det}(I + iB_0)] \text{Tr} \left(\frac{\partial_t B_0}{I + B_0^2} \right) \\ &= \sqrt{(I + B_0^2)} [-\text{Tr}((I + B_0^2)^{-1} \text{Hess}(f)) \\ &\quad + f \text{Tr}((I + B_0^2)^{-1} W) - f \text{Tr}((I + B_0^2)^{-1} B_0^2)] \end{aligned}$$

Puisque $B_0 = A_0$, le résultat en découle. \square

Il en découle que l'opérateur \mathcal{L}_θ est elliptique sur une variété à courbure SL constante égale à θ . Comme il agit sur un espace de fonctions, on sait qu'il est d'indice zéro, et l'on veut savoir sous quelles conditions il est injectif (et donc inversible). D'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit la fonction Θ_n :

Définition 1.5.9

Pour $n \in \mathbb{N}$ et pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$ on définit $\Theta_{k,n} :]n/(k+1) - 1, \infty[\rightarrow]0, \infty[$ par :

$$\Theta_{k,n}(t) = (n-k) \arccos \left(\sqrt{\frac{n}{(k+1)(t+1)}} \right)$$

Ensuite, on prolonge $\Theta_{k,n}$ en une fonction sur $]0, \infty[$ en posant $\Theta_{k,n}(t) = -\infty$ pour $t \in]0, n/(k+1) - 1[$. Maintenant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $\Theta_n :]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[$ par :

$$\Theta_n(t) = \sup_{0 \leq k \leq n-1} \Theta_{k,n}(t)$$

On obtient maintenant le résultat suivant :

Lemme 1.5.10

Supposons que la courbure sectionnelle de M est inférieure à $-\kappa < 0$ et supposons que la courbure SL de Σ est inférieure à $\Theta_n(\kappa)$, alors, le terme de degré zéro de la formule donnée dans le lemme précédent est non-négatif :

$$J = \text{Tr}((I + B_0^2)^{-1}W) - \text{Tr}((I + B_0^2)^{-1}B_0^2) > 0$$

Démonstration : Soit e_1, \dots, e_n une base orthonormée de vecteurs propres de B et soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ leurs valeurs propres respectives. Pour chaque i , soit $k_i \in]-\infty, -\kappa]$ la courbure sectionnelle du plan engendré par N et par e_i . On a :

$$\begin{aligned} J &= \sum_{i=1}^n \frac{-k_i - \lambda_i^2}{1 + \lambda_i^2} \\ &\geq \sum_{i=1}^n \frac{\kappa - \lambda_i^2}{1 + \lambda_i^2} \end{aligned}$$

Pour chaque i posons $\theta_i = \arctan(\lambda_i)$. On obtient :

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \tan(\theta_i) \\ \Rightarrow \frac{\kappa - \lambda_i^2}{1 + \lambda_i^2} &= \kappa \cos^2(\theta_i) + \sin^2(\theta_i) \\ &= (\kappa + 1) \cos^2(\theta_i) - 1 \end{aligned}$$

D'où :

$$J \geq (\kappa + 1) \sum_{i=1}^n \cos^2(\theta_i) - n$$

Soit $k \in \{0, \dots, n-1\}$ et supposons que :

$$\kappa_{SL} = \theta_1 + \dots + \theta_n \leq \Theta_{k,n}(\kappa)$$

Alors, il existe i_1, \dots, i_{k+1} tous distincts tels que, pour tout j :

$$\theta_{i_j} \leq \arccos \left(\sqrt{\frac{n}{k+1} \kappa + 1} \right)$$

En effet, sinon il existe i'_1, \dots, i'_{n-k} tous distincts tels que, pour tout j :

$$\theta_{i'_j} > \arccos \left(\sqrt{\frac{n}{k+1} \kappa + 1} \right)$$

et donc, puisque $\theta_i \geq 0$ pour tout i , on obtient :

$$\begin{aligned} \kappa_{SL} &\geq \sum_{j=1}^{n-k} \theta_{i'_j} \\ &> (n-k) \arccos \left(\sqrt{\frac{n}{k+1} \kappa + 1} \right) \\ &= \Theta_{k,n}(\kappa) \end{aligned}$$

ce qui est absurde. Pour tout j , on obtient :

$$\cos(\theta_{i_j})^2 \geq \frac{n}{(k+1)(\kappa+1)}$$

et donc, en utilisant de nouveau la positivité de tout θ_i , on obtient :

$$J \geq (\kappa+1) \sum_{j=1}^{k+1} \frac{n}{(k+1)\kappa+1} - n \geq 0$$

Le résultat en découle en prenant le suprémum sur tout k . \square

Donc, en particulier, sous ces conditions, \mathcal{L}_θ est injectif :

Corollaire 1.5.11

Soit $(\Sigma, \partial\Sigma)$ une hypersurface immergée à bord dans M à courbure spéciale lagrangienne constante. Soit $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\mathcal{L}_\theta f = 0, \quad f|_{\partial\Sigma} = 0$$

Alors, sous les mêmes conditions que dans le lemme précédent :

$$f = 0$$

Démonstration : Soit $p \in \Sigma$ maximisant de f et supposons que $f(p) > 0$. Alors $p \in \Sigma$, et, près de p :

$$\text{Tr}((I + B_0^2)\text{Hess}(f)) = Jf \geq 0$$

ce qui est absurde par le principe fort du maximum. Donc $f \leq 0$ dans Σ . Un raisonnement analogue nous montre que $f \geq 0$ dans Σ et le résultat en découle. \square

On voit alors que, sous ces conditions, on peut toujours déformer localement les hypersurfaces à bord à courbure spéciale lagrangienne constante :

Corollaire 1.5.12

Soit $(\Sigma, \partial\Sigma)$ une hypersurface immergée à bord dans M à courbure spéciale lagrangienne constante. Ensuite, soit $(c_t)_{t \in]-\epsilon, \epsilon[}$ une famille lisse de courbes immergées dans M telle que :

$$c_0 = \partial\Sigma$$

Alors, sous les mêmes conditions que dans le lemme 1.5.10, il existe $\eta \in]0, \infty[$ et $(\Sigma_t, \partial_t \Sigma_t)_{t \in]-\eta, \eta[}$ une famille lisse de hypersurfaces convexes immergées à bord et à courbure SL constante dans M telle que, pour tout $t \in]-\eta, \eta[$:

$$\partial \Sigma_t = c_t$$

Démonstration : Ceci découle du lemme 1.5.10 et du principe d'inversion locale des opérateurs. \square

On obtient également le résultat suivant sur les hypersurfaces compactes :

Corollaire 1.5.13

Soit $\Sigma \subseteq M$ une hypersurface immergée compacte sans bord dans M à courbure SL constante. Alors, sous les mêmes conditions que dans le lemme 1.5.10, l'espace des modules local de telles hypersurfaces autour de Σ_0 est de dimension 0.

Démonstration : En effet, soit f une déformation infinitésimale de telles hypersurfaces autour de Σ . Donc :

$$\mathcal{L}_\theta f = 0$$

Alors, le même raisonnement que celui employé dans la démonstration du corollaire 1.5.11 nous montre que :

$$f = 0$$

et le résultat en découle. \square

Remarque : En fait, si les conditions du lemme 1.5.10 ne sont pas satisfaites, il n'y a pas forcément d'obstruction à l'existence d'un espace de modules local d'hypersurfaces non-triviales à courbure SL constante.

Pourtant, en variant la métrique de l'espace ambiant, on peut trouver des familles locales de surfaces compactes à courbure spéciale lagrangienne constante θ immergées dans des familles locales de variétés. En effet, on a le résultat suivant :

Lemme 1.5.14

Soit (M, g) une variété riemannienne et soit $\Sigma = (S, i) \subseteq M$ une hypersurface compacte sans bord immergée dans M à courbure SL constante θ . Supposons ensuite qu'il existe $\kappa \in]0, \infty[$ tel que la courbure sectionnelle de M soit inférieure à $-\kappa < 0$ et que $\theta < \Theta_n(\kappa)$. Maintenant, soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un voisinage de l'origine, et soit $(g_x)_{x \in \Omega}$ une famille lisse de métriques sur M telle que $g_0 = g$ et telle que, pour tout $x \in \Omega$, la courbure sectionnelle de la variété (M, g_x) soit inférieure à κ . Alors, il existe $U \subseteq \Omega$ un voisinage de l'origine, et $(i_x)_{x \in \Omega}$ une famille lisse d'immersions telle que $i_0 = i$ et que, pour tout x , l'hypersurface immergée $\Sigma_x = (S, i_x)$ soit une hypersurface compacte sans bord immergée dans la variété riemannienne (M, g_x) à courbure SL constante θ .

De plus, en restreignant au besoin U , on peut supposer qu'il existe ϵ tel que si $i'_x : S \rightarrow M$ est une application telle que l'hypersurface immergée $\Sigma'_x = (S, i'_x)$ soit à courbure SL constante relativement à la métrique g_x sur M , et que si i'_x est ϵ -proche de i_x dans la norme C^1 , alors $i'_x = i_x$.

Démonstration : L'opérateur \mathcal{L}_θ est elliptique et, puisqu'il agit sur l'espace de fonctions sur Σ , il est d'indice zéro. Ensuite, soit $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\mathcal{L}_\theta f = 0$$

Alors, par le principe de maximum et le lemme 1.5.10 :

$$f = 0$$

Il en découle que $\text{Ker}(\mathcal{L}_\theta)$ est triviale et donc que \mathcal{L}_θ est un isomorphisme entre deux espaces d'Hilbert (par exemple $H^s(S)$ et $H^{s-2}(S)$ pour $s \in \mathbb{R}$).

Maintenant, soit \mathbf{N} le champ de vecteurs normaux à Σ dans M . Pour $f \in C^\infty(S)$, comme avant, on définit la famille $\Sigma_t = (S, i_t)$ de surfaces immergées par :

$$i_t(p) = \text{Exp}_{i(p)}(tf(p)\mathbf{N}(p))$$

Ensuite, pour $x \in \Omega$, posons $\kappa_{SL}(t, x)$ la courbure spéciale lagrangienne de la surface immergée Σ_t relativement à la métrique g_x . On peut définir l'opérateur $\tilde{\mathcal{L}}_\theta : H^s(S) \oplus \mathbb{R}^n \rightarrow H^{s-2}(S)$ telle que :

$$\tilde{\mathcal{L}}_\theta(f, x) = \partial_t \kappa_{SL}(t, tx)|_{t=0}$$

En utilisant un peu d'algèbre différentiel, on peut montrer qu'il existe des fonctions lisses $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in C^\infty(S)$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\tilde{\mathcal{L}}_\theta(0, x) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi_i$$

On définit alors $A : \mathbb{R}^n \rightarrow C^\infty(S)$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$Ax = \sum_{i=1}^n x_i \varphi_i$$

et l'on obtient :

$$\tilde{\mathcal{L}}_\theta(f, x) = \mathcal{L}_\theta f + Ax$$

Puisque \mathcal{L}_θ est un isomorphisme, et comme il est elliptique, il existe ψ_1, \dots, ψ_n des fonctions lisses sur S telles que, pour tout i :

$$\mathcal{L}_\theta \psi_i = A \partial_i = \varphi_i$$

On définit maintenant $B : \mathbb{R}^n \rightarrow C^\infty(S)$ par :

$$Bx = - \sum_{i=1}^n x_i \psi_i$$

Alors :

$$\text{Ker}(\tilde{\mathcal{L}}_\theta) = \{(Bx, x) | x \in \mathbb{R}^n\}$$

Le résultat en découle maintenant par le principe de fonction implicite. \square

Remarque : Pour l'unicité, il faut supposer que i'_x est proche de i_x dans la topologie C^1 pour qu'elle soit un graphe au dessus de i_0 . Pourtant, le résultat de compacité qu'on montrera plus tard nous informe en particulier que, pour les hypersurfaces complètes immergées à courbure spéciale lagrangienne constante θ dans une variété à géométrie bornée, les topologies $C^{k,\alpha}$ sont toutes équivalentes pour tout k et pour tout α . Il suffit de supposer alors que i'_x est proche de i_x dans la topologie C^0 pour qu'elles coïncident.

◇

1.6 Les variétés rideaux.

1.6.1 Définitions.

Un phénomène important dans l'étude des surfaces à courbure Gaussienne constante dans l'article [32] de Labourie, est l'apparition des surfaces rideaux. Il s'avère que, si M est à courbure sectionnelle constante, un comportement analogue existe aussi pour les sous-variétés immergées $SL+$ ayant des propriétés qu'on va préciser ci-dessous. En effet, si une sous-variété immergée $SL+$ dans UM est la limite d'une suite de telles sous-variétés immergées $SL+$ dans UM et si elle est verticale en un point en son intérieur, alors elle est verticale partout. De telles sous-variétés immergées sont appelées alors variétés rideaux, et, comme elles sont plus restreintes, nous verrons que leur géométrie est plus limitée que celle des sous-variétés immergées $SL+$ en générale.

Soit $\hat{\Sigma} = (S, i)$ une sous-variété immergée $SL+$. Ensuite, soit π_H la projection de $T\hat{\Sigma}$ sur \hat{i}^*HUM . Définissons maintenant la fonction h sur $\hat{\Sigma}$ par :

$$h = -2\text{Log}(\text{Det}(\pi_H))$$

Soit $P \in S$ et supposons que $\hat{\Sigma}$ n'est pas verticale en P . Alors, il existe $A \in \text{End}(H_P UM)$ tel que $T_P \hat{\Sigma}$ soit le graphe de A au dessus de $H_P UM$ et dans ce cas-ci :

$$h(P) = \text{Log}(\text{Det}(I + A^2))$$

Donc, en particulier, si $\hat{\Sigma}$ est le relevé de Gauss d'une hypersurface convexe Σ , et si l'on note A_Σ l'opérateur de Weingarten de Σ , alors :

$$h = \text{Log}(\text{Det}(I + A_\Sigma^2))$$

Où II est la seconde forme fondamentale de Σ .

Maintenant, pour $B \in]0, \infty[$, on dit qu'une sous-variété immergée complète $\hat{\Sigma}$ est un relevé B -majoré à l'infini si et seulement s'il existe $P \in \hat{\Sigma}$ et $R \in]0, \infty[$ tels que, pour tout $Q \in \hat{\Sigma}$:

$$d(P, Q) \geq R \Rightarrow h(Q) \leq B$$

On propose la définition suivante :

Définition 1.1.2

Soit $\hat{\Sigma}$ une sous-variété immergée complète dans UM . Alors, on dit que $\hat{\Sigma}$ est **B-sympathique** si et seulement si elle satisfait à une des trois conditions suivantes :

- (i) $\hat{\Sigma}$ compacte,
- (ii) Il existe un groupe d'isométries G agissant sur M (et donc sur UM) tel que le quotient de $\hat{\Sigma}$ sous l'action de G soit compact, et
- (iii) $\hat{\Sigma}$ est un relevé B -majoré à l'infini.

On va aussi avoir besoin de définir la classe de sous-variétés suivante :

Définition 1.1.4

Soit M une variété riemannienne et soit $\Sigma \subseteq M$ une sous-variété immergée. Notons II_Σ la seconde forme fondamentale de Σ . On dit que la sous-variété Σ est à **courbure spéciale lagrangienne constante** θ si et seulement si pour tout champ de vecteurs \mathbf{N} normal à Σ :

$$\text{Arg}(\text{Det}(I + i\langle II_\Sigma, \mathbf{N} \rangle)) = \theta$$

Dans cette section, on va montrer le résultat suivant sur les variétés rideaux :

Lemme 1.1.3

Soit M une variété à courbure constante et soit $(\hat{\Sigma}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de sous-variétés immergées B -sympathiques immergées dans UM et $SL+$ par rapport à la forme spéciale legendrienne Ω_θ . Supposons que $\hat{\Sigma}_n$ tend vers $\hat{\Sigma}_0$ lorsque n tend vers l'infini et supposons que $\hat{\Sigma}_0$ est verticale en un point. Alors, si M est à courbure positive, ou si θ est différent de $k\pi/2$ pour k entier, alors $\hat{\Sigma}_0$ est verticale partout.

Ensuite, on va montrer le résultat suivant qui résume certaines propriétés géométriques de telles sous-variétés :

Lemme 1.1.5

Soit $\hat{\Sigma} = (S, \hat{\iota})$ une variété rideau dans UM . Soit $\hat{P} \in S$ et supposons que la valeur de $\text{Dim}(T\hat{\Sigma} \cap VUM)$ est localement constante dans un voisinage P . Alors, il existe un voisinage Ω de P dans S et $\Sigma = (S_1, \iota)$ une sous-variété immergée dans M tels que :

- (i) La sous-variété immergée $\hat{\Sigma}' = (\Omega, \hat{\iota})$ coïncide avec $U\Sigma$, le fibré unitaire normal au dessus de Σ dans UM , et
- (ii) Il existe un entier k tel que la sous-variété Σ soit à courbure spéciale lagrangienne constante $\lambda - k\pi/2$.

En particulier, pour $\theta \in [\pi/2, \pi[$, on a déjà remarqué dans la section 1.5 que, pour $\hat{\Sigma}$ une surface rideau, la dimension de $\text{Ker}(T\pi) \cap T\hat{\Sigma}$ vaut constamment 1. Donc, en suivant la démonstration du lemme 1.1.5, on peut montrer qu'on peut supposer que Σ est complète et donc que $\hat{\Sigma}$ est le fibré normal de Σ dans UM .

1.6.2 La symétrie des dérivées de II .

Soit $\Sigma = (S, \iota)$ une hypersurface immergée dans M et soit $\hat{\Sigma} = (S, \hat{\iota})$ son relevé de Gauss. Plus tard, on va avoir besoin de relations entre certains objets géométriques liés à la seconde forme fondamentale II de Σ . Soit P dans S . On va travailler localement dans une carte dans S autour de P choisie de telle sorte que la base $\partial_1, \dots, \partial_n$ soit orthonormée à l'origine (par rapport à la métrique ι^*g , où g est la métrique sur M) et que la matrice A de II par rapport à cette base soit diagonale à l'origine. On note :

$$\begin{aligned} A^i_j \partial_i &= II \cdot \partial_j \\ A_{ij} &= \langle II \partial_i, \partial_j \rangle \end{aligned}$$

où, dans la première identité, on considère II comme une application linéaire de TS et dans la seconde, on la considère comme une 2-forme sur TS . Ensuite, on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A à l'origine. Finalement, pour T_α un tenseur quelconque, pour tout i , on note $T_{\alpha; i}$ la dérivée covariante de T dans la direction de ∂_i . On suit maintenant Calabi [9] pour obtenir des résultats de symétrie sur les dérivées de A .

D'abord, pour chaque i , on définit $\hat{\partial}_i$ par :

$$\hat{\partial}_i = \hat{\iota}_* \partial_i = \{\partial_i, A\partial_i\}$$

Soit $\pi : TUM \rightarrow W$ la projection orthogonale sur W et notons $\nabla^W = \pi \circ \nabla^{UM}$ la dérivée covariante de la distribution W héritée de la dérivée covariante de Levi-Civita de UM . Notons :

$$\tilde{A}_{ijk} = \omega(\nabla_{\hat{\partial}_i}^W \hat{\partial}_j, \hat{\partial}_k)$$

On obtient le résultat suivant (voir l'annexe C) :

Lemme 1.6.1

Le tenseur \tilde{A}_{ijk} est symétrique en i, j, k .

Ensuite, en rompant avec la tradition, pour R un tenseur de courbure quelconque, on note :

$$R_{ijkl} = \langle R_{\partial_i \partial_j} \partial_k, \partial_l \rangle$$

On obtient maintenant un lien entre la première dérivée de A et la seconde forme fondamentale de $\hat{\Sigma}$ (voir l'annexe C) :

Lemme 1.6.2

Soit R^M le tenseur de courbure de Riemann de M . Alors :

$$\tilde{A}_{ijk} = A_{jk;i} - \frac{1}{2}R_{ij\eta k}^M - \frac{1}{2}R_{\eta p i q}^M A^p_j A^q_k - \frac{1}{2}R_{\eta p j q}^M A^p_i A^q_k$$

où η représente la direction normale extérieure à Σ .

En particulier, on obtient le résultat suivant concernant la symétrie de $A_{ij;k}$ (voir l'annexe C) :

Corollaire 1.6.3

Notons η l'indice dans la direction normale à Σ . Alors :

$$A_{ik;j} - A_{jk;i} = -R_{ij\eta k}^M$$

En particulier, lorsque M est à courbure constante, $A_{ik;j} = A_{jk;i}$ et donc $A_{ij;k}$ est symétrique en i, j, k .

Ensuite, on obtient le résultat suivant sur les deuxièmes dérivées de A :

Lemme 1.6.4

Soit R^Σ le tenseur de courbure de Riemann de Σ . Alors :

$$A_{ij;kl} - A_{ij;lk} = R_{ipkl}^\Sigma A^p_j - R_{pjkl}^\Sigma A^p_i$$

Démonstration : D'abord :

$$\begin{aligned} A_{ij;kl} &= \partial_l \langle (\nabla_{\partial_k}^\Sigma A) \partial_i, \partial_j \rangle - \langle (\nabla_{\nabla_{\partial_l}^\Sigma \partial_k}^\Sigma A) \partial_i, \partial_j \rangle \\ &\quad - \langle (\nabla_{\partial_k}^\Sigma A) (\nabla_{\partial_l}^\Sigma \partial_i), \partial_j \rangle - \langle (\nabla_{\partial_k}^\Sigma A) \partial_i, \nabla_{\partial_l}^\Sigma \partial_j \rangle \\ &= \langle (\nabla_{\partial_l}^\Sigma \nabla_{\partial_k}^\Sigma A) \partial_i, \partial_j \rangle - \langle (\nabla_{\nabla_{\partial_l}^\Sigma \partial_k}^\Sigma A) \partial_i, \partial_j \rangle \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} A_{ij;kl} - A_{ij;lk} &= \langle (R_{\partial_l \partial_k}^\Sigma A) \partial_i, \partial_j \rangle \\ &= \langle R_{\partial_l \partial_k}^\Sigma A \partial_i, \partial_j \rangle - \langle AR_{\partial_l \partial_k}^\Sigma \partial_i, \partial_j \rangle \\ &= R_{lkpj}^\Sigma A^p_i - R_{lkip}^\Sigma A^p_j \\ &= R_{ipkl}^\Sigma A^p_j - R_{pjkl}^\Sigma A^p_i \end{aligned}$$

et le résultat en découle. \square

En particulier, on obtient :

Corollaire 1.6.5

A l'origine, on a :

$$A_{ij;kl} - A_{ij;lk} = (\lambda_i - \lambda_j)(-R_{ijkl}^M + A_{ik}A_{jl} - A_{il}A_{jk})$$

Démonstration : Par le formule de Gauss, on a :

$$R_{ijkl}^\Sigma = R_{ijkl}^M - A_{ik}A_{jl} + A_{il}A_{jk}$$

et le résultat en découle. \square

Maintenant, on note ∇^A la dérivée covariante de Levi-Civita de S par rapport à la métrique $\langle (I + A^2)\cdot, \cdot \rangle = \hat{i}^*\hat{g}$. Soit Γ^k_{ij} les symboles de Christopel de cette dérivée covariante par rapport à la dérivée covariante ∇^Σ :

$$\Gamma^k_{ij}\partial_k = (\nabla^A - \nabla^\Sigma)_{\partial_i}\partial_j$$

On obtient le résultat suivant :

Lemme 1.6.6

Notons $B = (I + A^2)^{-1}$, et donc :

$$B^{ij}(I + A^2)_{jk} = \delta^i_k$$

Alors, on obtient :

$$\begin{aligned} \Gamma^k_{ij} &= \frac{1}{2}A^p_j B^{kq} R_{qip\eta}^M + \frac{1}{2}A^p_i B^{kq} R_{qjp\eta}^M \\ &\quad + \frac{1}{2}[(I + A^2)^{-1}A]^k_p (A^p_{i;j} + A^p_{j;i}) \end{aligned}$$

Démonstration : D'abord, on a :

$$\begin{aligned} \langle (\nabla^A - \nabla^\Sigma)_{\partial_i}\partial_j, (I + A^2)\partial_k \rangle &= \langle \nabla^A_{\partial_i}\partial_j, (I + A^2)\partial_k \rangle - \langle \nabla^\Sigma_{\partial_i}\partial_j, (I + A^2)\partial_k \rangle \\ &= \partial_i \langle \partial_j, (I + A^2)\partial_k \rangle - \langle \partial_j, (I + A^2)\nabla^A_{\partial_i}\partial_k \rangle \\ &\quad - \partial_i \langle \partial_j, (I + A^2)\partial_k \rangle + \langle \partial_j, \nabla^\Sigma_{\partial_i}(I + A^2)\partial_k \rangle \\ &= -\langle \partial_j, (I + A^2)(\nabla^A - \nabla^\Sigma)_{\partial_i}\partial_k \rangle \\ &\quad + \langle \partial_j, [\nabla^\Sigma_{\partial_i}(I + A^2)]\partial_k \rangle \\ &= -\langle (\nabla^A - \nabla^\Sigma)_{\partial_k}\partial_i, (I + A^2)\partial_j \rangle \\ &\quad + \langle \partial_j, [\nabla^\Sigma_{\partial_i}(I + A^2)]\partial_k \rangle \\ &= -\langle (\nabla^A - \nabla^\Sigma)_{\partial_k}\partial_i, (I + A^2)\partial_j \rangle \\ &\quad + \langle \partial_j, [\nabla^\Sigma_{\partial_k}(I + A^2)]\partial_i \rangle \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} 2\langle (\nabla^A - \nabla^\Sigma)_{\partial_i}\partial_j, (I + A^2)\partial_k \rangle &= [\langle (\nabla^A - \nabla^\Sigma)_{\partial_i}\partial_j, (I + A^2)\partial_k \rangle \\ &\quad + \langle (\nabla^A - \nabla^\Sigma)_{\partial_k}\partial_i, (I + A^2)\partial_j \rangle] \\ &\quad - [\langle (\nabla^A - \nabla^\Sigma)_{\partial_k}\partial_i, (I + A^2)\partial_j \rangle \\ &\quad + \langle (\nabla^A - \nabla^\Sigma)_{\partial_j}\partial_k, (I + A^2)\partial_i \rangle] \\ &\quad + [\langle (\nabla^A - \nabla^\Sigma)_{\partial_j}\partial_k, (I + A^2)\partial_i \rangle \\ &\quad + \langle (\nabla^A - \nabla^\Sigma)_{\partial_i}\partial_j, (I + A^2)\partial_k \rangle] \\ &= \langle \partial_j, [\nabla^\Sigma_{\partial_i}(I + A^2)]\partial_k \rangle - \langle \partial_i, [\nabla^\Sigma_{\partial_k}(I + A^2)]\partial_j \rangle \\ &\quad + \langle \partial_k, [\nabla^\Sigma_{\partial_j}(I + A^2)]\partial_i \rangle \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
2\langle \Gamma^q_{ij} \partial_q, (I + A^2)^p_k \partial_p \rangle &= \langle \partial_j, A(\nabla^{\Sigma}_{\partial_i} A) \partial_k \rangle + \langle \partial_j, (\nabla^{\Sigma}_{\partial_i} A) A \partial_k \rangle \\
&\quad - \langle \partial_i, A(\nabla^{\Sigma}_{\partial_k} A) \partial_j \rangle - \langle \partial_i, (\nabla^{\Sigma}_{\partial_k} A) A \partial_j \rangle \\
&\quad + \langle \partial_k, A(\nabla^{\Sigma}_{\partial_j} A) \partial_i \rangle + \langle \partial_k, (\nabla^{\Sigma}_{\partial_j} A) A \partial_i \rangle \\
\Rightarrow 2(I + A^2)_{kp} \Gamma^p_{ij} &= A^p_j A_{pk;i} + A^p_k A_{pj;i} - A^p_i A_{pj;k} \\
&\quad - A^p_j A_{pi;k} + A^p_k A_{pi;j} + A^p_i A_{pk;j} \\
&= A^p_j (A_{pk;i} - A_{pi;k}) + A^p_i (A_{pk;j} - A_{pj;k}) + A^p_k (A_{pi;j} + A_{pj;i}) \\
&= A^p_j R^M_{kip\eta} + A^p_i R^M_{kjp\eta} + A^p_k (A_{pi;j} + A_{pj;i})
\end{aligned}$$

et le résultat en découle. \square

On remarque que lorsque M est à courbure constante, on obtient la formule plus simple suivante :

$$\Gamma^k_{ij} = [(I + A^2)^{-1} A]_p^k A^p_{i;j}$$

1.6.3 Le cas des hypersurfaces à courbure spéciale lagrangienne constante.

Lorsque Σ est à courbure spéciale lagrangienne constante, on peut trouver d'autres relations que satisfont les dérivées de A . D'abord :

Lemme 1.6.7

$$\text{Tr}((I + A^2)^{-1} \nabla^{\Sigma} A) = 0$$

Démonstration : Par définition, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{aligned}
&\text{Im}(e^{i\theta} \text{Det}(I + iA)) &&= 0 \\
\Rightarrow d(\text{Im}(e^{i\theta} \text{Det}(I + iA))) &&= 0 \\
\Rightarrow \text{Im}(ie^{i\theta} \text{Det}(I + iA) \text{Tr}((I + iA)^{-1} \nabla^{\Sigma} A)) &&= 0
\end{aligned}$$

Mais, comme $ie^{i\theta} \text{Det}(I + iA)$ est imaginaire pur, on voit que :

$$\text{Re}(\text{Tr}((I + iA)^{-1} \nabla^{\Sigma} A)) = 0$$

Ensuite, comme :

$$(I + iA)(I - iA)(I + A^2)^{-1} = (I + A^2)(I + A^2)^{-1} = I$$

On a :

$$(I + iA)^{-1} = (I - iA)(I + A^2)^{-1}$$

et l'on obtient :

$$\begin{aligned}
&\text{Re}(\text{Tr}(\frac{I - iA}{I + A^2} \nabla^{\Sigma} A)) &&= 0 \\
\Rightarrow \text{Tr}((I + A^2)^{-1} \nabla^{\Sigma} A) &&= 0
\end{aligned}$$

D'où le résultat. \square

En particulier, en regardant ce qui se passe à l'origine, on obtient :

Corollaire 1.6.8

À l'origine, on a :

$$\sum_{p=1}^n \frac{1}{1 + \lambda_p^2} A_{pp;k} = 0$$

Démonstration : Ceci découle directement du lemme précédent. \square

Ensuite, on obtient le résultat suivant sur les dérivées secondes de A :

Lemme 1.6.9

$$\begin{aligned} \text{Tr}((I + A^2)^{-1} \nabla_{\partial_l}^\Sigma \nabla_{\partial_k}^\Sigma A) = \\ \text{Tr}((I + A^2)^{-1} (\nabla_{\partial_l}^\Sigma A) A (I + A^2)^{-1} (\nabla_{\partial_k}^\Sigma A)) \\ + \text{Tr}((I + A^2)^{-1} A (\nabla_{\partial_l}^\Sigma A) (I + A^2)^{-1} (\nabla_{\partial_k}^\Sigma A)) \end{aligned}$$

Démonstration : On obtient ce résultat en dérivant le résultat précédent. \square

De nouveau, en regardant ce qui se passe à l'origine, on obtient :

Corollaire 1.6.10

À l'origine, on a :

$$\sum_{p=1}^n \frac{1}{1 + \lambda_p^2} A_{pp;kl} = \sum_{p,q=1}^n \frac{\lambda_p + \lambda_q}{(1 + \lambda_p^2)(1 + \lambda_q^2)} A_{pq;k} A_{pq;l}$$

Démonstration : Ceci découle directement du lemme précédent. \square

Maintenant, ces relations nous permettent de trouver une formule simple pour le laplacien de $\hat{\Sigma}$ (c'est-à-dire, le laplacien de S par rapport à la métrique $\hat{i}^* \hat{g}$, où \hat{g} est la métrique canonique sur W) en termes de la dérivée covariante de Σ :

Lemme 1.6.11

Soit Δ^A l'opérateur de Laplace-Beltrami de S par rapport à la métrique $\hat{i}^* \hat{g}$ agissant sur $C^\infty(S)$. Alors, pour toute fonction f sur S :

$$\Delta^A f = B^{ij} f_{;ij} + B^{ij} B^{kq} A^p{}_q R_{\eta ipj}^M f_{;k} + B^{jq} B^{kp} A^i{}_q R_{\eta ipj}^M f_{;k}$$

où B^{ij} est la matrice inverse de $(I + A^2)_{ij}$. C'est-à-dire que :

$$B^{ij} (I + A^2)_{jk} = \delta^i_k$$

Démonstration : D'abord, on a :

$$\begin{aligned} \Delta^A f &= B^{ij} (\nabla^A df)(\partial_j, \partial_i) \\ &= B^{ij} [(\nabla^A - \nabla^\Sigma) df(\partial_j, \partial_i) + \nabla^\Sigma df(\partial_j, \partial_i)] \\ &= B^{ij} (\nabla^\Sigma df)(\partial_j, \partial_i) - B^{ij} df((\nabla^A - \nabla^\Sigma)_{\partial_i} \partial_k) \\ &= B^{ij} f_{;ij} - B^{ij} \Gamma^k{}_{ij} f_{;k} \end{aligned}$$

Par le lemme 1.6.6, on sait que :

$$\begin{aligned} \Gamma^k{}_{ij} &= \frac{1}{2} A^p{}_j B^{kq} R_{qip\eta}^M + \frac{1}{2} A^p{}_i B^{kq} R_{qjp\eta}^M \\ &\quad + \frac{1}{2} [(I + A^2)^{-1} A]^k{}_p (A^p{}_{i;j} + A^p{}_{j;i}) \end{aligned}$$

En changeant les indices des deux premières composantes, on obtient :

$$B^{ij}\Gamma^k_{ij} = -B^{jq}B^{kp}A^i_q R^M_{\eta^i p j} + \frac{1}{2}B^{kq}A^p_q(A_{p i ; j} + A_{p j ; i})$$

Par le corollaire 1.6.3 :

$$A_{p i ; j} + A_{p j ; i} = A_{j i ; p} + A_{i j ; p} + R^M_{\eta^i j p} + R^M_{\eta^j i p}$$

et le lemme 1.6.7 et la symétrie de B nous permettent de voir que :

$$B^{ij}(A_{p i ; j} + A_{p j ; i}) = 2B^{ij}R^M_{\eta^i j p}$$

D'où :

$$B^{ij}\Gamma^k_{ij} = -B^{ij}B^{kq}A^p_q R^M_{\eta^i p j} - B^{jq}B^{kp}A^i_q R^M_{\eta^i p j}$$

Le résultat en découle. \square

De nouveau, on remarque que, dans le cas où M est à courbure constante, on obtient le résultat plus simple suivant :

$$\Delta^A f = B^{ij}f_{;ij}$$

1.6.4 L'existence des variétés rideaux.

Maintenant, on suppose que M est de courbure sectionnelle constante, et, en généralisant Yuan [56], on obtient le résultat suivant :

Lemme 1.6.12

$$\begin{aligned} \Delta^A h &= \sum_{p,q,r} \frac{2(1+\lambda_p\lambda_q)}{(1+\lambda_p^2)(1+\lambda_q^2)(1+\lambda_r^2)} A_{p q ; r} A_{p q ; r} \\ &\quad - \sum_{p,q} \frac{(\lambda_p - \lambda_q)^2}{(1+\lambda_p^2)(1+\lambda_q^2)} R^{\Sigma}_{p q p q} \end{aligned}$$

Démonstration : D'abord, on voit que :

$$\begin{aligned} h_{;i} &= \text{Tr}((I + A^2)^{-1}[AA_{;i} + A_{;i}A]) \\ &= 2\text{Tr}(A(I + A^2)^{-1}A_{;i}) \end{aligned}$$

En dérivant une seconde fois, on obtient :

$$\begin{aligned} h_{;ij} &= 2\text{Tr}([\nabla_{\partial_j}[A(I + A^2)^{-1}A_{;i}] \cdot \partial_i) \\ &= 2\text{Tr}(A_{;j}(I + A^2)^{-1}A_{;i}) \\ &\quad - 2\text{Tr}(A(I + A^2)^{-1}[AA_{;j} + A_{;j}A](I + A^2)^{-1}A_{;i}) \\ &\quad + 2\text{Tr}(A(I + A^2)^{-1}A_{;ij}) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} h_{;ij} &= \sum_{p,q} \frac{2}{1+\lambda_p^2} A_{p q ; i} A_{p q ; j} - \sum_{p,q} \frac{2\lambda_p^2}{(1+\lambda_p^2)(1+\lambda_q^2)} A_{p q ; i} A_{p q ; j} \\ &\quad - \sum_{p,q} \frac{2\lambda_p\lambda_q}{(1+\lambda_p^2)(1+\lambda_q^2)} A_{p q ; i} A_{p q ; j} + \sum_p \frac{2\lambda_p}{1+\lambda_p^2} A_{p p ; i j} \end{aligned}$$

En utilisant la symétrie de A par rapport à p et q on obtient :

$$h_{;ij} = \sum_{p,q} \frac{2 - 2\lambda_p\lambda_q}{(1 + \lambda_p^2)(1 + \lambda_q^2)} A_{pq;i} A_{pq;j} + \sum_p \frac{2\lambda_p}{1 + \lambda_p^2} A_{pp;ij}$$

On remarque en passant que cette formule reste vraie même lorsque M n'est pas à courbure constante. Ensuite, on cherche à éliminer les dérivées secondes. Puisque M est à courbure sectionnelle constante, par le corollaire 1.6.3, $A_{ij;k}$ est symétrique et donc $A_{ij;kl}$ est symétrique en (ijk) . On obtient alors :

$$\begin{aligned} \sum_{p,q} \frac{\lambda_p}{1 + \lambda_p^2} \frac{1}{1 + \lambda_q^2} A_{pp;qq} &= \sum_{p,q} \frac{\lambda_p}{(1 + \lambda_p^2)(1 + \lambda_q^2)} A_{qp;pq} \\ &= \sum_{p,q} \frac{\lambda_p}{(1 + \lambda_p^2)(1 + \lambda_q^2)} A_{qp;qp} \\ &\quad + \sum_{p,q} \frac{\lambda_p}{(1 + \lambda_p^2)(1 + \lambda_q^2)} [A_{qp;pq} - A_{qp;qp}] \end{aligned}$$

Par le lemme 1.6.4, on obtient :

$$\sum_{p,q} \frac{\lambda_p}{1 + \lambda_p^2} \frac{1}{1 + \lambda_q^2} A_{pp;qq} = \sum_{p,q} \frac{\lambda_p}{(1 + \lambda_p^2)(1 + \lambda_q^2)} A_{qp;qp} + \sum_{p,q} \frac{\lambda_p(\lambda_q - \lambda_p)}{(1 + \lambda_p^2)(1 + \lambda_q^2)} R_{pqpq}^\Sigma$$

En utilisant de nouveau la symétrie de $A_{ij;kl}$ en (ijk) on obtient :

$$\sum_{p,q} \frac{\lambda_p}{1 + \lambda_p^2} \frac{1}{1 + \lambda_q^2} A_{pp;qq} = \sum_{p,q} \frac{\lambda_p}{(1 + \lambda_p^2)(1 + \lambda_q^2)} A_{qq;pp} + \sum_{p,q} \frac{\lambda_p(\lambda_q - \lambda_p)}{(1 + \lambda_p^2)(1 + \lambda_q^2)} R_{pqpq}^\Sigma$$

Enfin, le corollaire 1.6.10 nous donne :

$$\begin{aligned} \sum_{p,q} \frac{\lambda_p}{1 + \lambda_p^2} \frac{1}{1 + \lambda_q^2} A_{pp;qq} &= \sum_{p,q,r} \frac{(\lambda_p + \lambda_q)\lambda_r}{(1 + \lambda_p^2)(1 + \lambda_q^2)(1 + \lambda_r^2)} A_{pq;r} A_{pq;r} \\ &\quad + \sum_{p,q} \frac{\lambda_p(\lambda_q - \lambda_p)}{(1 + \lambda_p^2)(1 + \lambda_q^2)} R_{pqpq}^\Sigma \end{aligned}$$

Or, en appliquant le lemme 1.6.11, on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta^A h &= \sum_p \frac{1}{1 + \lambda_p^2} h_{;pp} \\ &= \sum_{p,q,r} \frac{2 - 2\lambda_p\lambda_q}{(1 + \lambda_p^2)(1 + \lambda_q^2)(1 + \lambda_r^2)} A_{pq;r} A_{pq;r} + 2 \sum_{p,q} \frac{\lambda_p}{(1 + \lambda_p^2)(1 + \lambda_q^2)} A_{pp;qq} \\ &= \sum_{p,q,r} \frac{2 - 2\lambda_p\lambda_q + 2\lambda_p\lambda_r + 2\lambda_q\lambda_r}{(1 + \lambda_p^2)(1 + \lambda_q^2)(1 + \lambda_r^2)} A_{pq;r} A_{pq;r} \\ &\quad + 2 \sum_{p,q} \frac{\lambda_p(\lambda_q - \lambda_p)}{(1 + \lambda_p^2)(1 + \lambda_q^2)} R_{pqpq}^\Sigma \end{aligned}$$

En utilisant la symétrie de $A_{pq;r}$ pour le premier terme et la symétrie de R^Σ pour le second terme, on obtient :

$$\Delta^A h = \sum_{p,q,r} \frac{2 + 2\lambda_p\lambda_q}{(1 + \lambda_p^2)(1 + \lambda_q^2)(1 + \lambda_r^2)} A_{pq;r} A_{pq;r} - \sum_{p,q} \frac{(\lambda_p - \lambda_q)^2}{(1 + \lambda_p^2)(1 + \lambda_q^2)} R_{pqpq}^\Sigma$$

Le résultat en découle. \square

Remarque : En fait, on voit qu'un résultat analogue doit être vrai dans le cas plus général d'une variété à courbure quelconque. La seule différence serait quelques termes en R^M . Il est vraisemblable que ces nouveaux termes puissent être majorés par les autres termes, nous permettant ainsi d'en tirer les mêmes conclusions (voir ci-dessous) que lorsque M est à courbure constante.

On obtient en particulier le corollaire suivant :

Corollaire 1.6.13

$$\Delta^A h \geq - \sum_{p,q} \frac{(\lambda_p - \lambda_q)^2}{(1 + \lambda_p^2)(1 + \lambda_q^2)} R_{pqpq}^\Sigma$$

Démonstration : Ceci découle directement du résultat précédent. \square

Or, si κ est la courbure sectionnelle de M , on sait que :

$$\begin{aligned} R_{ijkl}^\Sigma &= R_{ijkl}^M - A_{ik}A_{jl} + A_{il}A_{jk} \\ &= \kappa(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}) - A_{ik}A_{jl} + A_{il}A_{jk} \\ \Rightarrow R_{pqpq}^\Sigma &= \kappa(g_{qp}g_{qp} - g_{qq}g_{pp}) + A_{pq}A_{pq} - A_{pp}A_{qq} \\ &= \kappa(\delta_{pq} - 1) + (\lambda_p\lambda_q\delta_{pq} - \lambda_p\lambda_q) \\ &= -(\kappa + \lambda_p\lambda_q)(1 - \delta_{pq}) \end{aligned}$$

Comme A est définie positive, on obtient directement le résultat suivant :

Corollaire 1.6.14

Supposons que $\kappa \geq 0$, alors h est sous-harmonique sur S .

Démonstration : Par le résultat précédent :

$$\begin{aligned} \Delta^A h &\geq - \sum_{p,q} \frac{(\lambda_p - \lambda_q)^2}{(1 + \lambda_p^2)(1 + \lambda_q^2)} R_{pqpq}^\Sigma \\ &= \sum_{p,q} \frac{(\lambda_p - \lambda_q)^2 (\kappa + \lambda_p\lambda_q)}{(1 + \lambda_p^2)(1 + \lambda_q^2)} \end{aligned}$$

Comme $\kappa \geq 0$, le résultat en découle. \square

Même lorsque M est à courbure sectionnelle négative, on obtient un résultat analogue, pourvu que la courbure SL de Σ ne soit pas dans $\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$:

Corollaire 1.6.15

Supposons que $\kappa \leq 0$ et que la courbure SL de Σ n'est pas dans $\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$. Alors, il existe $K \in \mathbb{R}^+$ tel que pour $h \geq K$:

$$\Delta^A h \geq 0$$

Démonstration : D'abord, il existe $L \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $P \in S$, il existe une valeur propre λ de $A(P)$ telle que :

$$\frac{1}{L} \leq \lambda \leq L$$

En effet, sinon, pour tout $\epsilon > 0$, il existerait un point P tel que si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A en P , alors, pour chaque i :

$$\arctan(\lambda_i) \in [0, \frac{\epsilon}{n}] \cup [\frac{\pi}{2} - \frac{\epsilon}{n}, \frac{\pi}{2}[$$

et donc, il existe un entier k tel que :

$$\text{Arg}(\text{Det}(I + iA)) = \arctan(\lambda_1) + \dots + \arctan(\lambda_n) \in \left[\frac{k\pi}{2} - \epsilon, \frac{k\pi}{2} + \epsilon \right]$$

et comme $\epsilon > 0$ est arbitraire, on voit que $\text{Arg}(\text{Det}(I + iA)) = k\pi/2$, ce qui est absurde.

Maintenant, on voit que :

$$\sum_{p,q} \frac{(\lambda_p - \lambda_q)^2 (1 - \delta_{pq})}{(1 + \lambda_p^2)(1 + \lambda_q^2)} \leq \sum_{p,q} (1 - \delta_{pq}) \leq n^2$$

et donc :

$$\sum_{p,q} \frac{(\lambda_p - \lambda_q)^2 \kappa (1 - \delta_{pq})}{(1 + \lambda_p^2)(1 + \lambda_q^2)} \geq \kappa n^2$$

En même temps, puisque A est définie positive, pour tout p, q :

$$\frac{(\lambda_p - \lambda_q)^2 \lambda_p \lambda_q (1 - \delta_{pq})}{(1 + \lambda_p^2)(1 + \lambda_q^2)} \geq 0$$

Pour $K > 0$, si $\text{Log}(\text{Det}(I + A^2)) > K$, alors il existe une valeur propre, λ de A telle que :

$$\begin{aligned} (1 + \lambda^2) &\geq e^{K/n} \\ \Leftrightarrow \lambda &\geq K' = \sqrt{e^{K/n} - 1} \end{aligned}$$

Supposons ensuite que $L^{-1} \leq \lambda_p \leq L$ et que $\lambda_q \geq K'$. Supposons en plus que $K' \geq 2L$ et que $K' \geq 1$. Alors $\lambda_q \geq 2\lambda_p$ et donc :

$$\frac{(\lambda_p - \lambda_q)^2}{(1 + \lambda_q^2)} \geq \frac{1}{4} \frac{\lambda_q^2}{(1 + \lambda_q^2)} \geq \frac{1}{8}$$

Donc, puisque p est différent de q , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{(\lambda_p - \lambda_q)^2 \lambda_p \lambda_q (1 - \delta_{pq})}{(1 + \lambda_p^2)(1 + \lambda_q^2)} &\geq \frac{\lambda_p \lambda_q}{8(1 + \lambda_p^2)} \\ &\geq \frac{K'}{8(1 + L^2)L} \end{aligned}$$

Puisque (en rendant K aussi grand qu'on veut) on peut rendre K' aussi grand qu'on veut, on peut supposer que :

$$\frac{K'}{8(1+L^2)L} \geq |\kappa| n^2$$

et le résultat en découle. \square

On est maintenant en mesure de contrôler le comportement des sous-variétés immergées B-symphatiques lorsque elles s'approchent de la verticale. :

Lemme 1.6.16

Soit M une variété à courbure constante et soit $\hat{\Sigma} = (S, \hat{c})$ une sous-variété B-symphatique immergée dans UM et $SL+$ par rapport à la forme spéciale lagrangienne Ω_θ . Alors, si la courbure de M est positive, h est constante. Sinon, si θ est différent de $k\pi/2$ pour k entier alors il existe $K \in [0, \infty[$ qui ne dépend que de θ et de B tel que :

$$\exists P \in S \text{ tq. } h(P) \geq K \Rightarrow h \text{ constante}$$

Démonstration : En effet, si la courbure sectionnelle de M est positive, alors, par le corollaire 1.6.14, on voit que h est sous-harmonique. Puisque $\hat{\Sigma}$ est B-symphatique, la fonction h atteint son maximum en l'intérieur de $\hat{\Sigma}$. Soit h_0 le suprémum de h sur $\hat{\Sigma}$. Puisque h est continue, l'ensemble $h^{-1}(h_0)$ est un fermé dans $\hat{\Sigma}$. Ensuite, par le principe fort du maximum, cet ensemble est un ouvert dans $\hat{\Sigma}$. Comme h atteint son maximum en l'intérieur de $\hat{\Sigma}$, cet ensemble est non-vide, et donc, par la connexité, h vaut constamment h_0 sur $\hat{\Sigma}$ et le résultat en découle.

Ensuite, si θ est différent de $k\pi/2$, par le corollaire 1.6.15, il existe $K \in [B, \infty[$ (qui ne dépend que de θ , de B et de la courbure sectionnelle de M) tel que h soit sous-harmonique dans $h^{-1}([K, \infty[)$. Donc, s'il existe un point $P \in S$ tel que $h(S) \geq K$, alors, comme avant, h est constant, et le deuxième résultat en découle. \square

et l'on peut maintenant démontrer le lemme 1.1.3 :

Démonstration du lemme 1.1.3 : En effet, par le résultat précédent, comme il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que P_n soit dans $\hat{\Sigma}_n$ pour tout n et que $h_n(P_n) \uparrow \infty$ lorsque n tend vers l'infini, on voit que, pour n suffisamment grand, h_n est constante. Il en découle que h_0 est constamment infinie, et le résultat en découle. \square

1.6.5 La géométrie des variétés rideaux.

Dans cette section on montre le lemme 1.1.5. Soit $\hat{\Sigma} = (S, \hat{i})$ une variété rideau dans UM . Soit $P \in S$ et supposons que le valeur de $\text{Dim}(T\Sigma \cap VUM)$ soit localement constante dans un voisinage Ω de P . On obtient d'abord le résultat suivant :

Lemme 1.6.17

Soit $\hat{\Sigma} = (S, \hat{i})$ une sous-variété immergée dans UM . Soit $P \in S$ et supposons qu'il existe un voisinage Ω de P dans S tel que $\text{Dim}(T\hat{\Sigma} \cap VUM)$ soit constante dans Ω . Posons

$k = \text{Dim}(T\hat{\Sigma} \cap VUM)$. Alors, en restreignant au besoin Ω , on peut supposer qu'il existe $\epsilon > 0$, et $\Sigma \subseteq M$ une variété plongée dans M et un difféomorphisme $\Phi : \Sigma \times]-\epsilon, \epsilon[^k \rightarrow \Omega$ tels que :

$$\pi \circ \Phi = \text{Id}$$

Démonstration : Posons n la dimension de S . Ensuite, soit X_1, \dots, X_k un repère de $T\Sigma \cap VUM$ dans un voisinage de \hat{P} et, pour chaque i , soit $\Phi_{i,t}$ le flot de X_i . Soit maintenant $\hat{V} \subseteq \hat{\Sigma}$ une sous-variété plongée de dimension $n - k$ dans $\hat{\Sigma}$ passant par \hat{P} et transverse à chacun des X_i . Comme la restriction de $T\pi$ à \hat{V} est de rang maximal, on peut supposer qu'il existe une variété $V \subseteq M$ plongée dans M et passant par $P = \pi(\hat{P})$ tel que $\pi : \hat{V} \rightarrow V$ soit un difféomorphisme. Soit maintenant $\Psi : V \rightarrow \hat{V}$ l'inverse de π . Pour ϵ assez petit, on peut définir $\Phi : V \times]-\epsilon, \epsilon[^k \rightarrow \Omega$ par :

$$T\Phi(Q, t_1, \dots, t_k) = (\Phi_{k,t_k} \dots \Phi_{1,t_1} \Psi)(Q)$$

Pour chaque i on voit que :

$$T\Phi(P, 0) \cdot \partial t_i = \partial_t \Phi_{i,t}(\hat{P})|_{t=0} = X_i(\hat{P})$$

Ensuite, pour $\hat{A} \in T_{\hat{P}}\hat{V}$ on pose :

$$A = T_{\hat{P}}\pi \cdot \hat{A}$$

et l'on obtient :

$$T\Phi(P, 0) \cdot A = \hat{A}$$

Donc $T\Phi$ est un isomorphisme en $(P, 0)$ et donc, en restreignant au besoin V et Ω et en réduisant au besoin ϵ , on peut supposer que Φ un difféomorphisme.

Finalement, pour tout i , puisque X_i est verticale, pour tout t :

$$\pi \circ \Phi_{i,t} = \pi$$

et donc :

$$\pi \circ \Phi = \pi \circ \Psi = \text{Id}$$

D'où le résultat. \square

Maintenant, on pose $\Phi_t(Q) = \Phi(Q, t)$, et, en utilisant le fait que $\hat{\Sigma}$ est une sous-variété immergée legendrienne, on obtient le résultat suivant :

Lemme 1.6.18

Soit $N\Sigma$ le fibré normal en Σ . Alors, Ω est contenu dans $N\Sigma \cap U M$.

Démonstration : En effet, soit $Q \in \Sigma$ et soit A_1, \dots, A_k et $N_1, \dots, N_{(n+1)-k}$ des repères respectivement de $T\Sigma$ et de $N\Sigma$ dans un voisinage de Q . Pour tout t , on sait que $\pi \circ \Phi_t = \text{Id}$, et il en découle qu'il existe des vecteurs B_1, \dots, B_k tels que pour tout i :

$$T\Phi_t \cdot A_i = \{A_i, B_i\} (\Phi(Q, t))$$

Ensuite, pour chaque j , on sait que X_j est vertical, et donc il existe Y_j tel que :

$$X_j(\Phi(Q, t)) = \{0, Y_j\} (\Phi(Q, t))$$

Comme $\hat{\Sigma}$ est legendrienne, on voit alors que, pour tout i et pour tout j :

$$\begin{aligned} \omega(T\Phi_t \cdot A_i, X_j(\Phi(Q, t))) &= 0 \\ \Leftrightarrow \langle A_i(Q), Y_j \rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow Y_j &\in \langle N_1(Q), \dots, N_{(n+1)-k}(Q) \rangle \end{aligned}$$

Finalement, comme $\hat{\Sigma}$ est la limite d'une suite de relevés de Gauss d'hypersurfaces dans M , on voit que :

$$\Phi_0(Q) \in \langle N_1(Q), \dots, N_{(n+1)-k}(Q) \rangle$$

et le résultat en découle. \square

Maintenant, on peut démontrer la première partie du lemme 1.1.5 :

Démonstration du lemme 1.1.5 : Soit $\pi : TUM \rightarrow W$ la projection orthogonale. Soit $II_{\hat{\Sigma}}^W$ la seconde forme fondamentale de la sous-variété $\hat{\Sigma}$ relativement à W . C'est à dire que :

$$II_{\hat{\Sigma}}^W = \pi \circ II_{\hat{\Sigma}}$$

Dans le cadre de ce lemme, la variété ambiante M est à courbure sectionnelle constante et donc la forme Ω_θ est fermée relativement à W . Il en découle que $\hat{\Sigma}$ est minimale relativement à W au sens où :

$$\text{Tr}(II_{\hat{\Sigma}}^W) = 0$$

Le théorème d'unicité de prolongement analytique d'Aronszajn [3] nous permet alors de conclure que la composante connexe de $\hat{\Sigma}$ au dessus de Σ et passant par \hat{P} n'est rien d'autre que le fibré normal unitaire de Σ . C'est-à-dire, le fibré de vecteurs normaux à Σ et de longueur 1. Le premier résultat en découle.

Maintenant, supposons que Σ est de dimension k et notons $N\Sigma$ le fibré normal à Σ . Soit \mathbf{N} un champ de vecteurs normaux à Σ . Soit $P \in \Sigma$ et posons $\hat{P} = \mathbf{N}(P)$. Prolongeons $\mathbf{N}(P)$ en une base orthonormée $\mathbf{N}, \mathbf{N}_{(n-k)+1}, \dots, \mathbf{N}_n$ de $N_P\Sigma$. Par définition de Σ , il existe un endomorphisme A de $T_P\Sigma$ tel que :

$$T_{\hat{P}}\hat{\Sigma} = \langle \{X_P, AX_P\} \mid X_P \in T_P\Sigma \rangle \oplus \langle \{0, \mathbf{N}_{(n-k)+1}\}, \dots, \{0, \mathbf{N}_n\} \rangle$$

Pour tout $X_P, Y_P \in T_P\Sigma$, l'application A satisfait à :

$$\langle AX_P, Y_P \rangle = \langle II_{\Sigma}(X_P, Y_P), \mathbf{N} \rangle$$

En particulier, A est symétrique. Soit $E_1, \dots, E_k \in T_P \Sigma$ une base orthonormée de vecteurs propres de A et soit $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ leurs valeurs propres respectives. Pour chaque m , définissons \hat{E}_m par :

$$\hat{E}_m = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda_m^2}} \{E_m, \lambda_m E_m\}$$

On sait qu'il existe une suite $(\hat{\Sigma}_m, \hat{P}_m)$ de sous-variétés immergées $SL+$ non-dégénérées qui tend vers $(\hat{\Sigma}, \hat{P})$ lorsque m tend vers l'infini. Pour chaque m , soit Σ_m l'hypersurface dont $\hat{\Sigma}_m$ est le relevé de Gauss et définissons A_m tel que :

$$T_{\hat{P}} \hat{\Sigma}_m = \{\{X_P, A_m X_P\} \mid X_P \in T_P \Sigma_m\}$$

Pour chaque m , soit $E_{1,m}, \dots, E_{n,m}$ les vecteurs propres de A_m et soit $\lambda_{1,m} \leq \dots \leq \lambda_{n,m}$ leurs valeurs propres respectives. Ensuite, pour chaque m , définissons $\hat{E}_{m,n}$ par :

$$\hat{E}_{m,n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda_{m,n}^2}} \{E_{m,n}, \lambda_{m,n} E_{m,n}\}$$

La suite de plans $(\{\hat{E}_{m,n}, \lambda_{m,n} \hat{E}_{m,n}\} \mid 1 \leq m \leq n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $T_{\hat{P}} \hat{\Sigma}$ lorsque n tend vers l'infini et il en découle que $|\lambda_{(n-k)+1,m}|, \dots, |\lambda_{n,m}|$ tendent vers l'infini lorsque m tend vers l'infini. Il existe alors $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\arctan(\lambda_{(n-k)+1,m}) + \dots + \arctan(\lambda_{n,m}) \rightarrow \frac{k\pi}{2} \text{ lorsque } m \rightarrow \infty$$

Or, chacun des Σ_n est une hypersurface à courbure spéciale lagrangienne constante égale à θ , et on obtient alors :

$$\arctan(\lambda_{1,m}) + \arctan(\lambda_{n-k,m}) \rightarrow \theta - \frac{k\pi}{2} \text{ lorsque } m \rightarrow \infty$$

Mais $\lambda_{1,m}, \dots, \lambda_{k,n}$ tendent vers les valeurs propres de A et l'on voit alors que :

$$\text{Arg}(\text{Det}(I + iA)) = \theta - \frac{k\pi}{2}$$

et le deuxième résultat en découle. \square

Remarque : On vient d'étudier le cas où la variété ambiante, M est à courbure sectionnelle constante. Pourtant, il y a de bonnes raisons de croire qu'une approche analogue fonctionne dans des cadres plus généraux. D'abord, il n'est pas irréaliste d'espérer que les mêmes méthodes puissent être employées pour montrer l'existence des variétés rideaux dans ces cadres. Par exemple, on a le résultat suivant :

Lemme 1.6.19

Soit Σ convexe et à courbure SL constante. Alors :

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{1 + \lambda_i^2} \tilde{A}_{jii} = \frac{1}{2} \text{Ric}_{\eta j}^M$$

où η est le vecteur normal orthogonal à Σ et Ric^M est le tenseur de courbure de Ricci de M .

Démonstration : Par le lemme 1.6.2, et le corollaire 1.6.8, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N \frac{1}{1+\lambda_i^2} \tilde{A}_{jii} &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{1+\lambda_i^2} [A_{ii;j} - \frac{1}{2} R_{ji\eta i}^M \\
&\quad - \frac{1}{2} \lambda_i^2 R_{\eta i j i}^M - \frac{1}{2} \lambda_i \lambda_j R_{\eta j i i}^M] \\
&= \sum_{i=1}^N -\frac{1}{2} R_{ji\eta i}^M \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N R_{jii\eta}^M \\
&= \frac{1}{2} \text{Ric}_{j\eta}^M
\end{aligned}$$

D'où le résultat. \square

On voit alors que, pour une variété d'Einstein, les sous-variétés immergées $SL+$ sont des sous-variétés minimales relativement à W , et donc des variétés rideaux (si elles existent) le sont aussi. On peut se permettre alors d'utiliser le résultat d'Aronszajn pour globaliser les résultats locaux obtenus dans cette section.

◇

1.7 Le théorème de compacité.

1.7.1 Quelques résultats préliminaires.

Dans l'article [56] Yuan montre le résultat suivant :

Théorème 1.7.1 [Yuan, 2002]

Soit $\hat{\Sigma} \subseteq \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$ une sous-variété immergée complète SL_0+ par rapport à la forme spéciale lagrangienne Ω_θ . Alors $\hat{\Sigma}$ est un sous-espace affine.

Nous allons employer ce résultat pour obtenir un lemme de compacité sur les sous-variétés immergées $SL+$ immergées dans UM , pour M une variété à géométrie bornée. Introduisons la définition suivante :

Définition 1.7.2

Soit (M, g) une variété riemannienne, et soit $X = (Y, i)$ une sous-variété immergée dans M . Soit ∇^i la dérivée covariante de Levi-Civita engendrée sur Y par l'immersion i dans la variété riemannienne (M, g) . Ensuite, posons $II(X)$ la seconde forme fondamentale de X et, pour tout $k \geq 2$, définissons $A_k(X)$ par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned}
A_2(X) &= II(X) \\
A_k(X) &= \nabla^i A_{k-1}(X) \quad \forall k \geq 3
\end{aligned}$$

On peut maintenant énoncer le lemme d'Arzela-Ascoli-Corlette :

Lemme 1.7.3 [Arzela, Ascoli, Corlette]

Soit $(M_n, g_n, p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variétés complètes pointées qui converge vers une variété pointée (M_0, g_0, p_0) au sens des variétés riemanniennes pointées lorsque n tend vers l'infini.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $\Sigma_n = (S_n, i_n)$ une sous-variété complète immergée dans M_n et supposons qu'il existe $q_n \in S_n$ tel que $i_n(q_n) = p_n$. Maintenant, supposons qu'il existe $B \in]0, \infty[$ tel que, pour tout n :

$$\|II(\Sigma_n)\|_\infty \leq B$$

Alors, il existe une suite $(k_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}$ et une sous-variété immergée complète pointée $(\Sigma_0, q_0) = (S_0, i_0, q_0)$ dans M_0 telles que :

- (i) $k_n \uparrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$,
- (ii) $i_0(q_0) = p_0$,
- (iii) (S_0, i_0) est de type $C^{1,\alpha}$ pour tout $\alpha \in]0, 1[$ et,
- (iv) (Σ_{k_n}, p_{k_n}) tend vers (Σ_0, p_0) dans la topologie $C^{1,\alpha}$ pour tout $\alpha \in]0, 1[$ lorsque n tend vers l'infini.

Remarque : En fait, on n'est pas obligé de supposer que Σ_n est complète pour tout n . Il suffit qu'il existe une suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}} \in]0, \infty[$ telle que $R_n \uparrow \infty$ lorsque n tend vers l'infini et que, pour tout n , la boule de rayon R_n autour de q_n dans S_n soit complète. Ensuite, en considérant, pour tout k les sous-variétés $T^k \Sigma_n$ immergées dans $T^k M_n$, on obtient le résultat suivant :

Corollaire 1.7.4

Avec les mêmes notations que dans le lemme 1.7.3, supposons qu'il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \leq K + 1$:

$$\|A_k(\Sigma_n)\| \leq B$$

Alors, la sous-variété (S_0, i_0) est de type $C^{K,\alpha}$ pour tout $\alpha \in]0, 1[$ et (Σ_{k_n}, p_{k_n}) tend vers (Σ_0, p_0) dans la topologie $C^{K,\alpha}$ pour tout $\alpha \in]0, 1[$ lorsque n tend vers l'infini.

Finalement, on va avoir besoin du lemme de λ -maximum. D'abord, pour X un espace topologique et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, on dit que f est *localement bornée* si et seulement si pour tout $P \in X$ il existe $B \in \mathbb{R}^+$ et un voisinage Ω de P dans X tels que :

$$Q \in \Omega \quad \Rightarrow \quad |f(Q)| \leq B$$

On a le résultat classique suivant :

Lemme 1.7.5 Lemme du λ -maximum

Soit X un espace métrique et soit P un point de X . Supposons qu'il existe $\delta > 0$ tel que la δ -boule fermée autour de P dans X soit complète. Alors, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ qui ne dépend que de δ tel que pour toute fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ localement bornée satisfaisant à $f(P) \geq 1$, il existe $Q \in B(P, \delta)$ tel que $f(Q) \geq \lambda f(P)$ et que :

$$Q' \in B(Q, \epsilon) \Rightarrow f(Q') \leq \lambda f(Q)$$

où ϵ est donnée par :

$$\epsilon = \lambda^{-1} f(Q)^{-1/2}$$

Démonstration : Soit $\lambda > 1$ tel que :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda} - 1} \leq \delta$$

Supposons le contraire et raisonnons par l'absurde. Il existe une suite $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}} \in B(P, \delta)$ avec $Q_0 = P$ tel que, pour tout k :

$$\begin{aligned} d(Q_k, Q_{k+1}) &\leq \frac{1}{\lambda \sqrt{f(Q_k)}} \\ f(Q_{k+1}) &\geq \lambda f(Q_k) \end{aligned}$$

D'abord, pour tout k , on obtient :

$$f(Q_k) \geq \lambda^k$$

et donc, pour tout k :

$$d(Q_k, Q_{k+1}) \leq \frac{1}{\lambda \sqrt{\lambda^k}}$$

Or :

$$\sum_{i=0}^{\infty} d(Q_k, Q_{k+1}) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda \sqrt{\lambda^k}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda} - 1} < \delta$$

Il en découle par la complétude de $B(P, \delta)$ qu'il existe $Q_0 \in B(P, \delta)$ tel que Q_k tende vers Q_0 lorsque k tend vers l'infini. On sait en plus que $f(Q_k)$ tend vers l'infini lorsque k tend vers l'infini, ce qui est absurde, car f est bornée dans un voisinage de Q_0 . Le résultat en découle. \square

1.7.2 Le théorème de compacité.

Ces résultats nous permettent d'obtenir le lemme de compacité suivant :

Lemme 1.7.6

Soit M une variété complète à géométrie bornée. Alors, pour tout $\theta \in [0, n\pi/2]$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $B_k \in]0, \infty[$ tel que si $\hat{\Sigma} = (S, \hat{i}) \subseteq UM$ est $SL+$ relativement à la structure spéciale legendrienne (ω, Ω_θ) , alors :

$$\|A_k(\hat{\Sigma})\| \leq B_k$$

Démonstration : Supposons le contraire et raisonnons par l'absurde.

Première étape : On commence par construire une suite de sous-variétés pointées qui nous donnera plus tard la contradiction.

On suppose qu'il existe une suite $(\Sigma_n, q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sous-variétés immergées pointées $SL+$ dans UM relativement à la structure spéciale legendrienne (ω, Ω_θ) et $k \geq 2$ tels que :

$$\|A_k(\hat{\Sigma}_n)(q_n)\| \uparrow \infty \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

Pour tout n , notons $\hat{\Sigma}_n = (S_n, \hat{i}_n)$ et définissons $\mathcal{A}_{k,n} : S_n \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\mathcal{A}_{k,n} = \sum_{i=2}^k \|A_i(\hat{\Sigma}_n)\|^{\frac{1}{i-1}}$$

Pour tout n , pour tout ρ , et pour tout $p \in S_n$ soit $B(p, \rho)$ la boule de rayon ρ autour de p dans S_n relativement à la métrique engendrée sur cette variété par l'immersion \hat{i} dans la variété riemannienne UM . Soit $\lambda > 1$. Pour tout n , en remplaçant q_n par un point p_n obtenu par le lemme du λ -maximum, et on notant $B_n = \mathcal{A}_{k,n}(p_n)$, on peut supposer que :

$$q \in B\left(p_n, \frac{1}{\lambda B_n^{1/2}}\right) \Rightarrow \mathcal{A}_{k,n}(q) \leq \lambda B_n$$

Deuxième étape : On utilise le théorème de Darboux pour construire des cartes de UM nous permettant de simplifier le problème en transformant la structure de contact de UM en la structure de contact canonique de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$.

Notons $m + 1$ la dimension de M et notons g la métrique sur UM . Puisque M est à géométrie bornée, son fibré unitaire (UM, g) l'est aussi, et il existe alors une variété riemannienne complète pointée (UM_0, g_0, p_0) telle que (UM, g, p_n) tende vers (UM_0, g_0, p_0) au sens de Cheeger/Gromov lorsque n tend vers l'infini. C'est-à-dire qu'il existe une suite de fonctions $\psi_n : (UM_0, p_0) \rightarrow (UM, p_n)$ telle que :

(i) Pour tout $R > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$, la restriction de ψ_n à $B_R(p_0)$ soit un difféomorphisme sur son image et,

(ii) Pour tout compact $K \subseteq M_0$, les métriques $\psi_n^* g$ tendent vers g_0 dans la norme C^∞ sur K lorsque n tend vers l'infini.

Soit ω la forme symplectique canonique sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. Soit β une primitive de ω . Définissons la forme de contact α sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ par :

$$\alpha = dt - \beta$$

Par le théorème de Darboux pour les familles (voir l'annexe C), on peut supposer qu'il existe $\epsilon > 0$ et, pour tout n , un voisinage U_n de p_0 dans UM_n et un difféomorphisme $\varphi_n : (B_\epsilon(0), 0) \rightarrow (U_n, p_n)$ tels que $(\varphi_n)_* \alpha$ soit colinéaire avec la structure de contact sur U_n . De plus, on peut supposer qu'il existe $R \in]0, \infty[$ tel que, pour n suffisamment grand $U_n \subseteq \psi_n(B_R(p_0))$ et que $\psi_n^{-1} \circ \varphi_n$ converge vers φ_0 dans la topologie C_{loc}^∞ lorsque n tend vers l'infini.

Notons \mathbb{R}_0^m la section nulle au dessus de \mathbb{R}^m dans le fibré $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. Puisque on peut choisir librement β , on peut supposer que, pour tout n , l'application $T_0 \varphi_n$ envoie \mathbb{R}_0^m en $T_{p_n} \Sigma_n$.

Troisième étape : On regarde à la loupe en dilatant la métrique sur UM par un facteur constant qui tend vers l'infini, et l'on montre que la suite de variétés

pointées ainsi obtenue converge au sens de Cheeger/Gromov vers une variété plate lorsque le facteur tend vers l'infini.

Pour tout n , définissons la métrique g_n sur UM par :

$$g_n = B_n^2 g$$

Ensuite, définissons Δ_n , un endomorphisme de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ par :

$$\Delta_n(t, q, p) = (B_n t, B_n q, B_n p)$$

Définissons $\phi_n : (B_{B_n \epsilon}(0), 0) \rightarrow (UM, p_n)$ par :

$$\phi_n = \varphi_n \circ \Delta_n^{-1}$$

Soit $R > 0$. Puisque B_n tend vers l'infini lorsque n tend vers l'infini, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq N$:

$$B_R(0) \subseteq B_{B_n \epsilon}(0)$$

et donc ϕ_n est définie sur $B_R(0)$ et est un difféomorphisme sur son image. Ensuite :

$$\begin{aligned} \phi_n^* g_n(t, q, p) &= ((\Delta_n^{-1})^* (\psi_n^{-1} \circ \varphi_n)^* \psi_n^* g_n)(t, q, p) \\ &= ((\psi_n^{-1} \circ \varphi_n)^* \psi_n^* g)(t/B_n, q/B_n, p/B_n) \end{aligned}$$

Comme $(\psi_n^{-1} \circ \varphi_n)^* \psi_n^* g$ converge dans la topologie C_{loc}^∞ vers $\varphi_0^* g_0$ lorsque n tend vers l'infini, la métrique $\phi_n^* g_n$ tend vers une métrique constante \tilde{g}_0 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ lorsque n tend vers l'infini. Pour les mêmes raisons, il existe une distribution constante W_0 dans $T\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, une forme complexe constante J_0 sur W_0 , une forme symplectique constante ω_0 sur W_0 et une forme spéciale lagrangienne constante Ω_0 sur W_0 telles que $\phi_n^* W$, $\phi_n^* J$, $B_n^2 \phi_n^* \omega$ et $B_n^m \phi_n^* \Omega$ tendent respectivement vers W_0 , J_0 , ω_0 et Ω_0 dans la topologie C_{loc}^∞ lorsque n tend vers l'infini.

Quatrième étape : On transforme les sous-variétés pointées de UM en des sous-variétés pointées de la variété avec la métrique dilatée, et l'on montre que la suite de sous-variétés ainsi obtenue converge vers une sous-variété plate d'un espace vectoriel dans la topologie C_{loc}^∞ .

Pour tout n , et pour tout $\rho \in]0, \infty[$, on note $B(p_n, \rho)$ la boule de rayon ρ autour de p_n dans la variété S_n relativement à la métrique engendrée sur S_n par l'immersion \hat{i} dans la variété riemannienne (UM, g) . Pour n suffisamment grand, on a :

$$B\left(p_n, \frac{1}{\lambda B_n^{1/2}}\right) \subseteq U_n$$

et donc, pour tout n suffisamment grand, on définit la sous-variété immergée $\tilde{\Sigma}_n = (\tilde{S}_n, \tilde{i}_n)$ contenue dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ par :

$$(\tilde{S}_n, \tilde{i}_n) = \left(B\left(p_n, \frac{1}{\lambda B_n^{1/2}}\right), \varphi_n^{-1} \circ \hat{i}_n \right)$$

On considère $\tilde{\Sigma}_n$ comme une sous-variété immergée dans $(B_{B_n \epsilon}(0), 0, \varphi_n^* g_n)$. Donc, si l'on définit $\tilde{\mathcal{A}}_{k,n}$ de la même façon que pour $\mathcal{A}_{k,n}$, on obtient :

$$\tilde{\mathcal{A}}_{k,n}(p_n) = 1$$

et pour tout $q \in S_n$:

$$\tilde{\mathcal{A}}_{k,n}(q) \leq \lambda$$

Par le corollaire 1.7.4 au lemme d'Arzela-Ascoli-Corlette, on peut supposer qu'il existe $\tilde{\Sigma}_0 = (\tilde{S}_0, \tilde{i}_0)$ une sous-variété immergée complète de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ de type $C^{k-1, \alpha}$ pour tout α passant par l'origine telle que $(\tilde{\Sigma}_n, p_n)$ tende vers $(\tilde{\Sigma}_0, p_0)$ dans la topologie $C_{loc}^{k-1, \alpha}$ pour tout α lorsque n tend vers l'infini.

En utilisant la régularité elliptique avec le théorème 1.7.1 de Yuan, on obtient le résultat suivant :

Lemme 1.7.7

$\tilde{\Sigma}_0$ est un sous-espace linéaire de $\{0\} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ et $(\tilde{\Sigma}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $\tilde{\Sigma}_0$ dans la topologie C_{loc}^∞ lorsque n tend vers l'infini.

Démonstration : $T\tilde{\Sigma}_0$ est contenu dans W_0 . Comme W_0 est une distribution constante sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, et puisque elle passe par l'origine, la sous-variété $\tilde{\Sigma}_0$ est contenue dans un sous-espace linéaire X de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ de dimension $2m$ qui est parallèle à W_0 . En fait, par la construction de W_0 , on obtient :

$$X = \{0\} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$$

Le restriction de ω_0 à X est une forme symplectique. En même temps, la restriction de Ω_0 à X est une forme spéciale lagrangienne. Il en découle que $\tilde{\Sigma}_0$ est une sous-variété spéciale lagrangienne complète de X . Puisque Ω_0 est une calibration de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, la sous-variété $\tilde{\Sigma}_0$ est minimale et donc, comme elle est de type $C^{1, \alpha}$, elle est lisse. Ensuite, la positivité de chaque Σ_n se traduit en la positivité de $\tilde{\Sigma}_0$ (relativement à une paire de sous-espaces H et V tels que $X = H \oplus V$ et que $V = JH$). Le théorème 1.7.1 de Yuan nous montre alors que $\tilde{\Sigma}_0$ est un sous-espace linéaire de X .

Notons \mathbb{R}_0^m la section nulle dans le fibré $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ au dessus de \mathbb{R}^m . Par construction $T_0\tilde{\Sigma}_0$ coïncide avec \mathbb{R}_0^m et il en découle que $\tilde{\Sigma}_0$ coïncide elle-même avec \mathbb{R}_0^m . Puisque la suite $\tilde{\Sigma}_m$ converge vers $\tilde{\Sigma}_0$ dans la topologie $C_{loc}^{k-1, \alpha}$, on peut supposer qu'il existe $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}} \in]0, \infty[$ telle que $\rho_n \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$ et, pour tout n , une fonction $(t_n, q_n) : B_{\rho_n}(0) \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ et un ouvert Ω_n autour de p_n dans S_n tels que l'image de Ω_n par \hat{i}_n coïncide avec le graphe de (t_n, q_n) au dessus de $B_{\rho_n}(0)$. La suite de fonctions $(t_n, q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers zéro dans la topologie $C_{loc}^{k-1, \alpha}$ lorsque n tend vers l'infini. Il suffit pour nos besoins d'avoir la convergence de cette suite dans la topologie $C_{loc}^{1, \alpha}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, définissons la fonction $\mathcal{O}_n(p, t, q, A)$ pour $p, q \in \mathbb{R}^m$, $t \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathbb{R}^{n^2}$ tels que $\|p\|, \|q\|, |t| < \epsilon B_n/3$ par :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_n(p, t, q, A) &= (\Omega_n)_{\left(\frac{t}{B_n}, \frac{p}{B_n}, \frac{q}{B_n}\right)} \left[(\partial_1, -\beta_{(p,q)}(\partial_1, A \cdot \partial_1), A \cdot \partial_1), \dots, \right. \\ &\quad \left. (\partial_m, -\beta_{(p,q)}(\partial_m, A \cdot \partial_m), A \cdot \partial_m) \right] \end{aligned}$$

Puisque $\tilde{\Sigma}_n$ est legendrienne relativement à la forme $\alpha = dt - \beta$, on obtient, pour tout n :

$$(dt_n)_p(\partial_i) = \beta_{(p,q_n(p))}(\partial_i, Dq_n \cdot \partial_i)$$

Ensuite, puisque $\tilde{\Sigma}_n$ est spéciale legendrienne relativement à la forme Ω_n , on obtient, pour tout n :

$$\mathcal{O}_n(p, t_n, q_n, Dq_n) = 0$$

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, définissons $\mathcal{O}_{0,\theta}$ sur $\mathbb{R}^{(m+1)^2} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m^2}$ par :

$$\mathcal{O}_{0,\theta}(p, t, q, A) = \text{Im}(e^{i\theta} \text{Det}(I + iA))$$

Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que la suite de fonctions $(\mathcal{O}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tende vers $\mathcal{O}_{0,\theta}$ dans la topologie C_{loc}^∞ sur $\mathbb{R}^{(m+1)^2}$ lorsque n tend vers l'infini. En particulier, par la continuité, on sait que :

$$\mathcal{O}_{0,\theta}(p, 0, 0, 0) = 0$$

Il en découle alors que $e^{i\theta} = \pm 1$. Sans perte de généralité, on suppose que $\theta = 0$ et l'on pose $\mathcal{O}_0 = \mathcal{O}_{0,0}$.

Pour tout n , en prenant la dérivée de \mathcal{O}_n , on obtient pour tout i une relation de la forme suivante pour $D^2q_{n,i}$:

$$a_{n,i}^{jk} \partial_j \partial_k q_{n,i} + b_{n,i}^j \partial_j q_{n,i} + c_{n,i} q_{n,i} = d_{n,i}$$

où $a_{n,i}^{jk}$, $b_{n,i}^j$, $c_{n,i}$ et $d_{n,i}$ sont des fonctions lisses de (p, t_n, q_n, Dq_n) . Posons :

$$a_{0,i}^{pq}(p, t, q, A) = ((I + A^2)^{-1})^{pq}$$

Puisque \mathcal{O}_n converge vers \mathcal{O}_0 dans la topologie C_{loc}^∞ , les suites $(b_{n,i}^j)_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_{n,i})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(d_{n,i})_{n \in \mathbb{N}}$ tendent vers zéro dans cette topologie lorsque n tend vers l'infini et $(a_{n,i}^{jk})_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $a_{0,i}^{jk}$ dans la topologie C_{loc}^∞ lorsque n tend vers l'infini. Puisque $(t_n, q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers zéro dans la topologie $C_{loc}^{1,\alpha}$, il en découle que les fonctions a, b, c et d sont localement uniformément majorées dans la norme $C^{0,\alpha}$. De plus, a_0 est localement uniformément minorée, et donc ces relations sont uniformément elliptiques. Les estimées de Schauder (voir, par exemple, [18]) nous permettent alors de conclure que, pour tout i , $(D^2q_{n,i})_{n \in \mathbb{N}}$ est localement uniformément majorée dans la norme $C^{0,\alpha}$. Il en découle que $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est localement uniformément majorée dans la norme $C^{2,\alpha}$. Puisque t_n s'obtient à partir de q_n en intégrant la forme $\beta(p, q_n)$, il en découle que t_n est également localement uniformément majorée dans la topologie $C^{2,\alpha}$. En travaillant par récurrence, on montre que $(t_n, q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est localement uniformément majorée dans la topologie $C^{k,\alpha}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Le lemme classique d'Arzela-Ascoli nous permet de montrer alors que toute sous-suite de $(t_n, q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contient une sous-sous-suite qui converge dans la topologie C_{loc}^k pour tout k lorsque n tend vers l'infini. La limite est forcément zéro. Donc, puisque toute sous-suite

contient une sous-sous-suite qui converge vers cette limite, il en découle que $(t_n, q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers zéro dans la topologie C_{loc}^k pour tout k lorsque n tend vers l'infini, et le résultat en découle. \square

Dernière étape : On utilise la continuité pour obtenir la contradiction.

On vient de montrer que $(\tilde{\Sigma}_n, p_n)$ tend vers $(\tilde{\Sigma}_0, 0)$ dans la topologie C_{loc}^∞ lorsque n tend vers l'infini. De plus, $(\tilde{\Sigma}_0, 0)$ est un plan affine. Mais, si l'on définit $\tilde{\mathcal{A}}_{k,0}$ comme avant, puisque $(\tilde{\Sigma}_n, p_n)$ tend vers $(\tilde{\Sigma}_0, 0)$ en particulier dans la topologie C_{loc}^k , on obtient :

$$\tilde{\mathcal{A}}_{k,0}(0) = 1$$

ce qui est absurde. On obtient alors la contradiction recherchée et le résultat en découle. \square

On obtient comme corollaire le théorème de compacité :

Théorème 1.1.6

Soit M une variété complète à géométrie bornée. Ensuite, soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points dans M et soit $(\Sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'hypersurfaces convexes immergées dans M à courbure SL constante égale à θ telle que Σ_n passe par P_n pour tout n . Soit $(\hat{\Sigma}_n, \hat{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de relevés de Gauss de cette suite et supposons que $\hat{\Sigma}_n$ est complète. Alors, après l'extraction éventuelle d'une sous-suite, il existe $(\hat{\Sigma}_0, \hat{P}_0)$ une sous-variété immergée SL_0+ dans UM telle que $(\hat{\Sigma}_n, \hat{P}_n)$ tende C^∞ vers $(\hat{\Sigma}_0, \hat{P}_0)$ lorsque n tend vers l'infini.

Ensuite, supposons que la courbure sectionnelle de M est constante. Si M est à courbure sectionnelle positive, ou si θ est différent de $k\pi/2$ pour k entier et si Σ_n est B -sympathique pour tout n , alors $\hat{\Sigma}_0$ est, soit le relevé de Gauss d'une hypersurface convexe à courbure SL constante, soit une variété rideau.

Démonstration : Par le résultat précédent, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $B_k \in]0, \infty[$ tel que, pour tout n :

$$\|A_k(\hat{\Sigma}_n)\| \leq B_k$$

Le corollaire 1.7.4 du lemme d'Arzela-Ascoli-Corlette nous montre alors que, après extraction éventuelle d'une sous-suite, il existe $(\hat{\Sigma}_0, \hat{P}_0)$, une sous-variété $SL+$ dans UM telle que $(\hat{\Sigma}_n, \hat{P}_n)$ vers $(\hat{\Sigma}_0, \hat{P}_0)$ dans la topologie C^∞ lorsque n tend vers l'infini, et le premier résultat en découle. Le deuxième résultat découle maintenant du corollaire 1.1.3. \square

Problème de Plateau hyperbolique

2.1 Présentation.

DANS son article [34], Labourie énonce la définition du problème de Plateau pour les k -surfaces dans une variété d'Hadamard à géométrie bornée de dimension 3 et à courbure sectionnelle inférieure à -1 .

Soit M une variété riemannienne (dans tout le reste de ce chapitre, la variété M va être de dimension 3). Soit $\Sigma = (S, i)$ une hypersurface immergée dans M . Pour tout $k \in]0, 1[$, on va définir plus tard une métrique g^ν (où $k = \nu^2$) sur le fibré unitaire UM de M . La surface Σ est dite alors *k-surface* si et seulement si elle est à courbure gaussienne constante égale à k et son relevé de Gauss $\hat{\Sigma} = (S, \hat{i})$ est une surface immergée dans UM complète relativement à la métrique g^ν .

Maintenant, selon [34], un problème de Plateau est la donnée (S, φ) d'une surface topologique S et d'un homéomorphisme local $\varphi : S \rightarrow \partial_\infty M$. Une solution à ce problème est la donnée d'une immersion $i : S \rightarrow M$ telle que la surface immergée (S, i) soit une k -surface

et que, si l'on note $\hat{i} : S \rightarrow UM$ le relevé de Gauss de i , on ait :

$$\overrightarrow{n} \circ \hat{i} = \varphi$$

où $\overrightarrow{n} : UM \rightarrow \partial_\infty M$ est l'application de Gauss-Minkowski.

Dans [34], en trouvant un lien entre les hypersurfaces à courbure gaussienne constante dans une variété de dimension 3 et des courbes holomorphes, positives dans un certain sens, dans une variété de contact associée à cette variété (à savoir, le fibré unitaire de cette variété), Labourie obtient quelques résultats d'existence et d'unicité pour les solutions du problème de Plateau lorsque k est contenu dans l'intervalle $]0, 1[$. En partant de ces résultats, on obtient un résultat d'existence de solutions du problème de Plateau dans le cas où $M = \mathbb{H}^3$ (et donc la frontière à l'infini $\partial_\infty M$ de M porte canoniquement la structure de la sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$) et $S = \mathbb{D}$, le disque de Poincaré, à savoir :

Théorème 2.1.1

Soit $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ localement conforme. Alors, pour tout $k \in]0, 1[$ il existe une unique solution $i_k : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}^3$ du problème de Plateau (\mathbb{D}, φ) .

En poussant plus loin ces mêmes réflexions, on montre, qu'en fait, dans ce cas, la solution dépend continument des données du problème, et l'on obtient le résultat suivant :

Théorème 2.1.2

Soit $k \in]0, 1[$ et soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}, \varphi_0 : \mathbb{D} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ localement conformes. Ensuite, soit $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}, i_0 : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}^3$ telles que, pour tout k , l'application i_k soit l'unique solution du problème de Plateau (\mathbb{D}, φ_n) .

Supposons que $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers φ_0 localement uniformément (et donc localement C^k pour tout k) lorsque n tend vers l'infini. Alors $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers i_0 localement C^k pour tout k lorsque n tend vers l'infini.

Remarque : Puisque l'application de Gauss-Minkowski $\overrightarrow{n} : U\mathbb{H}^3 \rightarrow \partial_\infty \mathbb{H}^3$ est lisse, la réciproque est triviale, à savoir :

Lemme 2.1.3

Soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}, \varphi_0 : \mathbb{D} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ et $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}, i_0 : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}^3$ comme dans l'énoncé du théorème précédent.

Supposons que i_n tend vers i_0 localement C^k pour tout k lorsque n tend vers l'infini. Alors φ_n tend vers φ_0 localement uniformément (et donc localement C^k pour tout k) lorsque n tend vers l'infini.

On verra que ces résultats sont équivalents à l'existence d'un homéomorphisme entre l'espace de fonction méromorphes localement conformes sur \mathbb{D} et une représentation de l'espace de k -surfaces hyperboliques dans \mathbb{H}^3 .

◇

2.2 Surface immergées : Notions élémentaires.

2.2.1 Définitions.

Soit M une variété de type C^∞ . Une *sous-variété immergée* est la donnée $\Sigma = (S, i)$, de S , une surface de type C^∞ , et d'une application lisse $i : S \rightarrow M$, telles que Ti soit toujours de rang maximal. Une *hypersurface immergée* est une sous-variété immergée dont le conoyau de Ti est toujours de dimension 1.

Lorsque M est munie d'une structure riemannienne, g , on munit S de la structure riemannienne i^*g engendrée par l'immersion i , de telle sorte que i devienne une isométrie. En particulier, on dit que Σ est *complète* si et seulement si (S, i^*g) l'est.

2.2.2 Champs de vecteurs normaux, seconde forme fondamentale, convexité.

Soit Σ une hypersurface immergée dans la variété riemannienne M . Le fibré TS se plonge isométriquement canoniquement dans i^*TM . On va appeler ce plongement i_* . C'est une section de $\text{End}(TS, i^*TM)$. On note $T\Sigma$ l'image de TS par ce plongement, et l'on définit le fibré $N\Sigma \subseteq i^*TM$ par :

$$N\Sigma = T\Sigma^\perp$$

$N\Sigma$ est un fibré de rang 1 muni d'une structure riemannienne canonique qu'il hérite de i^*TM . On définit localement $N_\Sigma \in \Gamma(S, N\Sigma)$, un *champ de vecteurs normal* en Σ de taille 1 qui est bien défini au signe près. Ce choix fait, on définit II_Σ , la *seconde forme fondamentale* de Σ qui est une section de $\text{End}(TS, T\Sigma)$, par :

$$II_\Sigma(X) = (i^*\nabla)_X N_\Sigma$$

Comme $T\Sigma$ et TS sont canoniquement isomorphes (l'isomorphisme étant i_*) on peut également considérer II_Σ comme une section de $\text{End}(TS)$. Cette section est auto-adjointe par rapport à la métrique sur S . On peut aussi considérer II_Σ alors comme une forme bilinéaire symétrique sur TS .

On dit que Σ est *convexe* en $p \in S$ si et seulement si $II_\Sigma(X, Y)$ est, soit définie positive en p , soit définie négative en p . On dit alors que Σ est *localement convexe* si et seulement si elle est convexe en chaque point. Par abus de notation, on dira alors que Σ est *convexe*. Pour Σ une hypersurface immergée convexe le fibré $N\Sigma$ est trivialisable. On choisit alors N_Σ^+ comme le champ qui engendre une deuxième forme fondamentale définie positive. On appelle N_Σ^+ le *champ de vecteurs normal extérieur* en Σ et $N_\Sigma^- = -N_\Sigma^+$ le *champ de vecteurs normal intérieur* en Σ . En général, on ne s'intéresse qu'au champ de vecteurs normal extérieur en Σ . On supprime alors le signe + et on le note N_Σ quand il n'y a pas d'ambiguïté.

2.2.3 Courbure.

Pour Σ une hypersurface immergée dans une variété riemannienne M , on définit k_Σ , la *courbure gaussienne* de Σ , par :

$$k_\Sigma = \text{Det}(II_\Sigma)$$

Lorsque S est de dimension paire, k_Σ est bien définie, alors que, lorsqu'elle est de dimension impaire, k_Σ est bien définie à un signe près. Bien sûr, quand Σ est convexe, k_Σ est définie sans ambiguïté.

2.2.4 Un peu de topologie.

Pour manipuler ces objets, on va avoir besoin de quelques résultats élémentaires topologiques. Le lecteur intéressé peut trouver leurs démonstrations dans l'annexe A. D'abord, on a un résultat qui concerne la convergence des inverses d'une suite de fonctions qui converge :

Lemme 2.2.1

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, f_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ telles que chaque f_i soit un homéomorphisme sur son image et que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tende vers f_0 localement uniformément dans Ω lorsque n tend vers l'infini. Notons Ω' l'image de Ω par f_0 . Alors f_n^{-1} tend vers f_0^{-1} localement uniformément dans Ω' lorsque n tend vers l'infini.

C'est-à-dire que, pour tout compact K dans Ω' , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel, que pour $n \geq N$, l'ensemble K soit contenu dans $f_n(\Omega)$ et que f_n^{-1} tende vers f_0^{-1} uniformément sur K lorsque n tend vers l'infini.

Si, de plus, chaque f_n est C^m et si f_n tend vers f_0 localement uniformément C^m dans Ω , alors f_n^{-1} tend vers f_0^{-1} localement uniformément C^m dans Ω .

Ensuite, on a un résultat concernant l'injectivité :

Lemme 2.2.2

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert dans \mathbb{R}^n et soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que chaque f_n soit un homéomorphisme de Ω sur $f_n(\Omega)$. Supposons de plus qu'il existe $f_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un homéomorphisme local tel que $f_n \rightarrow f_0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Alors f_0 est injective.

Puis, on a une réciproque de celui-ci pour les fonctions C^2 :

Lemme 2.2.3

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, f_0 : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ telles que, f_n tend vers f_0 localement C^2 et que la fonction f_0 soit un difféomorphisme sur son image. Soit $K \subseteq \Omega$ un compact. Alors, il existe $N > 0$ tel que pour $N \geq n$, la restriction de f_n à K soit injective.

Finalement, on a un résultat concernant les images d'une suite de fonctions :

Lemme 2.2.4

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert dans \mathbb{R}^n et soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que chaque f_n soit un homéomorphisme de Ω sur $f_n(\Omega)$. Supposons de plus qu'il existe $f_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un homéomorphisme local tel que $f_n \rightarrow f_0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Soit $K \subseteq f_0(\Omega)$ compact, alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n > N \Rightarrow K \subseteq f_n(\Omega)$$

◇

2.3 Le fibré unitaire d'une variété riemannienne.

2.3.1 Structures géométriques sur UM .

En emploie les notations de la section 1.3 du chapitre 1 (ces notations sont récapitulées dans l'annexe C). Pour simplifier, on note $H = HUM$, $V = VUM$, $W = WUM$, etc. Soit M une variété riemannienne. Pour $k > 0$ on note $\nu = \sqrt{k}$ et l'on définit la métrique g^ν sur TTM par :

$$g^\nu(\{X, Y\}, \{X, Y\}) = \langle X, X \rangle + \nu^{-2} \langle Y, Y \rangle$$

Maintenant, on suppose que M est orientée et de dimension 3. Ceci nous permet d'identifier canoniquement TM et $TM \wedge TM$ et de définir alors un produit vectoriel \wedge sur TM . On définit ensuite des *structures complexes* canoniques sur E^H et sur E^V , que l'on va noter toutes les deux J , par :

$$\begin{aligned} J_q \{X, 0\}_q &= \{q \wedge X, 0\}_q \\ J_q \{0, X\}_q &= \{0, q \wedge X\}_q \end{aligned}$$

Posons $j = i_V^{-1} \circ i_H$. C'est l'isomorphisme canonique entre HTM et VTM . Puisque $j(T^H) = T^V$, cet isomorphisme-ci engendre un isomorphisme entre E^H et E^V qu'on note également j . On obtient trivialement :

$$\begin{array}{ccc} E^H & \xrightarrow{j} & E^V \\ \downarrow J & & \downarrow J \\ E^H & \xrightarrow{j} & E^V \end{array}$$

On définit alors une *structure complexe* J^ν sur W compatible avec la métrique g^ν par :

$$J^\nu = \begin{pmatrix} 0 & j^{-1}\nu^{-1}J \\ j\nu J & 0 \end{pmatrix}$$

Pour simplifier la notation, on identifie E^H et E^V par l'action de j et l'on note alors :

$$J^\nu = \begin{pmatrix} 0 & \nu^{-1}J \\ \nu J & 0 \end{pmatrix}$$

En composant avec la projection orthogonale de TUM sur W on peut étendre cette forme-ci en une forme sur TUM .

On dit qu'un plan $\Sigma \subseteq W$ est *k-complexe* si et seulement s'il est stable sous l'action de J^ν et l'on dit qu'il est *positif* si et seulement s'il existe A une matrice définie positive telle que Σ soit le graphe de A au-dessus de H dans $W = H \oplus V$. C'est-à-dire que, pour $\Sigma \subseteq W_{\mathbf{N}(P)}$:

$$\Sigma = \{ \{V, AV\} \mid V \in \mathbf{N}(P)^\perp \}$$

2.3.2 Courbes holomorphes, k -surfaces.

Soit M une variété riemannienne orientée de dimension 3 et soit $\Sigma = (S, i)$ une hypersurface immergée convexe de M . On définit $\hat{\Sigma} = (S, \hat{i})$, son *relevé de Gauss* par :

$$(S, \hat{i}) = (S, \mathbf{N}_\Sigma)$$

Pour $k > 0$, on dit que Σ est k -surface si et seulement si $\hat{\Sigma}$ est complète et la courbure gaussienne de Σ vaut constamment k .

On dit que $\hat{\Sigma}$ est une *courbe k -holomorphe* si et seulement si son fibré tangent est partout un plan k -complexe et l'on dit que Σ est une *courbe positive* si et seulement si son fibré tangent est partout un plan positif.

Ces notions sont liées par le lemme suivant :

Lemme 2.3.1

Soit $\Sigma = (S, i)$ une hypersurface immergée convexe de M , une variété riemannienne orientée de dimension 3. Alors Σ est une k -surface si et seulement si $\hat{\Sigma}$ est une courbe k -holomorphe positive complète.

Démonstration : Voir, par exemple, [32]. \square

◇

2.4 Structures complexes des k -surfaces dans \mathbb{H}^3 .

2.4.1 Définitions.

Soit \mathbb{H}^3 l'espace hyperbolique à courbure constante -1 . Soit $\partial_\infty \mathbb{H}^3$ la frontière à l'infini de \mathbb{H}^3 . Soit $\text{Exp} : T\mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3$ l'application exponentielle. Définissons $\vec{n} : U\mathbb{H}^3 \rightarrow \partial_\infty \mathbb{H}^3$ par :

$$\vec{n}(u) = \text{Lim}_{t \rightarrow +\infty} \text{Exp}(tu)$$

On appelle \vec{n} l'*application de Gauss-Minkowski*. Si l'on choisit un point $p \in \mathbb{H}^3$, l'application de Gauss-Minkowski restreinte à la fibre au-dessus de p nous donne une bijection entre cette fibre et $\partial_\infty \mathbb{H}^3$. En identifiant alors ce dernier avec la fibre au-dessus de p , on le munit d'une structure topologique homéomorphe à une sphère. Cette structure topologique est bien définie indépendamment de p (c'est-à-dire que pour tout $q \in \mathbb{H}^3$, l'application $\vec{n}_q^{-1} \circ \vec{n}_p$ est un homéomorphisme). En fait, ceci reste vrai dans le cadre plus général des variétés d'Hadamard.

Maintenant, identifions \mathbb{H}^3 avec $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$ et $U\mathbb{H}^3$ avec $\mathbb{H}^3 \times \Sigma^2$ où $\Sigma^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ est la sphère de dimension 2. On va appeler ces identifications i et \hat{i} respectivement. Dans ce cas, les géodesiques dans \mathbb{H}^3 coïncident avec des droites verticales et des demi-cercles contenus dans des plans verticaux et centrés sur des points dans \mathbb{C} . De plus, deux géodesiques sont asymptotiques (c'est-à-dire qu'elles tendent vers le même point à l'infini) si et seulement

si elles aboutissent au même point dans $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. On définit alors une identification, i_∞ , entre $\partial_\infty \mathbb{H}^3$ et $\hat{\mathbb{C}}$. A l'aide d'un peu de géométrie Euclidienne, on montre que $\vec{n} \circ \hat{i}^{-1}$ coïncide avec p , la projection stéréographique, p , de Σ^2 sur le plan. C'est-à-dire que, si l'on définit $p : \mathbb{H}^3 \times \Sigma^2 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ par :

$$p((z, \lambda), \underline{x}) = z + \frac{\lambda}{1 - x_3}(x_1, x_2)$$

alors, on obtient, pour tout p dans \mathbb{H}^3 , le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} U\mathbb{H}^3 & \xrightarrow{\vec{n}} & \partial_\infty \mathbb{H}^3 \\ \downarrow i & & \downarrow i_\infty \\ (\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+) \times \Sigma^2 & \xrightarrow{p} & \hat{\mathbb{C}} \end{array}$$

On voit alors que, pour tout $P \in \mathbb{H}^3$, la structure conforme engendrée sur $\partial_\infty \mathbb{H}^3$ par $(\vec{n}_P)^{-1}$ et par celle de la fibre $U_P \mathbb{H}^3$ coïncide avec celle engendrée par i_∞ et par la structure conforme sur $\hat{\mathbb{C}}$. Comme celle-ci ne dépend pas du point p choisi, on voit que l'identification \vec{n}_P entre $U_P \mathbb{H}^3$ et $\partial_\infty \mathbb{H}^3$ engendre une structure conforme sur ce dernier qui est bien définie au sens où elle est indépendante de p .

2.4.2 Les structures complexes.

On cherche maintenant à élucider la relation entre la structure conforme sur W et celle de $\partial_\infty \mathbb{H}^3 = \hat{\mathbb{C}}$. Comme dans la section précédente, on va identifier \mathbb{H}^3 avec $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$ et l'on note $i : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$ cette identification. Définissons ensuite $P \in \mathbb{H}^3$ par :

$$P = (0, 1)$$

Par définition, l'application $Ti : T\mathbb{H}^3 \rightarrow T(\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+)$ est un isomorphisme. On obtient ainsi une immersion Ti de $U\mathbb{H}^3$ dans $T(\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+) \simeq (\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+) \times (\mathbb{C} \times \mathbb{R})$ et on va appeler l'image de $U\mathbb{H}^3$ par Ti aussi $U\mathbb{H}^3$.

On définit $N : (\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+) \rightarrow T(\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+)$ par :

$$N(z, y) = (0, -y)_{(z, y)}$$

et on voit que N est bien contenu dans $U\mathbb{H}^3$. En effet :

$$\|N\|_{\mathbb{H}^3}^2 = \frac{1}{y^2} \|N\|_{\mathbb{E}}^2 = 1$$

où $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^3}$ et $\|\cdot\|_{\mathbb{E}}$ désignent les normes respectivement hyperbolique et euclidienne de $T(\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+)$. Ensuite, on définit ∂_i , un champ de vecteurs sur $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$, par :

$$\begin{aligned} \partial_1(z, y) &= (1, 0)_{(z, y)} \\ \partial_2(z, y) &= (i, 0)_{(z, y)} \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} TN \cdot \partial_1 &= ((1, 0), (0, 0))_{((z, y), (0, -y))} \\ TN \cdot \partial_2 &= ((i, 0), (0, 0))_{((z, y), (0, -y))} \end{aligned}$$

Mais, pour tout i , si l'on note ω la 2-forme de connexion de ∇ , la dérivée covariante de Levi-Civita de \mathbb{H}^3 , on obtient :

$$\begin{aligned} \omega(\partial_i, N)_{(z, y)} &= \partial_i(z, y) \\ \Rightarrow \nabla_{\partial_i} N &= \partial_i \end{aligned}$$

Soit $\pi : T(\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+) \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$ la projection canonique, alors :

$$\begin{aligned} (\pi^* \nabla_{\partial_1} N)_{N(z, y)} &= ((0, 0), (1, 0))_{N(z, y)} \\ (\pi^* \nabla_{\partial_2} N)_{N(z, y)} &= ((0, 0), (i, 0))_{N(z, y)} \end{aligned}$$

Comme :

$$(\pi_V \cdot TN \cdot \partial_i)(z, y) = (\pi^* \nabla_{\partial_i} N)_{N(z, y)}$$

On voit alors que le fibré horizontal de ∇ est donné par :

$$H_{N(z, y)} = \langle ((1, 0), (-1, 0))_{N(z, y)}, ((i, 0), (-i, 0))_{N(z, y)} \rangle$$

Donc, pour tout X_P tel que $X_P \perp N_P$:

$$\{X_P, 0_P\}_{N(P)} = (X, -X)_{N(P)}$$

Soit maintenant $\vec{n} : U\mathbb{H}^3 \rightarrow \partial_\infty \mathbb{H}^3$ l'application de Gauss-Minkowski. Si l'on définit \hat{i} comme dans la section précédente, on obtient :

$$\hat{i}(\underline{x}_{(z, \lambda)}) = \frac{1}{\lambda} T i(\underline{x}_{(z, \lambda)})$$

et donc :

$$\vec{n}(\underline{x}_{(z, \lambda)}) = z + \frac{\lambda}{\lambda - x_3} (x_1, x_2)$$

Maintenant, pour $X \in \mathbb{C}$, définissons $X_P \in T_P \mathbb{H}^3$ par :

$$X_P = (X, 0)_P$$

On a :

$$\begin{aligned} D \vec{n}_{N(P)} \cdot \{0, X_P\}_{N(P)} &= D \vec{n}_{((0, 1), (0, -1))} (0, X)_{N(P)} \\ &= \left(\frac{1}{2} X\right)_0 \end{aligned}$$

et, en même temps :

$$\begin{aligned} D \vec{n}_{N(P)} \cdot \{X_P, 0\}_{N(P)} &= D \vec{n}_{((0, 1), (0, -1))} (X, -X)_{N(P)} \\ &= \left(X - \frac{1}{2} X\right)_0 \\ &= \left(\frac{1}{2} X\right)_0 \end{aligned}$$

On voit alors que la restriction de $T\vec{n}$ sur W est conforme relativement à la structure complexe J^1 définie plus haut, au sens où :

$$\begin{array}{ccc} W_{N(P)} & \xrightarrow{J^1_{N(P)}} & W_{N(P)} \\ \downarrow T\vec{n}_{N(P)} & & \downarrow T\vec{n}_{N(P)} \\ T_0\mathbb{C} & \xrightarrow{J} & T_0\mathbb{C} \end{array}$$

Maintenant, on montre le résultat suivant :

Lemme 2.4.1

Soit $\Sigma \subseteq W$ un plan J^ν -complexe positif dans W . Alors, la restriction de $T\vec{n}$ sur Σ est k -quasiconforme, où $k = \nu^2$.

Démonstration : Comme Σ positif, et comme $U\mathbb{H}^3$ possède un groupe transitif d'isométries, on peut supposer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que Σ soit le sous-espace de $T_{N(P)}U\mathbb{H}^3$ engendré par $\{1, \lambda\}$ et par $J^\nu \{1, \lambda\}$. Ensuite :

$$T\vec{n}_{N(P)} \cdot \{1, \lambda\}_{N(P)} = \frac{1}{2}(1 + \lambda)_0$$

Mais, en même temps :

$$\begin{aligned} T\vec{n}_{N(P)} \cdot J^\nu_{N(P)} \cdot \{1, \lambda\}_{N(P)} &= T\vec{n}_{N(P)} \cdot \{i\nu^{-1}\lambda, i\nu\}_{N(P)} \\ &= \frac{i}{2}(\nu + \nu^{-1}\lambda)_0 \end{aligned}$$

Or, comme $\lambda \in]0, \infty[$ et $\nu \in]0, 1[$, on obtient :

$$\nu < \frac{\nu + \nu^{-1}\lambda}{1 + \lambda} < \nu^{-1}$$

On obtient alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{J^\nu_{N(P)}} & \Sigma \\ \downarrow T\vec{n}_{N(P)} & & \downarrow T\vec{n}_{N(P)} \\ T_0\mathbb{C} & \xrightarrow{Q_\Sigma J} & T_0\mathbb{C} \end{array}$$

Où :

$$Q_\Sigma = \begin{pmatrix} q & \\ & q^{-1} \end{pmatrix}$$

et $q \in]\nu, \nu^{-1}[$. On voit alors que la restriction de $T\vec{n}$ sur Σ est k -quasiconforme, où $k = \nu^2$ et le résultat en découle. \square

2.4.3 Les applications quasiconformes.

Par la suite, on va avoir besoin du lemme classique suivant qui dit que, en ce qui nous concerne, les fonctions k -quasiconformes ont exactement les mêmes propriétés de compacité que les fonctions conformes :

Lemme 2.4.2

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une suite d'homéomorphismes k -quasiconformes de \mathbb{D} fixant l'origine. Alors il existe un homéomorphisme k -quasiconforme $f_0 : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ tel que, après extraction d'une sous-suite :

$$f_n \rightarrow f_0$$

lorsque n tend vers l'infini.

Démonstration : On identifie \mathbb{D} avec le demi-plan de Poincaré, \mathbb{H}^+ et on rappelle que cette identification envoie l'origine et 1 respectivement sur i et 0. Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit $\mu_n \in L^\infty(\mathbb{H}^+)$ la dilatation complexe de f_n . On étend μ_n en une fonction $\tilde{\mu}_n \in L^\infty(\hat{\mathbb{C}})$ telle que, pour tout $z \in \mathbb{H}^+$:

$$\tilde{\mu}_n(\bar{z}) = \overline{\mu_n(z)}$$

Soit maintenant $g_n : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ quasi-conforme à dilatation complexe $\tilde{\mu}_n$ telle que g_n fixe 0, 1 et l'infini. Définissons h_n par :

$$h_n(\bar{z}) = \overline{g_n(z)}$$

On voit que h_n est quasiconforme avec la même dilatation complexe que g_n et qu'elle fixe également 0, 1 et l'infini. L'application $g_n \circ h_n^{-1}$ est donc conforme et elle fixe, elle aussi, les points 0, 1 et l'infini, d'où :

$$\begin{aligned} g_n \circ h_n^{-1} &= \text{Id} \\ \Rightarrow g_n &= h_n \end{aligned}$$

En particulier, g_n préserve \mathbb{R} et donc, en le composant au besoin avec une application conforme, on peut supposer qu'elle envoie \mathbb{H}^+ sur lui-même et qu'elle fixe les points i et 0 et $-i$ (sans forcément fixer maintenant le point 1). En composant avec l'identification entre \mathbb{D} et \mathbb{H}^+ , on obtient une application quasiconforme $\tilde{f}_n : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ qui envoie \mathbb{D} sur lui-même et qui fixe l'origine, le point 1 et l'infini. Comme \tilde{f}_n et f_n ont les mêmes dilatations complexes, on voit comme avant que $\tilde{f}_n \circ f_n^{-1}$ est une application conforme du disque sur lui-même qui fixe l'origine et que c'est donc une rotation. Il en découle qu'il existe une rotation ρ_n telle que :

$$\rho_n \circ \tilde{f}_n = f_n$$

Par le théorème II · 5 · 1 de [36], la famille $(\tilde{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est normale, et donc il existe une sous-suite $(\tilde{f}_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur tout compact vers une fonction limite \tilde{f}_0 . Comme \tilde{f}_0 prend au moins 3 valeurs différentes (à savoir 0, 1 et ∞) le théorème II · 5 · 3 de [36] nous permet de conclure que la limite, \tilde{f} , est quasiconforme.

Or, comme le groupe des rotations de \mathbb{C} (qui s'identifie à S^1) est compact, on peut supposer qu'il existe une rotation ρ telle que $(\rho_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ tende vers ρ lorsque n tend vers l'infini. Donc,

si l'on pose $f_0 = \rho \circ \tilde{f}_0$, on voit qu'il existe une sous-suite de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers f_0 lorsque n tend vers l'infini et le résultat en découle. \square

◇

2.5 Le problème de Plateau.

2.5.1 Définitions.

Dans [34], Labourie introduit la notion du *problème de Plateau*. Selon cet article, un problème de Plateau est la donnée (S, φ) , d'une surface topologique, S et d'un homéomorphisme local $\varphi : S \rightarrow \partial_\infty \mathbb{H}^3$. Une solution du problème de Plateau est la donnée d'une immersion $i : S \rightarrow \mathbb{H}^3$ telles que l'hypersurface immergée (S, i) soit une k -surface et que :

$$\vec{n} \circ \hat{i} = \varphi$$

où \hat{i} est le relevé de Gauss de i .

2.5.2 Espace de solutions.

Pour γ une géodésique dans \mathbb{H}^3 , on définit T_γ , le tube autour de γ dans $U\mathbb{H}^3$, par :

$$T_\gamma = \{n_{\gamma(t)} \in U_{\gamma(t)}\mathbb{H}^3 \mid \langle n_{\gamma(t)}, \partial_t \gamma(t) \rangle = 0\}$$

On appelle tube autour de γ toute surface immergée complète dans $U\mathbb{H}^3$ dont l'image coïncide avec T_γ . Ensuite, on définit \mathcal{L} comme étant l'ensemble des relevés de Gauss de k -surfaces pointées dans \mathbb{H}^3 :

$$\mathcal{L} = \left\{ (\hat{\Sigma}, p) \mid \Sigma \text{ une } k\text{-surface dans } \mathbb{H}^3, p \in \hat{\Sigma} \right\}$$

et l'on définit \mathcal{L}_∞ comme étant l'ensemble de tubes pointés dans \mathbb{H}^3 :

$$\mathcal{L}_\infty = \{(T, p) \mid T \text{ un tube autour d'une géodésique } \gamma \text{ dans } \mathbb{H}^3, p \in T\}$$

Finalement, on définit $\overline{\mathcal{L}}$ comme étant la réunion de ces deux ensembles :

$$\overline{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \cup \mathcal{L}_\infty$$

La raison de cette notation deviendra évidente par la suite. Suivant [34], on appellera surfaces rideaux les membres de \mathcal{L}_∞ .

2.5.3 Les propriétés de l'espace de solutions.

On aura besoin par la suite des théorèmes suivants de [34]. D'abord, un théorème nous donnant l'existence des solutions :

Théorème 2.5.1 [Labourie, 2000] *L'existence de Solutions.*

Soit S une surface et soit $\varphi : S \rightarrow \partial_\infty \mathbb{H}^3$ un homéomorphisme local. Soit Ω un ouvert relativement compact dans S . Alors, il existe une unique solution au problème de Plateau (Ω, φ) .

C'est le théorème 7.3.2 de [34]. Ensuite, un théorème qui décrit un peu ces solutions :

Théorème 2.5.2 [Labourie, 2000] *La Nature et l'Unicité des Solutions.*

Il existe au plus une solution du problème de Plateau. De plus, soit $\Sigma = (S, i)$ une k -surface dans \mathbb{H}^3 et soit $\hat{\Sigma} = (S, \hat{i})$ son relevé de Gauss. Notons $\varphi = \overrightarrow{n} \circ \hat{i}$ de telle sorte que i soit la solution du problème de Plateau (S, φ) . Soit Ω un ouvert dans S . Alors, il existe une solution au problème de Plateau (Ω, φ) qui est un graphe au-dessus de Ω dans le bout de Σ . C'est-à-dire qu'il existe $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que la solution soit $(\Omega, \text{Exp}(fN_\Sigma))$.

C'est le théorème 7.2.1 de [34]. En particulier, si $\Sigma' = (\Omega, i')$ est le graphe de la fonction f au-dessus d'un ouvert, Ω , de S dans le bout de $\Sigma = (S, i)$ et $p' \in \Omega$, alors on appelle *ped de p'* l'unique point, p , de Ω tel que $i'(p') = \text{Exp}(fN_\Sigma)(p)$.

Finalement, pour avoir un théorème de compacité, on utilise le résultat de l'article [32] de Labourie qui se traduit dans le cas que nous étudions par :

Théorème 2.5.3 [Labourie, 2000] *La compacité.*

Soit $\Sigma_n = (S_n, i_n)$ une suite de k -surfaces dans \mathbb{H}^3 et, pour tout n , soit $\hat{\Sigma}_n = (S_n, \hat{i}_n)$ le relevé de Gauss de Σ_n . Pour tout n , soit $p_n \in S_n$ et supposons qu'il existe $K \subseteq U\mathbb{H}^3$ compact tel que :

$$\hat{i}_n(p_n) \in K \quad \forall n$$

Alors, il existe $(\hat{\Sigma}_0, p_0) \in \overline{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \cup \mathcal{L}_\infty$ telle que, après extraction d'une sous-suite :

$$(\hat{\Sigma}_n, p_n) \rightarrow (\hat{\Sigma}_0, p_0) \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

où la convergence est au sens des sous-variétés immergées.

◇

2.6 Le lemme de Schwarz.

2.6.1 Des lemmes de Schwarz.

Devenu classique, les différentes formes du lemme de Schwarz expriment la régularité elliptique des équations de Cauchy-Riemann généralisées. En nous permettant, sous certaines conditions, de majorer toutes les dérivées d'une fonction holomorphe, elles nous fournissent des résultats de compacité pour certaines familles de telles fonctions.

Pour nos besoins, il suffit d'employer ce lemme dans le cas de la dimension 2. Ici, l'énoncé est plus simple parce que, premièrement, toute 2-forme sur une variété de dimension 2 est a-priori fermée, et, deuxièmement, la métrique sur un ouvert de \mathbb{R}^2 est définie, à une fonction positive près, par la structure complexe sur cet ouvert. On obtient alors :

Lemme 2.6.1 *Lemme de Schwarz.*

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un ouvert dans \mathbb{R}^2 et soit $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}, J_0$ des structures (presque) complexes sur Ω telles que J_n tende vers J_0 localement C^∞ sur Ω lorsque n tend vers l'infini.

Soit $K \subseteq \Omega$ compact et soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} : (\mathbb{D}, 0) \rightarrow (\Omega, p_n)$ des applications pointées holomorphes relativement à $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et dont l'image est toujours contenue dans K . Alors, il existe $f_0 : (\mathbb{D}, 0) \rightarrow (\Omega, p_0)$ une application pointée holomorphe relativement à J_0 (éventuellement constante) telle que, après extraction d'une sous-suite, f_n tende vers f_0 localement uniformément C^∞ dans \mathbb{D} lorsque n tend vers l'infini.

Un énoncé plus général de ce lemme, ainsi que sa démonstration, se trouve dans [47]. On va d'abord employer ce lemme pour obtenir le résultat suivant sur les représentations conformes des surfaces difféomorphes à des disques dans \mathbb{R}^n :

Lemme 2.6.2

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un ouvert dans \mathbb{R}^2 et soit $D \subseteq \Omega$ un disque centré sur 0 tel que son adhérence soit contenue dans Ω . Soit $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des métriques sur Ω telles que $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tende vers g_0 localement uniformément C^∞ lorsque n tend vers l'infini. Pour chaque n , soit J_n la structure presque complexe associée à g_n et à l'orientation canonique sur \mathbb{R}^2 .

Pour chaque n , soit $f_n : (\mathbb{D}, 0) \rightarrow (D, 0, J_n)$ la représentation conforme. Alors, il existe des rotations $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathbb{D} telles que $f_n \circ R_n$ tende vers f_0 localement uniformément C^∞ sur \mathbb{D} lorsque n tend vers l'infini.

Ensuite, ce résultat nous permet d'obtenir une version du lemme de Schwarz pour de telles variétés :

Corollaire 2.6.3

Avec les mêmes hypothèses que dans le lemme précédent, soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} : D \rightarrow \mathbb{D}$ une suite d'applications telle que, pour tout n , l'application φ_n soit holomorphe relativement à la structure complexe J_n sur D . Alors, il existe $\varphi_0 : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe relativement à la structure complexe J_0 sur D telle que, après extraction d'une sous-suite, φ_n tende localement C^∞ vers φ_0 lorsque n tend vers l'infini.

Démonstration : Pour chaque n , posons $\alpha_n = \varphi_n \circ f_n \circ R_n$. Pour tout n , l'application α_n est une application holomorphe envoyant \mathbb{D} dans \mathbb{D} . Le lemme de Schwarz classique nous permet de voir alors qu'il existe $\alpha_0 : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe (éventuellement constante) telle que, après extraction d'une sous-suite, α_n tende localement C^∞ vers α_0 lorsque n tend vers l'infini. Par le lemme 2.2.1, la suite de fonctions $(f_n \circ R_n)^{-1}$ converge localement C^∞ vers f_0^{-1} lorsque n tend vers l'infini. Comme $\varphi_n = \alpha_n \circ (f_n \circ R_n)^{-1}$, le résultat en découle. \square

Un raisonnement analogue va nous permettre d'obtenir également une version du lemme de Schwarz pour des boules suffisamment petites dans des surfaces :

Lemme 2.6.4

Soit $\Sigma_n = (S_n, g_n, \omega_n, p_n)$ des surfaces orientées pointées telles que Σ_n tende vers Σ_0 lorsque n tend vers l'infini. Soit J_n la structure complexe sur S_n engendrée par la métrique g_n et l'orientation ω_n . Soit $R > 0$ tel que le rayon d'injectivité de Σ_0 soit strictement plus grand que R . Pour chaque n soit B_n la boule de rayon R dans Σ_n autour de p_n .

Soit $f_n : (B_n, p_n) \rightarrow (\mathbb{D}, 0)$ des applications holomorphes pointées. Alors, il existe $f_0 : (B_0, p_0) \rightarrow (\mathbb{D}, 0)$ une application holomorphe pointée (éventuellement constante) telle que, après extraction d'une sous-suite, f_n tende vers f_0 localement uniformément C^∞ lorsque n tend vers l'infini.

2.6.2 La démonstration des lemmes.

On reprend d'abord deux lemmes qui sont démontrés par Labourie dans [32]. Pour $f : \mathbb{D} \rightarrow S$, une fonction définie sur le disque de Poincaré à valeurs dans une surface quelconque, on définit $f(\partial\mathbb{D})$ comme étant l'ensemble des points d'adhérence des suites $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque x_n tend vers le bord du disque. D'abord, on obtient la proposition suivante :

Lemme 2.6.5

Avec les hypothèses du lemme 2.6.4, on suppose de plus qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout n on ait :

$$d_n(f_n(\partial\mathbb{D}), f_n(0)) \geq \epsilon$$

Alors f_0 n'est pas constante.

Ensuite on a :

Lemme 2.6.6

Avec les hypothèses du lemme 2.6.4, l'ensemble $f_0(\partial\mathbb{D})$ est contenu dans la limite de Hausdorff des $f_n(\partial\mathbb{D})$.

Maintenant, on démontre le lemme 2.6.2 :

Démonstration du lemme 2.6.2 : On sait que (D, J_n) , étant contenu dans un disque plus grand, est hyperbolique pour tout n , et donc f_n existe pour tout n . Il existe un compact $K \subseteq \Omega$ tel que D soit toujours contenu dans K . Donc, par le lemme 2.6.1, il existe une sous-suite $(f_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $f_0 : (\mathbb{D}, 0) \rightarrow (D, 0, J_0)$ une application holomorphe pointée (éventuellement constante) telles que f_{k_n} tende vers f_0 localement uniformément C^∞ sur \mathbb{D} lorsque n tend vers l'infini.

On voit ensuite qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout n :

$$d_n(f_n(\partial\mathbb{D}), f_n(0)) \geq \epsilon$$

Il en découle par le lemme 2.6.5 que \tilde{f}_0 n'est pas constante.

Maintenant, pour tout $p \in \mathbb{D}$ il existe $k \in \mathbb{N}$ et des difféomorphismes $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ et $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ tels que $\psi \circ f_0 \circ \varphi$ soit définie dans $B_2(0)$ et que $\varphi(0) = p$ et :

$$\begin{array}{ccc} B_2(0) & \xrightarrow{z^k} & \mathbb{C} \\ \downarrow \varphi & & \uparrow \psi \\ \mathbb{D} & \xrightarrow{f_0} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Pour tout n définissons α_n par :

$$\alpha_n = \psi \circ f_{k_n} \circ \varphi$$

Soit $\|\cdot\|_0$ la norme Euclidienne sur \mathbb{C} et soit $i : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ le plongement canonique du cercle de rayon 1 dans \mathbb{C} . On voit que $\|\alpha_0(z)\|_0 = 1$ pour tout z dans S^1 . Comme $\alpha_n \rightarrow \alpha_0$ lorsque n tend vers l'infini, pour tout n grand :

$$\|\alpha_n(z) - \alpha_0(z)\| < 1 \quad \forall z \in S^1$$

Il en découle que pour tout n grand, le lacet $\alpha_n \circ i$ est homotope à $\alpha_0 \circ i$ dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Comme chaque α_n est un difféomorphisme sur son image, on voit alors que k est égal à 1. La fonction f_0 est donc partout un difféomorphisme local.

Par le lemme 2.2.2 la fonction f_0 est injective.

En appliquant le lemme 2.6.6, on voit que $f_0(\partial\mathbb{D})$ est contenu dans la limite de Hausdorff des $f_{k_n}(\partial\mathbb{D})$. Mais, comme chaque f_n est un difféomorphisme, chacun des $d_n(\partial\mathbb{D})$ est contenu dans ∂D . Il en découle que $f_0(\partial\mathbb{D}) \subseteq \partial D$. Ceci nous permet de déduire la bijectivité de la fonction f_0 . En effet, on voit que $f_0(\mathbb{D})$ est un sous-ensemble fermé de D . En même temps, comme f_0 est une application holomorphe non-constante, et donc ouverte, $f_0(\mathbb{D})$ doit être un sous-ensemble ouvert de D . Comme cet ensemble est manifestement non vide, et comme D est connexe, il en découle que $f_0(\partial\mathbb{D}) = \partial D$ et que f_0 est donc surjective.

On voit alors que f_0 est une représentation conforme de $(D, 0, J_0)$. Soit $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de rotations de \mathbb{D} telle que :

$$D(f_n \circ R_n)(0) \propto \text{Id} \quad \forall n$$

On va supposer de plus que $Df_0(0) \propto \text{Id}$. Par l'unicité de la représentation conforme, on voit que chaque sous-suite de $(f_n \circ R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède une sous-sous-suite qui converge vers f_0 . Il en découle que $f_n \circ R_n$ converge elle-même vers f_0 lorsque n tend vers l'infini. \square

Corollaire 2.6.7

Soit $R > 0$ et soit $\Sigma_n = (S_n, g_n, \omega_n, p_n)$ une suite de variétés pointées telle que $\Sigma_n \rightarrow \Sigma_0$ lorsque n tend vers l'infini. Soit $R > 0$ tel que le rayon d'injectivité de Σ_0 autour de p_0 soit strictement supérieur à R . Soit $f_n : (\mathbb{D}, 0) \rightarrow (B_R(p_n), p_n)$ des représentations conformes. Alors, il existe des rotations $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathbb{D} telles que $f_n \circ R_n$ tende vers f_0 localement uniformément C^∞ lorsque n tend vers l'infini.

Démonstration : Soit $\epsilon > 0$ tel que le rayon d'injectivité de Σ_0 soit supérieur à $R + 2\epsilon$. On peut supposer qu'il existe $\varphi_n : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$ telle que pour tout n la restriction de φ_n à $B_{R+2\epsilon}(p_0)$ soit un difféomorphisme et que $\varphi_n^* g_n$ tende vers g_0 lorsque n tend vers l'infini.

Pour tout n , soit $A_n \in \text{End}(T_{p_0} S_0)$ tel que :

$$A_n^* \varphi_n^* g_n(0) = g_0(0)$$

On peut supposer que A_n tend vers Id lorsque n tend vers l'infini. Pour tout n suffisamment grand, on définit $\text{Exp}_n : A_n(B_{R+\epsilon}(0)) \rightarrow S_0$ l'application exponentielle de $T_{p_0}S_0$ sur S_0 par rapport à la métrique $\varphi_n^*g_n$. Comme $\varphi_n^*g_n$ tend vers g_0 localement uniformément C^∞ sur $B_{R+2\epsilon}(p_0)$, on voit que $\text{Exp}_n \circ A_n$ tend vers Exp_0 localement uniformément C^∞ sur $B_{R+\epsilon}(0)$ dans $T_{p_0}S_0$ lorsque n tend vers l'infini.

Si l'on note $\widetilde{\text{Exp}}_n$ l'application exponentielle de (S_n, g_n) autour de p_n , on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} B_{R+\epsilon}(0) \subseteq T_{p_n}S_n & \xrightarrow{\widetilde{\text{Exp}}_n} & B_{R+\epsilon}(p_n) \subseteq S_n \\ \downarrow A_n^{-1} \circ T_{p_n}\varphi_n^{-1} & & \uparrow \varphi_n \\ B_{R+\epsilon}(0) \subseteq T_{p_0}S_0 & \xrightarrow{\text{Exp}_n \circ A_n} & \text{Im}(B_{R+\epsilon}(p_0)) \subseteq S_0 \end{array}$$

Notons $\tilde{g}_n = (\text{Exp}_n \circ A_n)^* \varphi_n^* g_n$ et $\tilde{g}_0 = \text{Exp}_0^* g_0$. On voit que \tilde{g}_n tend vers \tilde{g}_0 localement uniformément C^∞ sur $B_{R+\epsilon}(0)$ lorsque n tend vers l'infini. En particulier, pour n suffisamment grand, la métrique \tilde{g}_n est non-dégénérée dans un voisinage de la boule fermée $\overline{B}_R(0)$. De plus, par le lemme 2.2.3, pour n suffisamment grand, le rayon d'injectivité de Σ_n est supérieur à R .

Pour tout n , soit \tilde{f}_n la représentation conforme de $(B_R(0), 0, \tilde{g}_n)$. On voit que, pour n suffisamment grand, la restriction de $\varphi_n \circ \text{Exp}_n \circ A_n$ sur $B_R(0)$ est bien définie et est un difféomorphisme sur son image. On obtient alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D} & \xrightarrow{f_n} & B_R(p_n) \subseteq S_n \\ \downarrow \tilde{f}_n & & \uparrow \varphi_n \\ B_R(0) \subseteq T_{p_0}S_0 & \xrightarrow{\text{Exp}_n \circ A_n} & \text{Im}(B_R(p_0)) \subseteq S_0 \end{array}$$

Autrement dit :

$$\varphi_n \circ (\text{Exp}_n \circ A_n) \circ \tilde{f}_n = f_n \quad \forall n$$

Dans le cas où $n = 0$, on obtient :

$$\text{Exp}_0 \circ \tilde{f}_0 = f_0$$

Le lemme précédent nous permet de voir qu'il existe des rotations $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathbb{D} telles que :

$$\begin{aligned} & \tilde{f}_n \circ R_n && \rightarrow \tilde{f}_0 && \text{lorsque } n \rightarrow \infty \\ \Rightarrow & (\text{Exp}_n \circ A_n) \circ \tilde{f}_n \circ R_n && \rightarrow \text{Exp}_0 \circ \tilde{f}_0 && \text{lorsque } n \rightarrow \infty \\ \Rightarrow & \varphi_n|_{B_{R+\epsilon}(p_0)}^{-1} \circ \tilde{f}_n && \rightarrow f_0 && \text{lorsque } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

et le résultat en découle. \square

Corollaire 2.6.8

Avec les mêmes hypothèses que dans le corollaire précédent, il existe des rotations $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathbb{D} telles que $(f_n \circ R_n)^{-1}$ tend vers f_0^{-1} localement uniformément C^∞ lorsque n tend vers l'infini.

Démonstration : Ceci découle directement du résultat précédent et du lemme 2.2.1. \square

On obtient maintenant comme corollaire le lemme 2.6.4 :

Démonstration du lemme 2.6.4 : Par le lemme 2.2.3, pour n suffisamment grand, on peut supposer que R est strictement supérieur au rayon d'injectivité de Σ_n autour de p_n . Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $\alpha_n : (\mathbb{D}, 0) \rightarrow (B_n, p_n)$ la représentation conforme. Notons $g_n = f_n \circ \alpha_n$. On voit que chaque g_n est une application holomorphe pointée envoyant $(\mathbb{D}, 0)$ sur lui-même. Il en découle par le lemme de Schwarz classique qu'il existe $g_0 : (\mathbb{D}, 0) \rightarrow (\mathbb{D}, 0)$ une application holomorphe pointée (éventuellement constante) et une sous-suite $(g_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ telles que g_{k_n} tende vers g_0 localement uniformément C^∞ lorsque n tend vers l'infini.

Par le corollaire précédent, on peut supposer que α_n^{-1} tend vers α_0^{-1} localement uniformément C^∞ lorsque n tend vers l'infini. Or, pour tout n on a :

$$f_n = g_n \circ \alpha_n^{-1}$$

et le résultat en découle. \square

◇

2.7 Un lemme de compacité.

2.7.1 La problématique.

Soit \mathbb{D} le disque de Poincaré et soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}, \varphi_0 : \mathbb{D} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ des applications localement conformes telles que $\varphi_n \rightarrow \varphi_0$ localement uniformément (et donc localement C^k pour tout k) lorsque n tend vers l'infini.

On va supposer que, pour tout $n > 0$, il existe une solution j_n (qui est unique par le théorème 2.5.2) du problème de Plateau (\mathbb{D}, φ_n) .

Soit \hat{j}_n le relevé de Gauss de j_n . D'après le lemme 2.4.1, pour tout n , la métrique $\hat{j}_n^* g^\nu$ est k -quasiconforme. Pour tout n , soit $\alpha_n : (\mathbb{D}, 0, g_{\text{Euc}}) \rightarrow (\mathbb{D}, 0, \hat{j}_n^* g^\nu)$ une représentation conforme. L'application α_n est, en fait, une application k -quasiconforme lisse du disque de Poincaré sur lui-même. Ensuite, par le lemme 2.4.2, il existe $\alpha_0 : (\mathbb{D}, 0) \rightarrow (\mathbb{D}, 0)$ une application quasiconforme telle que, après extraction d'une sous-suite, α_n tende vers α_0 localement uniformément lorsque n tend vers l'infini.

Pour tout n , posons $i_n = j_n \circ \alpha_n$. Si l'on note $\vec{n} : U\mathbb{H}^3 \rightarrow \partial_\infty \mathbb{H}^3 \cong \hat{\mathbb{C}}$ l'application de Gauss-Minkowski, on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D} & \xrightarrow{i_n} & U\mathbb{H}^3 \\ \downarrow \alpha_n & & \downarrow \vec{n} \\ \mathbb{D} & \xrightarrow{\varphi_n} & \partial_\infty \mathbb{H}^3 \end{array}$$

C'est-à-dire que (\mathbb{D}, i_n) est la solution du problème de Plateau $(\mathbb{D}, \varphi_n \circ \alpha_n)$. Notons $S_n = \mathbb{D}$ et $\Sigma_n = (S_n, i_n)$.

2.7.2 Le résultat de compacité.

On va montrer le lemme de compacité suivant :

Lemme 2.7.1

Soit $z \in \mathbb{D}$. Alors, l'ensemble $\{i_n(z) | n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact dans \mathbb{H}^3 .

Pour démontrer ceci, on va supposer le contraire et raisonner par l'absurde. On va tout d'abord avoir besoin du résultat suivant :

Lemme 2.7.2

Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{H}^3$ telle que p_n tende vers $p \in \partial_\infty \mathbb{H}^3$. Soit $x_0 \in \mathbb{H}^3$ un point quelconque et soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'automorphismes de \mathbb{H}^3 . Pour chaque n , notons aussi A_n l'action de A_n sur $\partial_\infty \mathbb{H}^3$ et supposons que :

$$\begin{aligned} A_n p_n &= x_0 & \forall n \\ A_n p &= p & \forall n \end{aligned}$$

Alors, il existe une sous-suite $(A_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que A_{k_n} tend localement uniformément vers une application constante dans le complémentaire de p dans $\partial_\infty \mathbb{H}^3$

Remarque : Il est clair que chaque A_n est unique à une rotation autour de x_0 près.

Démonstration : D'abord, on identifie \mathbb{H}^3 et $\partial_\infty \mathbb{H}^3$ avec le demi-espace positif dans \mathbb{R}^3 et le plan horizontal plus l'infini respectivement :

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^3 &\simeq \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_3 > 0\} \\ \partial \mathbb{H}^3 &\simeq \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \end{aligned}$$

On va de plus supposer que $p = \infty$ et que $x_0 = (0, 0, 1)$. Pour chaque n notons :

$$p_n = \mathbf{x}_n = (x_1, x_2, x_3)$$

Comme $p_n \rightarrow p$ lorsque n tend vers l'infini, on voit que $\|\mathbf{x}_n\|$ tend vers l'infini lorsque n tend vers l'infini. Notons $\lambda_n = \|\mathbf{x}_n\|$ et définissons d'abord M_n par :

$$M_n \mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}}{\lambda_n}$$

On va noter également M_n l'action de M_n sur $\partial_\infty \mathbb{H}^3$. Ensuite, soit Θ un automorphisme de \mathbb{H}^3 qui envoie l'hémisphère de rayon 1 centré sur l'origine sur un demi-plan vertical et qui préserve le point $(0, 0, 1)$. On sait qu'il existe une rotation Ψ_n autour de l'axe $(0, \infty)$ telle que $(\Theta \cdot \Psi_n \cdot A_n) \mathbf{x}_n$ soit un point directement au-dessous de $(0, 0, 1)$. Pour tout n , soit $\mu_n \in]0, \infty[$ tel que :

$$(\Theta \cdot \Psi_n \cdot A_n) \mathbf{x}_n = (0, \mu_n)$$

Pour tout n définissons Δ_n par :

$$\Delta_n(z, \lambda) = \frac{1}{\mu_n}(z, \lambda)$$

Alors Δ_n envoie $(\Theta \cdot \Psi_n \cdot A_n)\mathbf{x}_n$ en $(0, 0, 1)$. Notons :

$$N_n \mathbf{x} = (\Theta \cdot \Psi_n)^{-1} \Delta_n (\Theta \cdot \Psi_n)$$

De la même façon, on va noter également N_n l'action de N_n sur $\partial_\infty \mathbb{H}^3$. Maintenant, \mathbb{D} , le disque de rayon 1 autour de 0 dans le plan (c'est-à-dire $\partial_\infty \mathbb{H}^3$), est préservée par Ψ_n . Ensuite, l'application Θ l'envoie sur un demi-plan qui est préservé par l'action de Δ_n . Il en découle que la composée N_n envoie le disque, \mathbb{D} , sur lui même.

Soit $R > 0$ et soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$:

$$\lambda_n > R$$

On voit que, pour $n \geq N$, l'ensemble $M_n(B_R(0))$ est contenu dans \mathbb{D} et donc $N_n \circ M_n(B_R(0))$ est contenu dans \mathbb{D} . Comme, pour tout n , l'application $N_n \circ M_n$ est une isométrie, on voit que l'action de $N_n \circ M_n$ sur $\partial_\infty \mathbb{H}^3 = \hat{\mathbb{C}}$ est conforme. Par le lemme de Schwarz classique, on peut supposer alors que la restriction de $N_n \circ M_n$ sur $B_R(0)$ converge localement uniformément C^∞ vers une application holomorphe à valeurs dans \mathbb{D} . Comme $R > 0$ est arbitraire, on voit alors qu'on peut supposer que $N_n \circ M_n$ converge localement uniformément C^∞ sur \mathbb{C} vers une application holomorphe à valeurs dans \mathbb{D} , qui, par le principe de Liouville, doit être constante.

On sait que, pour chaque n , il existe une rotation R_n autour de x_0 telle que :

$$A_n = R_n \circ N_n \circ M_n$$

Comme $SO(3)$ est compact, on peut supposer qu'il existe une rotation R_0 telle que R_n tende vers R_0 lorsque n tend vers l'infini. Il en découle que la restriction de A_n à \mathbb{C} converge localement uniformément C^∞ vers une fonction constante, et le résultat en découle. \square

Ensuite, le résultat suivant nous permet de mieux contrôler l'emplacement de $i_n(z)$ pour tout n :

Lemme 2.7.3

Soit $z \in \mathbb{D}$. Alors, il existe un voisinage Ω de $\varphi_0 \circ \alpha_0(z)$ dans $\mathbb{H}^3 \cup \partial_\infty \mathbb{H}^3$ tel que, pour tout n :

$$i_n \circ \alpha_n(z) \notin \Omega$$

Démonstration : Soient $U \subseteq \mathbb{D}$ et $V_a \subseteq \partial_\infty \mathbb{H}^3 \cong \hat{\mathbb{C}}$ des ouverts relativement compacts tels que $z \in U$, que l'application $\varphi_0 : U \rightarrow V_a$ soit un difféomorphisme et que V_a soit un disque autour de $\varphi_0(z)$ dans $\hat{\mathbb{C}}$.

Soit V_b un autre disque autour de $\varphi_0(z)$ dans $\hat{\mathbb{C}}$ strictement contenu dans V_a . Puisque $\varphi_n \rightarrow \varphi_0$ localement uniformément lorsque n tend vers l'infini, par le lemme 2.2.4, pour n suffisamment grand :

$$V_b \subseteq \varphi_n(U)$$

Puisque $\varphi_n \rightarrow \varphi_0$ localement C^2 lorsque n tend vers l'infini, en restreignant au besoin U , le lemme 2.2.3 nous permet de supposer que, pour tout n suffisamment grand, la restriction de φ_n à U est un difféomorphisme sur son image. On voit alors que, pour n suffisamment grand, il existe un ouvert U_n dans U tel que φ_n envoie U_n difféomorphiquement sur V_b .

Comme $\alpha_n \rightarrow \alpha_0$ lorsque $n \rightarrow \infty$, pour n suffisamment grand, $\alpha_n(z) \in U$. Ensuite, comme $\varphi_n \circ \alpha_n \rightarrow \varphi_0 \circ \alpha_0$ lorsque $n \rightarrow \infty$, pour n suffisamment grand $\varphi_n \circ \alpha_n(z) \in V_b$, et donc, par l'injectivité, $\alpha_n(z) \in U_n$.

Pour tout n grand, le problème de Plateau (U_n, φ_n) est équivalent (à reparamétrisation près) au problème (V_b, i) , où $i : V_b \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ est l'immersion canonique. La solution du problème de Plateau (V_b, i) est une hypersurface équidistante à une sous-variété totalement géodésique complète dans l'espace hyperbolique. On voit alors qu'elle est la frontière d'un ouvert Ω dans $\mathbb{H}^3 \cup \partial_\infty \mathbb{H}^3$ qui contient $(\varphi_0 \circ \alpha_0)(z)$. Soit H une hémisphère centrée sur $(\varphi_0 \circ \alpha_0)(z)$ contenue dans Ω et soit Ω' l'intérieur de H . On sait que pour tout $p \in \Omega'$ et $q \in \partial_\infty \Omega'$, l'unique géodésique reliant p à q doit rester à l'intérieur de H et, en particulier, elle n'intersecte pas $\partial\Omega$.

Pour tout n grand, soit γ_n la géodésique dans \mathbb{H}^3 partant de $(\hat{j}_n \circ \alpha_n)(z)$. Le théorème 2.5.2 nous dit que la frontière de Ω est un graphe au-dessus de U_n dans le bout de Σ_n . Il en découle que γ_n traverse cette frontière. Or, pour n suffisamment grand $(\varphi_n \circ \alpha_n)(z) \in \partial_\infty \Omega'$ et donc $(\hat{j}_n \circ \alpha_n)(z)$ doit être alors à l'extérieur de H .

On voit alors que $(\hat{j}_n \circ \alpha_n)(z) \notin \Omega'$ pour tout n assez grand, et le résultat en découle. \square

On est maintenant en mesure de démontrer le lemme 2.7.1 :

Démonstration du lemme 2.7.1 : On va supposer le contraire et raisonner par l'absurde.

Notons $q = (\varphi_0 \circ \alpha_0)(z)$. Par la compacité, on peut supposer qu'il existe $p \in \partial_\infty \mathbb{H}^3$ tel que $i_n(z) \rightarrow p$ lorsque n tend vers l'infini et par le lemme précédent, on sait que $p \neq q$.

Soit maintenant $x_0 \in \mathbb{H}^3$ un point quelconque. Ensuite, soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'isométries de \mathbb{H}^3 telle que :

$$\begin{aligned} A_n i_n(p_n) &= x_0 & \forall n \\ A_n p &= p & \forall n \end{aligned}$$

Ensuite, pour tout n , notons aussi A_n l'application engendrée par A_n sur $U\mathbb{H}^3$ et sur $\partial_\infty \mathbb{H}^3 \cong \hat{\mathbb{C}}$.

Notons $k_n = A_n \circ i_n$ et définissons Σ'_n par :

$$\Sigma'_n = (S_n, k_n)$$

Σ'_n est l'unique solution du problème de Plateau $(S_n, A_n \circ \varphi_n \circ \alpha_n)$. Soit $\hat{\Sigma}'_n = (S_n, \hat{k}_n)$ le relevé de Gauss de Σ'_n . Pour tout n , posons $p_n = z$.

Comme $\{\hat{k}_n(p_n) | n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact dans \mathbb{H}^3 , le théorème 2.5.3 nous permet de supposer qu'il existe $\hat{\Sigma}'_0 = (S_0, \hat{k}_0, p_0)$ une surface immergée pointée dans $U\mathbb{H}^3$ telle que $(\hat{\Sigma}'_n, p_n)$ tende vers $(\hat{\Sigma}'_0, p_0)$ lorsque n tend vers l'infini.

Soit ρ strictement inférieur au rayon d'injectivité de $(S_0, \hat{k}_0^* g^\nu)$ autour de p_0 . Le lemme 2.2.3 nous dit que, pour n suffisamment grand, ρ est strictement inférieur au rayon d'injectivité de $(S_n, \hat{k}_n^* g^\nu)$ autour de p_n . Pour tout n , soit $\mu_n : B_\rho(p_n) \rightarrow \mathbb{D}$ l'application tautologique. En particulier :

$$\mu_n(p_n) = z$$

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{D}, 0) & \xleftarrow{\mu_n} & (S_n, p_n) \\ \downarrow \alpha_n & & \downarrow \vec{n} \circ \hat{k}_n \\ (\mathbb{D}, 0) & \xrightarrow{A_n \circ \varphi_n} & \partial_\infty \mathbb{H}^3 \end{array}$$

Par le lemme 2.6.4, on peut supposer qu'il existe $\mu_0 : B_\rho(p_0) \rightarrow \mathbb{D}$ holomorphe (éventuellement constante) telle que μ_n tende vers μ_0 lorsque n tend vers l'infini.

Par le lemme 2.7.2 la suite A_n tend localement uniformément dans le complémentaire de p dans $\partial_\infty \mathbb{H}^3$ vers une application constante. Donc $A_n \circ \varphi_n$ tend localement uniformément vers une application constante dans le complémentaire de $\varphi_0^{-1}(\{p\})$ dans \mathbb{D} . On voit ensuite que $A_n \circ \varphi_n \circ \alpha_n$ tend localement uniformément vers une application constante dans le complémentaire de $(\varphi_0 \circ \alpha_0)^{-1}(\{p\})$ dans \mathbb{D} . Notons :

$$\Omega = \mathbb{D} \setminus (\varphi_0 \circ \alpha_0)^{-1}(\{p\})$$

Comme $(\varphi_n \circ \alpha_n)(z) = q$ pour tout n , on voit que $(\varphi_0 \circ \alpha_0)(z) = q$ et, en particulier, $z \in \Omega$. Mais, comme $\mu_n(p_n) = z$ pour tout n , on voit qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\mu_n(B_\epsilon(p_n)) \subseteq \Omega$ pour tout n . On voit alors que $A_n \circ \varphi_n \circ \alpha_n \circ \mu_n$ tend uniformément vers une application constante sur $B_\epsilon(p_0)$. Or, pour tout n :

$$A_n \circ \varphi_n \circ \alpha_n \circ \mu_n = \vec{n} \circ \hat{k}_n$$

En prenant les limites, on voit que $\vec{n} \circ \hat{k}_0$ est constante sur $B_\epsilon(0)$, ce qui est absurde, car celle-ci est une application localement homéomorphe, et le résultat en découle. \square .

2.7.3 La précompacité.

Avant d'entamer la démonstration du résultat de compacité, on va montrer le résultat suivant concernant les rayons d'injectivité des relevés de Gauss de k -surfaces dans \mathbb{H}^3 :

Lemme 2.7.4

Il existe $\rho_0 \in]0, \infty[$ tel que, pour tout $\hat{\Sigma} \in \overline{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \cup \mathcal{L}_\infty$ le rayon d'injectivité de $\hat{\Sigma}$ soit strictement supérieur à ρ_0 .

Démonstration : Supposons le contraire et raisonnons par l'absurde. Soit $(\hat{\Sigma}_n, p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \overline{\mathcal{L}}$ et $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}} \in]0, \infty[$ telles $\epsilon_n \downarrow 0$ lorsque n tend vers l'infini et que, pour tout n , le rayon d'injectivité de $\hat{\Sigma}_n$ en p_n soit inférieur à ϵ_n . Pour tout n , posons $\hat{\Sigma}_n = (S_n, \hat{i}_n)$. En composant tout \hat{i}_n avec une isométrie de \mathbb{H}^3 , on peut supposer qu'il existe un compact $K \subseteq U\mathbb{H}^3$ tel que :

$$\hat{i}_n(p_n) \in K \quad \forall n$$

Par le théorème 2.5.3, il existe $(\hat{\Sigma}_0, p_0) \in \overline{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \cup \mathcal{L}_\infty$ tel que, après extraction d'une sous-suite :

$$(\hat{\Sigma}_n, p_n) \rightarrow (\hat{\Sigma}_0, p_0) \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

Soit ρ strictement inférieur au rayon d'injectivité de $\hat{\Sigma}_0$ en p_0 . Par le lemme 2.2.3, pour n suffisamment grand, le rayon d'injectivité de $\hat{\Sigma}_n$ en p_n est supérieur à ρ , et donc :

$$\epsilon_n > \rho > 0$$

ce qui est absurde, et le résultat en découle. \square

On montre maintenant la précompacité de la famille de fonctions $\{\hat{i}_n | n \in \mathbb{N}\}$ sur \mathbb{D} :

Lemme 2.7.5

Il existe $\hat{i}_0 : \mathbb{D} \rightarrow U\mathbb{H}^3$ une immersion telle que, après extraction d'une sous-suite, \hat{i}_n tende vers \hat{i}_0 sur \mathbb{D} localement C^k pour tout k lorsque n tend vers l'infini. De plus, $\hat{i}_0^ g^\nu$ définit une métrique complète sur \mathbb{D} .*

Démonstration : Soit $z \in \mathbb{D}$. Pour tout n posons $p_n = z$. Pour tout n , soit $\hat{\Sigma}_n = (S_n, \hat{i}_n)$ le relevé de Gauss de Σ_n et munissons S_n de la métrique $\hat{i}_n^* g^\nu$. Par le lemme 2.7.1, l'ensemble $\{\hat{i}(p_n) | n \in \mathbb{N}\}$ est précompact dans $U\mathbb{H}^3$. Le théorème 2.5.3 nous permet de supposer alors qu'il existe $\hat{\Sigma}_0 = (S_0, \hat{i}'_0, p_0)$ une surface immergée pointée dans $U\mathbb{H}^3$ telle que $(\hat{\Sigma}_n, p_n)$ tende vers $(\hat{\Sigma}_0, p_0)$ lorsque n tend vers l'infini.

Soit ρ_0 comme dans le lemme précédent. Pour tout n , soit $\mu_n : B_{\rho_0}(p_n) \rightarrow \mathbb{D}$ l'application tautologique. En particulier, pour tout n :

$$\mu_n(p_n) = z$$

De plus, pour tout n , l'application μ_n est injective et donc conforme.

Par le lemme 2.6.4, il existe $\mu_0 : B_{\rho_0}(\tilde{p}_0) \rightarrow \mathbb{D}$ holomorphe (éventuellement constante) telle que, après extraction d'une sous-suite, μ_n tende vers μ_0 localement C^k pour tout k lorsque n tend vers l'infini. Notons $U = \mu_0(B_{\rho_0}(p_0))$.

Or, comme dans la démonstration du lemme précédent :

$$\varphi_0 \circ \alpha_0 \circ \mu_0 = \vec{n}' \circ \hat{i}'_0$$

et, en particulier, μ_0 est localement conforme (c'est-à-dire que c'est partout un homéomorphisme local). Par le lemme 2.2.2, l'application μ_0 est injective et donc conforme. Puisque $\mu_n(p_n) = z$ pour tout n , on sait que $\mu_0(p_0) = z$ et donc U est un voisinage de z .

Par le lemme 2.2.1 la suite d'applications μ_n^{-1} converge localement C^k pour tout k vers μ_0^{-1} lorsque n tend vers l'infini. Par conséquent :

$$\hat{i}_n = \hat{i}_n \circ \mu_n^{-1} \rightarrow \hat{i}'_0 \circ \mu_0^{-1}$$

localement C^k pour tout k dans U lorsque n tend vers l'infini. Puisque $z \in \mathbb{D}$ arbitraire, en prenant au besoin encore une sous-suite, on montre qu'il existe $\hat{i}_0 : \mathbb{D} \rightarrow U\mathbb{H}^3$ une immersion telle que $\hat{i}_n \rightarrow \hat{i}_0$ localement C^k pour tout k sur \mathbb{D} .

La boule de rayon $\rho_0/2$ autour de z dans U relativement à la métrique $(\hat{i}'_0 \circ \mu_0^{-1})^*g^\nu$ est complète. Puisque la restriction de \hat{i}_0 à U coïncide avec $\hat{i}'_0 \circ \mu_0^{-1}$, la boule de rayon $\rho_0/2$ autour de z dans \mathbb{D} relativement à la métrique $\hat{i}_0^*g^\nu$ est complète. Puisque $z \in \mathbb{D}$ est arbitraire, la métrique $\hat{i}_0^*g^\nu$ est complète sur \mathbb{D} , et le résultat en découle. \square

En fait, puisque la surface immergée $\hat{\Sigma}_0$ est complète, on obtient le résultat suivant :

Corollaire 2.7.6

Il existe $i_0 : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}^3$ telle que \hat{i}_0 soit le relevé de Gauss de i_0 . De plus, i_0 est la solution de problème de Plateau $\varphi_0 \circ \alpha_0$.

Démonstration : Puisque $\hat{\Sigma}_0$ est complète, elle est dans $\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \cup \mathcal{L}_\infty$. Ensuite, puisque elle est hyperbolique, et tout les éléments de \mathcal{L}_∞ sont paraboliques, elle est le relevé de Gauss d'une k -surface $\Sigma_0 = (S_0, i_0)$, et le premier résultat en découle. Ensuite, si l'on note $\vec{n} : U\mathbb{H}^3 \rightarrow \partial_\infty\mathbb{H}^3$ l'application de Gauss-Minkowski, alors, pour tout n :

$$\varphi_n \circ \alpha_n = \vec{n} \circ \hat{i}_n$$

En prenant des limites, on obtient :

$$\varphi_0 \circ \alpha_0 = \vec{n} \circ \hat{i}_0$$

Et le résultat en découle. \square

Ensuite, on pose $j_0 = i_0 \circ \alpha_0^{-1}$ et l'on obtient le résultat suivant :

Corollaire 2.7.7

L'application j_0 est la solution de problème de Plateau φ_0 et la suite $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers j_0 localement C^k pour tout k lorsque n tend vers l'infini.

Démonstration : On sait que α_n tend vers α_0 localement C^0 lorsque n tend vers l'infini. Si l'on note $\vec{n} : U\mathbb{H}^3 \rightarrow \partial_\infty\mathbb{H}^3$ l'application de Gauss-Minkowski, alors pour tout n (y compris $n = 0$) :

$$\varphi_n \circ \alpha_n = \vec{n} \circ \hat{i}_n$$

Pour tout n , l'application φ_n est partout localement inversible, et donc, par abus de notation, on obtient :

$$\alpha_n = \varphi_n^{-1} \circ \vec{n} \circ \hat{i}_n$$

En particulier, α_0 est lisse, et $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers α_0 localement C^k pour tout k lorsque n tend vers l'infini. Le lemme 2.2.1 nous informe alors que α_n^{-1} converge vers α_0^{-1} localement C^k pour tout k lorsque n tend vers l'infini. Or, pour tout n :

$$j_n = i_n \circ \alpha_n^{-1}$$

et il en découle que j_n tend vers j_0 localement C^k pour tout k lorsque n tend vers l'infini. Enfin, si l'on note \hat{j}_0 le relevé de Gauss de j_0 , alors :

$$\hat{j}_0 = \hat{i}_0 \circ \alpha_0^{-1}$$

En particulier, la métrique $\hat{j}_0^* g^\nu$ est complète, et :

$$\vec{n} \circ \hat{j}_0 = \vec{n} \circ \hat{i}_0 \circ \alpha_0^{-1} = \varphi_0$$

et on voit alors que j_0 est la solution du problème de Plateau φ_0 et le résultat en découle. \square

◇

2.8 Les résultats principaux.

2.8.1 L'existence et la continuité.

Tout d'abord, on obtient le théorème d'existence :

Théorème 2.1.1

Soit $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ localement holomorphe. Alors, pour tout $k \in]0, 1[$ il existe une unique solution $i_k : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}^3$ du problème de Plateau (\mathbb{D}, φ) .

Démonstration : Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in]0, 1[$ telle que $t_n \uparrow 1$ lorsque n tend vers l'infini et posons :

$$\begin{aligned} \varphi_n(z) &= \varphi(t_n z) \\ \varphi_0 &= \varphi \end{aligned}$$

Par le théorème 2.5.1 et le théorème 2.5.2, pour tout $n \neq 0$ il existe une unique solution j_n du problème de Plateau (\mathbb{D}, φ_n) . Ensuite, par le lemme 2.7.5 et le corollaire 2.7.7 il existe un solution j_0 du problème de Plateau (\mathbb{D}, φ_0) . Enfin, d'après le théorème 2.5.2, cette solution est unique. \square

Ensuite, on obtient le théorème de continuité :

Théorème 2.1.2

Soit $k \in]0, 1[$ et soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}, \varphi_0 : \mathbb{D} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ localement holomorphes. Ensuite, soit $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}, i_0 : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}^3$ telles que, pour tout k , l'application i_k soit l'unique solution du problème de Plateau (\mathbb{D}, φ_n) .

Supposons que $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers φ_0 localement uniformément (et donc localement C^k pour tout k) lorsque n tend vers l'infini. Alors $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers i_0 localement C^k pour tout k lorsque n tend vers l'infini.

Démonstration : Ceci découle directement du corollaire 2.7.7 et l'unicité des solutions du problème de Plateau. \square

2.8.2 Un homéomorphisme.

Notons $\text{Conf}(\mathbb{D}, \hat{\mathbb{C}})$ l'espace des applications localement conformes de \mathbb{D} dans $\hat{\mathbb{C}}$ muni de la topologie de la convergence localement uniforme. Ensuite, on note $\mathcal{M}_k(\mathbb{D})$ l'espace d'immersions $i : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}^3$ telles que :

- (i) la surface immergée $\Sigma = (\mathbb{D}, i)$ soit une k -surface,
- (ii) si l'on note $\vec{n} : U\mathbb{H}^3 \rightarrow \partial_\infty \mathbb{H}^3 \cong \hat{\mathbb{C}}$ l'application de Gauss-Minkowski, alors :

$$\vec{n} \circ i \in \text{Conf}(\mathbb{D}, \hat{\mathbb{C}})$$

c'est-à-dire que la fonction $\vec{n} \circ i$ est localement holomorphe sur \mathbb{D} .

Cette seconde condition n'est pas aussi contraignante qu'elle en a l'air. En effet, soit $\Sigma = (S, i)$ une k -surface non-dégénérée telle que S soit simplement connexe et soit $\hat{\Sigma} = (S, \hat{i})$ son relevé de Gauss. La métrique g^ν sur UM engendre une métrique \hat{i}^*g^ν sur S . On dit alors que la surface immergée est *de type hyperbolique* si et seulement si la variété riemannienne (S, \hat{i}^*g^ν) est conformément équivalente à \mathbb{D} . On obtient alors le résultat suivant :

Lemme 2.8.1

Soit $\Sigma = (S, i)$ une k -surface et soit $\hat{\Sigma} = (S, \hat{i})$ son relevé de Gauss. Supposons que S est simplement connexe et que $\hat{\Sigma}$ est de type hyperbolique. Alors, il existe un difféomorphisme $\alpha : \mathbb{D} \rightarrow S$ tel que :

$$\vec{n} \circ \hat{i} \circ \alpha \in \text{Conf}(\mathbb{D}, \hat{\mathbb{C}})$$

Démonstration : Soit $\rho : \mathbb{D} \rightarrow S$ la représentation conforme de (S, \hat{i}^*g^ν) . Par le lemme 2.4.1, l'application $\varphi \circ \rho$ est k -quasiconforme. Il existe alors une application quasiconforme $\alpha' : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ telle que l'application $\varphi' = \varphi \circ \rho \circ \alpha'$ soit conforme. En particulier, φ' est lisse et, puisque φ est partout un homéomorphisme local, on obtient, avec un léger abus de notation :

$$\rho \circ \alpha' = \varphi^{-1} \circ \varphi'$$

Il en découle que l'application $\rho \circ \alpha'$ est lisse. On pose alors $\alpha = \rho \circ \alpha'$ et le résultat en découle. \square

On voit alors que toute k -surface simplement connexe hyperbolique a une paramétrisation dans $\mathcal{M}_k(\mathbb{D})$.

Ensuite, on remarque que s'il existe $i, i' \in \mathcal{M}_k(\mathbb{D})$ et $\alpha : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ telles que :

$$i' = i \circ \alpha$$

Alors α est conforme, et donc :

$$\alpha \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$$

Donc $\mathcal{M}_k(\mathbb{D})/\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ s'identifie avec l'espace des k -surfaces hyperboliques simplement connexes dans \mathbb{H}^3 .

On munit $\mathcal{M}_k(\mathbb{D})$ de la topologie de convergence localement C^k pour tout k . Ensuite, on définit la fonction :

$$\mathcal{P} : \text{Conf}(\mathbb{D}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_k(\mathbb{D})$$

comme étant celle que associe à chaque $\varphi \in \text{Conf}(\mathbb{D}, \mathbb{C})$ l'unique solution i au problème de Plateau (\mathbb{D}, φ) . Les résultats de ce chapitre sont résumés dans le lemme suivant :

Lemme 2.8.2

La fonction \mathcal{P} est un homéomorphisme.

Démonstration : Par le théorème 2.1.1, la fonction \mathcal{P} est bien définie, et, par l'unicité des solutions du problème de Plateau, elle est injective. Soit $i \in \mathcal{M}_k(\mathbb{D})$ et soit \hat{i} son relevé de Gauss. Notons \vec{n} l'application de Gauss-Minkowski. Par la définition de $\mathcal{M}_k(\mathbb{D})$:

$$\varphi = \vec{n} \circ \hat{i} \in \text{Conf}(\mathbb{D}, \mathbb{C})$$

Il en découle que i est l'unique solution de problème de Plateau (\mathbb{D}, φ) et la surjectivité de \mathcal{P} en découle.

Ensuite, le théorème 2.1.2 nous dit que \mathcal{P} est continue. Par le lemme 2.1.3 son inverse est aussi continue. Le résultat en découle. \square

On a ainsi décrit la structure de l'espace des modules de k -surfaces non-dégénérées de type hyperbolique dans \mathbb{H}^3 .

k-surfaces à points

3.1 Présentation.

DANS la suite des idées du chapitre précédent, on va étudier des espaces de modules provenant des surfaces de Riemann compactes à points marqués. Il est trivial de montrer qu'il n'existe pas de *k*-surface compacte dans \mathbb{H}^3 . En effet, une telle surface serait tangente intérieurement à une sphère en au moins un point, ce qui est absurde par le principe de maximum géométrique (voir [34]). On va travailler alors avec des surfaces non-compactes ayant des propriétés asymptotiques qu'on va préciser ci-dessous.

Le résultat clé de ce chapitre est le théorème suivant :

Théorème 3.1.1

Soit S une surface et soit $\varphi : S \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ un difféomorphisme local. Soit $i : S \rightarrow U\mathbb{H}^3$ une immersion telle que (S, i) soit l'unique solution du problème de Plateau (S, φ) .

Soit $K \subseteq S$ un compact et soit Ω une composante connexe de $S \setminus K$. Soit q un point de la frontière de $\varphi(\Omega)$ qui n'est pas dans l'image de $\overline{\Omega} \cap K$. Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S$ telle que $\varphi(p_n) \rightarrow q$ lorsque n tend vers l'infini. Alors $i(p_n)$ tend vers q lorsque n tend vers l'infini.

Ce résultat nous permet d'étudier le comportement des k -surfaces près des singularités isolées. D'abord, pour $\Gamma \in \mathbb{H}^3$ une géodésique dans \mathbb{H}^3 , on définit N_Γ l'ensemble des vecteurs normaux à Γ dans $U\mathbb{H}^3$ par :

$$N_\Gamma = \{n_p \in U\mathbb{H}^3 \mid p \in \Gamma, n_p \perp T_p\Gamma\}$$

N_Γ est biholomorphe à $\mathbb{R} \times S^1$, où S^1 est le cercle de rayon 1 dans \mathbb{C} . Si $\hat{i} : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow N_\Gamma$ est une représentation conforme, on voit que \hat{i} est unique à translations horizontales et verticales près. En particulier, si $p_0 \in N_\Gamma$, il existe une unique biholomorphie $i : (\mathbb{R} \times S^1, 0) \rightarrow (N_\Gamma, p_0)$. Ensuite, pour $n \geq 1$, définissons $\tau_n : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times S^1$ par :

$$\tau_n(t, e^{i\theta}) = (nt, e^{in\theta})$$

Pour tout n , l'application τ_n est localement conforme. Maintenant, pour tout k , on note $\hat{i}_k = \hat{i} \circ \tau_k$ et l'on définit la surface immergée $T_k \subseteq U\mathbb{H}^3$ par :

$$T_k = (\mathbb{R} \times S^1, \hat{i}_k)$$

On propose la définition suivante :

Définition 3.1.2

On appelle T_k un **tube d'ordre n** autour de Γ .

Maintenant, on définit les surfaces asymptotiquement tubulaires d'ordre fini. Heuristiquement, si le point p_0 est une singularité de la surface immergée Σ , et si $\lambda \in \mathbb{N}$, alors Σ est asymptotiquement tubulaire d'ordre λ en p_0 si et seulement si, dans un voisinage de p_0 , le relevé de Gauss $\hat{\Sigma}$ de la surface Σ coïncide avec un graphe au-dessus d'un demi-tube d'ordre λ , qui tend vers zéro lorsqu'on s'approche de p_0 . Formellement, on a :

Définition 3.1.3

Soit S une surface et soit $\mathcal{P} \subseteq S$ un sous-ensemble discret de S . Soit $i : S \setminus \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{H}^3$ une immersion telle que la surface immergée $\Sigma = (S \setminus \mathcal{P}, i)$ soit une k -surface. Soit \hat{i} le relevé de Gauss de i . Posons $\hat{\Sigma} = (S \setminus \mathcal{P}, \hat{i})$.

Soit $\lambda \in \mathbb{N}$. Pour $p_0 \in \mathcal{P}$, on dit que Σ est **asymptotiquement tubulaire d'ordre λ** en p_0 s'il existe :

- un voisinage Ω de p_0 dans S tel que $\mathcal{P} \cap \Omega = \{p_0\}$,
- un tube $T_\lambda = (\mathbb{R} \times S^1, \tau_\lambda)$ d'ordre n dans $U\mathbb{H}^3$,
- $\sigma \in \Gamma(]0, \infty[\times S^1, \tau_\lambda^* NN_\Gamma)$ une section lisse de $\tau_\lambda^* NN_\Gamma$ au dessus de $]0, \infty[\times S^1$ où NN_Γ est le fibré normal à N_Γ dans $TU\mathbb{H}^3$, et
- un difféomorphisme $\alpha :]0, \infty[\times S^1 \rightarrow \Omega \setminus \{p_0\}$,

tels que :

- $\hat{i} \circ \alpha = \text{Exp} \circ \sigma$ où $\text{Exp} : TU\mathbb{H}^3 \rightarrow U\mathbb{H}^3$ est l'application exponentielle de $U\mathbb{H}^3$, et
- $\sigma(t, e^{i\theta})$ tende vers zéro dans la topologie C_{loc}^∞ lorsque t tend vers l'infini.

On dit ensuite que Σ est **asymptotiquement tubulaire d'ordre fini** en $p_0 \in \mathcal{P}$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{N}$ tel que Σ soit asymptotiquement tubulaire d'ordre λ en p_0 , et l'on dit que Σ est **asymptotiquement tubulaire d'ordre fini** si et seulement si elle est asymptotiquement tubulaire d'ordre fini en p_0 pour tout $p_0 \in \mathcal{P}$.

On obtient alors le résultat suivant :

Théorème 3.1.4

Soit S une surface de Riemann et soit $\mathcal{P} \subseteq S$ un sous-ensemble discret tel que $S \setminus \mathcal{P}$ soit de type hyperbolique. Soit $\varphi : S \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ localement conforme dans $S \setminus \mathcal{P}$. Soit i l'unique solution du problème de Plateau $(S \setminus \mathcal{P}, \varphi)$. Soit $p_0 \in \mathcal{P}$ et supposons que φ a un point critique d'ordre k en p_0 . Alors $\Sigma = (S \setminus \mathcal{P}, i)$ est asymptotiquement tubulaire d'ordre k en p_0 .

Il faut noter que les points critiques d'ordre 1 sont admis, bien que ce ne soient pas vraiment des points critiques au sens strict du terme. On obtient ensuite une réciproque de ce résultat :

Théorème 3.1.5

Soit S une surface et soit $\mathcal{P} \subseteq S$ un sous-ensemble discret. Soit $i : S \setminus \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{H}^3$ une immersion telle que $\Sigma = (S \setminus \mathcal{P}, i)$ soit une k -surface. Soit \hat{i} le relevé de Gauss de i . Notons $\varphi = \vec{n} \circ \hat{i}$ où $\vec{n} : U\mathbb{H}^3 \rightarrow \partial_\infty \mathbb{H}^3 \cong \hat{\mathbb{C}}$ est l'application de Gauss-Minkowski. Enfin, notons \mathcal{H} la structure holomorphe sur $S \setminus \mathcal{P}$ engendrée par φ .

Soit $p_0 \in \mathcal{P}$ et supposons que Σ est asymptotiquement tubulaire d'ordre λ en p_0 . Alors, il existe une unique structure holomorphe $\tilde{\mathcal{H}}$ sur $(S \setminus \mathcal{P}) \cup \{p_0\}$ et une unique application $\tilde{\varphi} : (S \setminus \mathcal{P}) \cup \{p_0\} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ telles que $\tilde{\mathcal{H}}$ et $\tilde{\varphi}$ prolongent respectivement \mathcal{H} et φ . De plus, $\tilde{\varphi}$ a un point critique d'ordre λ en p_0 .

Ces deux résultats nous permettent alors d'étudier des espaces de modules de k -surfaces asymptotiquement tubulaires d'ordre fini en termes de revêtements ramifiés de surfaces de Riemann dans $\hat{\mathbb{C}}$.

◇

3.2 Le comportement à l'infini.

3.2.1 Le résultat clé.

Avant tout, on va montrer le théorème suivant :

Théorème 3.1.1

Soit S une surface et soit $\varphi : S \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ un difféomorphisme local. Soit $i : S \rightarrow U\mathbb{H}^3$ une immersion telle que (S, i) soit l'unique solution du problème de Plateau (S, φ) .

Soit $K \subseteq S$ un compact et soit Ω une composante connexe de $S \setminus K$. Soit q un point de la frontière de $\varphi(\Omega)$ qui n'est pas dans l'image de $\overline{\Omega} \cap K$. Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S$ telle que $\varphi(p_n) \rightarrow q$ lorsque n tend vers l'infini. Alors $i(p_n)$ tend vers q lorsque n tend vers l'infini.

Démonstration : On va supposer le contraire et raisonner par l'absurde. Notons \hat{i} le relevé de Gauss de i . On identifie \mathbb{H}^3 avec $\mathbb{C} \times]0, \infty[$ et puis on identifie $\partial_\infty \mathbb{H}^3$ avec $\hat{\mathbb{C}}$. En

appliquant au besoin une isométrie de \mathbb{H}^3 , on identifie q avec l'infini. Pour tout n , notons $q_n = \varphi(p_n)$. Ensuite, soit $(z_n, \lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que, pour tout n :

$$i(p_n) = (z_n, \lambda_n)$$

Comme $i(p_n)$ ne tend pas vers l'infini, on peut supposer qu'il existe $R > 0$ tel que, pour tout n :

$$\|z_n, \lambda_n\| < R \quad \forall n$$

Définissons maintenant $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite d'isométries de \mathbb{H}^3 par :

$$A_n(z, \lambda) = \frac{1}{\lambda_n}(z - z_n, \lambda) \quad \forall n$$

On voit en particulier que :

$$A_n(z_n, \lambda_n) = (1, 0) \quad \forall n$$

On va noter également A_n l'automorphisme de $\partial_\infty \mathbb{H}^3 = \hat{\mathbb{C}}$ engendré par A_n . Pour tout n :

$$\|A_n(q_n)\| \geq \frac{1}{R}(\|q_n\| - R)$$

En particulier, comme q_n tend vers l'infini lorsque n tend vers l'infini, la suite de points $A_n(q_n)$ tend également vers l'infini lorsque n tend vers l'infini. Pour tout n , définissons $i_n : S \rightarrow U\mathbb{H}^3$ par :

$$i_n = A_n \circ i$$

Ensuite, pour tout n notons \hat{i}_n le relevé de Gauss de i_n . Puisque $i_n(p_n) = (0, 1)$, par le théorème 2.5.3, il existe (S_0, \hat{i}_0, p_0) une surface immergée dans $U\mathbb{H}^3$ (éventuellement un tube) telle que $(S, \hat{i}_n, p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tende vers cette surface lorsque n tend vers l'infini. En particulier, si l'on note $\vec{n} : U\mathbb{H}^3 \rightarrow \partial_\infty U\mathbb{H}^3$ l'application de Gauss-Minkowski, alors :

$$\begin{aligned} (\vec{n} \circ \hat{i}_0)(p_0) &= \text{Lim}_{n \rightarrow \infty} (\vec{n} \circ \hat{i}_n)(p_n) \\ &= \text{Lim}_{n \rightarrow \infty} (A_n \circ \varphi)(p_n) \\ &= \text{Lim}_{n \rightarrow \infty} A_n(q_n) \\ &= \infty \end{aligned}$$

Pour $\epsilon \in]0, \infty[$, pour $p \in S$ un point quelconque, et pour g une métrique sur S , on note $B_\epsilon(p; g)$ la boule de rayon ϵ dans S autour de p relativement à la métrique g . Munissons S d'abord de la métrique \hat{i}^*g^ν . Comme la surface (S, \hat{i}^*g^ν) est complète, pour tout $\epsilon \in]0, \infty[$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq N$:

$$B_\epsilon(p_n; \hat{i}^*g^\nu) \subseteq \Omega$$

En effet, sinon, puisque les boules sont connexes, on peut supposer que, pour tout n :

$$B_\epsilon(p_n; \hat{i}^*g^\nu) \cap K \neq \emptyset$$

et il en découle que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est contenue dans la boule de rayon ϵ autour du compact K , qui est elle-même compacte. On peut supposer alors qu'il existe $p'_0 \in \overline{\Omega}$ tel que $p_n \rightarrow p'_0$ lorsque n tend vers l'infini. Par continuité, $q = \varphi(p'_0)$ et donc il est, où bien dans l'image de Ω , où bien dans l'image de l'adhérence de Ω avec K , ce qui contredit les hypothèses sur q .

Maintenant, pour tout n , définissons la métrique g_n sur S par :

$$g_n = \hat{i}_n^* g^\nu = \hat{i}^* A_n^* g^\nu$$

Pour tout n , comme A_n est une isométrie, la métrique g_n coïncide avec g . Pour tout n , notons :

$$B_n = B_\epsilon(p_n, g_n)$$

Pour tout n , on peut supposer que $B_n \subseteq \Omega$ et donc, en particulier, que $\infty \notin \varphi(B_n)$. Puisque A_n préserve ∞ , on obtient :

$$\infty \notin (A_n \circ \varphi)(B_n) = (\overrightarrow{n} \circ \hat{i}_n)(B_n)$$

Ensuite, en choisissant ϵ suffisamment petit, on peut supposer que la restriction de $\overrightarrow{n} \circ \hat{i}_0$ à $B_0 = B_\epsilon(p_0, g_0)$ est un homéomorphisme sur son image. Donc, par le lemme 2.2.3, on peut supposer également que, pour tout n , l'application $(\overrightarrow{n} \circ \hat{i}_n)$ est un homéomorphisme sur son image. Le lemme 2.2.4 nous permet de voir alors que l'infini n'est pas dans l'image de B_0 sous l'action de $\overrightarrow{n} \circ \hat{i}_0$, ce qui aboutit à la contradiction recherchée et le résultat en découle. \square

Remarque : En fait, il n'est pas strictement nécessaire de montrer que la restriction de $\overrightarrow{n} \circ \hat{i}_n$ à B_n est un homéomorphisme pour tout n suffisamment grand. On emploie ce résultat ici afin de pouvoir utiliser le lemme 2.2.4 tel qu'il a été énoncé. Sinon, une autre variante du même lemme aurait suffi.

◇

3.3 La géométrie du problème $(\mathbb{D}^*, z \mapsto z)$.

3.3.1 Résumé des propriétés géométriques de la solution.

Dans la section suivante, on va montrer le théorème 3.1.4. D'abord, il faut étudier le problème $(\mathbb{D}, z \mapsto z)$, qui va servir comme modèle pour le cas général.

Identifions \mathbb{H}^3 avec $\mathbb{C} \times]0, \infty[$ et $\partial_\infty \mathbb{H}^3$ avec $\hat{\mathbb{C}}$. Ensuite, notons :

$$\mathbb{D}^* = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$$

et définissons $\varphi : \mathbb{D}^* \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ par :

$$\varphi(z) = z$$

Comme \mathbb{D}^* est hyperbolique, le théorème 2.1.1 nous montre qu'il existe une unique solution du problème de Plateau (\mathbb{D}^*, φ) . Soit $i : \mathbb{D}^* \rightarrow \mathbb{H}^3$ cette solution et soit \hat{i} son relevé de Gauss. La surface immergée (\mathbb{D}^*, i) va servir comme modèle pour le cas général, et on va donc étudier dans cette section ses propriétés géométriques.

D'abord, pour avoir une meilleure idée de la forme de Σ , on va montrer le résultat suivant :

Lemme 3.3.1

Il existe $f : \mathbb{D}^ \rightarrow]0, \infty[$ qui ne dépend que de $r = |z|$ telle que Σ soit le graphe de f au-dessus de \mathbb{D}^* . De plus :*

$$f(r) \rightarrow 0 \text{ lorsque } r \rightarrow 0, 1$$

On va démontrer ce résultat dans la section 3.3.2. Ensuite, notons h la métrique sur \mathbb{H}^3 et notons $g = i^*h$. Par l'unicité des solutions du problème de Plateau, la métrique g est invariante relativement aux rotations et aux réflexions de \mathbb{D}^* . Dans la section 3.3.3, on montrera le résultat suivant concernant g :

Lemme 3.3.2

La variété (\mathbb{D}, g) est complète. De plus :

$$g(\partial_\theta, \partial_\theta) \rightarrow 0 \text{ lorsque } r \rightarrow 0$$

où :

$$\partial_\theta(re^{i\theta}) = [t \rightarrow re^{i(\theta+t)}]_{t=0}$$

Remarque : Pour $r \in]0, 1[$ définissons la courbe $c_r :]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{D}^*$ par :

$$c_r(\theta) = re^{i\theta}$$

Ensuite, notons $\text{Long}(c_r, g)$ la longueur de c_r relativement à g . Par la symétrie de g , on obtient :

$$\begin{aligned} \text{Long}(c_r, g) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{g(\partial_\theta, \partial_\theta)} d\theta \\ &= 2\pi \sqrt{g(\partial_\theta, \partial_\theta)} \end{aligned}$$

Il en découle que $g(\partial_\theta, \partial_\theta) \rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow 0$ si et seulement si $\text{Long}(c_r, g) \rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow 0$.

Ensuite, on pose $T = i(S)$ l'image de i dans \mathbb{H}^3 . Soit \bar{T} l'adhérence de T dans $\mathbb{H}^3 \cup \partial\mathbb{H}^3$. On va montrer le résultat suivant :

Lemme 3.3.3

Soit K un compact dans \mathbb{H}^3 . Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{H}^3$ telle que $p_n \rightarrow (0, 0) \in \partial_\infty \mathbb{H}^3$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'isométries de \mathbb{H}^3 telle que, pour tout n :

$$A_n p_n \in K$$

Notons $\overline{T}_n = A_n \overline{T}$. Alors, il existe $\overline{T}_0 \subseteq \mathbb{H}^3 \cup \partial_\infty \mathbb{H}^3$ qui est soit l'adhérence dans $\mathbb{H}^3 \cup \partial \mathbb{H}^3$ d'une géodésique dans \mathbb{H}^3 , soit un point de $\partial \mathbb{H}^3$, tel que, après extraction d'une sous-suite, \overline{T}_n tende vers \overline{T}_0 au sens de Hausdorff lorsque n tend vers l'infini.

Ensuite, notons $\overline{\Gamma}_{0,\infty}$ l'adhérence de la géodésique dans \mathbb{H}^3 reliant 0 à l'infini et pour tout n , définissons $\overline{\Gamma}_n$ par :

$$\overline{\Gamma}_n = A_n \overline{\Gamma}_{0,\infty}$$

Alors, $\overline{\Gamma}_n$ converge aussi vers \overline{T}_0 au sens de Hausdorff lorsque n tend vers l'infini.

Remarque : Pour X un espace métrisable compact, on rappelle que la topologie de convergence de Hausdorff ne dépend pas de la métrique choisie sur X .

3.3.2 Un graphe au-dessus de \mathbb{D}^* .

Par la symétrie (relativement aux réflexions et aux rotations) et par l'unicité des solutions au problème de Plateau, il existe des fonctions $i_1 :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ et $i_2 :]0, 1[\rightarrow]0, \infty[$ telles que :

$$i(re^{i\theta}) = (i_1(r)e^{i\theta}, i_2(r))$$

Le théorème 3.1.1 nous permet d'obtenir le résultat suivant :

Lemme 3.3.4

Soit S une surface et soit $\varphi : S \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ un difféomorphisme local. Soit $i : S \rightarrow U\mathbb{H}^3$ une immersion telle que (S, i) soit l'unique solution du problème de Plateau (S, φ) .

Soit q dans la frontière de $\varphi(S)$ et soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S$ telle que $\varphi(p_n) \rightarrow q$ lorsque n tend vers l'infini. Alors $i(p_n)$ tend vers q lorsque n tend vers l'infini.

Démonstration : On prend $K = \emptyset$ dans le théorème 3.1.1. \square

On déduit maintenant certaines propriétés de i_1 et de i_2 :

Lemme 3.3.5

$$\begin{aligned} i_1(r) &\rightarrow 0 && \text{lorsque } r \rightarrow 0 \\ i_1(r) &\rightarrow 1 && \text{lorsque } r \rightarrow 1 \\ i_2(r) &\rightarrow 0 && \text{lorsque } r \rightarrow 0, 1 \end{aligned}$$

Démonstration : En effet, par le résultat précédent, $i(z) \rightarrow (0, 0)$ lorsque $z \rightarrow 0$ et, pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, $i(z)$ converge vers $(e^{i\theta}, 0)$ lorsque z tend vers $e^{i\theta}$. Le résultat en découle. \square

Ensuite, on montre le résultat suivant :

Lemme 3.3.6

La fonction i_1 est strictement croissante.

Démonstration : Puisque i est lisse, la fonction i_1 l'est aussi. Ensuite, on rappelle que l'intersection d'une surface strictement convexe avec une géodésique est une réunion de points isolés. De plus, dans l'identification canonique de \mathbb{H}^3 avec $\mathbb{C} \times]0, \infty[$, les droites verticales sont des géodésiques. Donc, puisque Σ est une surface de révolution strictement convexe, les points critiques de i_1 sont soit des maxima locaux stricts, soit des minima locaux stricts. En particulier, ils sont isolés. On note $\vec{n} : U\mathbb{H}^3 \rightarrow \partial_\infty \mathbb{H}^3$ l'application de Gauss-Minkowski. On identifie $\partial_\infty \mathbb{H}^3$ avec $\hat{\mathbb{C}}$ et pour $t \in]0, 1[$, on voit que $\vec{n} \circ \hat{i}(t) \in \mathbb{R} \subseteq \hat{\mathbb{C}}$. En utilisant de nouveau la convexité stricte de Σ (voir la figure 3.3.1), on montre que, si $t \in]0, 1[$ est un maximum local de i_1 , alors :

$$\vec{n} \circ \hat{i}(t) > i_1(t)$$

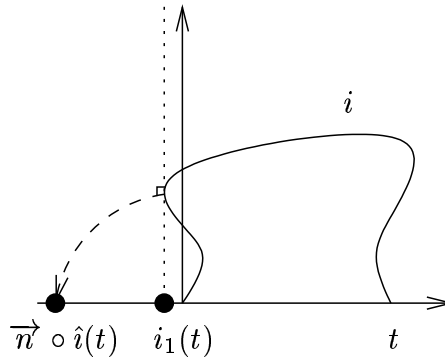


Figure 3.3.1

De même, si $t \in]0, 1[$ est un minimum local de i_1 , alors :

$$\vec{n} \circ \hat{i}(t) < i_1(t)$$

Puisque $\vec{n} \circ \hat{i}(t) = t \in]0, 1[$ et comme $i_1(t) \rightarrow 0$ et $i_1(t) \rightarrow 1$ lorsque t tend respectivement vers 0 et vers 1, la fonction i_1 prend ses valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$. En effet, sinon, par compacité il existe $t_0 \in]0, 1[$ tel que, ou bien $i_1(t_0) < 0$ et t_0 est un minimum de i_1 , ou bien $i_1(t_0) > 1$ et t_0 est un maximum de i_1 . Dans le premier cas, on aurait :

$$t_0 = (\vec{n} \circ \hat{i})(t_0) < i_1(t_0) < 0$$

ce qui est absurde. Donc ce cas-ci n'est pas possible. Or, pour les mêmes raisons, le deuxième cas n'est pas possible non plus, et l'on obtient ainsi une contradiction.

Ensuite, supposons que $t_0 \in]0, 1[$ est un maximum local strict de i_1 . Puisque $i_1(t_0) \leq 1$, et puisque $i_1(t) \rightarrow 1$ lorsque $r \rightarrow 1$, il existe un minimum local t_1 de i_1 dans $]t_0, 1[$ tel que $i_1(t_1) < i_1(t_0)$. Mais :

$$\begin{aligned} t_1 &= \vec{n} \circ \hat{i}(t_1) < i_1(t_1) \\ &< i_1(t_0) < \vec{n} \circ \hat{i}(t_0) = t_0 \end{aligned}$$

ce qui est absurde. Donc, il n'existe pas de maximum local strict de i_1 dans $]0, 1[$. Pour les mêmes raisons, il n'existe pas de minimum local strict de i_1 dans $]0, 1[$ et donc i_1 n'a pas de point critique dans $]0, 1[$ et le résultat en découle. \square

On obtient ainsi le lemme 3.3.1 :

Démonstration du lemme 3.3.1 : Par le lemme précédent, l'application i_1 est strictement croissante et donc inversible. Définissons $\alpha : \mathbb{D}^* \rightarrow \mathbb{D}^*$ par :

$$\alpha(re^{i\theta}) = i_1^{-1}(r)e^{i\theta}$$

Ensuite, définissons $f : \mathbb{D}^* \rightarrow]0, \infty[$ par :

$$f(re^{i\theta}) = i_2(i_1^{-1}(r))$$

L'application α est un homéomorphisme de \mathbb{D}^* et :

$$\begin{aligned} (i \circ \alpha)(re^{i\theta}) &= i(i_1^{-1}(r)e^{i\theta}) \\ &= (i_1(i_1^{-1}(r))e^{i\theta}, i_2(i_1^{-1}(r))) \\ &= (re^{i\theta}, f(re^{i\theta})) \end{aligned}$$

La surface Σ est alors le graphe de f au-dessus de \mathbb{D}^* . Ensuite, par définition, f ne dépend que de r , et, par le lemme 3.3.5 :

$$f(r) \rightarrow 0 \text{ lorsque } r \rightarrow 0, 1$$

et le résultat en découle. \square

3.3.3 Les propriétés de i^*g .

Maintenant, pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, définissons D_θ par :

$$D_\theta = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left| z - \frac{Re^{i\theta}}{2} \right| < \frac{R}{2} \right\}$$

et soit i_θ telle que la surface immergée $\Sigma_\theta = (D_\theta, i_\theta)$ soit l'unique solution du problème de Plateau ($D_\theta, z \mapsto z$). On sait que Σ_θ est une surface à distance constante de l'hémisphère de rayon $R/2$ centrée sur $e^{i\theta}/2$. Soit Ω_θ l'ouvert qui est l'extérieur de cette surface et posons :

$$\Omega = \bigcup_{\theta \in [0, 2\pi]} \Omega_\theta$$

Alors, on a le résultat suivant :

Lemme 3.3.7

La surface Σ est contenue dans ${}^c\Omega_\theta$.

Démonstration : Soit $\theta \in [0, 2\pi]$ et, pour $t \in]0, 1[$ définissons $D_{t,\theta}$ par :

$$D_{t,\theta} = \left\{ z \in \mathbb{C} \left| \left| w - \frac{Re^{i\theta}}{2} \right| < \frac{tR}{2} \right\}$$

Ensuite, soit $i_{t,\theta}$ telle que la surface immergée $\Sigma_{t,\theta} = (D_{t,\theta}, i_{t,\theta})$ soit la solution du problème de Plateau ($D_{t,\theta}, z \mapsto z$) à courbure gaussienne constante égale à $(1-t) + tk > k$. La famille $(\Sigma_{t,\theta})_{t \in]0,1[}$ est un feuilletage de Ω_θ .

Comme $\partial_\infty \Sigma = \partial \mathbb{D}^*$, il existe $\epsilon \in]0, 1[$ tel que, pour $t < \epsilon$:

$$\overline{\Sigma}_{t,\theta} \cap \overline{\Sigma} = \emptyset$$

où l'on prend l'adhérence dans $\mathbb{H}^3 \cup \partial_\infty \mathbb{H}^3$. Maintenant, posons :

$$t_0 = \text{Sup} \{ t \mid \overline{\Sigma}_{s,\theta} \cap \overline{\Sigma}_R = \emptyset \quad \forall s \in]0, t[\}$$

Supposons que $t_0 < 1$. Par la compacité de $\overline{\Sigma}_R$ et de $\overline{\Sigma}_{t_0,\theta}$, et comme le feuilletage est continu, on a :

$$\overline{\Sigma}_{t_0,\theta} \cap \overline{\Sigma} \neq \emptyset$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} \partial_\infty \Sigma_{t_0,\theta} &= \partial D_{t_0,\theta} \subseteq \hat{\mathbb{C}} \\ \partial_\infty \Sigma &= \partial \mathbb{D}^* \subseteq \hat{\mathbb{C}} \\ \Rightarrow \partial_\infty \Sigma_{t_0,\theta} \cap \partial_\infty \Sigma &= \emptyset \\ \Rightarrow \Sigma_{t_0,\theta} \cap \Sigma &\neq \emptyset \end{aligned}$$

Soit $p_0 \in \Sigma_{t_0,\theta} \cap \Sigma_R$ et notons $\text{Ext}(\Sigma_{t_0,\theta})$ l'extérieur de $\Sigma_{t_0,\theta}$. Alors :

$$\begin{aligned} \text{Ext}(\Sigma_{t_0,\theta}) &= \bigcup_{0 < t < t_0} \Sigma_{t,\theta} \\ \Rightarrow \Sigma_R \cap \text{Ext}(\Sigma_{t_0,\theta}) &= \emptyset \end{aligned}$$

Il en découle que Σ est tangent intérieurement à $\Sigma_{t_0,\theta}$ en p_0 , ce qui est absurde par le principe géométrique de maximum (voir [34]), car la courbure gaussienne de $\Sigma_{t_0,\theta}$ est strictement supérieure à celle de Σ . On obtient alors la contradiction recherchée et donc $t_0 = 1$, d'où :

$$\Sigma \subseteq {}^c \Omega_\theta$$

Puisque $\theta \in [0, 2\pi]$ est arbitraire, le résultat en découle. \square

On obtient alors le résultat suivant sur les comportements de i et de f :

Corollaire 3.3.8

Il existe $B \in]0, \infty[$ tel que :

$$\text{LimSup}_{r \rightarrow 0} \frac{i_1(r)}{i_2(r)} \leq B$$

En particulier :

$$\text{LimSup}_{r \rightarrow 0} \frac{r}{f(r)} \leq B$$

Démonstration : Puisque $f(r) = (i_2 \circ i_1^{-1})(r)$ et comme $i_1(0) = 0$ ces deux résultats sont équivalents. Maintenant, soit $f' : D_0 \rightarrow]0, \infty[$ telle que Σ_0 soit le graphe de f' au-dessus de D_0 . Par le résultat précédent :

$$f \geq f'$$

Mais il existe $B \in]0, \infty[$ tel que :

$$\text{LimSup}_{r \rightarrow 0} \frac{r}{f'(r)} \leq B$$

et le résultat en découle. \square

Soit $\Gamma \subseteq \mathbb{H}^3$ la géodésique reliant 0 à l'infini. On sait qu'il existe $\delta :]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[$ croissante telle que :

$$d((re^{i\theta}, \lambda), \Gamma) = \delta(r/\lambda)$$

Le résultat précédent nous dit alors qu'il existe $B' \in]0, \infty[$ tel que :

$$\text{LimSup}_{z \rightarrow 0} \delta(i(z)) \leq B$$

Le résultat suivant nous permet de raffiner cette estimée :

Lemme 3.3.9

$$\text{Lim}_{z \rightarrow 0} \delta(i(z)) = 0$$

Démonstration : Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{D}^*$ telle que $p_n \rightarrow 0$ et que :

$$\delta(i(p_n)) \rightarrow \text{LimSup}_{z \rightarrow 0} \delta(i(z))$$

Soit $(z_n, \lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{H}^3$ telle que, pour tout n :

$$(z_n, \lambda_n) = i(p_n)$$

Définissons $A_n : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3$ par :

$$A_n(z, \lambda) = \frac{1}{\lambda_n}(z, \lambda)$$

En particulier :

$$\begin{aligned} (A_n \circ i)(p_n) &= A_n(z_n, \lambda_n) \\ &= \left(\frac{z_n}{\lambda_n}, 1\right) \end{aligned}$$

Puisque $\text{LimSup}_{n \rightarrow \infty} |z_n/\lambda_n| \leq B$, il existe $K \subseteq \mathbb{H}^3$ compact tel que, pour tout n :

$$(A_n \circ i)(p_n) \in K$$

Pour tout n , notons $i_n = A_n \circ i$ et soit \hat{i}_n le relevé de Gauss de i_n . Par le théorème 2.5.3, il existe une surface immergée pointée $(\hat{\Sigma}_0, p_0) = (S_0, \hat{i}_0, p_0)$ éventuellement tubulaire, telle que $(\hat{\Sigma}_n, p_n)$ tende vers $(\hat{\Sigma}_0, p_0)$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Maintenant, posons :

$$\mathfrak{T} = \limsup_{z \rightarrow 0} \delta(i(z))$$

Soit $\eta \in]0, \infty[$. Il existe $\epsilon \in]0, \infty[$ tel que, pour $0 < |z| < \epsilon$:

$$\delta(i(z)) \leq \mathfrak{T} + \eta$$

Ensuite, pour g une métrique sur \mathbb{D}^* et pour $p \in \mathbb{D}^*$ et $R \in]0, \infty[$ posons :

$$B_R(p, g) = \{q \in \mathbb{D}^* \mid d_g(p, q) < R\}$$

où d_g est la métrique (c'est-à-dire la fonction distance) engendrée sur \mathbb{D}^* par g . Pour tout n , puisque A_n est une isométrie, on a :

$$\begin{aligned} \hat{i}_n^* g^\nu &= \hat{i}^* g^\nu \\ \Rightarrow B_R(p_n, \hat{i}_n^* g^\nu) &= B_R(p_n, \hat{i}^* g^\nu) \end{aligned}$$

Ensuite, pour R fixé, puisque $(\mathbb{D}^*, \hat{i}^* g^\nu)$ est complète, si l'on pose :

$$D_\epsilon^* = \{z \in \mathbb{D}^* \mid |z| < \epsilon\}$$

alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$:

$$B_R(p_n, \hat{i}^* g^\nu) \subseteq D_\epsilon^*$$

Donc, pour $n \geq N$:

$$\begin{aligned} B_R(p_n, \hat{i}_n^* g^\nu) &\subseteq D_\epsilon^* \\ \Rightarrow \text{Sup} \{\delta(i_n(q)) \mid q \in B_R(p_n, \hat{i}_n^* g^\nu)\} &\leq \mathfrak{T} + \eta \end{aligned}$$

Donc, en prenant la limite, on obtient :

$$\text{Sup} \{\delta(i_0(q)) \mid q \in B_R(p_0, \hat{i}_0^* g^\nu)\} \leq \mathfrak{T} + \eta$$

Puisque $\eta, R \in]0, \infty[$ sont arbitraires, on obtient :

$$\text{Sup} \{\delta(i_0(q)) \mid q \in S_0\} \leq \mathfrak{T}$$

En même temps, par définition, on sait que :

$$\delta(i_n(p_n)) \rightarrow B \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

et donc :

$$\delta(i_0(p_0)) = \mathfrak{T}$$

Supposons que $\hat{\Sigma}_0$ n'est pas un tube. Alors, c'est le relevé de Gauss d'une k -surface $\Sigma_0 = (S, i_0)$. La surface Σ_0 est tangente intérieurement en p_0 à la surface $\delta^{-1}(B)$. Or, la courbure gaussienne de celle-ci est supérieure à 1 (voir [34]) et donc, par le principe

géométrique du maximum (voir [34]) on obtient une contradiction. Il en découle que $\hat{\Sigma}_0$ est un tube autour d'une géodésique Δ . Mais, pour tout $p \in \Delta$:

$$\delta(p) \leq \Upsilon$$

et donc Δ reste à distance bornée de Γ . Il en découle qu'elles coïncident, et donc :

$$\delta(p) = 0 \quad \forall p \in \Delta$$

et, en particulier :

$$\Upsilon = \delta(i_0(p_0)) = 0$$

et le résultat en découle. \square

En particulier, on obtient :

Corollaire 3.3.10

$$\text{Lim}_{r \rightarrow 0} \frac{i_1(r)}{i_2(r)} = \text{Lim}_{r \rightarrow 0} \frac{r}{f(r)} = 0$$

On démontre maintenant le lemme 3.3.2 :

Démonstration du lemme 3.3.2 : Par le théorème 3.1.1, l'immersion i est propre, et donc la métrique $g = i^*h$ est complète. Ensuite, pour $r \in]0, 1[$ posons :

$$c_r :]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{D}^* ; \theta \mapsto r e^{i\theta}$$

Alors :

$$\begin{aligned} (i \circ c_r)(\theta) &= (i_1(r)e^{i\theta}, i_2(r)) \\ \Rightarrow \text{Long}_h(i \circ c_r) &= 2\pi \frac{i_1(r)}{i_2(r)} \\ \Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} \text{Long}_h(i \circ c_r) &= 0 \end{aligned}$$

Mais, pour tout r :

$$\text{Long}_h(i \circ c_r) = \text{Long}_g(c_r)$$

et le résultat en découle. \square

3.3.4 La convergence de Hausdorff.

Avant d'entamer la démonstration du lemme 3.3.3, on rappelle le lemme suivant concernant la convergence au sens de Hausdorff :

Lemme 3.3.11

Soit (X, d) un espace métrique compact. Soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}, Y_0 \subseteq X$ des sous-ensembles tels que Y_n tende vers Y_0 au sens de Hausdorff lorsque n tend vers l'infini. Ensuite, soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}, \alpha_0$ des homéomorphismes de X tels que α_n tend vers α_0 dans la topologie compact-ouverte (c'est-à-dire la topologie de convergence uniforme) lorsque n tend vers l'infini. Alors $\alpha_n(Y_n)$ tend vers $\alpha_0(Y_0)$ au sens de Hausdorff lorsque n tend vers l'infini.

Une preuve de ce lemme se trouve dans l'annexe A. On est maintenant en mesure de démontrer le lemme 3.3.3 :

Démonstration du lemme 3.3.3 : Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{H}^3$ telle que $p_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Ensuite, pour tout n notons :

$$p_n = (w_n, \lambda_n)$$

Définissons ensuite $M_n : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3$ par :

$$M_n(z, \lambda) = \frac{1}{\lambda_n}(z, \lambda)$$

Pour $R \in]0, \infty[$ définissons $B_R \subseteq \mathbb{H}^3 \cup \partial_\infty \mathbb{H}^3$ par :

$$B_R = \left\{ (z, \lambda) \in \mathbb{C} \times [0, \infty[\mid |z|^2 + \lambda^2 \geq R^2 \right\} \cup \{\infty\}$$

Ensuite, pour $r \in]0, \infty[$ définissons $C_r \subseteq \mathbb{H}^3 \cup \partial_\infty \mathbb{H}^3$ par :

$$C_r = \left\{ (z, \lambda) \in \mathbb{C} \times [0, \infty[\mid |z|^2 \leq r^2 \lambda^2 \right\} \cup \{\infty\}$$

Ensuite, on définit le champignon $\text{Ch}_{R,r} \subseteq \mathbb{H}^3 \cup \partial_\infty \mathbb{H}^3$ par :

$$\text{Ch}_{R,r} = B_r \cup C_r$$

Les champignons $\text{Ch}_{R,r}$ convergent vers $\bar{\Gamma}_{0,\infty}$ au sens de Hausdorff lorsque $R \rightarrow \infty$ et $r \rightarrow 0$.

Maintenant, supposons qu'il existe $B \in]0, \infty[$ tel que, pour tout n :

$$\left| \frac{w_n}{\lambda_n} \right| < B$$

Alors, il existe un compact $L \subseteq \mathbb{H}^3$ tel que, pour tout n :

$$M_n p_n \in L$$

Par le corollaire 3.3.10, en prenant au besoin une sous-suite, on peut supposer qu'il existe $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}, (r_n)_{n \in \mathbb{N}} \in]0, \infty[$ telles que $R_n/\lambda_n \rightarrow \infty$ et $r_n \rightarrow 0$ lorsque n tend vers l'infini et que, pour tout n :

$$\bar{T} \subseteq \text{Ch}_{R_n, r_n}$$

et donc :

$$M_n \bar{T} \subseteq \text{Ch}_{R_n/\lambda_n, r_n}$$

Il en découle que $M_n \bar{T}$ converge vers $\bar{\Gamma}_{0,\infty}$ au sens de Hausdorff lorsque n tend vers l'infini. Ensuite, pour tout n , posons $B_n = A_n M_n^{-1}$. Pour tout n :

$$B_n(M_n p_n) \in K$$

Mais, comme L et K sont compacts, la famille d'isométries de \mathbb{H}^3 qui envoient un point de L dans un point de K est compacte. Donc, en prenant au besoin encore une sous-suite, on peut supposer qu'il existe B_0 tel que B_n tende vers B_0 lorsque n tend vers l'infini. Il en découle par le lemme 3.3.11 que $A_n\overline{T} = B_nM_n\overline{T}$ et $A_n\overline{\Gamma}_{0,\infty} = B_n\overline{\Gamma}_{0,\infty}$ tendent vers $A_0\overline{\Gamma}_{0,\infty}$ au sens de Hausdorff lorsque n tend vers l'infini.

Maintenant, on suppose qu'il n'existe pas de tel B . Donc, en prenant au besoin une sous-suite, on peut supposer que $\rho_n = |w_n/\lambda_n| \rightarrow \infty$ lorsque n tend vers l'infini. Par le corollaire 3.3.10, en prenant au besoin une sous-suite, on peut supposer qu'il existe $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}, (r_n)_{n \in \mathbb{N}}, (K_n)_{n \in \mathbb{N}} \in]0, \infty[$ telles que $R_n/\lambda_n \rightarrow \infty, K_n \rightarrow \infty$ et $r_n \rightarrow \infty$ lorsque n tend vers l'infini, que $R_n/\lambda_n \geq K_n\rho_n$ pour tout n , et que, pour tout n :

$$\begin{aligned} \overline{T} &\subseteq \text{Ch}_{R_n, r_n} \\ \Rightarrow M_n\overline{T} &\subseteq \text{Ch}_{R_n/\lambda_n, r_n} \end{aligned}$$

Pour tout n , on définit maintenant N_n par :

$$N_n(z, \lambda) = \left(z - \frac{w_n}{\lambda_n}, \lambda\right)$$

Alors, pour n suffisamment grand :

$$N_n \text{Ch}_{R_n/\lambda_n, r_n} \subseteq B_{\rho_n/2}$$

Et donc, pour n suffisamment grand :

$$N_nM_n\overline{T}_n, N_nM_n\overline{\Gamma}_{0,\infty} \subseteq B_{\rho_n/2}$$

Puisque $B_{\rho_n/2}$ tend vers $\{\infty\}$ au sens de Hausdorff lorsque n tend vers l'infini, on voit que $N_nM_n\overline{T}_n$ et $N_nM_n\overline{\Gamma}_{0,\infty}$ convergent, eux aussi, vers $\{\infty\}$ au sens de Hausdorff lorsque n tend vers l'infini. Finalement, en posant $B_n = A_n(N_nM_n)^{-1}$, et en suivant le même raisonnement qu'avant, on voit que, en prenant au besoin une sous-suite, il existe $p_0 \in \partial_\infty\mathbb{H}^3$ tel que $A_n\overline{T}_n$ et $A_n\overline{\Gamma}_{0,\infty}$ tendent vers $\{p_0\}$ au sens de Hausdorff lorsque n tend vers l'infini, et le résultat en découle. \square

◇

3.4 Des revêtements ramifiés.

3.4.1 L'emplacement de $\hat{i}(p)$ près des points de ramification.

Dans cette section, on démontre le théorème 3.1.4. On se donne S une surface de Riemann et $\mathcal{P} \subseteq S$ un sous-ensemble discret. Maintenant, soit $\varphi : S \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ une application holomorphe localement conforme sur $S \setminus \mathcal{P}$. Ensuite, soit $i : S \setminus \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{H}^3$ telle que la surface immergée $\Sigma = (S \setminus \mathcal{P}, i)$ soit l'unique solution du problème de Plateau $(S \setminus \mathcal{P}, \varphi)$. Soit \hat{i} le relevé de Gauss de i et posons $\hat{\Sigma} = (S \setminus \mathcal{P}, \hat{i})$. Soit $p_0 \in \mathcal{P}$ un point de ramification de S . Enfin, notons $\Gamma_{0,\infty}$ la géodésique dans \mathbb{H}^3 reliant 0 à l'infini.

D'abord, on rappelle le résultat suivant, qui décrit les revêtements ramifiés près des points de ramification :

Lemme 3.4.1

Supposons que $\varphi(p_0) = 0$. Alors, il existe une carte (f, Ω, \mathbb{D}) de S autour de p_0 , $\lambda \in]0, \infty[$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\begin{array}{ccc} \Omega & & \\ \downarrow f & \searrow \varphi & \\ \mathbb{D} & \xrightarrow{z \mapsto \lambda z^k} & \hat{\mathbb{C}} \end{array}$$

Maintenant, en utilisant le théorème 3.1.1, on obtient le résultat suivant :

Lemme 3.4.2

Soit $p_0 \in \mathcal{P}$ et soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S \setminus \mathcal{P}$ une suite telle que p_n tende vers p_0 lorsque n tend vers l'infini. Alors $i(p_n)$ tend vers $\varphi(p_0)$ dans $\mathbb{H}^3 \cup \partial_\infty \mathbb{H}^3$ lorsque n tend vers l'infini.

Démonstration : Par le lemme 3.4.1, en composant au besoin avec une isométrie de \mathbb{H}^3 , on peut supposer qu'il existe $(f, U, 2\mathbb{D})$, une carte de S autour de p et $k \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\begin{array}{ccc} U & & \\ \downarrow f & \searrow \varphi & \\ \mathbb{D} & \xrightarrow{z \mapsto z^{-k}} & \hat{\mathbb{C}} \end{array}$$

On pose alors $K = f^{-1}(\{|z| = 1\})$ et $\Omega = f^{-1}(\{0 < |z| < 1\})$ et le résultat en découle par le théorème 3.1.1. \square

3.4.2 Les tubes autour des géodésiques.

D'abord, on va contrôler la géométrie de Σ près de p_0 . On suppose maintenant que $\varphi(p_0) = 0$. Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S \setminus \mathcal{P}$ telle que p_n tende vers p_0 lorsque n tend vers l'infini. Soit $(w_n, \lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{H}^3$ telle que, pour tout n :

$$i(p_n) = (w_n, \lambda_n)$$

Définissons $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in Isom(\mathbb{H}^3)$ telle que, pour tout n :

$$A_n(w, \lambda) = \frac{1}{\lambda_n}(w, \lambda)$$

Maintenant, pour tout n définissons i_n par :

$$i_n = A_n i$$

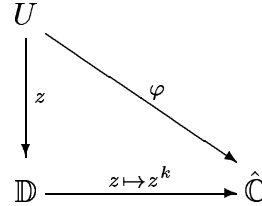
et soit \hat{i}_n le relevé de Gauss de i_n . Posons $\Sigma_n = (S \setminus \mathcal{P}, i_n)$ et $\hat{\Sigma}_n = (S \setminus \mathcal{P}, \hat{i}_n)$.

Dans cette section, on va montrer le résultat suivant :

Lemme 3.4.3

Après extraction d'une sous-suite, $i_n(p_n)$ tend vers $(0, 1)$ et $(\hat{\Sigma}_n, p_n)$ tend vers un tube autour de $\Gamma_{0, \infty}$ lorsque n tend vers l'infini.

Par le lemme 3.4.1, en appliquant au besoin une isométrie de \mathbb{H}^3 , on peut trouver un carte (z, U, \mathbb{D}) de S autour de p_0 et $k \in \mathbb{N}$ tels que :



Pour tout k définissons $\varphi : \mathbb{D}^* \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ par :

$$\varphi_k(z) = z^k$$

Ensuite, définissons $j_k : \mathbb{D}^* \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ telle que la surface immergée $\Sigma_k = (\mathbb{D}^*, j_k)$ soit l'unique solution du problème de Plateau $(\mathbb{D}^*, \varphi_k)$. Notons $\mathcal{T}_k = j_k(\mathbb{D}^*)$ l'image de j_k dans \mathbb{H}^3 . Si l'on note $T = \mathcal{T}_0$, on sait que $\mathcal{T}_k = T$ pour tout k . Enfin, soit \bar{T} l'adhérence de T dans $\mathbb{H}^3 \cup \partial_\infty \mathbb{H}^3$. Par le théorème 2.5.2, la surface immergée Σ_k est un graphe au-dessus de $U \setminus \{p_0\}$ dans le bout de Σ .

Maintenant, on rappelle le résultat technique suivant sur la convergence de Hausdorff :

Lemme 3.4.4

Soit (X, d) un espace métrique compact. Ensuite soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}, A_0 \subseteq X$ et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}, B_0 \subseteq X$ des compacts tel que A_n et B_n tendent respectivement vers A_0 et B_0 au sens de Hausdorff lorsque n tend vers l'infini. Supposons ensuite que, pour tout n :

$$A_n \cap B_n \neq \emptyset$$

Alors :

$$A_0 \cap B_0 \neq \emptyset$$

On démontre ce résultat dans l'annexe A. On montre maintenant le lemme 3.4.3 :

Démonstration du lemme 3.4.3 : Pour tout n , définissons $M_n \in Isom(\mathbb{H}^3)$ par :

$$M_n(w, \lambda) = \left(w - \frac{w_n}{\lambda_n}, \lambda \right)$$

En particulier, $M_n(i_n(p_n)) = (0, 1)$ pour tout n . Ensuite, posons $j_n = M_n \circ i_n$ et soit \hat{j}_n le relevé de Gauss de j_n . Notons $\Sigma'_n = (S \setminus \mathcal{P}, j_n)$ et $\hat{\Sigma}'_n = (S \setminus \mathcal{P}, \hat{j}_n)$. Par le théorème 2.5.3, en prenant au besoin une sous-suite, on peut supposer qu'il existe $\hat{\Sigma}'_0 = (S_0, \hat{j}_0)$, éventuellement tubulaire, et $\tilde{p}_0 \in S_0$ tels que $(\hat{\Sigma}'_n, p_n)$ tende vers $(\hat{\Sigma}'_0, \tilde{p}_0)$ au sens des surfaces immergées lorsque n tend vers l'infini.

Maintenant, pour tout n , notons :

$$\bar{T}_n = M_n A_n \bar{T}$$

Par le lemme 3.3.3, en prenant au besoin encore une sous-suite, on peut supposer qu'il existe $\bar{T}_0 \subseteq \mathbb{H}^3 \cup \partial_\infty \mathbb{H}^3$ qui est soit l'adhérence dans $\mathbb{H}^3 \cup \partial_\infty \mathbb{H}^3$ d'une géodésique dans \mathbb{H}^3 , soit un point dans $\partial_\infty \mathbb{H}^3$, tel que $\bar{T}_n \rightarrow \bar{T}_0$ au sens de Hausdorff lorsque n tend vers l'infini. En même temps, on sait que $M_n \bar{\Gamma}_{0,\infty}$ tend vers \bar{T}_0 au sens de Hausdorff lorsque n tend vers l'infini.

Maintenant, soit $q_0 \in S_0$ et soit $R \in]0, \infty[$ tel que $q_0 \in B_R(\tilde{p}_0)$. Ensuite, soit $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que, pour tout n :

$$q_n \in B_R(p_n) \subseteq (S \setminus \mathcal{P}, \hat{j}_n^* g^\nu)$$

et que q_n tende vers q_0 lorsque n tend vers l'infini. Comme la surface $(S \setminus \mathcal{P}, \hat{j}_n^* g^\nu)$ est complète, pour n suffisamment grand :

$$B_R(p_n) \subseteq U \setminus \{p_0\}$$

Et donc, en particulier, $q_n \in U \setminus \{p_0\}$ pour n suffisamment grand. Ensuite, notons $\text{Exp} : T\mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3$ l'application exponentielle, et pour tout n définissons X_n par :

$$X_n = \text{Exp}(\hat{j}_n(q_n)[0, \infty]) \subseteq \mathbb{H}^3 \cup \partial_\infty \mathbb{H}^3$$

Alors, la suite d'ensembles $(\bar{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge au sens de Hausdorff vers $\text{Exp}(\hat{j}_0(q_0)[0, \infty])$ lorsque n tend vers l'infini. Or, puisque Σ_k est un graphe au-dessus de $U \setminus \{p_0\}$, pour tout n , on a :

$$\bar{X}_n \cap \bar{T}_n \neq \emptyset$$

et le lemme 3.4.4 précédent nous permet de dire que :

$$\text{Exp}(\hat{j}_0(q_0)[0, \infty]) \cap \bar{T}_0 \neq \emptyset$$

Maintenant, supposons que $\hat{\Sigma}'_0$ n'est pas un tube. Alors, il existe une immersion $j_0 : S_0 \rightarrow \mathbb{H}^3$ telle que \hat{j}_0 soit le relevé de Gauss de j_0 . La surface immergée $\Sigma'_0 = (S_0, j_0)$ est partout localement strictement convexe. Soit V un ouvert dans S_0 tel que la surface (V, j_0) soit une sous-variété plongée dans \mathbb{H}^3 qui borde un convexe. Ensuite, définissons $\mathcal{E} : V \times [0, \infty[\rightarrow \mathbb{H}^3$ et $\mathcal{E}_\infty : V \rightarrow \partial_\infty \mathbb{H}^3$ par :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(p, t) &= \text{Exp}(t \hat{j}_0(p)) \\ \mathcal{E}_\infty(p) &= \text{Exp}(+\infty \hat{j}_0(p)) \end{aligned}$$

Notons $W = \mathcal{E}(U \times [0, \infty[)$. On sait que \mathcal{E} est un difféomorphisme de $V \times [0, \infty[$ sur W . Ensuite, on note $\pi_1 : V \times [0, \infty[\rightarrow V$ la projection sur la première coordonnée, et l'on définit $\pi : W \rightarrow V$ par :

$$\pi = \pi_1 \circ \mathcal{E}^{-1}$$

En particulier, l'application π est lisse. Ensuite, on sait que, si l'on note $W_\infty = \mathcal{E}_\infty(E)$, alors \mathcal{E}_∞ est un homéomorphisme de V sur W_∞ .

Maintenant, supposons que \overline{T}_0 est un point t_0 de $\partial_\infty \mathbb{H}^3$. Alors, pour tout $q \in V$, l'intersection $\text{Exp}(\hat{j}_0(q)[0, \infty]) \cap \overline{T}_0$ est non-vide, et donc :

$$\mathcal{E}_\infty(q) = \{t_0\}$$

ce qui est absurde, car \mathcal{E}_∞ est un homéomorphisme. Il en découle que \overline{T}_0 doit être l'adhérence dans $\mathbb{H}^3 \cup \partial_\infty \mathbb{H}^3$ d'une géodésique dans \mathbb{H}^3 . Soit $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^3$ une paramétrisation de cette géodésique. Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des intervalles disjoints dans \mathbb{R} tels que :

$$\gamma(\mathbb{R}) \cap W = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \gamma(I_n)$$

Pour chaque n , l'application $\pi \circ \gamma$ est lisse sur I_n , et il en découle que :

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\pi \circ \gamma)(I_n)\right) = 0$$

où μ est la mesure sur V engendrée par la métrique $\hat{j}_0^* g''$. En même temps, si l'on note $\gamma(\pm\infty)$ le bord à l'infini de l'image de γ , alors, puisque \mathcal{E}_∞ est un homéomorphisme, l'ensemble $\mathcal{E}_\infty^{-1}(\gamma(\pm\infty))$ est un ensemble de points isolés et est donc, lui aussi, de mesure zéro. Il en découle que, pour presque tout $q \in V$:

$$\text{Exp}(\hat{j}_0(q)[0, \infty]) \cap T_0 = \emptyset$$

Ce qui est absurde. Il en découle que $\hat{\Sigma}'_0$ ne peut pas être le relevé de Gauss d'une k-surface, et donc c'est un tube autour d'une géodésique dans \mathbb{H}^3 . Notons Γ cette géodésique. Un raisonnement analogue nous permet de conclure que $T_0 = \overline{\Gamma}$.

Maintenant, pour tout n , on sait que $M_n \Gamma_{0, \infty}$ est l'unique géodésique reliant $-w_n/\lambda_n$ à l'infini. Donc, comme $M_n \overline{\Gamma}_{0, \infty}$ tend vers $\overline{T}_0 = \overline{\Gamma}$ au sens de Hausdorff lorsque n tend vers l'infini, et comme $\overline{\Gamma}$ passe par $(0, 1)$, on en déduit que $\overline{\Gamma}$ est l'unique géodésique verticale passant par $(0, 1)$ et donc :

$$\overline{\Gamma} = \overline{\Gamma}_{0, \infty}$$

Ensuite, on en déduit que $-w_n/\lambda_n$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, et le premier résultat en découle. Maintenant, les applications M_n tendent vers l'identité lorsque n tend vers l'infini, et il en découle que les immersions $\hat{i}_n = M_n^{-1} \circ \hat{j}_n$ convergent vers \hat{j}_0 lorsque n tend vers l'infini. C'est-à-dire que (Σ_n, p_n) tend vers (Σ'_0, p_0) , qui est un tube autour de $\Gamma_{0, \infty}$, au sens des sous-variétés immergées lorsque n tend vers l'infini et le deuxième résultat en découle. \square

3.4.3 Les tubes d'ordre fini autour des géodésiques.

Le résultat précédent nous informe que $i_n(p_n) = A_n(w_n, \lambda_n)$ converge vers $(0, 1)$ lorsque n tend vers l'infini, et donc, en particulier :

$$|\vec{n} \circ \hat{i}(p_n)| \rightarrow 1 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

Pour tout n , soit $\eta_n, \theta_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\vec{n} \circ \hat{i}(p_n) = (1 + \eta_n)e^{i\theta_n}$$

On définit maintenant la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'isométries de \mathbb{H}^3 telle que, pour tout n :

$$B_n(z, \lambda) = \frac{1}{1 + \eta_n}(e^{-i\theta}z, \lambda)$$

Et l'on voit que, pour tout n :

$$B_n \circ (A_n \circ \varphi)(p_n) = B_n \circ \vec{n} \circ \hat{i}(p_n) = 1$$

De plus, $B_n \circ A_n \circ i_n(p_n)$ tend vers $(0, 1)$ lorsque n tend vers l'infini et $B_n \circ A_n$ préserve $\Gamma_{0, \infty}$. Afin de simplifier le raisonnement par la suite, on remplace provisoirement tout A_n par $B_n \circ A_n$.

Maintenant, pour tout n , on note $\varphi_n = A_n \circ \varphi$. Ensuite, pour tout n , soit $r_n \in]0, 1[$ et $\theta_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$z(p_n) = r_n e^{i\theta_n}$$

Pour tout n , notons D_n la boule de rayon r_n^{-1} autour de 0 dans \mathbb{C} et définissons la carte (z_n, U, D_n) autour de p_0 dans S par :

$$z_n = \frac{e^{-i\theta_n} z}{r_n}$$

Pour tout n , comme z_n diffère de z par une rotation composée avec une dilatation et comme φ_n diffère de φ également par une rotation composée avec une dilatation, et comme $\varphi_n(p_n) = 1$, dans U on obtient :

$$\varphi_n = z_n^k$$

On est maintenant en mesure de démontrer le résultat suivant :

Lemme 3.4.5

Après extraction d'une sous-suite, $\hat{\Sigma}_n$ tend vers un tube d'ordre k autour de $\Gamma_{0, \infty}$ lorsque n tend vers l'infini.

Démonstration : Notons $N_{0,\infty}$ le fibré unitaire normal à $\Gamma_{0,\infty}$. Si l'on note \vec{n} l'application de Gauss-Minkowski, on sait que celle-ci engendre un difféomorphisme entre $N_{0,\infty}$ et \mathbb{C}^* . Soit $\pi_{0,\infty} : \mathbb{C}^* \rightarrow N_{0,\infty}$ l'inverse de cette application et définissons la métrique tubulaire $g_{0,\infty}$ sur \mathbb{C}^* par :

$$g_{0,\infty} = \pi_{0,\infty}^* g^\nu$$

En particulier, la métrique $g_{0,\infty}$ est invariante sous l'action des isométries de \mathbb{H}^3 qui préserve $\Gamma_{0,\infty}$. Ensuite, notons π_\perp la projection orthogonale sur $N_{0,\infty}$ définie dans un voisinage tubulaire autour de cette surface-ci dans $U\mathbb{H}^3$.

Puisque la suite $\hat{\Sigma}_n$ converge vers un tube autour de $\Gamma_{0,\infty}$, pour tout R et pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$d_{C^p,R}(\pi_\perp \circ \hat{i}_n, \hat{i}_n) \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

où $d_{C^p,R}$ dénote la distance entre deux applications dans la norme C^p dans une boule de rayon R autour de p_n dans $(S, \hat{i}_n^* g^\nu)$. En composant avec \vec{n} , on obtient :

$$d_{C^p,R}(\vec{n} \circ \pi_\perp \circ \hat{i}_n, \vec{n} \circ \hat{i}_n) \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

et donc, en composant avec $\pi_{0,\infty}$ on obtient :

$$d_{C^p,R}(\pi_\perp \circ \hat{i}_n, \pi_{0,\infty} \circ \varphi_n) \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

En composant le premier et le dernier résultat qu'on vient d'obtenir, et en appliquant l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$d_{C^p,R}(\hat{i}_n, \pi_{0,\infty} \circ \varphi_n) \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

En particulier, on obtient :

$$\|\hat{i}_n^* g^\nu - \varphi_n^* g_{0,\infty}\|_{C^p,R} \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

Définissons $\varphi_0 : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ par :

$$\varphi_0(z) = z^k$$

et notons $\hat{j} : \mathbb{C}^* \rightarrow U\mathbb{H}^3$ la solution du problème de Plateau $(\mathbb{C}^*, \varphi_0)$, c'est-à-dire l'immersion holomorphe de \mathbb{C}^* dans $U\mathbb{H}^3$ qui est un tube qui tourne k fois autour de $\Gamma_{0,\infty}$ et qui satisfait :

$$\vec{n} \circ \hat{j}(z) = z^k$$

On a :

$$\hat{j}(z) = \pi_{0,\infty}(z^k)$$

Pour tout n , notons $\omega_n = z_n^{-1}$. Soit $R_1 > 0$. Notons $B_{R_1}(1)$ la boule de rayon R_1 autour de 1 dans $(\mathbb{C}^*, \hat{j}^* g^\nu)$. Pour n suffisamment grand, $B_{R_1}(1)$ est contenu dans D_n et donc la restriction de ω_n à $B_{R_1}(1)$ est un difféomorphisme sur son image. Pour g une métrique sur S , pour $R \in]0, \infty[$ et pour p un point dans S , notons $B_R^S(p; g)$ la boule de rayon R dans S autour de p relativement à la métrique g . Pour tout n :

$$B_{R_1}^S(p_n; \varphi_n^* g_{0,\infty}) = z_n^{-1}(B_{R_1}(1))$$

Puisque $\hat{i}_n^* g^\nu$ converge vers $\varphi_n^* g_{0,\infty}$ lorsque n tend vers l'infini, il existe $R_2 \in]0, \infty[$ tel que, pour n suffisamment grand :

$$B_{R_1}^S(p_n; \varphi_n^* g_{0,\infty}) \subseteq B_{R_2}^S(p_n; \hat{i}_n^* g^\nu)$$

et donc :

$$\omega_n(B_{R_1}(1)) \subseteq B_{R_2}^S(p_n; \hat{i}_n^* g^\nu)$$

Donc, en prenant toujours compte du fait que $\hat{i}_n^* g^\nu$ converge vers $\varphi_n^* g_{0,\infty}$ lorsque n tend vers l'infini, on obtient :

$$d_{C^p, R}(\hat{i}_n \circ \omega_n, \pi_{0,\infty} \circ \varphi_n \circ \omega_n) \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

Or :

$$\hat{j} = \pi_{0,\infty} \circ \varphi_n \circ \omega_n$$

et il en découle que :

$$d_{C^p, R}(\hat{i}_n \circ \omega_n, \hat{j}) \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

On vient de montrer que $\hat{\Sigma}_n$ converge vers la sous-variété immergée $(\mathbb{C}^*, \hat{j}, 1)$ au sens des sous-variétés immergées lorsque n tend vers l'infini, et le résultat en découle. \square

On obtient comme corollaire le résultat suivant :

Théorème 3.1.4

Soit S une surface de Riemann et soit $\mathcal{P} \subseteq S$ un sous-ensemble discret tel que $S \setminus \mathcal{P}$ soit de type hyperbolique. Soit $\varphi : S \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ localement conforme dans $S \setminus \mathcal{P}$. Soit i l'unique solution du problème de Plateau $(S \setminus \mathcal{P}, \varphi)$. Soit $p_0 \in \mathcal{P}$ et supposons que φ a un point critique d'ordre k en p_0 . Alors $\Sigma = (S \setminus \mathcal{P}, i)$ est asymptotiquement tubulaire d'ordre k en p_0 .

Démonstration : Notons $N_{0,\infty}$ le fibré unitaire normal à $\Gamma_{0,\infty}$ et notons π_\perp la projection orthogonale sur $N_{0,\infty}$ définie dans un voisinage tubulaire de $N_{0,\infty}$ dans $U\mathbb{H}^3$. Notons $NN_{0,\infty}$ le fibré normal à $N_{0,\infty}$ dans TUM . Soit $\epsilon \in]0, \infty[$ tel que la restriction de Exp à $B_\epsilon(0) \subseteq NN_{0,\infty}$ soit un difféomorphisme sur son image. Posons :

$$\Omega = \text{Exp}(B_\epsilon(0))$$

L'ensemble Ω est invariant sous l'action des isométries de \mathbb{H}^3 qui préserve $\Gamma_{0,\infty}$. Maintenant, notons \mathcal{F} le feuilletage de $N_{0,\infty}$ en cercles provenant de sa structure de fibré en cercles.

Pour $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S \setminus \mathcal{P}$ telle que $p_n \rightarrow p_0$, on note d'abord, pour tout n :

$$i(p_n) = (w_n, \lambda_n)$$

Ensuite, on définit $A_n \in \text{Isom}(\mathbb{H}^3)$ par :

$$A_n(z, \lambda) = \frac{1}{\lambda_n}(z, \lambda)$$

Puis, on pose $i_n = A_n \circ i$ et l'on a noté \hat{i}_n le relevé de Gauss de i_n . Par le lemme 3.4.5, toute sous-suite de $\hat{\Sigma}_n = (S \setminus \mathcal{P}, \hat{i}_n, p_n)$ contient une sous-sous-suite qui converge vers un tube autour de $\Gamma_{0,\infty}$ lorsque n tend vers l'infini. En particulier, pour n assez grand :

$$\begin{aligned} \hat{i}_n(B_R(p_n)) &\subseteq \Omega \\ \Rightarrow \hat{i}(B_R(p_n)) &\subseteq \Omega \end{aligned}$$

De plus, pour n assez grand $(\pi_\perp \circ \hat{i}_n)^*\mathcal{F}$ définit un feuilletage en cercles d'un voisinage de p_n et donc $(\pi_\perp \circ \hat{i})^*\mathcal{F}$ définit, elle aussi, le même feuilletage en cercles d'un voisinage de p_n . De plus, si l'on note Ω_n ce voisinage, la restriction de $\pi_\perp \circ \hat{i}$ à Ω_n est un revêtement à k nappes sur son image.

Puisque $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arbitraire, il existe un voisinage connexe U de p_0 dans S tel que :

$$\hat{i}(U \setminus \{p_0\}) \subseteq \Omega$$

et, pour tout $p \in U \setminus \{p_0\}$ il existe un voisinage V de p dans $U \setminus \{p_0\}$ tel que $(\pi_\perp \circ \hat{i})^*\mathcal{F}$ définit un feuilletage en cercles de V . Par connexité, $(\pi_\perp \circ \hat{i})^*\mathcal{F}$ définit un feuilletage en cercles de $U \setminus \{p_0\}$.

Il existe alors $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^3$ une paramétrisation de $\Gamma_{0,\infty}$ telle que :

$$(\pi_\perp \circ \hat{i})(U) = \pi^{-1}(\gamma(]0, \infty[))$$

Notons $\pi : N_{0,\infty} \rightarrow \Gamma_{0,\infty}$ la projection canonique. De plus $(\pi_\perp \circ \hat{i})$ est un revêtement à k nappes sur son image.

Enfin, si l'on note $\mathcal{E} : B_\epsilon(0) \rightarrow \Omega$ la restriction de Exp à $B_\epsilon(0)$ et si l'on pose :

$$\sigma = \mathcal{E}^{-1} \circ \hat{i}$$

alors σ est une section de $(\pi_\perp \circ \hat{i})^*NN_{0,\infty}$ et (U, \hat{i}) est le graphe de σ au-dessus de U .

Le résultat précédent nous permet de déduire en plus les propriétés asymptotiques de σ et le résultat en découle. \square

◇

3.5 Les surfaces asymptotiquement tubulaires d'ordre fini.

3.5.1 Quelques résultats sur les anneaux.

Finalement, dans cette section, on va montrer le théorème 3.1.5. On se donne S une surface et \mathcal{P} un ensemble discret dans S . Soit maintenant $i : S \setminus \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{H}^3$ une immersion telle que la surface immergée $\Sigma = (S \setminus \mathcal{P}, i)$ soit une k -surface. Soit $p_0 \in \mathcal{P}$ et supposons que Σ est asymptotiquement tubulaire d'ordre fini en p_0 . Notons \hat{i} le relevé de Gauss de i et notons

$\vec{n} : U\mathbb{H}^3 \rightarrow \partial_\infty\mathbb{H}^3$ l'application de Gauss-Minkowski. Ensuite, notons $\varphi = \vec{n} \circ \hat{i}$. Comme φ est un homéomorphisme local, il engendre une structure complexe sur $S \setminus \mathcal{P}$. On va montrer qu'on peut prolonger cette structure uniquement en une structure complexe sur $(S \setminus \mathcal{P}) \cup \{p_0\}$. Avant d'entamer l'étude de ce problème, il nous faut quelques résultats techniques sur les modules des anneaux.

On appelle *anneau* une surface de Riemann A dont le groupe fondamental est isomorphe à \mathbb{Z} . Il est classique qu'un anneau est biholomorphe, soit à \mathbb{C}^* , soit à \mathbb{D}^* , soit à :

$$A_R = \{z | 1 < |z| < R\}$$

pour $R \in]1, \infty[$. Soit Γ la famille des courbes librement homotopes au générateur de $\pi_1(A)$. Pour g une métrique riemannienne conforme sur A , on note :

$$\mathcal{L}_g(\Gamma) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \text{Long}_g(\gamma)$$

où $\text{Long}_g(\gamma)$ est la longueur de la courbe γ par rapport à g . On définit $\text{Mod}(A)$, le *module* de A par :

$$\text{Mod}(A) = \sup_{\substack{\text{Aire}_g(A)=1 \\ g \text{ conforme}}} \mathcal{L}_g(\Gamma)$$

où $\text{Aire}_g(A)$ est l'aire de A relativement à g . Par construction $\text{Mod}(A)$ ne dépend que de la classe de biholomorphie de A . On a :

Lemme 3.5.1

Pour tout $R \in]0, \infty[$:

$$\begin{aligned} \text{Mod}(A_R) &= \sqrt{\frac{2\pi}{\text{Log}(R)}} \\ \text{Mod}(S^1 \times]0, R]) &= \sqrt{\frac{2\pi}{R}} \end{aligned}$$

Démonstration : Soit g une métrique conforme sur A_R d'aire 1. Soit $\lambda : A_R \rightarrow]0, \infty[$ telle que :

$$g = \lambda g_{\text{Euc}}$$

où g_{Euc} est la métrique Euclidienne sur A_R . En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{Aire}_g(A_R) &= \int_1^R \int_0^{2\pi} \lambda r dr d\theta \\ &\geq \int_1^R \frac{1}{2\pi r} \left(\int_0^{2\pi} r \lambda^{1/2} d\theta \right)^2 dr \\ &\geq \int_1^R \frac{1}{2\pi r} \mathcal{L}_g(\Gamma)^2 dr \\ &= \frac{\text{Log}(R)}{2\pi} \mathcal{L}_g(\Gamma)^2 \end{aligned}$$

Comme $\text{Aire}_g(A_R) = 1$, on voit alors que :

$$\mathcal{L}_g(\Gamma)^2 \leq \frac{2\pi}{\text{Log}(R)}$$

On voit qu'on obtient l'égalité si et seulement si $\lambda = Kr^{-2}$ pour un facteur de normalisation K qui ne dépend que de R , et le premier résultat en découle. Le deuxième résultat découle d'un raisonnement identique. \square

Ensuite, le lemme suivant nous permet de comparer les modules de deux anneaux dont l'un est contenu dans l'autre :

Lemme 3.5.2

Soit A_1 et A_2 deux anneaux. Soit $i : A_1 \rightarrow A_2$ un plongement tel que :

$$i_*\pi_1(A_1) = \pi_1(A_2)$$

Alors :

$$\text{Mod}(A_2) \leq \text{Mod}(A_1)$$

Démonstration : Par la démonstration du lemme précédent, on voit qu'il existe une métrique conforme g sur A_2 telle que :

$$\begin{aligned} \text{Aire}_g(A_2) &= 1 \\ \mathcal{L}_g(\Gamma_2) &= \text{Mod}(A_2) \end{aligned}$$

où Γ_2 est un générateur de $\pi_1(A_2)$. Soit Γ_1 le générateur de $\pi_1(A_1)$ qui est envoyé sur Γ_2 par i_* . L'ensemble $i_*\Gamma_1$ est strictement contenu dans Γ_2 , d'où :

$$\mathcal{L}_g(i_*\Gamma_1) \geq \mathcal{L}_g(\Gamma_2)$$

Ensuite, notons :

$$h = \frac{1}{\text{Aire}_{i^*g}(A_1)} i^*g$$

Comme $\text{Aire}_g(A_1) \leq \text{Aire}_g(A_2) = 1$, on voit que $h \geq i^*g$ et donc :

$$\mathcal{L}_h(\Gamma_1) \geq \mathcal{L}_{i^*g}(\Gamma_1) \geq \mathcal{L}_g(\Gamma_2) = \text{Mod}(A_2)$$

Comme $\text{Aire}_h(A_1) = 1$, le résultat en découle. \square

En particulier, on obtient :

Corollaire 3.5.3

$\text{Mod}(A) = 0$ si et seulement si A est biholomorphe soit à \mathbb{D}^* , soit à \mathbb{C}^* .

Démonstration : Soit $R \in]0, \infty[$. Puisque :

$$\left\{ \frac{1}{R} < |z| < 1 \right\} \subseteq \mathbb{D}^* \subseteq \mathbb{C}^*$$

le résultat précédent nous permet de voir que :

$$\text{Mod}(\mathbb{C}^*) \leq \text{Mod}(\mathbb{D}^*) \leq \sqrt{\frac{2\pi}{\text{Log}(R)}}$$

En laissant R tendre vers l'infini, on voit alors que :

$$\text{Mod}(\mathbb{C}^*) = \text{Mod}(\mathbb{D}^*) = 0$$

La réciproque découle ensuite de la classification des anneaux. \square

3.5.2 Les surfaces tubulaires d'ordre fini aux point critiques.

Maintenant, on définit les surfaces tubulaires d'ordre fini :

Définition 3.5.4

Soit S une surface et soit $\mathcal{P} \subseteq S$ un sous-ensemble discret. Soit $i : S \setminus \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{H}^3$ telle que la surface immergée $\Sigma = (S \setminus \mathcal{P}, i)$ soit une k -surface. Pour $p_0 \in \mathcal{P}$, on dit que Σ est **tubulaire d'ordre k en p_0** si et seulement si, pour tout $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S \setminus \mathcal{P}$ telle que $p_n \rightarrow p_0$, il existe $(k_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}$ telle que $k_n \uparrow \infty$ et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'isométries de \mathbb{H}^3 et (T_k, p_0) un tube d'ordre k pointé tels que :

$$(\hat{\Sigma}_n, p_n) \rightarrow (T_k, p_0)$$

lorsque n tend vers l'infini, où $\Sigma_n = (S, \hat{i}_n)$ et \hat{i}_n est le relevé de Gauss de $i_n = A_n \circ i$.

On voit qu'une surface asymptotiquement tubulaire d'ordre fini en p_0 est un cas particulier d'une surface tubulaire d'ordre fini en p_0 . On obtient ensuite le résultat suivant sur ces surfaces :

Lemme 3.5.5

Soit S une surface et soit $\mathcal{P} \subseteq S$ un sous-ensemble discret. Soit $i : S \setminus \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{H}^3$ une immersion telle que $\Sigma = (S \setminus \mathcal{P}, i)$ soit une k -surface non-dégénérée. Soit $\vec{n} : U \rightarrow \partial_\infty \mathbb{H}^3$ l'application de Gauss-Minkowski et soit \hat{i} le relevé de Gauss de i . Notons $\varphi = \vec{n} \circ \hat{i}$.

Soit $p_0 \in \mathcal{P}$ et supposons que Σ est tubulaire d'ordre k en p_0 . Alors, pour tout voisinage U homéomorphe à un disque suffisamment proche de p_0 dans S , l'ensemble $U \setminus \{p_0\}$ muni de la structure conforme engendrée par φ est biholomorphe à \mathbb{D}^* .

Démonstration : Soit U un voisinage de p_0 dans S homéomorphe à un disque. Ensuite, soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in U \setminus \{p_0\}$ une suite qui tend vers p_0 lorsque n tend vers l'infini. Puisque Σ est tubulaire d'ordre k en p_0 , on peut supposer qu'il existe une suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}} \in]0, \infty[$ telle que $R_n \uparrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$ et pour chaque n un tube d'ordre k et de longueur $2R_n$ et un voisinage A_n de p_n dans Σ_n tel que A_n soit un graphe au-dessus de ce tube et que p_n soit l'image de l'origine dans ce graphe. Notons ce tube $T_n =]-R_n, R_n[\times S^1, i_n$. Ensuite, notons NT_n le fibré normal en T_n et soit $\lambda_n \in \Gamma(T_n, NT_n)$ telle que A_n soit le graphe de λ_n au-dessus de T_n et que p_n soit l'image de $(0, 1)$ dans ce graphe.

Maintenant, comme $(S, \hat{i}^* g^\nu)$ est complète, on peut supposer que :

$$d(p_n, \partial U) \rightarrow \infty \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

On peut supposer alors que, pour tout n :

$$A_n \subseteq U \setminus \{p_0\}$$

De plus, on peut supposer qu'il existe $(\Lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \in]0, \infty[$ tel que $\Lambda_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ et que, pour tout n :

$$\|\lambda_n\|_\infty \leq \Lambda_n$$

Finalement, on voit que pour tout n , la frontière ∂A_n de A_n comprend deux lacets simples dont l'un est contenu dans l'intérieur de l'autre. Pour γ un lacet simple quelconque dans U , on note $\text{Int}(\gamma)$ l'intérieur de γ dans U et l'on note $\text{Ext}(\gamma)$ son extérieur. Maintenant, on va noter ∂A_n^+ et ∂A_n^- les deux composantes connexes de ∂A_n de telle sorte que :

$$\partial A_n^- \subseteq \text{Int}(\partial A_n^+)$$

On va montrer que, pour n suffisamment grand, le point p_0 est contenu dans $\text{Int}(\partial A_n^-)$, ce qui fait que l'ensemble A_n est un sous-anneau non-trivial de $U \setminus \{p_0\}$ au sens où $i_* \pi_1(A_n) = \pi_1(U \setminus \{p_0\})$, où $i : A_n \rightarrow U \setminus \{p_0\}$ est le plongement canonique. On va supposer le contraire, et raisonner par l'absurde. Comme $p_0 \notin A_n$, il ne se trouve pas dans $\text{Int}(\partial A_n^+)$ non plus. Il en découle que, pour tout n , l'ensemble $\text{Int}(\partial A_n^+)$ est relativement compact dans $U \setminus \{p_0\}$.

Soit h la métrique canonique sur \mathbb{H}^3 et notons d la fonction distance sur \mathbb{H}^3 qui s'en déduit. Ensuite, notons $\hat{h} = i^*h$ la métrique engendrée sur $S \setminus \mathcal{P}$ par i et par h et notons \hat{d} la fonction de distance sur $S \setminus \mathcal{P}$ qu'elle engendre. Par compacité, pour tout n , il existe $q_n \in \text{Int}(\partial A_n^+)$ maximisant la distance \hat{d} à ∂A_n^+ .

Soit $\gamma :]-R_n, R_n[\rightarrow \mathbb{H}^3$ l'arc géodésique autour duquel tourne T_n . On peut orienter γ de telle sorte que :

$$\begin{aligned} d(\gamma(-R_n), i(p)) &< \Lambda_n & \forall p \in \partial A_n^- \\ d(\gamma(R_n), i(p)) &< \Lambda_n & \forall p \in \partial A_n^+ \end{aligned}$$

et donc :

$$d(i(\partial A_n^-), i(\partial A_n^+)) > 2R_n - 2\Lambda_n$$

Comme $i : (S, \hat{h}) \rightarrow \mathbb{H}^3$ est contractant, on a :

$$\hat{d}(\partial A_n^-, \partial A_n^+) > 2R_n - 2\Lambda_n$$

Pour n suffisamment grand $2\Lambda_n < R_n$ et donc :

$$\hat{d}(\partial A_n^-, \partial A_n^+) > R_n$$

Pour tout n , notons $B_{R_n}(q_n)$ la boule de rayon R_n autour de q_n dans (S, \hat{h}) . On voit alors que, pour tout n :

$$B_{R_n}(q_n) \subseteq \text{Int}(\partial A_n^+)$$

En remplaçant R_n éventuellement par $R_n/2$, on peut supposer que $\hat{d}(\partial A_n^+, \partial U)$ tend vers l'infini lorsque n tend vers l'infini. Donc, comme q_n se trouve à l'intérieur de A_n^+ , on voit également que $\hat{d}(q_n, \partial U)$ tend vers l'infini lorsque n tend vers l'infini et donc q_n tend vers p_0 lorsque n tend vers l'infini (parce que tout autre point de U se trouve à une distance finie de ∂U).

Ensuite, soit $K \in]0, R_n[$ et soit $\gamma :]0, 1[\rightarrow S$ un lacet simple de longueur $K < R_n$ ayant q_n comme point de base. On voit que γ est contenu dans $B_{R_n}(q_n)$ qui est contenu à son tour dans $\text{Int}(\partial A_n^+)$. On en déduit que :

$$\text{Int}(\gamma) \subseteq \text{Int}(\partial A_n^+)$$

Ensuite, pour $q \in \text{Int}(\gamma)$ un point quelconque, il existe un point $q' \in \gamma$ tel que :

$$\begin{aligned}
\hat{d}(q, \partial A_n^+) &= \hat{d}(q, q') + \hat{d}(q', \partial A_n^+) \\
\Rightarrow \hat{d}(q, q') &= \hat{d}(q, \partial A_n^+) - \hat{d}(q', \partial A_n^-) \\
\Rightarrow \hat{d}(q, q') &\leq \hat{d}(q, \partial A_n^+) - \\
&\quad \left| \hat{d}(q_n, \partial A_n^+) - \hat{d}(q', q_n) \right| \\
&\leq \hat{d}(q_n, \partial A_n^+) - \hat{d}(q_n, \partial A_n^+) + K \\
&= K
\end{aligned}$$

Il en découle que :

$$\text{Int}(\gamma_n) \subseteq B_K(q_n)$$

et donc, en particulier, γ est contractible dans $B_K(q_n)$. Il s'ensuit que, pour tout K , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq N$, tout lacet simple γ partant de q_n et de longueur K est contractible dans une boule de rayon K autour de q_n . C'est-à-dire que $B_K(q_n)$ est uniformément simplement connexe pour n suffisamment grand.

Or, puisque $(S \setminus \mathcal{P}, \hat{i})$ est tubulaire d'ordre k en p_0 , on sait qu'il existe $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\rho_n)_{n \in \mathbb{N}} \in]0, \infty[$ et $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}} : I \rightarrow S \setminus \mathcal{P}$ telles que $l_n \downarrow 0$ et $\rho_n \uparrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$, et que tout γ_n soit un lacet simple de longueur l_n partant de q_n qui ne soit pas contractible dans une boule de rayon ρ_n autour de q_n . On obtient alors la contradiction recherchée et il en découle que, pour tout n suffisamment grand, $p_0 \in \text{Int}(\partial A_n^-)$.

Maintenant, en appliquant le lemme 3.5.2, on obtient, pour tout n suffisamment grand :

$$\text{Mod}(U \setminus \{p_0\}) \leq \text{Mod}(A_n)$$

Mais il existe $(K_n)_{n \in \mathbb{N}} \in]1, \infty[$ telle que $K_n \downarrow 1$ lorsque n tend vers l'infini et telle que l'application qui envoie T_n en A_n soit K_n -quasiconforme. En particulier, pour tout n :

$$\text{Mod}(A_n) \leq K_n \text{Mod}(T_n)$$

Donc, le lemme 3.5.1 nous informe que, pour tout n suffisamment grand :

$$\text{Mod}(U \setminus \{p_0\}) \leq K_n \sqrt{\frac{2\pi}{R_n}}$$

Puisque $R_n \uparrow \infty$ lorsque n tend vers l'infini, on obtient :

$$\text{Mod}(U \setminus \{p_0\}) = 0$$

Le corollaire 3.5.3 nous permet de conclure alors que $U \setminus \{p_0\}$ est biholomorphe soit à \mathbb{C}^* , soit à \mathbb{D}^* . Il en découle que, si V est un voisinage de $\{p_0\}$ homéomorphe au disque et strictement contenu dans U , alors $V \setminus \{p_0\}$ est biholomorphe à \mathbb{D}^* .

Enfin, on vient de montrer que $V \setminus \{p_0\}$, muni de la structure conforme engendrée par $\hat{i}^* g^\nu$, est biholomorphe à \mathbb{D}^* . Or, si l'on note $\vec{n} : U\mathbb{H}^3 \rightarrow \partial_\infty \mathbb{H}^3$ l'application de Gauss-Minkowski, on sait que $\varphi = \vec{n} \circ \hat{i}$ est k -quasiconforme. Il en découle que $V \setminus \{p_0\}$, muni de

la structure conforme héritée de φ , est k -quasiconforme à \mathbb{D}^* , et il est donc biholomorphe à \mathbb{D}^* . \square

On obtient comme corollaire le résultat suivant :

Lemme 3.5.6

Soit S une surface, et soit $\mathcal{P} \subseteq S$ un ensemble discret. Soit $i : S \setminus \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{H}^3$ une immersion telle que $\Sigma = (S \setminus \mathcal{P}, i)$ soit une k -surface. Soit \hat{i} le relevé de Gauss de i .

Maintenant soit $p_0 \in \mathcal{P}$ et supposons que Σ est tubulaire d'ordre k en p_0 , alors la surface $S' = (S \setminus \mathcal{P}) \cup \{p_0\}$ possède une unique structure de surface de Riemann qui prolonge celle de $S \setminus \mathcal{P}$ engendrée par $\hat{i}^ g^k$.*

Démonstration : Soit U un voisinage de p_0 dans S tel que $U \setminus \{p_0\}$ soit biholomorphe à \mathbb{D}^* et soit $\alpha : U \setminus \{p_0\} \rightarrow \mathbb{D}^*$ une biholomorphie. Soit maintenant Ω un voisinage de zéro dans \mathbb{D} et soit γ un lacet simple dans Ω tel que :

$$0 \in \text{Int}(\gamma)$$

Notons $\tilde{\gamma} = \alpha^{-1} \circ \gamma$. La courbe $\tilde{\gamma}$ est un lacet simple dans $U \setminus \{p_0\}$. Il en découle que le complémentaire de $\tilde{\gamma}$ dans U comprend deux composantes connexes U_1 et U_2 . Supposons que $p_0 \in U_1$. Comme α est un homéomorphisme, on voit qu'il envoie $U_1 \setminus \{p_0\}$ soit sur $\text{Int}(\gamma) \setminus \{0\}$, soit sur $\text{Ext}(\gamma) \cap \mathbb{D}$. Pourtant, le lemme précédent nous informe que $\text{Mod}(U_1 \setminus \{p_0\}) = 0$ et cet ensemble n'est donc pas biholomorphe à $\text{Ext}(\gamma) \cap \mathbb{D}$. On voit alors que :

$$\alpha(U_1 \setminus \{p_0\}) = \text{Int}(\gamma) \setminus \{0\}$$

Il en découle que $\alpha(p)$ tend vers zéro lorsque p tend vers p_0 et on peut alors prolonger α en une application continue de U dans \mathbb{D} en posant :

$$\alpha(p_0) = 0$$

Comme α est bijective, par le principe d'invariance du domaine, on voit que c'est un homéomorphisme. On obtient ainsi une carte holomorphe (α, U, \mathbb{D}) de $(S \setminus \mathcal{P}) \cup \{p_0\}$ qui prolonge la structure conforme de $S \setminus \mathcal{P}$ et l'existence en découle. L'unicité découle ensuite du principe d'élimination de singularités de Cauchy. \square

Enfin, on a le résultat suivant sur φ :

Lemme 3.5.7

Soit S une surface, et soit $\mathcal{P} \subseteq S$ un ensemble discret. Soit $i : S \setminus \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{H}^3$ une immersion telle que $\Sigma = (S \setminus \mathcal{P}, i)$ soit une k -surface non-dégénérée. Soit \hat{i} le relevé de Gauss de i .

Maintenant soit $p_0 \in \mathcal{P}$ et supposons que Σ est asymptotiquement tubulaire d'ordre fini en p_0 , alors il existe $q_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ tel que $\varphi(p) \rightarrow q_0$ lorsque p tend vers p_0 .

Démonstration : Soit $\Gamma_{0,\infty}$ l'unique géodésique reliant 0 à l'infini et supposons que Σ est asymptotiquement tubulaire autour de $\Gamma_{0,\infty}$ en p_0 . Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S \setminus \mathcal{P}$ telle que $p_n \rightarrow p_0$ lorsque n tend vers l'infini. Ensuite, pour tout n , notons :

$$i(p_n) = (w_n, \lambda_n)$$

Pour tout n , on définit $A_n \in \text{Isom}(\mathbb{H}^3)$ par :

$$A_n(w, \lambda) = \frac{1}{\lambda_n}(w, \lambda)$$

Maintenant, pour tout n , notons $i_n = A_n \circ i$ et soit \hat{i}_n le relevé de Gauss de i_n . Puisque Σ est asymptotiquement tubulaire autour de $\Gamma_{0,\infty}$ en p_0 , la suite $(\hat{\Sigma}_n, p_n) = (S \setminus \mathcal{P}, \hat{i}_n, p_n)$ converge vers un tube autour de $\Gamma_{0,\infty}$ lorsque n tend vers l'infini. En particulier, $i_n(p_n) \rightarrow (0, 1)$ et donc $|\vec{n} \circ \hat{i}_n(p_n)| \rightarrow 1$ lorsque n tend vers l'infini. Mais, pour tout n :

$$\varphi(p_n) = \vec{n} \circ \hat{i}(p_n) = A_n^{-1} \circ \vec{n} \circ \hat{i}_n(p_n)$$

Et donc $\varphi(p_n)$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini, et le résultat en découle. \square

On obtient maintenant le résultat suivant :

Théorème 3.1.5

Soit S une surface et soit $\mathcal{P} \subseteq S$ un sous-ensemble discret. Soit $i : S \setminus \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{H}^3$ une immersion telle que $\Sigma = (S \setminus \mathcal{P}, i)$ soit une k -surface. Soit \hat{i} le relevé de Gauss de i . Notons $\varphi = \vec{n} \circ \hat{i}$ où $\vec{n} : U\mathbb{H}^3 \rightarrow \partial_\infty \mathbb{H}^3 \cong \hat{\mathbb{C}}$ est l'application de Gauss-Minkowski. Enfin, notons \mathcal{H} la structure holomorphe sur $S \setminus \mathcal{P}$ engendrée par φ .

Soit $p_0 \in \mathcal{P}$ et supposons que Σ est asymptotiquement tubulaire d'ordre λ en p_0 . Alors, il existe une unique structure holomorphe $\tilde{\mathcal{H}}$ sur $(S \setminus \mathcal{P}) \cup \{p_0\}$ et une unique application $\tilde{\varphi} : (S \setminus \mathcal{P}) \cup \{p_0\} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ telles que $\tilde{\mathcal{H}}$ et $\tilde{\varphi}$ prolongent respectivement \mathcal{H} et φ . De plus, $\tilde{\varphi}$ a un point critique d'ordre λ en p_0 .

Démonstration : Par le lemme 3.5.6, la surface $(S \setminus \mathcal{P}) \cup \{p_0\}$ possède une unique structure holomorphe qui prolonge celle de $S \setminus \mathcal{P}$. Ensuite, par le lemme 3.5.7 et le principe d'enlèvement de singularités de Cauchy, φ se prolonge uniquement en une fonction holomorphe sur $(S \setminus \mathcal{P}) \cup \{p_0\}$. Soit l l'ordre de la singularité de φ en p_0 . Par le théorème 3.1.4, on sait que $l = k$ et le résultat en découle. \square

Homomorphismes des groupes fondamentaux

4.1 Présentation.

SOIT M une variété compacte de dimension 3 à courbure strictement négative. Soit Σ une surface de Riemann compacte de type hyperbolique (c'est-à-dire, de genre supérieur ou égale à 2). Soit $Q_0 \in \Sigma$ et $P_0 \in M$ des points de base. Dans ce chapitre, on va étudier des homomorphismes $\theta : \pi_1(\Sigma, Q_0) \rightarrow \pi_1(M, P_0)$.

Soit \tilde{M} le revêtement universel de M . \tilde{M} est une variété d'Hadamard. Ensuite, soit $\tilde{P}_0 \in \tilde{M}$ un relevé du point P_0 . Le groupe $\pi_1(M, P_0)$ agit canoniquement sur $(\tilde{M} \cup \partial_\infty \tilde{M}, \tilde{P}_0)$. On dit alors qu'un sous-groupe $\Gamma \subseteq \pi_1(M, P_0)$ est *non-élémentaire* si et seulement s'il n'a pas de point fixe dans $\tilde{M} \cup \partial_\infty \tilde{M}$, et on dit qu'il est élémentaire dans le cas contraire. On remarque que, dans notre cas, puisque M est compacte et à courbure strictement inférieure à -1 , les seuls sous-groupes élémentaires de $\pi_1(M, P_0)$ sont ceux qui sont isomorphes, soit à \mathbb{Z} , soit à $\{0\}$. De plus, comme M ne contient pas de tore totalement géodésiquement immergé (étant à courbure sectionnelle strictement négative), ce sont précisément les sous-groupes commutatifs de $\pi_1(M, P_0)$ qui sont élémentaires. Donc, dire qu'un sous-groupe

$\Gamma \in \pi_1(M, P_0)$ est non-élémentaire équivaut à dire qu'il est différent, et de \mathbb{Z} , et de $\{0\}$, ou qu'il est non-commutatif. De même, pour Γ un groupe quelconque et pour $\theta : \Gamma \rightarrow \pi_1(M, P_0)$ un homomorphisme, on dit que θ est *non-élémentaire* si et seulement si son image l'est.

Le groupe $\pi_1(M, P_0)$ agit fidèlement sur \tilde{M} et sur $\partial_\infty \tilde{M}$. On peut le considérer donc comme un sous-groupe de $\text{Homeo}^+(\partial_\infty \tilde{M})$, le groupe d'homéomorphismes de $\partial_\infty \tilde{M}$ qui préservent l'orientation. Notons S^2 le sphère de rayon 1 dans \mathbb{R}^3 . Le théorème 4.5.1 de Friberg nous informe qu'il existe une rétraction de $\text{Homeo}^+(S^2)$ sur $\text{SO}(3, \mathbb{R})$ qui laisse $\text{SO}(3, \mathbb{R})$ fixe. Il en découle que le groupe fondamental de $\text{Homeo}^+(S^2)$ (et donc de $\text{Homeo}^+(\partial_\infty \tilde{M})$) est isomorphe à \mathbb{Z}_2 . Autrement dit, il existe une suite exacte courte :

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{i} \widetilde{\text{Homeo}}^+(\partial_\infty \tilde{M}) \xrightarrow{\pi} \text{Homeo}^+(\partial_\infty \tilde{M}) \rightarrow 0$$

Pour Γ un groupe quelconque, et pour $\varphi : \Gamma \rightarrow \text{Homeo}^+(\partial_\infty \tilde{M})$, on dit qu'un *relevé* de φ dans $\widetilde{\text{Homeo}}^+(\partial_\infty \tilde{M})$ est un homomorphisme $\hat{\varphi} : \Gamma \rightarrow \widetilde{\text{Homeo}}^+(\partial_\infty \tilde{M})$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} & & \widetilde{\text{Homeo}}^+(\partial_\infty \tilde{M}) \\ & \nearrow \hat{\varphi} & \downarrow \pi \\ \Gamma & \xrightarrow{\varphi} & \text{Homeo}^+(\partial_\infty \tilde{M}) \end{array}$$

On a la définition suivante :

Définition 4.1.1

Soit $\tilde{\Sigma}$ le revêtement universel de Σ . Un **problème de Plateau équivariant par θ** est la donnée d'une fonction $\varphi : \tilde{\Sigma} \rightarrow \partial_\infty \tilde{M}$ tel que, pour tout $\gamma \in \pi_1(\Sigma, Q_0)$, on ait :

$$\varphi \circ \gamma = \theta(\gamma) \circ \varphi$$

Si l'on suppose provisoirement que M soit à courbure sectionnelle constante -1 , on obtient $\tilde{M} = \mathbb{H}^3$. La frontière à l'infini $\partial_\infty \mathbb{H}^3$ porte canoniquement la structure de la sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$. De plus, puisque l'action du groupe d'isométries de \mathbb{H}^3 sur $\partial_\infty \mathbb{H}^3$ coïncident avec celle de $\mathbb{P}SL(2, \mathbb{C})$ sur $\hat{\mathbb{C}}$, on peut travailler avec $\mathbb{P}SL(2, \mathbb{C})$ au lieu de $\text{Homeo}^+(\partial_\infty \tilde{M})$. Le résultat [16] de Gallo, Kapovich et Marden se traduit dans notre cadre par le résultat suivant :

Théorème 4.1.2 [Gallo, Kapovich, Marden, 2000]

Supposons que M est à courbure sectionnelle constante -1 et que θ est non-élémentaire. Alors il existe un problème de Plateau φ équivariant par θ si et seulement si θ se relève en un homomorphisme $\hat{\theta}$ de $\pi_1(\Sigma, Q_0)$ dans $\mathbb{P}SL(2, \mathbb{C})$.

Puisque Σ est de type hyperbolique, son revêtement universel est le disque de Poincaré \mathbb{D} . Le théorème 2.1.1 nous donne l'existence des solutions dans du problème de Plateau à courbure Gaussienne constante dans ce cas-ci, et l'on obtient alors :

Corollaire 4.1.3

Si M est à courbure sectionnelle constante -1 et si θ est non-élémentaire, alors, pour tout $k \in]0, 1[$, il existe une immersion $i : \Sigma \rightarrow M$ telle que la surface immergée (Σ, i) soit à courbure Gaussienne constante k si et seulement si θ se relève en un homomorphisme $\hat{\theta}$ de $\pi_1(\Sigma, Q_0)$ dans $\mathbb{P}\tilde{S}L(2, \mathbb{C})$.

Dans ce chapitre, on obtient le résultat suivant, analogue au résultat de Gallo, Kapovich et Marden :

Théorème 4.1.4

Supposons que M est à courbure sectionnelle inférieur ou égale à -1 . Supposons que θ est non-élémentaire et qu'il se relève en un homomorphisme $\hat{\theta}$ de $\pi_1(\Sigma, Q_0)$ dans le groupe $\widehat{\text{Homeo}}^+(\partial_\infty \tilde{M})$. Alors, il existe un problème de Plateau φ équivariant par θ .

En utilisant le même raisonnement que dans la démonstration du théorème 7.3.1 de l'article [34], on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 4.1.5

Supposons que M est à courbure sectionnelle inférieur ou égale à -1 . Supposons que θ est non-élémentaire et qu'il se relève en un homomorphisme $\hat{\theta}$ de $\pi_1(\Sigma, Q_0)$ dans le groupe $\widehat{\text{Homeo}}^+(\partial_\infty \tilde{M})$. Alors, il existe une immersion $i : \Sigma \rightarrow M$ telle que la surface immergée (Σ, i) soit localement strictement convexe.

◇

4.2 Les isométries d'une variété d'Hadamard.

4.2.1 Des modèles de M et de $\partial_\infty M$.

Il est bien connu qu'une variété d'Hadamard M est canoniquement difféomorphe (par l'action de l'application exponentielle) à l'espace tangent d'un point quelconque. Le lemme suivant nous donne un résultat analogue pour les géodésiques :

Lemme 4.2.1

Soit M une variété d'Hadamard et soit γ une géodésique dans M . Soit N_γ le fibré normal à γ . C'est-à-dire :

$$N_\gamma = \{X \in T_{\gamma(t)}M \mid t \in \mathbb{R}, X_p \perp \partial_t \gamma(t)\}$$

Alors, la restriction de l'application exponentielle à N_γ est un difféomorphisme entre N_γ et M .

Remarque : Plus généralement, on pourrait remplacer γ par une sous-variété totalement géodésique complète quelconque dans l'énoncé du lemme précédent.

Ensuite, on sait également que $\partial_\infty M$, le bord à l'infini de M , est canoniquement homéomorphe (par l'application de Gauss-Minkowski) à la sphère de rayon un dans chaque fibre de TM . Si la courbure sectionnelle de M est inférieure à $-\epsilon < 0$, on obtient un résultat analogue pour les géodésiques :

Lemme 4.2.2

Soit M une variété d'Hadamard à courbure sectionnelle strictement inférieure à $-\epsilon < 0$. Soit γ une géodésique dans M et soit Σ_γ le fibré en sphères normales à γ contenu dans N_γ . C'est-à-dire :

$$\Sigma_\gamma = \{X \in N_\gamma \mid \|X\| = 1\}$$

Alors, la restriction de l'application de Gauss-Minkowski est un homéomorphisme entre Σ_γ et $\partial_\infty M \setminus \partial_\infty \gamma$, où $\partial_\infty \gamma = \{\gamma(-\infty), \gamma(+\infty)\}$.

4.2.2 Une classification des isométries de M .

Soit M une variété d'Hadamard de dimension 3 à courbure inférieure à $-\epsilon < 0$ et soit $\alpha : M \rightarrow M$ une isométrie de M . On sait que α se prolonge en un homéomorphisme de $M \cup \partial_\infty M$. Le théorème de Brouwer nous informe alors que α a au moins un point fixe dans M . On peut classifier alors les isométries de M selon leurs points fixes, de la même façon qu'on le fait pour $\text{Isom}(\mathbb{H}^3) \cong \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$.

En effet, si α a un point fixe, p , dans M , alors l'application $T\alpha(p)$ est une rotation et α est dite *elliptique*. Ensuite, si α n'a pas de point fixe dans M , et seulement un point fixe dans $\partial_\infty M$, l'application est dite *parabolique*. Finalement, si α n'a pas de point fixe dans M et précisément deux points fixes, p_1 et p_2 dans $\partial_\infty M$, elle est dite *hyperbolique*. Comme M est une variété de visibilité (sa courbure sectionnelle étant inférieure à $-\epsilon < 0$), on voit qu'il existe une géodésique (orientée) γ telle que $\gamma(-\infty) = p_1$ et que $\gamma(+\infty) = p_2$. Ensuite, α envoie γ en une géodésique (orientée) qui y est parallèle. Or, comme la courbure sectionnelle de M est inférieure à $-\epsilon < 0$, on sait que deux géodésiques dans M qui sont parallèles coïncident. On voit alors que α envoie γ en elle-même. Comme α est une isométrie (préservant l'orientation de γ), il existe $T_0 \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$(\alpha \circ \gamma)(t) = \gamma(t + T_0)$$

Finalement, le résultat suivant nous montre que toute isométrie de M doit être d'un de ces trois types :

Lemme 4.2.3

Soit M une variété d'Hadamard de dimension 3 et à courbure inférieure à $-\epsilon < 0$, et soit α une isométrie de M différente de l'identité. Alors α a au plus deux points fixes distincts sur $\partial_\infty M$.

Démonstration : Supposons le contraire et raisonnons par l'absurde. Soit $p_1, p_2, p_3 \in \partial_\infty M$ des points fixes de α . Soit γ la géodésique dans M telle que $\gamma(-\infty) = p_1$ et que $\gamma(+\infty) = p_2$. Ensuite, soit $\vec{n} : \Sigma_\gamma \rightarrow \partial_\infty M \setminus \partial_\infty \gamma$ l'application de Gauss-Minkowski. Par le lemme 4.2.2, on sait qu'il existe une unique $X \in \Sigma_\gamma$ tel que $\vec{n}(X) = p_3$. Comme α est une isométrie, elle commute avec \vec{n} . De plus, comme elle fixe p_1 et p_2 , on voit qu'elle envoie Σ_γ sur lui-même. Donc, par l'unicité :

$$T\alpha(X) = X$$

On voit alors que $\pi(X)$ est un point fixe de α dans M . Comme $T\alpha(\pi(X))$ est une rotation en dimension 3, et comme elle préserve $\partial_t \gamma$ et X , on voit qu'elle est l'identité, et le résultat en découle. \square

4.2.3 La dynamique des isométries de M .

Maintenant, pour α une isométrie de M , on définit $\|\alpha\|$ (qu'on va appeler la *taille* de α) par :

$$\|\alpha\| = \inf_{x \in M} d(x, \alpha(x))$$

On peut également considérer $D_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$, la *fonction de déplacement* de α , définie par :

$$D_\alpha(x) = d(x, \alpha(x))$$

Maintenant, on peut noter le résultat trivial suivant :

Lemme 4.2.4

Si α est elliptique ayant $p_0 \in M$ comme point fixe, alors D_α atteint son minimum sur M en p_0 et :

$$\|\alpha\| = 0$$

Ensuite, on obtient le résultat analogue pour les applications hyperboliques :

Lemme 4.2.5

Soit α hyperbolique et soit γ une géodésique dans M et $T_0 \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$(\alpha \circ \gamma)(t) = \gamma(t + T_0)$$

Alors, D_α atteint son minimum sur M en tout point de γ et :

$$\|\alpha\| = |T_0|$$

Démonstration : Par définition, pour tout $p \in \gamma$:

$$D_\alpha(p) = |T_0|$$

Maintenant, soit $\pi : M \rightarrow \gamma$ la projection orthogonale sur γ . Cette projection est contractante, c'est-à-dire que, pour tout $p, q \in M$:

$$d(\pi(p), \pi(q)) \leq d(p, q)$$

Ensuite, puisque α est une isométrie de M qui préserve γ , elle commute avec π :

$$\alpha \circ \pi = \pi \circ \alpha$$

Donc, pour tout $p \in M$:

$$\begin{aligned} d(p, \alpha(p)) &\geq d(\pi(p), \pi(\alpha(p))) \\ &= d(\pi(p), \alpha(\pi(p))) \\ &= T_0 \end{aligned}$$

Le résultat en découle. \square

Dans la suite, on va travailler avec les actions des groupes fondamentaux de variétés compactes à courbure sectionnelle strictement négative sur leurs revêtements universels. Dans de tels sous-groupes $\Gamma \subseteq \text{Isom}(M)$, tous les éléments qui sont différents de l'identité sont hyperboliques, et donc une application $\alpha \in \Gamma$ est hyperbolique si et seulement si $\|\alpha\| > 0$.

4.2.4 La dynamique nord-sud.

Maintenant, on peut décrire ce qu'on appelle la dynamique Nord-Sud des applications hyperboliques de M :

Lemme 4.2.6 *La Dynamique Nord-Sud.*

Soit p^*, p_* dans $\partial_\infty M$ et soit U^*, U_* des voisinages dans $M \cup \partial_\infty M$ respectivement de p^* et de p_* . Alors, il existe $K > 0$ tel que, pour tout $\alpha : M \rightarrow M$ hyperbolique ayant p^* et p_* comme points fixes respectivement attractif et répulsif, tel que $\|\alpha\| > K$, alors $\alpha((U_*)^C) \subseteq U^*$.

Démonstration : Soit γ la géodésique dans M telle que :

$$\gamma(-\infty) = p_*, \gamma(+\infty) = p^*$$

Par le lemme 4.2.1, on sait que Exp engendre un difféomorphisme entre N_γ et M . Pour $t_0 \in \mathbb{R}$, le transport parallèle le long de γ nous fournit une isométrie canonique de fibrés vectoriels $i : \mathbb{R} \times N_{\gamma(t_0)} \rightarrow N_\gamma$. Définissons $\tilde{\alpha} : \mathbb{R} \times N_{\gamma(t_0)} \rightarrow \mathbb{R} \oplus N_{\gamma(t_0)}$ telle que :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \oplus N_{\gamma(t_0)} & \xrightarrow{\text{Exp} \circ i} & M \\ \downarrow \tilde{\alpha} & & \downarrow \alpha \\ \mathbb{R} \oplus N_{\gamma(t_0)} & \xrightarrow{\text{Exp} \circ i} & M \end{array}$$

Comme α commute avec le transport parallèle, on voit qu'il existe une rotation R de $N_{\gamma(t_0)}$ et $T_0 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\tilde{\alpha}(t, v) = (t + T_0, Rv)$$

Ensuite, on voit qu'il existe $T_*, T^* \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{aligned} (\text{Exp} \circ i)(\{(t, v) | t \geq T^*\}) &\subseteq U^* \\ (\text{Exp} \circ i)(\{(t, v) | t \leq T_*\}) &\subseteq U_* \end{aligned}$$

Si l'on prend alors $K \geq T^* - T_*$, le résultat en découle. \square

On obtient également une réciproque à ce résultat qui nous permet de savoir si une application donnée est hyperbolique. Avant d'énoncer le lemme, on rappelle que, pour γ une courbe de Jordan orientée contenue dans une sphère Σ_2 , on définit l'intérieur de γ , qu'on note $\text{Int}(\gamma)$, comme étant la composante connexe de $\Sigma_2 \setminus \gamma$ se situant à sa gauche. Ensuite, on définit l'extérieur de γ comme étant l'autre composante connexe de $\Sigma_2 \setminus \gamma$ et on la note $\text{Ext}(\gamma)$. On obtient maintenant le résultat suivant :

Lemme 4.2.7

Soit C^* et C_* des courbes de Jordan disjointes dans $\partial_\infty M$ et supposons que chacune de ces courbes soit contenue dans l'extérieur de l'autre. Soit $\alpha : M \rightarrow M$ une isométrie telle que $\alpha(\text{Ext}(C_*)) = \text{Int}(C^*)$. Alors, α est hyperbolique. De plus, si p^* et p_* sont des points fixes de α respectivement attractif et répulsif, alors :

$$p^* \in \text{Int}(C^*), p_* \in \text{Int}(C_*)$$

Démonstration : Comme $\text{Int}(C^*) \subseteq \text{Ext}(C_*)$, on voit que α envoie $\text{Ext}(C_*)$ sur lui-même. Le théorème de Brouwer nous dit alors qu'il existe un point fixe, q de α dans $\text{Ext}(C_*)$. Comme $\alpha(q) = q$, on voit que $q \in \text{Int}(C^*)$. En appliquant le même raisonnement sur α^{-1} , on voit qu'il existe un autre point fixe q' de α dans $\text{Int}(C_*)$. On voit alors que α a deux points fixes sur $\partial_\infty M$. Il en découle que α est soit l'identité, soit elliptique, soit hyperbolique.

Comme $\alpha(C_*) = C^*$ et $C_* \cap C^* = \emptyset$, on voit que α est différente de l'identité. Maintenant, soit γ la géodésique reliant q' à q :

$$\gamma(-\infty) = q', \gamma(+\infty) = q$$

Le lemme 4.2.2 nous dit que l'application de Gauss-Minkowski, \vec{n} engendre un homéomorphisme entre Σ_γ et $\partial_\infty M \setminus \partial_\infty \gamma$. Ensuite, pour $t_0 \in \mathbb{R}$, le transport parallèle nous permet de construire une isométrie canonique $i : \mathbb{R} \times \Sigma_{\gamma(t_0)} \rightarrow \Sigma_\gamma$. Soit $\tilde{\alpha}$ l'isométrie de $\mathbb{R} \times \Sigma_{\gamma(t_0)}$ définie par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \oplus \Sigma_{\gamma(t_0)} & \xrightarrow{\vec{n} \circ i} & M \setminus \partial_\infty \gamma \\ \downarrow \tilde{\alpha} & & \downarrow \alpha \\ \mathbb{R} \oplus \Sigma_{\gamma(t_0)} & \xrightarrow{\vec{n} \circ i} & M \setminus \partial_\infty \gamma \end{array}$$

Ensuite, définissons $\tilde{C}^*, \tilde{C}_* \subseteq \mathbb{R} \times \Sigma_{\gamma(t_0)}$ telles que :

$$\begin{aligned} (\vec{n} \circ i)(\tilde{C}^*) &= C^* \\ (\vec{n} \circ i)(\tilde{C}_*) &= C_* \end{aligned}$$

On voit que $\tilde{\alpha}(\tilde{C}_*) = \tilde{C}^*$. Si $\pi : \Sigma_{\gamma} \rightarrow \mathbb{R}$ est la projection canonique, comme \tilde{C}^* et \tilde{C}_* ne s'intersectent pas, on voit que :

$$\begin{aligned} \text{Inf}(\pi(\tilde{C}_*)) &< \text{Inf}(\pi(\tilde{C}^*)) \\ \text{Sup}(\pi(\tilde{C}_*)) &< \text{Sup}(\pi(\tilde{C}^*)) \end{aligned}$$

Or, comme α commute avec le transport parallèle, on voit qu'il existe une rotation, R , et $T_0 \in \mathbb{R}$, tels que, pour tout $(t, v) \in \Sigma_{\gamma}$:

$$\tilde{\alpha}(t, v) = (t + T_0, Rv)$$

En particulier, on voit que :

$$\pi \circ \tilde{\alpha} = T_0 + \pi$$

Il en découle que $T_0 > 0$, d'où le résultat. \square

De plus, on peut estimer la norme d'une application hyperbolique, α :

Lemme 4.2.8

Soit D^* et D_* des disques fermés orientés disjoints dans $M \cup \partial_{\infty}M$ telles que $C^* = \partial D^*$ et que $C_* = \partial D_*$ soient des courbes de Jordan tracées dans $\partial_{\infty}M$. Soit $\alpha : M \rightarrow M$ une isométrie telle que $\alpha(\text{Ext}(D_*)) = \text{Int}(D^*)$. Alors, α est hyperbolique et :

$$\|\alpha\| \geq d(D_*, D^*)$$

Démonstration : Par le lemme précédent, α est hyperbolique. De plus, si p^* et p_* sont les points fixes de α respectivement attractif et répulsif, alors $p^* \in \text{Int}(C^*)$ et $p_* \in \text{Int}(C_*)$. Soit γ la géodésique reliant p_* à p^* :

$$\gamma(-\infty) = p_*, \gamma(+\infty) = p^*$$

Alors, on sait qu'il existe $T_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$(\alpha \circ \gamma)(t) = \gamma(t + T_0)$$

Ensuite, $p_* = \gamma(-\infty)$ et $P^* = \gamma(+\infty)$ sont des points intérieurs respectivement de $\text{Int}(C_*)$ et de $\text{Int}(C^*)$. Il existe alors $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\gamma(t_0) \in D_*$$

Or, le point $(\alpha \circ \gamma)(t_0)$ se trouve dans D^* , et donc :

$$\begin{aligned} \|\alpha\| &= \|T_0\| \\ &= d(\gamma(t_0), (\alpha \circ \gamma)(t_0)) \\ &\geq d(D_*, D^*) \end{aligned}$$

et le résultat en découle. \square

4.2.5 Des twists de Dehn.

Soit M une variété compacte sans bord à courbure sectionnelle inférieure où égale à -1 et soit \tilde{M} son revêtement universel. On veut étudier l'effet de certains twists de Dehn de M sur la représentation θ de $\pi_1(\Sigma, p_0)$. Le premier, c'est l'effet itéré n fois d'un twist de Dehn sur γ autour d'un lacet η qu'il intersecte une fois :

Lemme 4.2.9

Soit $\alpha : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ hyperbolique et soit p^* et p_* les points fixes de α respectivement attractif et répulsif. Soit β une isométrie de \tilde{M} telle que $\beta(p^*) \neq p_*$. Alors, pour tout $K > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$ l'isométrie $\beta\alpha^n$ soit hyperbolique et :

$$\|\beta\alpha^n\| \geq K$$

De la même façon, si $\beta(p_*) \neq p^*$, alors, pour tout $K > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \leq -N$, l'isométrie $\beta\alpha^n$ soit hyperbolique et de taille supérieure à K .

Démonstration : Posons $q = \beta(p^*)$. Soit $D \subseteq M \cup \partial_\infty M$ un disque orienté plongé tel que ∂D soit une courbe de Jordan tracée dans $\partial_\infty M$ et que $\text{Int}(D)$ soit un voisinage de p_* dans $M \cup \partial_\infty M$. Soit ensuite $V \subseteq M \cup \partial_\infty M$ un voisinage de q et supposons que $d(V, \text{Int}(D)) > K$.

On voit que $\beta^{-1}(V)$ est un voisinage de p^* dans $M \cup \partial_\infty M$ et le lemme 4.2.6 nous montre qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n > N$:

$$\begin{aligned} \alpha^n(\text{Ext}(D)) &\subseteq \beta^{-1}(V) \\ \Rightarrow (\beta \circ \alpha^n)(\text{Ext}(D)) &\subseteq V \end{aligned}$$

Par le lemme 4.2.8, l'application $(\beta \circ \alpha^n)$ est hyperbolique et $\|\beta \circ \alpha^n\| \geq K$. Le premier résultat en découle. Ensuite, supposons que :

$$\beta(p_*) \neq p^*$$

Alors $\beta^{-1}(p^*) \neq p_*$. Donc, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$, l'application $\beta^{-1}\alpha^n$ est hyperbolique et :

$$\|\beta^{-1}\alpha^n\| \geq K$$

Par conjugaison, on voit ensuite que $\alpha^n\beta^{-1}$ est hyperbolique et puis, par inversion, on voit que $\beta\alpha^{-n}$ l'est. De plus :

$$\|\beta\alpha^{-n}\| = \|\alpha^n\beta^{-1}\| = \|\beta^{-1}(\alpha^n\beta^{-1})\beta\| = \|\beta^{-1}\alpha^n\| \geq K$$

et le deuxième résultat en découle. \square

Ensuite, on voit qu'on peut également préciser l'emplacement des points fixes de $\beta \circ \alpha^n$, à savoir :

Corollaire 4.2.10

Avec les mêmes hypothèses que dans la première partie du lemme précédent, le point fixe attractif de $\beta \circ \alpha^n$ tend vers $\beta(p^*)$ et le point fixe répulsif de $\beta \circ \alpha^n$ tend vers p_* lorsque n tend vers $+\infty$.

De même, avec les mêmes hypothèses que dans la deuxième moitié de ce lemme, le point fixe attractif de $\beta \circ \alpha^n$ tend vers $\beta(p_*)$ et le point fixe répulsif de $\beta \circ \alpha^n$ tend vers p^* lorsque n tend vers $-\infty$.

Démonstration : Pour n suffisamment grand, soient q_n^* et q_{n*} les points fixes de $\beta \circ \alpha^n$ respectivement attractif et répulsif. Dans la démonstration du lemme précédent, on voit que $q_n^* \in \partial_\infty V$ et que $q_{n*} \in \partial_\infty \text{Int}(D)$. Comme ces deux ouverts peuvent être choisis arbitrairement proches respectivement de $\beta(p^*)$ et de p_* , le premier résultat en découle. Le deuxième résultat découle ensuite d'un raisonnement analogue. \square

Le prochain twist de Dehn qui nous intéresse, c'est l'effet itéré n fois d'un twist de Dehn sur une courbe composée $\gamma_2\gamma_1$ autour d'un lacet η qui intersecte chacune des courbes γ_1 et γ_2 une fois, mais dans des sens contraires :

Lemme 4.2.11

Soit $\gamma : \tilde{M} \rightarrow M$ hyperbolique. Soit p^* et p_* les points fixes de γ respectivement attractif et répulsif. Ensuite, soit α et β des isométries de \tilde{M} telles que :

$$\alpha(p^*) \neq p^*, \beta(p_*) \neq p_*$$

Soit $K > 0$. Alors, il existe $N > 0$ tel que pour tout $n \geq N$:

- (i) l'application $\gamma^{-n}\alpha\gamma^n\beta$ est hyperbolique,
- (ii) $\|\gamma^{-n}\alpha\gamma^n\beta\| > K$,
- (iii) elle n'a pas de point fixe en commun, ni avec α , ni avec β .

On obtient un résultat analogue dans le cas où :

$$\alpha(p_*) \neq p_*, \beta(p^*) \neq p^*$$

Démonstration : Soit $D \subseteq M \cup \partial_\infty M$ un disque orienté plongé telle que ∂D soit une courbe de Jordan tracée dans $\partial_\infty M$ et que $\text{Int}(D)$ soit un voisinage de $\beta^{-1}(p_*)$. Ensuite, soit U et V des voisinages dans $M \cup \partial_\infty M$ respectivement de $\alpha(p^*)$ et de p_* . On peut supposer que $p^* \notin U$ et que :

$$d(\text{Int}(D), V) > K$$

On voit que $\beta(\text{Int}(D))$ est un voisinage de p_* . Donc, par l'effet de la dynamique nord-sud, il existe $N_1 > 0$ tel que pour $n \geq N_1$:

$$\begin{aligned} (\gamma^n\beta(\text{Int}(D)))^C &\subseteq \alpha^{-1}(U) \\ \Rightarrow (\alpha\gamma^n\beta(\text{Int}(D)))^C &\subseteq U \end{aligned}$$

Ensuite, comme $p^* \notin U$, en appliquant de nouveau l'effet de la dynamique nord-sud, on voit qu'il existe $N_2 > 0$ tel que pour $n \geq N_2$:

$$\gamma^{-n}(U)^C \subseteq V$$

On voit alors que, pour $n \geq \text{Max}(N_1, N_2)$:

$$(\gamma^{-n}\alpha\gamma^n\beta)(\text{Int}(D))^C \subseteq V$$

Le lemme 4.2.8 nous permet de conclure alors que l'application $\gamma^{-n}\alpha\gamma^n\beta$ est hyperbolique et que :

$$\|\gamma^{-n}\alpha\gamma^n\beta\| > K$$

Maintenant, on suit le raisonnement de Gallo, Kapovich et Marden pour montrer le résultat sur les points fixes. Notons q_n^* et q_{n*} les points fixes respectivement attractif et répulsif de $\gamma^{-n}\alpha\gamma^n\beta$. Comme dans le lemme précédent, on peut montrer que q_n^* tend vers p_* et q_{n*} tend vers $\beta^{-1}(p_*)$ lorsque n tend vers l'infini. Comme ni p_* ni $\beta^{-1}(p_*)$ n'est un point fixe de β , on voit que, pour n suffisamment grand, $\gamma^{-n}\alpha\gamma^n\beta$ n'a pas de point fixe en commun avec β .

Supposons maintenant qu'il existe $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $k_n \uparrow \infty$ et que $\gamma^{-k_n}\alpha\gamma^{k_n}\beta$ a un point fixe en commun avec α pour tout n . Comme α a au plus 2 points fixes (elle est différente de l'identité), en prenant au besoin une sous-suite, on peut supposer qu'il existe p_0 un point fixe de α et de $\gamma^{-k_n}\alpha\gamma^{k_n}\beta$ pour tout n . En particulier, pour tout n :

$$p_0 \in \{q_{n*}, q_n^*\}$$

Donc, en prenant les limites lorsque n tend vers l'infini, on obtient :

$$p_0 \in \{p_*, \beta^{-1}(p_*)\}$$

Supposons que $p_0 = p_*$. Alors, comme p_0 est un point fixe de α :

$$\begin{aligned} \gamma^{-k_n}\alpha\gamma^{k_n}\beta(p_*) &= p_* \\ \Rightarrow \beta(p_*) &= p_* \end{aligned}$$

ce qui est absurde. Il en découle que $p_0 = \beta^{-1}(p_*)$, mais, pour tout n :

$$\begin{aligned} (\gamma^{-k_n}\alpha\gamma^{k_n}\beta)(\beta^{-1}(p_*)) &= \beta^{-1}(p_*) \\ \Rightarrow (\gamma^{-k_n}\alpha)(p_*) &= \beta^{-1}(p_*) \end{aligned}$$

et donc, en particulier, pour $n \neq m$:

$$\begin{aligned} (\gamma^{k_n}\alpha)(p_*) &= (\gamma^{k_m}\alpha)(p_*) \\ \Rightarrow \alpha(p_*) &= (\gamma^{k_m - k_n}\alpha)(p_*) \end{aligned}$$

En laissant $k_m - k_n$ tendre vers l'infini, on voit alors que $\alpha(p_*)$ doit être un point fixe de γ . Si $\alpha(p_*) = p_*$, alors on voit que :

$$\begin{aligned} (\gamma^{k_n}\alpha)(p_*) &= \beta^{-1}(p_*) \\ \Rightarrow \beta(p_*) &= p_* \end{aligned}$$

ce qui n'est pas possible. On voit alors que $\alpha(p_*) = p^*$, et il en découle que :

$$\beta^{-1}(p_*) = p^*$$

Mais $p_0 = \beta^{-1}(p_*) = p^*$ est un point fixe de α , et donc $\alpha(p^*) = p^*$, ce qui n'est pas possible et le résultat en découle. \square

◇

4.3 La géométrie dans une variété à courbure pincée.

4.3.1 Les triangles de comparaison.

Pour démontrer le prochain lemme technique de Gallo, Kapovich et Marden, qui concerne la construction de groupes de Schottky, il faut mieux comprendre la structure géométrique d'une variété d'Hadamard à courbure pincée. Dans cette section, on va étudier certaines fonctions provenant des triangles géodésiques dans des variétés d'Hadamard. Pour tout $\lambda \geq 0$, notons M_λ la variété d'Hadamard de dimension 2 à courbure sectionnelle constante égale à $-\lambda$. M_λ va servir d'espace de comparaison pour les objets dans une variété d'Hadamard quelconque.

Maintenant, soit ΔABC un triangle dans M_λ (par triangle, on entend le sous-ensemble de M_λ comprenant les sommets A , B et C et les arcs géodésiques les reliant. Il hérite de M_λ une structure d'espace métrique). Ensuite, notons α , β , γ respectivement les tailles des angles aux sommets A , B et C , et notons a, b et c respectivement les longueurs des arêtes BC , AC et AB . En étudiant, par exemple, le modèle du disque de Poincaré de $M_{-1} = \mathbb{H}^2$ et en le dilatant au besoin, on peut voir que la longueur c est uniquement déterminée par le triplet (a, b, γ) . En gardant a et b constants, on obtient ainsi une fonction $\tilde{c}_\lambda : \gamma \mapsto c$ (voir la figure 4.3.1).

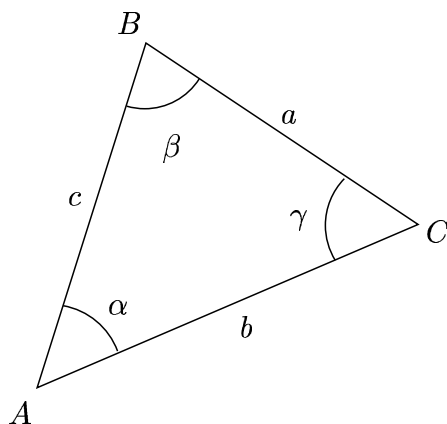


Figure 4.3.1

On peut obtenir le résultat suivant concernant les propriétés de \tilde{c}_λ :

Lemme 4.3.1

On obtient les propriétés suivantes de \tilde{c}_λ :

- (i) \tilde{c}_λ est continue,
- (ii) $\tilde{c}_\lambda(0) = |b - a|$ et $\tilde{c}_\lambda(\pi) = a + b$,
- (iii) et \tilde{c}_λ est strictement croissante (et donc injective).

En particulier, par la continuité, pour tout c tel que :

$$|b - a| \leq c \leq b + a$$

c'est-à-dire, pour tout c satisfaisant à l'inégalité triangulaire, il existe un triangle ΔABC dans M_λ ayant a , b et c comme longueurs d'arêtes.

Ensuite, on voit maintenant que l'angle β est uniquement déterminé par le triplet (a, b, γ) . En gardant a et b constants, on obtient ainsi une fonction $\tilde{\beta}_\lambda : \gamma \mapsto \beta$. De la même façon qu'auparavant, on obtient le résultat suivant concernant les propriétés de $\tilde{\beta}_\lambda$:

Lemme 4.3.2

On obtient les propriétés suivantes de $\tilde{\beta}_\lambda$:

- (i) $\tilde{\beta}_\lambda$ est continue,
- (ii) si $b > a$, alors $\tilde{\beta}_\lambda(0) = \pi$ et $\tilde{\beta}_\lambda(\pi) = 0$,
- (iii) Si $b > 0$, alors la fonction $\tilde{\beta}_\lambda$ est strictement décroissante (et donc injective) sur $[0, \pi]$ et,
- (iv) la fonction $\tilde{\beta}_\lambda$ est strictement décroissante (et donc injective) sur l'intervalle $[\pi/2, \pi]$.

Le lecteur intéressé trouvera une étude plus détaillée de ces fonctions dans l'annexe B.

4.3.2 Les théorèmes de Topogonov et l'homéomorphisme canonique.

Maintenant, soit $K > k \geq 0$ et soit M une variété d'Hadamard à courbure pincée entre $-K$ et $-k$. Soit $P \in M$, $P_{-k} \in M_{-k}$ et $P_{-K} \in M_{-K}$. Ensuite, soient $I_{-k} : T_P M \rightarrow T_{P_{-k}} M_{-k}$ et $I_{-K} : T_P M \rightarrow T_{P_{-K}} M_{-K}$ des isométries. Si l'on note g_{-k} , g et g_{-K} les métriques respectivement sur M_{-k} , M et M_{-K} , d'après le théorème de Rauch :

$$I_{-K}^* \text{Exp}^* g_{-K} \geq \text{Exp}^* g \geq I_{-k}^* \text{Exp}^* g_{-k}$$

Ce théorème donne les deux théorèmes de Topogonov. D'abord, on a :

Théorème 4.3.3 [Topogonov I]

Soit ΔABC un triangle dans M et soit $\Delta A'B'C'$ le triangle de comparaison dans M_{-k} tel que $A'B' = AB$, $A'C' = AC$ et que $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$. Alors :

$$BC \geq B'C'$$

De la même façon, si $\Delta A''B''C''$ est le triangle de comparaison dans M_{-K} tel que $A''B'' = AB$, $A''C'' = AC$ et que $\widehat{A''B''C''} = \widehat{ABC}$, alors :

$$BC \leq B''C''$$

On obtient ensuite comme corollaire à ce résultat le deuxième théorème de Topogonov :

Théorème 4.3.4 [Topogonov II]

Soit ΔABC un triangle dans M et soit $\Delta A'B'C'$ le triangle de comparaison dans M_{-k} tel que $A'B' = AB$, $A'C' = AC$ et $B'C' = BC$. Alors :

$$\widehat{BAC} \leq \widehat{B'A'C'}, \quad \widehat{ACB} \leq \widehat{A'C'B'}, \quad \widehat{CBA} \leq \widehat{C'B'A'}$$

De la même façon, si $\Delta A''B''C''$ est le triangle de comparaison dans M_{-K} tel que $A''B'' = AB$, $A''C'' = AC$ et que $B''C'' = BC$, alors :

$$\widehat{BAC} \geq \widehat{B''A''C''}, \quad \widehat{ACB} \geq \widehat{A''C''B''}, \quad \widehat{CBA} \geq \widehat{C''B''A''}$$

Si ΔABC est un triangle dans M et si $\Delta A'B'C'$ est le triangle de comparaison dans M_λ tel que $A'B' = AB$, $A'C' = AC$ et que $B'C' = BC$, on définit φ_λ , l'homéomorphisme canonique entre $\Delta A'B'C'$ et ΔABC , en posant :

$$\varphi_\lambda(A') = A, \quad \varphi_\lambda(B') = B, \quad \varphi_\lambda(C') = c$$

et en l'étendant ensuite en une fonction sur $\Delta A'B'C'$ par l'interpolation linéaire le long des arêtes. On a le résultat suivant :

Théorème 4.3.5

Soit ΔABC un triangle dans M et soit $\Delta A'B'C'$ le triangle de comparaison dans M_{-k} tel que $A'B' = AB$, $A'C' = AC$ et que $B'C' = BC$. Soit ensuite $\varphi_{-k} : \Delta A'B'C' \rightarrow \Delta ABC$ l'homéomorphisme canonique, alors φ_{-k} est contractant. C'est-à-dire que, pour tout $P, Q \in \Delta A'B'C'$:

$$d(\varphi_{-k}(P), \varphi_{-k}(Q)) \leq d(P, Q)$$

De la même façon, si $\Delta A''B''C''$ est le triangle de comparaison dans M_{-K} tel que $A''B'' = AB$, $A''C'' = AC$ et que $B''C'' = BC$ et si $\varphi_{-K} : \Delta A''B''C'' \rightarrow \Delta ABC$ est l'homéomorphisme canonique, alors cette application est dilatante. C'est-à-dire que, pour tout $P, Q \in \Delta A'B'C'$:

$$d(\varphi_{-k}(P), \varphi_{-k}(Q)) \geq d(P, Q)$$

4.3.3 Des triangles dégénérés ayant un point à l'infini.

Maintenant, on veut considérer des triangles dégénérés dans une variété à courbure pincée ayant un point à l'infini. Pour $\lambda > 0$, soit ΔABC un triangle dans M_λ tel que l'angle entre BC et BA soit égale à $\pi/2$ et que A soit dans $\partial_\infty M_\lambda$ (voir la figure 4.3.2).

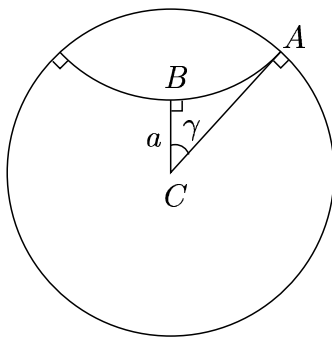


Figure 4.3.2

On voit que, dans ces circonstances, l'angle γ est uniquement déterminée par la longueur $a = BC$. On obtient ainsi, pour chaque λ , une fonction $\Gamma_\lambda : a \mapsto \gamma$. Ensuite, en étudiant ce triangle, par exemple, dans le modèle du disque de Poincaré de \mathbb{H}^2 , et en plaçant C sur l'origine, on voit que Γ_λ est strictement décroissante, $\Gamma_\lambda(0) = \pi/2$ et $\Gamma_\lambda(t)$ tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini.

Ensuite, soit $K > k > 0$ et soit M une variété à courbure sectionnelle pincée entre $-K$ et $-k$. Soit ABC un triangle dans M telle que l'angle \widehat{ABC} soit égale à $\pi/2$ et que A soit un point dans $\partial_\infty M$. On a le résultat suivant :

Lemme 4.3.6

Pour tout $D \in BA$, L'angle \widehat{BCD} est inférieur ou égal à $\Gamma_k(a)$, où a est la longueur de la droite BC .

Démonstration : Construisons le triangle de comparaison $\Delta D'B'C'$ dans M_{-k} tel que $D'B' = DB$, $B'C' = BC = a$ et que $\widehat{D'B'C'} = \widehat{DBC} = \pi/2$. Soit b et b' les longueurs respectivement de CD et de $C'D'$ (voir la figure 4.3.3). Par le principe de comparaison, on sait que $b' \leq b$. Soit maintenant D'' tel que $D''B' = D'B'$ et que $D''C' = b$.

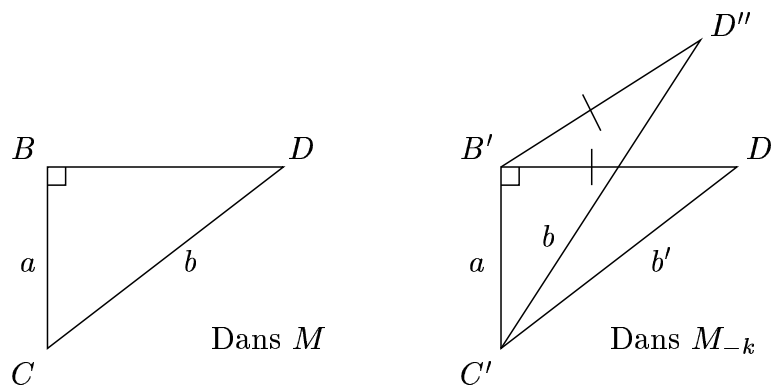


Figure 4.3.3

Par le lemme 4.3.1, on voit que l'angle $\widehat{D''B'C'}$ est supérieur ou égal à l'angle $\widehat{D'B'C'}$ et donc, par le lemme 4.3.2, l'angle $\widehat{B'C'D''}$ est inférieur à l'angle $\widehat{B'C'D'}$. Or, par le principe de comparaison, on voit que :

$$\widehat{BCD} \leq \widehat{B'C'D''} \leq \widehat{B'C'D'}$$

Comme $\widehat{B'C'D'} \leq \Gamma_k(a)$ le résultat en découle. \square

Corollaire 4.3.7

Avec la même notation que dans le lemme précédent, l'angle \widehat{BCA} est inférieur ou égal à $\Gamma_k(a)$.

Démonstration : Ce résultat découle en laissant D tendre vers A dans le lemme précédent. \square

Ensuite, on peut également minorer l'angle \widehat{BCA} .

Lemme 4.3.8

Pour tout $D \in BA$ tel que $BD \geq BC$, L'angle \widehat{BCD} est supérieur ou égal à $\Gamma_K(a)$, où a est la longueur de la droite BC .

Démonstration : Construisons le triangle de comparaison $\Delta D'B'C'$ dans M_K tel que $D'B' = DB$, $B'C' = BC = a$ et que $\widehat{D'B'C'} = \widehat{DBC} = \pi/2$. Soit b et b' les longueurs respectivement de CD et de $C'D'$ (voir la figure 4.3.4). Par le principe de comparaison, on sait que $b' \geq b$. Soit maintenant D'' tel que $D''B' = D'B'$ et que $D''C' = b$.

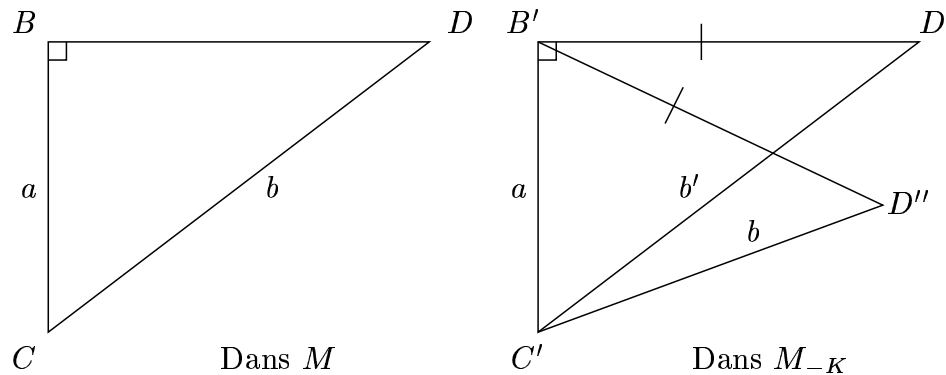


Figure 4.3.4

Par le lemme 4.3.1, on voit que l'angle $\widehat{D''B'C'}$ est inférieur ou égal à l'angle $\widehat{D'B'C'}$ et donc, par le lemme 4.3.2, l'angle $\widehat{B'C'D''}$ est supérieur à l'angle $\widehat{B'C'D'}$. Or, par le principe de comparaison, on voit que :

$$\widehat{BCD} \geq \widehat{B'C'D''} \geq \widehat{B'C'D'}$$

et le résultat en découle. \square

Corollaire 4.3.9

Avec la même notation que dans le lemme précédent, l'angle \widehat{BCA} est supérieur ou égal à $\Gamma_K(AB)$.

Démonstration : Ce résultat découle en laissant D tendre vers l'infini dans le lemme précédent. \square

4.3.4 Des triangles dégénérés ayant deux points à l'infini.

Maintenant, on veut étudier les triangles dégénérés ayant deux points à l'infini. Soit $\lambda > 0$ et soit ΔABC un triangle dans M_λ tel que B et C soient dans $\partial_\infty M_\lambda$. Notons BC la géodésique reliant B à C . On voit que $d(A, BC)$ est uniquement définie par l'angle $\alpha = \widehat{BAC}$ et l'on obtient ainsi une fonction $D_\lambda : \alpha \mapsto d(A, BC)$ (voir la figure 4.3.5).

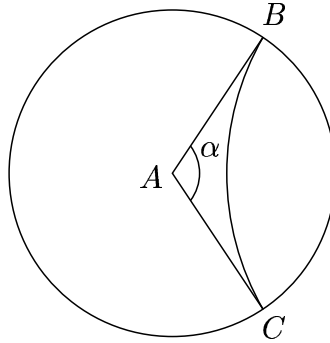


Figure 4.3.5

On étudiant le modèle du disque de Poincaré de \mathbb{H}^2 et en le dilatant au besoin, on voit que D_λ est continue et strictement décroissante. De plus, on voit que $D_\lambda(\alpha)$ tend vers l'infini lorsque α tend vers zéro et qu'elle tend vers zéro lorsque α tend vers π . En fait, on voit que pour tout $t \geq 0$, et pour tout $\alpha \in [0, \pi]$:

$$\begin{aligned} D_\lambda(2\Gamma_\lambda(t)) &= t \\ 2\Gamma_\lambda(D_\lambda(\alpha)) &= \alpha \end{aligned}$$

Ensuite, soit M une variété d'Hadamard à courbure sectionnelle pincée entre $-K$ et $-k$ et soit ΔABC un triangle dans M telle que B et C soient des points dans $\partial_\infty M$. On a le résultat suivant :

Lemme 4.3.10

La distance $d(A, BC)$ satisfait à :

$$D_K(\alpha) \leq d(A, BC) \leq D_k(\alpha)$$

Où α est l'angle \widehat{BAC} .

Démonstration : Soit η la géodésique reliant B à C :

$$\eta(-\infty) = B, \quad \eta(+\infty) = C$$

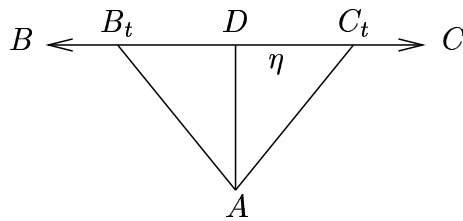


Figure 4.3.6

Ensuite, soit D le point dans η minimisant la distance à A . Supposons que η soit normalisée de telle sorte que $\eta(0) = D$. Pour tout $|t| > AD$, posons $B_t = \eta(-t)$ et $C_t = \eta(t)$ (voir la figure 4.3.6).

Par le lemme 4.3.6, et l'inégalité triangulaire, on voit que :

$$\begin{aligned} \widehat{B_t A D}, \widehat{C_t A D} &\leq \Gamma_k(AD) \\ \Rightarrow \widehat{B_t A C_t} &\leq 2\Gamma_k(AD) \end{aligned}$$

Comme D_k décroît, on obtient :

$$D_k(\widehat{B_t A C_t}) \geq D_k(2\Gamma_k(AD)) = AD$$

et le premier résultat en découle. Pour la minoration de AD , on ne peut pas utiliser l'inégalité triangulaire, et il faut raisonner différemment. On voit que $\widehat{B_t A C_t} \rightarrow \widehat{B A C}$ lorsque t tend vers l'infini. Soit $\Delta B'_t A' C'_t$ le triangle de comparaison dans M_{-K} tel que $B'_t A' = B_t A$, $C'_t A' = C_t A$ et que $\widehat{B'_t A' C'_t} = \widehat{B_t A C_t}$. Par le principe de comparaison :

$$B'_t C'_t \geq B_t C_t$$

On définit alors B''_t tel que $B''_t C'_t = B_t C_t$ et que $B''_t A' = B'_t A' = B_t A$ (voir la figure 4.3.7) :

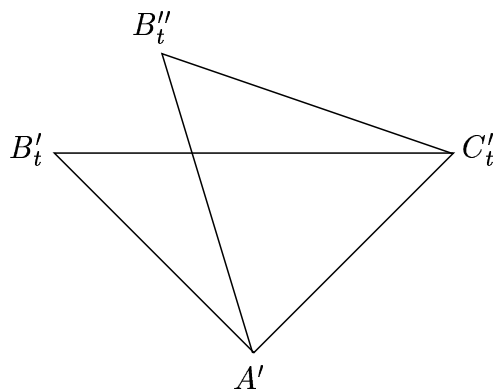


Figure 4.3.7

Par monotonie :

$$\widehat{B''_t A' C'_t} \leq \widehat{B'_t A' C'_t} = \widehat{B_t A C_t}$$

Soit maintenant $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $t_n \uparrow \infty$ lorsque n tend vers l'infini. Comme $A' B''_{t_n}$ et $A' C'_{t_n}$ tendent vers l'infini lorsque n tend vers l'infini, par la compacité de $M \cup \partial_\infty M$, on peut supposer qu'il existe $B'', C' \in \partial_\infty M$ tels que B''_{t_n} et C'_{t_n} tendent respectivement vers B'' et C' lorsque n tend vers l'infini. Maintenant :

$$\begin{aligned} \widehat{B'' A C'} &= \text{Lim}_{n \rightarrow \infty} \widehat{B''_{t_n} A' C'_{t_n}} \\ &= \text{LimSup}_{n \rightarrow \infty} \widehat{B''_{t_n} A' C'_{t_n}} \\ &\leq \text{LimSup}_{n \rightarrow \infty} \widehat{B_{t_n} A C_{t_n}} \\ &= \widehat{B A C} \end{aligned}$$

Comme D_K est décroissant, on voit alors que :

$$d(A', B'' C') = D_K(\widehat{B'' A' C'}) \geq D_K(\widehat{B A C})$$

Or, par le théorème 4.3.5, l'homéomorphisme canonique entre $\Delta A' B''_t C'_t$ et $\Delta A B_t C_t$ est dilatant, et donc :

$$d(A, B_t C_t) \geq d(A', B''_t C'_t)$$

D'où :

$$\begin{aligned} d(A', B'' C') &\leq \text{LimInf}_{n \rightarrow \infty} d(A', B''_{t_n} C'_{t_n}) \\ &\leq \text{LimInf}_{n \rightarrow \infty} d(A, B_{t_n} C_{t_n}) \\ &= d(A, B C) \end{aligned}$$

et le deuxième résultat en découle. \square

4.3.5 Une dernière majoration.

Maintenant, soit γ une droite (géodésique) dans $M_0 = \mathbb{R}^2$ et notons :

$$A^- = \gamma(-\infty), A^+ = \gamma(+\infty)$$

Soit $P \in \gamma$, et pour $\rho > 0$ et $\varphi \in]0, \pi]$, posons :

$$\Delta_0(\rho, \varphi) = d(R, \gamma)$$

Où R est un point choisi tel que $d(R, P) = \rho$ et que l'angle $\widehat{R P A^+}$ soit égal à φ (voir la figure 4.3.8).

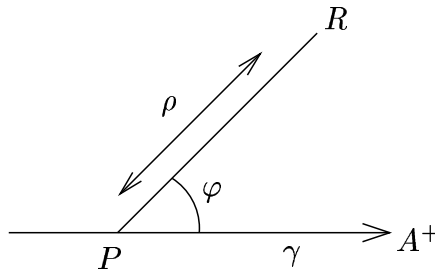


Figure 4.3.8

On voit que, pour φ fixe :

$$\begin{aligned}\Delta_0(\rho, \varphi) &\rightarrow 0 && \text{lorsque } \rho \rightarrow 0 \\ \Delta_0(\rho, \varphi) &\rightarrow \infty && \text{lorsque } \rho \rightarrow +\infty\end{aligned}$$

On voit en plus que Δ_0 est croissante en ρ . En même temps, pour ρ fixe, on voit que Δ_0 est croissante en φ et que :

$$\begin{aligned}\Delta_0(\rho, \pi/2) &= \rho \\ \Delta_0(\rho, 0) &= 0\end{aligned}$$

Maintenant, pour M une variété d'Hadamard, on a le lemme suivant :

Lemme 4.3.11

Soit γ une géodésique dans M et soit $P \in \gamma$. Ensuite pour $\rho > 0$ et pour $\varphi \in]0, \pi/2]$ soit R tel que $d(P, R) = \rho$ et que l'angle entre PR et γ soit égal à φ . Alors :

$$d(R, \gamma) \geq \Delta_0(R, \varphi)$$

Démonstration : Soit $Q \in \gamma$ le point minimisant de la distance à R . On voit que $\widehat{PQR} = \pi/2$. Soit maintenant $\Delta P'Q'R'$ le triangle de comparaison dans $M_0 = \mathbb{R}^2$ tel que $R'Q' = RQ$, $R'P' = RP$ et $P'Q' = PQ$ (voir la figure 4.3.9).

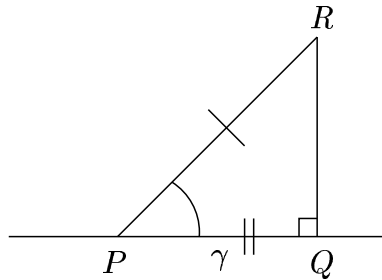


Figure 4.3.9

Par le principe de Topogonov II (voir le théorème 4.3.4), on voit que :

$$\widehat{R'P'Q'} \geq \widehat{RPQ}$$

En même temps, on obtient :

$$\widehat{R'Q'P'} \geq \widehat{RQP} = \frac{\pi}{2}$$

Donc, si l'on note γ' la droite (géodésique) obtenue en étendant $P'Q'$ dans les deux sens, le point Q' n'est pas forcément minimisant de la distance à R' sur γ' . On voit alors que :

$$RQ = R'Q' \geq d(R', \gamma') = \Delta_0(R'P', \widehat{R'P'Q'})$$

Puisque Δ_0 est croissant en φ , on obtient :

$$\Delta_0(R'P', \widehat{R'P'Q'}) \geq \Delta_0(R'P', \widehat{RPQ}) = \Delta_0(RP, \widehat{RPQ})$$

et le résultat en découle. \square

4.3.6 Le contrôle des géodésiques.

Maintenant, soit M une variété d'Hadamard à courbure pincée entre $-K$ et $-k$ et soit $p \in \partial_\infty M$ un point du bord à l'infini de M et soit U un voisinage de p dans $M \cup \partial_\infty M$. On a le résultat suivant :

Lemme 4.3.12

Il existe un voisinage Ω de p dans $\partial_\infty M$ tel que pour toute géodésique γ telle que

$$\gamma(-\infty), \gamma(+\infty) \in \Omega$$

la géodésique γ toute entière est contenue dans U .

Démonstration : Soit $q \in M$. Pour $\theta \in]0, \pi]$ et pour $\rho > 0$, on peut définir le voisinage $\Omega_{\theta, \rho}$ de p par :

$$\Omega_{\theta, \rho} = \{r \in M \cup \partial_\infty M \mid \widehat{pqr} < \theta, qr > \rho\}$$

où \widehat{pqr} est l'angle entre les arcs géodésiques pq et rq en q et qr est la distance de q à r . Par définition de la topologie de $M \cup \partial_\infty M$, on voit que, pour θ_0 suffisamment petit, et pour ρ_0 suffisamment grand :

$$\Omega_{\theta_0, \rho_0} \subseteq U$$

Comme $\Gamma_k(t)$ tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini, on peut trouver $\rho_1 > \rho_0$ tel que $\Gamma_k(\rho_1) < \theta_0/3$. Ensuite, puisque $D_K(\theta)$ tend vers l'infini lorsque θ tend vers zéro, il existe $\theta_1 < \theta_0/3$ tel que $D_K(2\theta_1) > \rho_1$. Maintenant, soit r, r' des points dans $\partial_\infty M$ tels que $\widehat{pqr}, \widehat{pqr'} < \theta_1$ et notons rr' la géodésique reliant r à r' . L'inégalité triangulaire nous montre que $\widehat{rqr'} < 2\theta_1$ et, par le lemme 4.3.10, on obtient :

$$d(q, rr') \geq D_K(\widehat{rqr'}) \geq D_K(2\theta_1) > \rho_1 > \rho_0$$

Maintenant, soit $r_0 \in rr'$ le point minimisant de la distance à q . On voit que la géodésique qr_0 fait un angle droit avec la géodésique rr' . Le lemme 4.3.6 nous permet de voir alors que pour tout $s \in rr_0$ et pour tout $s' \in r_0r'$:

$$\widehat{sqr_0}, \widehat{s'qr_0} < \Gamma_k(d(q, rr')) < \Gamma_k(\rho_1) < \theta_0/3$$

où $\widehat{sqr_0}$ est l'angle entre les géodésiques sq et qr_0 en q et $\widehat{s'qr_0}$ se définit d'une façon analogue. En particulier, en prenant les limites, on voit que :

$$\begin{aligned} \widehat{rqr_0} &< \frac{\theta_0}{3} \\ \Rightarrow \widehat{pqr_0} &< \frac{2\theta_0}{3} \end{aligned}$$

où la deuxième majoration découle de la définition de r et de l'inégalité triangulaire. En appliquant de nouveau l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$\widehat{sqp}, \widehat{s'qp} < \theta_0$$

On voit alors que tout point de la géodésique rr' est contenu dans $\Omega_{\theta_0, \rho_0}$ et le résultat en découle. \square

Remarque : On aurait également pu employer le résultat plus fort d'Anderson [2] qui dit que pour tout $p \in \partial_\infty M$ et pour tout voisinage U de p dans $M \cup \partial_\infty M$, il existe un voisinage convexe V de p dans $M \cup \partial_\infty M$ qui est contenu dans U .

4.3.7 Les groupes de Schottky.

D'abord, on définit les groupes de Schottky :

Définition 4.3.13

Soit C_a^- , C_a^+ , C_b^- et C_b^+ quatre courbes de Jordan disjointes tracées dans la sphère S_2 orientées de telle sorte que chacune de ces courbes se situe dans les extérieurs de toutes les autres courbes. Notons $\text{Homeo}^+(S_2)$ le groupe d'homéomorphismes de S_2 préservant l'orientation de S_2 . On appelle groupe de Schottky un sous-groupe à deux générateurs $\Gamma = \langle a, b \rangle$ de $\text{Homeo}^+(S_2)$ tel que :

$$a(\text{Ext}(C_a^-)) = \text{Int}(C_a^+), \quad b(\text{Ext}(C_b^-)) = \text{Int}(C_b^+)$$

On peut maintenant montrer les résultats techniques de Gallo, Kapovich et Marden concernant les groupes de Schottky :

Lemme 4.3.14

Soit $K > 1$ et soit M une variété d'Hadamard à courbure pincée entre $-K$ et -1 . Ensuite, soit α une isométrie hyperbolique de M ayant p^* et p_* comme points fixes respectivement attractif et répulsif. Soit p_0 différent de p^* et de p_* . Alors, pour tout $B > 0$ il existe un voisinage Ω de p_0 dans $\partial_\infty M$ tel que si $q^*, q_* \in \Omega$ et si β est une isométrie hyperbolique de M ayant q^* et q_* comme points fixes telle que :

$$\|\beta\| > B$$

Alors, le sous-groupe $\langle \alpha, \beta \rangle$ de $\text{Isom}(M)$ engendré par α et β est un groupe de Schottky.

Démonstration : Notons également α la géodésique reliant p_* à p^* :

$$\alpha(-\infty) = p_*, \quad \alpha(+\infty) = p^*$$

Ensuite, soit h une horofonction de p_0 . Comme la courbure sectionnelle de M est inférieure à -1 , on voit que $(h \circ \alpha)(t)$ tend vers l'infini lorsque $|t|$ tend vers l'infini. On peut supposer alors que 0 minimise $(h \circ \alpha)$. Posons $\alpha_0 = \alpha(0)$. On voit que les angles $\widehat{p_0 \alpha_0 p_*}$ et $\widehat{p_0 \alpha_0 p^*}$ sont des angles droits. Maintenant posons $N_0 = N_{\alpha(0)}\alpha$ et soit $i : \mathbb{R} \times N_0 \rightarrow N_\alpha$ l'isométrie de fibrés vectoriels engendrée par le transport parallèle. Définissons ensuite l'isométrie $\tilde{\alpha}$ de $\mathbb{R} \times N_0$ telle que :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} \times N_0 & \xrightarrow{i} & N_\alpha & \xrightarrow{\text{Exp}} & M \\ \downarrow \tilde{\alpha} & & \downarrow T\alpha & & \downarrow \alpha \\ \mathbb{R} \times N_0 & \xrightarrow{i} & N_\alpha & \xrightarrow{\text{Exp}} & M \end{array}$$

Ensuite, comme α commute avec le transport parallèle, il existe $T_0 \in \mathbb{R}$ et R_0 une rotation de N_0 telle que pour tout $(t, v) \in \mathbb{R} \times N_0$:

$$\tilde{\alpha}(t, v) = (t + T_0, R_0 v)$$

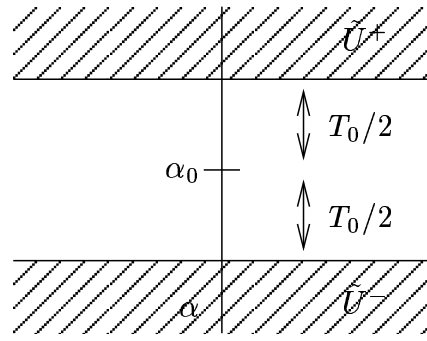


Figure 4.3.10

On voit que $T_0 > 0$. Définissons maintenant $\tilde{U}^+, \tilde{U}^- \subseteq \mathbb{R} \times N_0$ par :

$$\begin{aligned}\tilde{U}^+ &= \{(t, v) | t > \frac{T_0}{2}\} \\ \tilde{U}^- &= \{(t, v) | t < -\frac{T_0}{2}\}\end{aligned}$$

Ensuite, on définit $\tilde{D}^+ = \partial\tilde{U}^+$ et $\tilde{D}^- = \partial\tilde{U}^-$ et on les oriente de telle sorte que :

$$\begin{aligned}\tilde{U}^+ &= \text{Int}(\tilde{D}^+) \\ \tilde{U}^- &= \text{Int}(\tilde{D}^-)\end{aligned}$$

Cette construction est illustrée dans la figure 4.3.10. Maintenant, on note $U^+ = (\text{Exp} \circ i)(\tilde{U}^+)$ et $U^- = (\text{Exp} \circ i)(\tilde{U}^-)$ et l'on définit D^+ et D^- de la même façon. On voit que :

$$\tilde{\alpha}(\text{Ext}(\tilde{D}^-)) = \text{Int}(\tilde{D}^+)$$

et donc :

$$\alpha(\text{Ext}(D^-)) = \text{Int}(D^+)$$

Pour tout $\theta \in]0, \pi]$ et pour tout $\rho > 0$, définissons $\Omega_{\theta, \rho}$ par :

$$\Omega_{\theta, \rho} = \{r \in M \cup \partial_\infty M | \widehat{r\alpha_0 p_0} < \theta, d(r, \alpha_0) > \rho\}$$

où $\widehat{r\alpha_0 p_0}$ est l'angle entre les géodésiques $r\alpha_0$ et $p_0\alpha_0$ en α_0 . On voit bien que $\Omega_{\theta, \rho}$ est un voisinage de p_0 pour tout θ et pour tout ρ . Soit θ_1 tel que :

$$\Omega_{\theta_1, \rho} \cap U^\pm = \emptyset$$

Ensuite, soit $\theta_0 < \theta_1$. Pour tout $r \in \Omega_{\theta_0, \rho}$ et pour tout $s \in \partial_\infty U^\pm$, le lemme 4.3.11 nous montre que :

$$d(r, \alpha_0 s) \geq \Delta_0(\rho, \theta_1 - \theta_0)$$

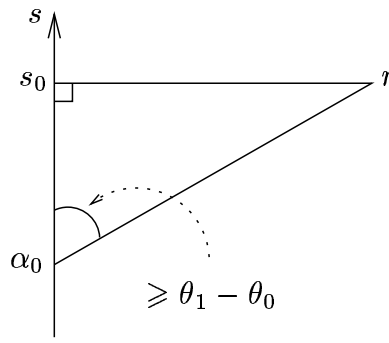


Figure 4.3.11

où $\alpha_0 s$ est la géodésique (complète) passant par α_0 et par s (voir la figure 4.3.11). Soit $s_0 \in \alpha_0 s$ le point minimisant de la distance à r . Le lemme 4.3.6 nous permet de voir alors que pour tout $s' \in \alpha_0 s$:

$$\widehat{s' r s_0} \leq \Gamma_1(d(r, \alpha_0 s)) \leq \Gamma_1(\Delta_0(\rho, \theta_1 - \theta_0))$$

où $\widehat{s' r s_0}$ est l'angle entre les géodésiques $s' r$ et $s_0 r$ en r_0 . En particulier, par l'inégalité triangulaire, en prenant des limites, on obtient :

$$\widehat{s r \alpha_0} \leq 2\Gamma_1(\Delta_0(\rho, \theta_1 - \theta_0))$$

Comme, pour θ_0 fixe, Δ_0 tend vers l'infini lorsque ρ tend vers l'infini, et comme $\Gamma_1(t)$ tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini, on voit qu'on peut choisir ρ tel que :

$$2\Gamma_1(\Delta_0(\rho, \theta_1 - \theta_0)) < \frac{\pi}{2} - \Gamma_K(B/2)$$

Maintenant, le lemme 4.3.12 nous permet de trouver Ω un voisinage de p_0 tel que toute géodésique γ ayant ses extrémités dans Ω soit contenue dans $\Omega_{\theta_0, \rho}$. Supposons maintenant que γ est normalisée de telle sorte que 0 minimise la distance à α_0 . Posons $M_0 = N_{\gamma(0)}\gamma$ et soit $j : \mathbb{R} \times M_0 \rightarrow N_\gamma$ l'isométrie engendrée par le transport parallèle. Maintenant, définissons comme avant $\tilde{V}^\pm \in \mathbb{R} \times M_0$ par :

$$\begin{aligned} \tilde{V}^+ &= \{(t, v) | t > \frac{B}{2}\} \\ \tilde{V}^- &= \{(t, v) | t < -\frac{B}{2}\} \end{aligned}$$

et puis définissons $E^\pm \in \mathbb{R} \times M_0$ par $E^\pm = \partial V^\pm$, et orientons les de telle sorte que :

$$V^\pm = \text{Int}(E^\pm)$$

On voit que si $\tilde{\gamma}$ est une isométrie hyperbolique préservant la géodésique γ telle que $\|\tilde{\gamma}\| > K$, alors

$$\tilde{\gamma}(\text{Ext}(E^-)) \subseteq \text{Int}(E^+)$$

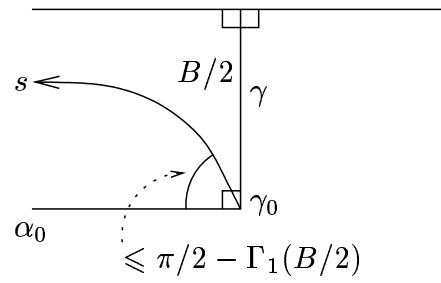


Figure 4.3.12

Comme, pour tout $s \in V^\pm$:

$$s\widehat{\gamma(0)}\alpha_0 \leq \frac{\pi}{2} - \Gamma_K(B/2)$$

on voit que (voir la figure 4.3.12) :

$$D^\pm \subseteq \text{Ext}(E^+) \cap \text{Ext}(E^-)$$

On voit alors que le sous-groupe de $\text{Isom}(M)$ engendré par α et par $\tilde{\gamma}$ est un groupe de Schottky, et le résultat en découle. \square

Ensuite, comme dans l'article de Gallo, Kapovich et Marden, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 4.3.15

Soit $K > 1$ et soit M une variété d'Hadamard à courbure pincée entre $-K$ et -1 . Soit Γ un sous-groupe de $\text{Isom}(M)$ ne comprenant que des éléments hyperboliques (et l'identité). Soit $\gamma \in \Gamma$ et soit p^* et p_* les points fixes de γ respectivement attractif et répulsif. Soit ensuite $\alpha, \beta \in \Gamma$. Si $\alpha(p^*) \neq p^*$ et si $\beta(p_*) \neq p_*$ alors il existe $N > 0$ tel que pour $n \geq N$ le sous-groupe de $\text{Isom}(M)$ engendré par $\gamma^{-n}\alpha\gamma^n$ et par β est un groupe de Schottky.

De la même façon, si $\alpha(p_*) \neq p_*$ et si $\beta(p^*) \neq p^*$, alors il existe $N > 0$ tel que pour $n \leq -N$ le sous-groupe de $\text{Isom}(M)$ engendré par $\gamma^{-n}\alpha\gamma^n$ et par β est un groupe de Schottky.

Démonstration : Dans le premier cas, comme α ne fixe pas p^* , on voit que les points fixes de $\gamma^{-n}\alpha\gamma^n$ tendent vers p_* lorsque n tend vers l'infini. Par hypothèse, p_* n'est pas un point fixe de β . De plus, α est différente de l'identité et est donc hyperbolique. Ensuite, on voit que :

$$\|\gamma^{-n}\alpha\gamma^n\| = \|\alpha\| > 0$$

et le lemme précédent nous permet de conclure. La deuxième partie découle d'un raisonnement identique. \square

Finalement, on peut démontrer ce dernier résultat technique :

Lemme 4.3.16

Soit M une variété d'Hadamard à courbure inférieure à -1 . Soit $p_1^*, p_{1*}, p_2^*, p_{2*}$ des points de $\partial_\infty M$ tous distincts. Il existe $B > 0$ tel que, si α_1 et α_2 sont des isométries hyperboliques de M telle que p_k^* et p_{k*} soient des points fixes de α_k pour chaque k et si $\|\alpha_1\|, \|\alpha_2\| > B$, alors le sous-groupe de $\text{Isom}(M)$ engendré par α_1 et α_2 est un groupe de Schottky.

Démonstration : Pour chaque k , soit U_k^* , U_{k*} des voisinages dans $M \cup \partial_\infty M$ respectivement de p_k^* , et de p_{k*} et supposons que U_1^* , U_{1*} , U_2^* et U_{2*} sont tous disjoints. Ensuite, soit α_k la géodésique reliant p_{k*} à p_k^* . Donc, pour chaque k :

$$\alpha_k(-\infty) = p_{k*}, \alpha_k(+\infty) = p_k^*$$

Posons $N_k = N_{\alpha_k(0)}\alpha_k$ et soit $i_k : \mathbb{R} \times N_0 \rightarrow N_\alpha$ l'isométrie engendrée par le transport parallèle. Soit $\pi_k : \mathbb{R} \times N_k \rightarrow \mathbb{R}$ la projection sur la première composante. Pour $T > 0$, définissons $\tilde{\Omega}_k^\pm(T) \subseteq \mathbb{R} \times N_k$ par :

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_k^+(T) &= \{(t, v) | t > T/2\} \\ \tilde{\Omega}_k^-(T) &= \{(t, v) | t < -T/2\} \end{aligned}$$

Définissons ensuite $\Omega_k^\pm(T) = (\text{Exp} \circ i_k)(\tilde{\Omega}_k)$. On voit que, pour T suffisamment grand :

$$\Omega_k^+(T) \subseteq U_k^*, \Omega_k^-(T) \subseteq U_{k*}$$

et on voit alors que si $\tilde{\alpha}_1$ et $\tilde{\alpha}_2$ sont des applications hyperboliques préservant respectivement α_1 et α_2 et telles que :

$$\|\alpha_1\|, \|\alpha_2\| > T$$

Alors, le sous-groupe de $\text{Isom}(M)$ engendré par α_1 et α_2 est un groupe de Schottky, et le résultat en découle. \square

◇

4.4 Des variétés compactes à courbure sectionnelle négative.

4.4.1 L'hyperbolicité des éléments de $\pi_1(M)$.

Dans [16], Gallo, Kapovich et Marden obtiennent une décomposition de Σ en pantalons telle que la θ -image du groupe fondamental de chaque pantalon soit un groupe de Schottky. Pour faire cela, ils utilisent des propriétés des applications de Möbius. Comme nous utilisons, à la place des applications de Möbius, des isométries d'une variété d'Hadamard, M , il faut refaire la construction pour vérifier qu'elle marche toujours dans notre cadre. En fait, comme on ne travaille qu'avec les applications hyperboliques (plus l'identité), on verra qu'on n'aura pas à s'inquiéter de la plupart des obstacles qu'ont rencontrés Gallo, Kapovich et Marden dans leur travail.

Dans un premier temps, on veut comprendre le groupe fondamental d'une variété compacte pointée à courbure sectionnelle inférieure ou égale à -1 . Soit (M, P_0) une telle variété pointée, et soit (\tilde{M}, \tilde{P}_0) son revêtement universel. D'abord, on rappelle le résultat suivant :

Lemme 4.4.1

Soit $\gamma \in \pi_1(M, P_0)$ différent de l'identité. Alors, il existe une unique géodésique fermée $\hat{\gamma}$ dans M librement homotope à γ .

Remarque : On voit que deux courbes $\gamma, \gamma' \in \pi_1(M, P_0)$ sont librement homotopes si et seulement si elles sont conjuguées dans $\pi_1(M, P_0)$. On obtient alors une bijection $[\gamma] \mapsto \hat{\gamma}$ entre les classes de conjugaison dans $\pi_1(M, P_0)$ et les géodésiques fermées dans M .

On obtient ensuite des informations sur l'action des éléments de $\pi_1(M, P_0)$ sur \tilde{M} :

Lemme 4.4.2

Soit $\gamma \in \pi_1(M, P_0)$ différent de l'identité. Notons également γ l'action de γ sur (\tilde{M}, \tilde{P}_0) . Alors, γ est hyperbolique et :

$$\|\gamma\| = \text{Long}(\gamma)$$

où $\text{Long}(\gamma)$ est la longueur de l'unique géodésique fermée dans M librement homotope à γ .

On voit alors que tout élément de $\pi_1(M, P_0) \setminus \{\text{Id}\}$ a une action hyperbolique sur (\tilde{M}, \tilde{P}_0) . De plus, comme M est compacte, son rayon d'injectivité est minoré par ρ , disons, et donc la norme de tout élément hyperbolique de $\pi_1(M, P_0)$ est également minorée par ρ . Dans ce qui suit alors, lorsqu'on va montrer qu'un élément de Γ est hyperbolique, il nous suffira de montrer que cet élément est différent de l'identité, ce qui simplifie les démonstrations de nos lemmes. Ensuite, si l'on a deux points $a, b \in \partial_\infty \tilde{M}$ alors γ ne peut pas envoyer a sur b et b sur a . En effet, notons η la géodésique dans M allant de a à b . On voit que si γ échange a et b , alors elle préserve η en reversant son orientation. Il en découle que γ a un point fixe à l'intérieur de η et donc à l'intérieur de M , ce qui n'est pas possible pour un élément hyperbolique. Finalement, on a le résultat suivant sur les points fixes des actions d'éléments de $\pi_1(M, P_0)$ sur \tilde{M} :

Lemme 4.4.3

Soit $\gamma, \gamma' \in \pi_1(M, P_0) \setminus \{\text{Id}\}$ et notons également γ et γ' les actions de ces éléments sur (\tilde{M}, \tilde{P}_0) . Supposons qu'ils ont un point fixe en commun. Alors, il existe $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$\gamma^m = \gamma'^n$$

En particulier, γ et γ' ont les deux points fixes en commun.

4.4.2 Une base de $\pi_1(\Sigma, P_0)$.

Soit $[(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)]$ un n-tuple de paires de lacets simples fermés dans σ correspondant aux poignées de Σ (voir la figure 4.4.13).

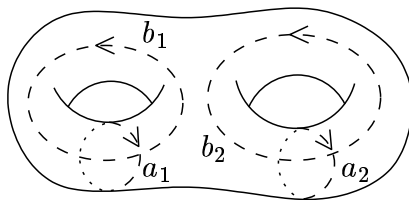


Figure 4.4.13

On voit que :

- (1) Pour tout i les courbes a_i et b_i sont des lacets simples.
- (2) Pour $i \neq j$ les paires (a_i, b_i) et (a_j, b_j) sont disjointes.
- (3) Pour tout i , la courbe a_i coupe la courbe b_i en un seul point. On va supposer que ce point commun de a_i et de b_i est le point de base de ces deux courbes, et qu'on note Q_i .

Chaque lacet fermé dans Σ définit une classe de conjugaison dans $\pi_1(\Sigma, P_0)$. En effet, soit a un lacet fermé dans Σ et soit Q le point de base de a . Soit x une courbe reliant P_0 à Q et posons :

$$a_x = x^{-1}ax$$

Soit ensuite y une autre courbe reliant P_0 à Q . On voit que $(y^{-1}x) \in \pi_1(\Sigma, P_0)$ et que :

$$a_y = (y^{-1}x)a_x(y^{-1}x)^{-1}$$

On remarque d'ailleurs que tout élément de la classe de conjugaison de a_x peut être construit de cette manière. Par abus de notation, on va noter également a la classe définie par a .

Pour chaque i , on définit la courbe c_i reliant P_0 à Q_i telle que :

- (1) Pour tout i , la courbe c_i ne s'intersecte pas (elle est injective).
- (2) Pour tout $i \neq j$ les courbes c_i et c_j sont disjointes (sauf en P_0).
- (3) Pour tout i, j la courbe c_i et la paire (a_j, b_j) sont disjointes (sauf en Q_i lorsque $i = j$).
- (4) Pour tout i , les courbes $(a_i)_{c_i}$ et $(b_i)_{c_i}$ sont homotopes à des lacets simples.

On voit que $\{(a_i)_{c_i}, (b_i)_{c_i}\}$ est une base de $\pi_1(\Sigma, P_0)$. Par la suite on va devoir choisir ces courbes différemment selon les besoins des lemmes différents, c'est-à-dire qu'on ne va pas utiliser les mêmes courbes c_i pour chaque lemme. Ceci ne pose pas de problème, car on ne s'intéresse qu'aux classes de conjugaison dans $\pi_1(\Sigma, P_0)$.

Ensuite, on voit que chaque paire (a, b) de lacets fermés dans Σ ayant le même point de base engendre une classe de conjugaison de paires dans $\pi_1(\Sigma, P_0)$. En effet, pour y définie comme avant, on pose :

$$(a, b)_y = (a_y, b_y)$$

Comme avant, on voit que tout élément de la classe de conjugaison de $(a, b)_y$ peut être construit de cette façon. On note $[a, b]$ la classe définie par (a, b) .

Maintenant, on voit que la θ -image de la classe $[a, b]$ définit une classe de conjugaison dans $\pi_1(M, Q_0)$ qu'on va noter $\theta[a, b]$. Ce dernier engendre une classe de conjugaison de sous-groupes de $\pi_1(M, Q_0)$ qu'on notera $\langle \theta[a, b] \rangle$.

En composant θ avec des homéomorphismes de Σ judicieusement choisis (des twists de Dehn), on va montrer qu'on peut supposer certaines propriétés de $\theta[a_i, b_i]$ et de $\langle \theta[a_i, b_i] \rangle$. D'abord, on a le résultat suivant :

Lemme 4.4.4

Il existe un homéomorphisme Ψ de Σ tel que $\langle \theta\Psi_[a_1, b_1] \rangle$ soit non-élémentaire.*

Démonstration : Comme Γ est non-élémentaire, en composant avec un homéomorphisme de Σ qui permute les générateurs de $\pi_1(\Sigma)$, on peut supposer que la classe $\theta(a_1)$ est hyperbolique. Posons $a = (a_1)_{c_1}$ et $b = (b_1)_{c_1}$ et ensuite posons $\alpha = \theta(a)$ et $\beta = \theta(b)$. Il y a deux cas à étudier :

(1) β n'a pas de point fixe en commun avec α . Dans ce cas, on prend $\Psi = \text{Id}$ et l'on obtient le résultat recherché.

(2) β a deux points fixes en commun avec α (en particulier, β peut être l'identité). Comme Γ est non-élémentaire, il existe $x \in \{(a_i)_{c_i}, (b_i)_{c_i} | 2 \leq i \leq n\}$ tel que $\xi = \theta(x)$ n'a pas de point fixe en commun avec α . On peut supposer que ax est un lacet simple.

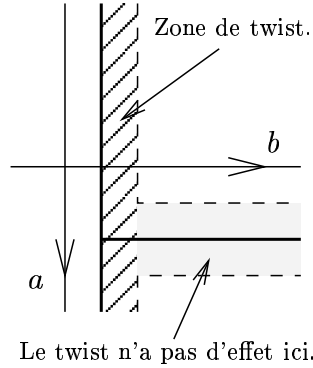


Figure 4.4.14

Soit T le twist de Dehn autour de ax tel que :

$$T_*a = a, \quad T_*b = bax$$

Ce twist de Dehn est illustré dans la figure 4.4.14. Or :

$$\text{Fixe}(\beta\alpha\xi) = \text{Fixe}(\alpha) \Leftrightarrow \text{Fixe}(\xi) = \text{Fixe}(\alpha)$$

et l'on voit alors que $\text{Fixe}(\beta\alpha\xi) \cap \text{Fixe}(\alpha) = \emptyset$. On pose alors $\Psi = T$ et l'on obtient l'homéomorphisme recherché. \square

4.4.3 La deuxième étape.

Comme dans [16], on va utiliser la première poignée comme pivot pour établir des propriétés des autres poignées. On va ensuite couper Σ le long des ces poignées pour obtenir une surface de genre 1 et à $2(n-1)$ trous. Dans cette section, on va montrer le résultat suivant :

Lemme 4.4.5

Soit $\theta : \pi_1(\Sigma, P_0) \rightarrow \pi_1(M, Q_0)$ non-élémentaire tel que la classe de conjugaison de groupe $\langle \theta[a_1, b_1] \rangle$ soit non-élémentaire. Soit i différent de 1. Alors, il existe un homéomorphisme Ψ tel que :

- (1) $\langle \theta\Psi_*[a_1, b_1] \rangle$ est non-élémentaire.
- (2) $\theta\Psi_*a_i$ et $\theta\Psi_*b_i$ sont hyperboliques.
- (3) Pour tout j différent de i et de 1 l'application Ψ_* laisse invariants a_j et b_j .

En utilisant le principe de récurrence, on obtient alors le résultat suivant :

Corollaire 4.4.6

Avec les mêmes hypothèses qu'auparavant, il existe un homéomorphisme Ψ tel que :

- (1) $\langle \theta\Psi_*[a_1, b_1] \rangle$ est non-élémentaire.
- (2) Pour tout i différent de 1, les classes $\theta\Psi_*a_i$ et $\theta\Psi_*b_i$ sont hyperboliques.

Comme avant, posons $a = (a_1)_{c_1}$ et $b = (b_1)_{c_1}$ et puis définissons :

$$\alpha = \theta(a), \beta = \theta(b)$$

Ensuite, pour i différent de 1, définissons :

$$x = (a_i)_{c_i}, \quad y = (b_i)_{c_i}$$

Finalement, posons $\xi = \theta(x)$ et $\eta = \theta(y)$. On changeant au besoin l'orientation de y , on peut supposer que la courbe yb est homotope à un lacet simple.

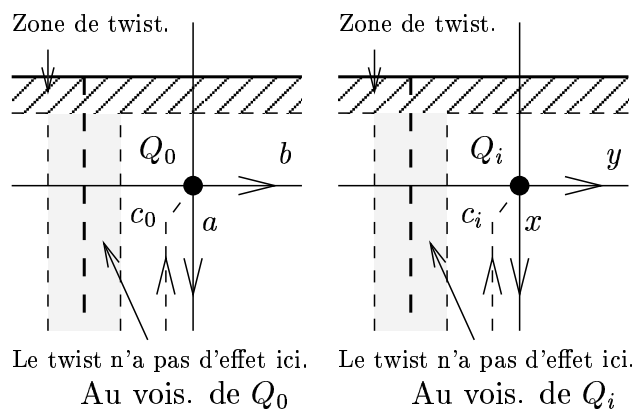


Figure 4.4.15

Posons $d_0 = yb$. Soit T_0 le twist de Dehn autour de d_0 tel que, pour tout n :

$$\begin{aligned} (T_0^n)_*a &= d_0^n a, & (T_0^n)_*b &= b \\ (T_0^n)_*x &= d_0^n x, & (T_0^n)_*y &= y \end{aligned}$$

De plus, pour tout j différent de i et de j , comme d_0 reste loin de (a_j, b_j) , on voit que $(T_0)_*$ laisse cette paire invariante. Ce twist de Dehn est illustré dans la figure 4.4.15.

Ensuite, soit T_a le twist de Dehn autour de a tel que, pour tout k :

$$\begin{aligned} (T_a^k)_*a &= a, & (T_a^k)_*b &= ba^k \\ (T_a^k)_*x &= x, & (T_a^k)_*y &= y \end{aligned}$$

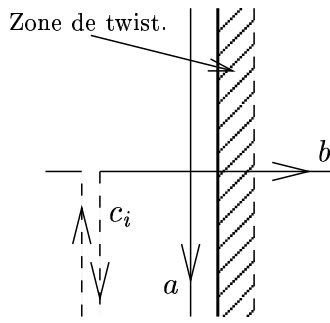


Figure 4.4.16

Comme avant, pour tout j différent de 1 et de i , comme a reste loin de (a_j, b_j) , $(T_a)_*$ laisse cette paire invariante. Ce twist est illustré dans la figure 4.4.16. On définit alors $\Psi_{k,n} : \Sigma \rightarrow \Sigma$ par :

$$\Psi_{k,n} = T_a^k T_0^n T_a^{-k}$$

et l'on voit alors que :

$$\begin{aligned} (\Psi_{k,n})_* a &= d_k^n a, & (\Psi_{k,n})_* b a^k &= b a^k \\ (\Psi_{k,n})_* x &= d_k^n x, & (\Psi_{k,n})_* y &= y \end{aligned}$$

Où $d_k = y b a^k$. En voit en plus que $\Psi_{k,n}$ laisse la paire (a_j, b_j) invariante pour tout j différent de i et de 1. Il suffit de montrer alors qu'il existe k et n tels que $\Psi_{k,n}$ ait les propriétés qu'on recherche. On obtient le résultat suivant :

Lemme 4.4.7

Il existe k et n tels que :

- (1) $\beta \alpha^k$ hyperbolique.
- (2) $\delta_k = \eta \beta \alpha^k$ hyperbolique.
- (3) $\delta_k^n \alpha$ hyperbolique et n'a pas de point fixe en commun avec $\beta \alpha^k$.
- (4) $\delta_k^n \xi$ hyperbolique.

Démonstration :

(1) En effet, comme $\langle \alpha, \beta \rangle$ non élémentaire, on voit que pour tout k , l'élément $\beta \alpha^k$ est différent de l'identité, car, sinon, β et α auraient les mêmes points fixes, ce qui est absurde. En particulier, il en découle que $\beta \alpha^k$ hyperbolique pour tout k .

(2) Supposons qu'il existe $k \neq k'$ tels que δ_k et $\delta_{k'}$ ne soient pas hyperboliques. Alors, dans ce cas, on voit que :

$$\alpha^{k-k'} = (\eta \beta \alpha^{k'})^{-1} (\eta \beta \alpha^k) = \delta_{k'}^{-1} \delta_k = \text{Id}$$

et, en particulier, on voit que $\alpha = \text{Id}$, ce qui est absurde. Donc il existe au plus un k pour lequel $\delta_k = \text{Id}$, et donc il existe K tel que pour $|k| \geq K$, l'application δ_k soit hyperbolique.

(3) Supposons qu'il existe $n \neq n'$ et un point P tels que :

$$\delta_k^n \alpha(P) = \delta_k^{n'} \alpha(P) = \beta \alpha^k(P) = P$$

Alors, d'abord, on voit que :

$$\begin{aligned} \delta_k^{n-n'}(P) &= (\delta_k^n \alpha)(\delta_k^{n'} \alpha)^{-1}(P) = P \\ \Rightarrow \delta_k(P) &= P \end{aligned}$$

et donc :

$$\alpha(P) = \delta_k^{-n}(\delta_k^n \alpha)(P) = P$$

et finalement, on voit que

$$\beta(P) = (\beta \alpha^k) \alpha^{-k}(P) = P$$

et donc α et β ont P comme point fixe commun, ce qui est absurde. Il en découle qu'il existe au plus un n pour lequel $\delta_k^n \alpha$ a un point fixe en commun avec $\beta \alpha^k$. On voit alors qu'il existe $N_1(k)$, qui dépend de k , tel que pour tout $|n| \geq N_1(k)$, l'application $\delta_k^n \alpha$ n'ait pas de point fixe en commun avec $\beta \alpha^k$. En particulier, pour tout tel n , l'application $\delta_k^n \alpha$ est différent de l'identité et est donc hyperbolique.

(4) comme dans (2), supposons qu'il existe $n \neq n'$ tels que :

$$\delta_k^n \xi = \delta_k^{n'} \xi = \text{Id}$$

Alors, on voit que :

$$\delta_k^{n-n'} = (\delta_k^n \xi)(\delta_k^{n'} \xi)^{-1} = \text{Id}$$

ce qui est absurde. Il en découle qu'il existe au plus un n pour lequel $\delta_k^n \xi$ n'est pas hyperbolique, et donc il existe $N_2(k) \geq N_1(k)$ tel que pour $|n| \geq N_2(k)$, l'application $\delta_k^n \xi$ soit hyperbolique. \square

Démonstration du lemme 4.4.5 : On prend k et n comme dans le lemme précédent. Si η est hyperbolique, on prend $\Psi = \Psi_{k,n}$, et l'on obtient le résultat recherché. Sinon, $\eta = \text{Id}$, et l'on peut trouver un twist de Dehn T autour de x tel que $Ty = xy$ et qui laisse toutes les autres courbes invariantes. On voit que :

$$\theta(\Psi_{k,n})_* T_* \eta = \theta \Psi_{k,n} \xi \eta = \delta_k^n \xi$$

ce qui est hyperbolique. On pose alors $\Psi = \Psi_{k,n} \circ T$ et l'on obtient de nouveau le résultat recherché. \square

4.4.4 La troisième étape.

Suivant [16], on va ensuite couper la surface Σ le long des courbes a_i pour i différent de 1. On obtient alors une surface de genre 1 et à $2(n-1)$ composantes de bord. C'est-à-dire qu'il existe une surface Σ_{2n-2} de genre 1 et à $2(n-1)$ composantes de bord, et une application continue $\Phi : \Sigma_{2n-2} \rightarrow \Sigma$ telles que :

- (1) Φ soit un homéomorphisme entre l'intérieur de Σ_{2n-2} et $\Sigma \setminus (a_2 \cup \dots \cup a_n)$.
- (2) Pour chaque i différent de 1, il existe deux composantes de bord de Σ_{2n-2} qui sont envoyées homéomorphiquement par Φ sur a_i . On va noter ces deux composantes \tilde{a}_i^\pm .

On va orienter le bord de Σ_{2n-2} tel que l'intérieur de la surface se situe à sa droite. Pour tout $i \neq 1$ on note Q_i le point de base de a_i . Pour chaque i il existe une unique courbe \tilde{b}_i reliant les deux composantes connexes de $\Phi^{-1}(a_i)$ telle que $\Phi_*\tilde{b}_i = b_i$. Ensuite, posons $\tilde{P}_0 = \Phi^{-1}(P_0)$ et définissons l'homomorphisme $\theta_{2n-2} : \pi_1(\Sigma_{2n-2}, \tilde{P}_0) \rightarrow \pi_1(M, Q_0)$ par :

$$\theta_{2n-2} = \theta \circ \Phi_*$$

On voit que pour chaque composante connexe \tilde{a}_i du bord de Σ_{2n-2} , la classe $\theta_{2n-2}(\tilde{a}_i)$ est hyperbolique. De plus, pour chaque i , si \tilde{a}_i^+ et \tilde{a}_i^- sont les composantes de l'image inverse de a_i , alors les classes de conjugaison $\theta_{2n-2}(\tilde{a}_i^+)$ et $\theta_{2n-2}(\tilde{a}_i^-)$ coïncident.

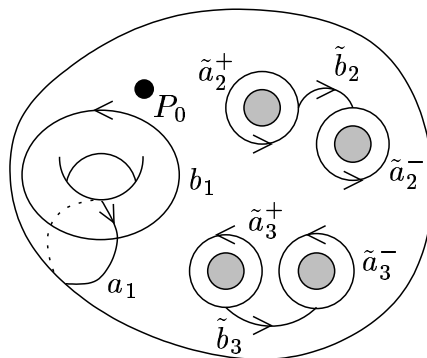


Figure 4.4.17

Par abus de notation, on note $\tilde{a}_1 = \Phi^*a_1$ et $\tilde{b}_1 = \Phi^*b_1$. Cette construction est illustrée dans la figure 4.4.17. On va montrer le résultat suivant :

Lemme 4.4.8

Soit $(R, \partial R, P_0)$ une surface pointée à bord de genre 1 et soit a_1 et b_1 deux lacets simples sur R correspondant à la seule poignée de R telles que a_1 traverse b_1 en un seul point, qui est le point de base commun de a_1 et de b_1 . Soit $\theta : \pi_1(R, P_0) \rightarrow \pi_1(M, Q_0)$ un homomorphisme et supposons que $\langle \theta[a_1, b_1] \rangle$ est non-élémentaire. Soient x_1 et y_1 deux composantes du bord de R et supposons que $\theta(x_1)$ et $\theta(y_1)$ hyperboliques. Finalement, soit c une courbe simple reliant x_1 à y_1 qui est disjoint de x_1 , de y_1 , de a_1 et de b_1 sauf éventuellement à ses extrémités (voir la figure 4.4.18).

Alors, pour tout $M > 0$, il existe un homéomorphisme $\Psi : R \rightarrow R$ de R tel que :

- (1) $\langle \theta\Psi_*[a_1, b_1] \rangle$ est non-élémentaire.
- (2) Si z une composante de bord différent de x_1 et de y_1 , alors Ψ laisse z invariante.
- (3) $\langle \theta\Psi_*[x_1, y_1] \rangle$ est un groupe de Schottky.
- (4) $\|\theta\Psi_*(x_1c^{-1}y_1c)\| > M$.

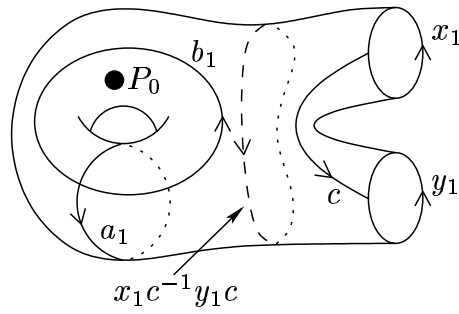


Figure 4.4.18

Ce lemme-ce va nous permettre d'utiliser le principe de récurrence pour décomposer Σ_{2n-2} en pantalons tel que la θ_{2n-2} -image du groupe fondamental de chaque pantalon soit un groupe de Schottky. Afin d'obtenir une décomposition en forme d'arbre, on applique le lemme au départ aux paires de composantes du bord $(\tilde{a}_i^+, \tilde{a}_i^-)$ pour chaque i . Ensuite, on applique le lemme comme on veut jusqu'à ce qu'on obtient une surface Σ_2 de genre 1 et à deux composantes de bord. Une telle surface peut être décomposée en deux pantalons, et il va falloir employer une méthode un peu différente, précisée dans la section suivante, afin d'assurer que les θ_{2n-2} -images des groupes fondamentaux des deux pantalons ainsi obtenus soient bien des groupes de Schottky (et en fait, c'est pour ça qu'on exige le résultat (4) dans le lemme 4.4.8).

Soit c_a et c_x des courbes simples disjointes et disjointes de (a_1, b_1) de (x_1, y_1) et de c sauf éventuellement aux extrémités telles que c_a relie P_0 et le point de base commun de a_1 et de b_1 et c_x relie P_0 et le point de base de x_1 . Maintenant, posons :

$$\begin{aligned} a &= c_a^{-1} a_1 c_a, & b &= c_a^{-1} b_1 c_a \\ x &= c_x^{-1} x_1 c_x, & y &= (c c_x)^{-1} y_1 (c c_x) \end{aligned}$$

Posons maintenant $\alpha = \theta_{2n-2}(a)$, $\beta = \theta_{2n-2}(b)$, $\xi = \theta_{2n-2}(x)$ et $\eta = \theta_{2n-2}(y)$. D'abord, on a le lemme préliminaire suivant :

Lemme 4.4.9

En échangeant au besoin x et y , on peut supposer qu'il existe K_1 tel que pour $|k| \geq K_1$ l'application $\delta_k = \eta \beta \alpha^k$ n'a pas de point fixe en commun avec ξ .

Démonstration : Supposons qu'il existe $k \neq k'$ tels que, pour chaque $P \in \text{Fixe}(\xi)$:

$$\eta \beta \alpha^k(P) = P, \eta \beta \alpha^{k'}(P) = P$$

Alors :

$$\begin{aligned} \alpha^{k-k'}(P) &= (\eta \beta \alpha^{k'})^{-1} (\eta \beta \alpha^k)(P) = P \\ \Rightarrow \alpha(P) &= P \end{aligned}$$

et donc :

$$\text{Fixe}(\alpha) = \text{Fixe}(\xi)$$

Ensuite, supposons qu'il existe $\hat{k} \neq \hat{k}'$ tels que, pour chaque $P \in \text{Fixe}(\eta)$:

$$\xi\beta\alpha^k(P) = P, \xi\beta\alpha^{k'}(P) = P$$

Alors, pour les mêmes raisons, on voit que :

$$\text{Fixe}(\alpha) = \text{Fixe}(\eta)$$

et donc, en particulier, $\text{Fixe}(\eta) = \text{Fixe}(\xi)$. On voit alors que pour chaque $P \in \text{Fixe}(\xi) = \text{Fixe}(\eta)$:

$$\beta(P) = \eta^{-1}(\eta\beta\alpha^k)\alpha^{-k}(P) = P$$

et donc :

$$\text{Fixe}(\beta) = \text{Fixe}(\xi) = \text{Fixe}(\alpha)$$

ce qui est absurde. On voit alors que, soit il existe au plus un k tel que $\eta\beta\alpha^k$ ait les mêmes points fixes que ξ , soit il existe au plus un k tel que $\xi\beta\alpha^k$ ait les mêmes points fixes que η . Donc, en échangeant éventuellement x et y , on voit qu'il existe K_1 tel que pour $|k| \geq K_1$, l'application $\delta_k = \eta\beta\alpha^k$ n'ait pas de point fixe en commun avec ξ . Comme $\xi, \delta_k \in \Gamma$, les ensembles $\text{Fixe}(\delta_k)$ et $\text{Fixe}(\xi)$ sont, soit disjoints, soit identiques. Le résultat en découle. \square

Maintenant, on changeant l'orientation de b s'il le faut, on peut supposer que yb est homotope à un lacet simple. Posons $d_0 = yb$.

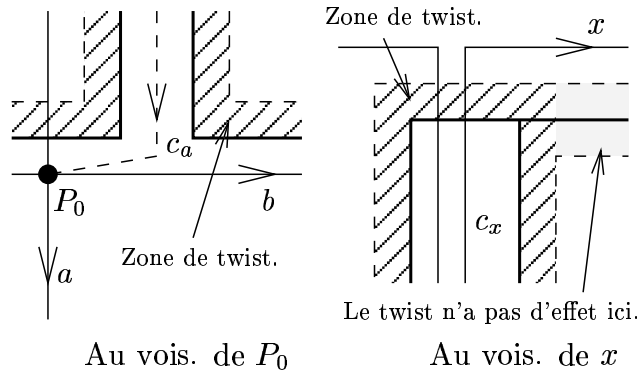


Figure 4.4.19

Soit T_0 le twist de Dehn autour de d_0 tel que, pour tout n :

$$\begin{aligned} (T_0^n)_*a &= d_0^n a, & (T_0^n)_*b &= b \\ (T_0^n)_*x &= d_0^n x d_0^{-n}, & (T_0^n)_*y &= y \end{aligned}$$

De plus, pour z une composante du bord différent de x_1 et de y_1 , on peut supposer que ce twist de Dehn T_0 laisse z invariant. Ce twist de Dehn est illustré dans la figure 4.4.19. Ensuite, comme avant, on peut choisir un twist de Dehn T_a autour de a tel que, pour tout k :

$$\begin{aligned} (T_a^k)_*a &= a, & (T_a^k)_*b &= ba^k \\ (T_a^k)_*x &= x, & (T_a^k)_*y &= y \end{aligned}$$

et, de la même façon, pour z une composante du bord différent de x_1 et de y_1 , le twist de Dehn T_a laisse z invariant. On définit alors $\Psi_{k,n} : \Sigma_{2n-2} \rightarrow \Sigma_{2n-2}$ par :

$$\Psi_{k,n} = T_a^k T_0^n T_a^{-k}$$

et l'on voit alors que :

$$\begin{aligned} (\Psi_{k,n})_* a &= d_k^n a, & (\Psi_{k,n})_* ba^k &= ba^k \\ (\Psi_{k,n})_* x &= d_k^n x d_k^{-n}, & (\Psi_{k,n})_* y &= y \end{aligned}$$

Où $d_k = yba^k$. On a le résultat suivant :

Lemme 4.4.10

Pour tout $M > 0$, il existe k et n tels que :

- (1) $\beta\alpha^k$ hyperbolique.
- (2) $\delta_k = \eta\beta\alpha^k$ hyperbolique.
- (3) $\delta_k^n \alpha$ hyperbolique et n'a pas de point fixe en commun avec $\beta\alpha^k$.
- (4) $\delta_k^n \xi \delta_k^{-n} \eta$ hyperbolique et n'a pas de point fixe en commun avec η .
- (5) $\langle \delta_k^n \xi \delta_k^{-n}, \eta \rangle$ un groupe de Schottky.
- (6) $\|\delta_k^n \xi \delta_k^{-n} \eta\| \geq M$.

Démonstration : Les résultats (1),(2) et (3) découlent du même raisonnement que dans le lemme 4.4.8. En particulier, on a montré qu'il existe $K_2 \geq K_1$ tel que pour $|k| \geq K_2$, les résultats (1) et (2) soient vrais. Ensuite, pour tout $|k| \geq K_2$ il existe $N_1(k)$, qui dépend de k tel que pour $|n| \geq N_1(k)$, le troisième résultat soit vrai.

(4) Supposons qu'il existe $k \neq k'$ et P tels que :

$$\eta\beta\alpha^k(P) = \eta\beta\alpha^{k'}(P) = \eta(P) = P$$

Alors :

$$\begin{aligned} \alpha^{k-k'}(P) &= (\eta\beta\alpha^{k'})^{-1}(\eta\beta\alpha^k)(P) = P \\ \Rightarrow \alpha(P) &= P \end{aligned}$$

et donc :

$$\beta(P) = \eta^{-1}(\eta\beta\alpha^k)\alpha^{-k}(P) = P$$

et donc P est un point fixe de α et de β , ce qui est absurde. On voit alors qu'il existe au plus un k pour lequel $\delta_k = \eta\beta\alpha^k$ a un point fixe en commun avec η . Il en découle qu'il existe $K_3 \geq K_2$ tel que pour $|k| \geq K_3$ l'application δ_k n'ait pas de point fixe en commun avec η .

Maintenant, supposons qu'il existe $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et un point P tels $n_i \uparrow \infty$ lorsque i tend vers l'infini et que pour tout i :

$$\delta_k^{n_i} \xi \delta_k^{-n_i}(P) = \eta(P) = P$$

Notons ξ_* et ξ^* les points fixes respectivement répulsif et attractif de ξ , on voit que les points fixes de $\delta_k^{n_i} \xi \delta_k^{-n_i}$ sont $\delta_k^{n_i}(\xi_*)$ et $\delta_k^{n_i}(\xi^*)$. Donc, pour tout i :

$$P \in \delta_k^{n_i}(\text{Fixe}(\xi))$$

et donc, en prenant la limite lorsque i tend vers l'infini, on voit que :

$$P \in \text{Fixe}(\delta_k)$$

On voit alors que :

$$P \in \text{Fixe}(\delta_k) \cap \text{Fixe}(\eta) \neq \emptyset$$

ce qui est absurde. On voit alors que pour tout $k \geq K_3$ et existe $N_2(k) \geq N_1(k)$, qui dépend de k , tel que pour $|n| \geq N_2(k)$, l'application $\delta_k^n \xi \delta_k^{-n}$ n'ait pas de point fixe en commun avec η , et donc l'application $\delta_k^n \xi \delta_k^{-n} \eta$ n'ait pas de point fixe en commun avec η non plus.

(5) Dans l'étape précédente, on a montré que :

$$\text{Fixe}(\delta_k) \cap \text{Fixe}(\eta) = \emptyset$$

De plus, par le lemme 4.4.9, on sait que :

$$\text{Fixe}(\delta_k) \cap \text{Fixe}(\xi) = \emptyset$$

Mais, on sait que, pour tout n :

$$\|\delta_k^n \xi \delta_k^{-n}\| = \|\xi\| > 0$$

et que :

$$\text{Fixe}(\delta_k^n \xi \delta_k^{-n}) = \delta_k^n(\text{Fixe}(\xi))$$

Donc, si l'on note δ_{k*} et δ_k^* les points fixes respectivement répulsif et attractif de δ_k on voit que :

$$\begin{aligned} \text{Fixe}(\delta_k^n \xi \delta_k^{-n}) &\rightarrow \delta_k^* \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty \\ \text{Fixe}(\delta_k^n \xi \delta_k^{-n}) &\rightarrow \delta_{k*} \text{ lorsque } n \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

et il en découle par le corollaire 4.3.15 qu'il existe $N_3(k) \geq N_2(k)$ tel que pour $|n| \geq N_3(k)$ le groupe engendré par $\langle \delta_k^n \xi \delta_k^{-n}, \eta \rangle$ soit un groupe de Schottky.

(6) Comme :

$$\text{Fixe}(\xi) \cap \text{Fixe}(\delta_k), \text{Fixe}(\eta) \cap \text{Fixe}(\delta_k) = \emptyset$$

On voit par le lemme 4.2.11 qu'il existe $N_4(k) \geq N_3(k)$ tel que pour $|n| \geq N_4(k)$:

$$\|\delta_k^n \xi \delta_k^{-n} \eta\| \geq M$$

et le résultat en découle. \square

On peut maintenant démontrer le lemme 4.4.8 :

Démonstration du lemme 4.4.8 : On prend k et n comme dans le lemme précédent et l'on pose $\Psi = \Psi_{k,n}$. Puisque :

$$\begin{aligned} \|\theta \Psi_*(x_1 c^{-1} y_1 c^{-1})\| &= \|\theta \Psi_*(xy)\| \\ &= \|\theta(d_k^n x d_k^{-n} y)\| \\ &= \|\delta_k^n \xi \delta_k^{-n} \eta\| \end{aligned}$$

le résultat en découle. \square

4.4.5 La dernière étape.

Maintenant, en partant de la surface Σ , et en le coupant selon la deuxième partie et puis en enlevant successivement des pantalons selon les prescriptions de la troisième partie, on obtient $(\Sigma_2, \partial\Sigma_2, P_0)$ une surface pointée de genre 1 et ayant deux composantes de bord. De plus, on a $\theta_2 : \pi_1(\Sigma_2, P_0) \rightarrow \pi_1(M, Q_0)$ un homomorphisme non-élémentaire. Soit a_1 et b_1 deux lacets simples sur Σ_2 correspondant à la seule poignée dans cette surface telles que a_1 traverse b_1 en un seul point, qui est le point de base commun de a_1 et de b_1 . Notons x_1 et y_1 les deux composantes de bord de Σ_2 et orientons les de telle sorte que la surface se situe à leur droite. La surface Σ_2 se décompose en un pantalon et un tore ôté d'un disque. On peut supposer que la courbe le long de laquelle le tore est recollé au pantalon est librement homotope à yx et qu'elle est orientée de telle sorte que le pantalon se trouve à son gauche. Notons c_1 ce lacet simple. On peut supposer que a_1 et b_1 sont orientés de telle sorte que $a^{-1}b^{-1}ab$ soit librement homotope à c_1 (voir la figure 4.4.20).

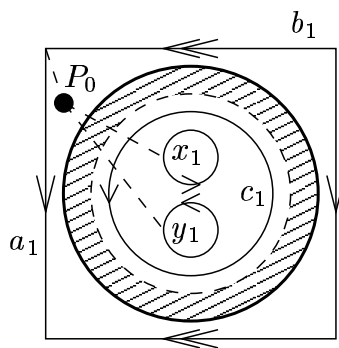


Figure 4.4.20

Cette dernière section a pour but de montrer le résultat suivant :

Lemme 4.4.11

Il existe un homéomorphisme Ψ de Σ_2 tel que $\langle \theta_2 \Psi_*[x_1, y_1] \rangle$ et $\langle \theta_2 \Psi_*[a_1^{-1}b_1a_1, b_1] \rangle$ soient des groupes de Schottky.

En remplaçant θ_2 par $\theta_2 \Psi_*$, on voit que si l'on coupe Σ_2 le long de b_1 et de c_1 , on obtient une décomposition de Σ_2 en deux pantalons dont la θ_2 -image de chaque pantalon est un groupe de Schottky.

Soit maintenant c_a , c_x et c_y des courbes simples reliant P_0 respectivement au point de base commun de a_1 et de b_1 , au point de base de x_1 et au point de base de y_1 . On suppose que ces courbes sont mutuellement disjointes et disjointes de a_1 , de b_1 , de x_1 et de y_1 , sauf éventuellement à leurs extrémités. On pose maintenant :

$$\begin{aligned} a &= c_a^{-1} a_1 c_a, & b &= c_a^{-1} b_1 c_a \\ x &= c_x^{-1} x_1 c_x, & y &= c_y^{-1} y_1 c_y \end{aligned}$$

On peut supposer que $c = a^{-1}b^{-1}ab$ librement homotope à $(yx)^{-1}$. Posons ensuite :

$$\alpha = \theta_2(a), \beta = \theta_2(b), \xi = \theta_2(x), \eta = \theta_2(y), \sigma = \theta_2(c)$$

On sait que $\langle \xi, \eta \rangle$ est un groupe de Schottky et que $\langle \alpha, \beta \rangle$ est non-élémentaire. De plus, par la sixième partie du lemme 4.4.10, on peut supposer que $\|\eta\xi\| = \|c\|$ est aussi grande qu'on veut. En particulier, on peut supposer que :

$$\|\eta\xi\| > \|\eta\|, \|\xi\|$$

et donc $\eta\xi$ n'est conjuguée ni à η , ni à ξ . Soit T_c le twist de Dehn autour de c tel que, pour tout m :

$$\begin{aligned} T_c^m a &= a, & T_c^m b &= b \\ T_c^m x &= c^m x c^{-m} & T_c^m y &= c^m y c^{-m} \end{aligned}$$

On a ensuite le résultat suivant :

Lemme 4.4.12

Il existe m tel que $J_m = \sigma^m \xi \sigma^{-m} \beta$ soit hyperbolique.

Démonstration : Supposons qu'il existe $m \neq 0$ tel que $J_m = J_0 = \text{Id}$. Alors :

$$\begin{aligned} J_m &= J_m J_0^{-1} \\ &= \sigma^m \xi \sigma^{-m} \beta \beta^{-1} \xi^{-1} \\ &= \sigma^m \xi \sigma^{-m} \xi^{-1} \end{aligned}$$

Ensuite, on voit que, pour tout m :

$$\begin{aligned} \sigma^m \xi \sigma^{-m} \xi^{-1} &= \text{Id} \\ \Rightarrow \sigma^m \xi \sigma^{-m} &= \xi \\ \Rightarrow \text{Fixe}(\sigma^m \xi \sigma^{-m}) &= \text{Fixe}(\xi) \\ \Rightarrow \sigma^m(\text{Fixe}(\xi)) &= \text{Fixe}(\xi) \\ \Rightarrow \text{Fixe}(\xi) &= \text{Fixe}(\sigma) \\ \Rightarrow \text{Fixe}(\xi) &= \text{Fixe}(\eta\xi) \\ \Rightarrow \text{Fixe}(\xi) &= \text{Fixe}(\eta) \end{aligned}$$

ce qui est absurde, car $\langle \xi, \eta \rangle$ est un groupe de Schottky. Donc, soit $J_0 \neq \text{Id}$, soit $J_1 \neq \text{Id}$ et le résultat en découle. \square

On voit alors qu'en remplaçant θ par $\theta \circ (T_c)_*$ s'il le faut on peut supposer que $J = \xi\beta$ est différent de l'identité.

On peut supposer que xb est un lacet simple et, comme avant, en utilisant des twists de Dehn, pour tout k et n , on peut construire un homéomorphisme $\Psi_{k,n}$ de Σ_2 tel que :

$$\begin{aligned} (\Psi_{k,n})_* a &= d_k^n a, & (\Psi_{k,n})_* b a^k &= b a^k \\ (\Psi_{k,n})_* x &= x, & (\Psi_{k,n})_* y &= d_k^{-n} y d_k^n \end{aligned}$$

Où $d_k = x b a^k$. On a le résultat suivant :

Lemme 4.4.13

Il existe k et n tels que $\langle \gamma_k, (\delta_k^n \alpha)^{-1} \gamma_k^{-1} (\delta_k^n \alpha) \rangle$ et $\langle \xi, \delta_k^{-n} \eta \delta_k^n \rangle$ soient des groupes de Schottky, où :

$$\gamma_k = \beta \alpha^k, \delta_k = \xi \gamma_k$$

Démonstration :

(1) Comme :

$$\|\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\| = \|\eta\xi\| > \|\xi\|$$

On voit que :

$$\begin{aligned} \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} &\neq \xi \\ \Rightarrow \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\xi^{-1} &\neq \text{Id} \end{aligned}$$

(2) Maintenant, supposons qu'il existe $k \neq k'$ et P tels que :

$$\beta\alpha^k(P) = \beta\alpha^{k'}(P) = P$$

Alors, on voit que :

$$\alpha^{k-k'}(P) = (\beta\alpha^{k'})^{-1}(\beta\alpha^k)(P) = P$$

et donc :

$$\alpha(P) = P$$

Ensuite, on voit que :

$$\beta(P) = (\beta\alpha^k)\alpha^{-k}(P) = P$$

et donc :

$$P \in \text{Fixe}(\beta) \cap \text{Fixe}(\alpha) \neq \emptyset$$

ce qui est absurde. On voit alors qu'il existe au plus un k pour lequel $\gamma_k = \beta\alpha^k$ fixe un point donné, P . Donc il existe K_1 tel que pour $|k| \geq K_1$, l'application γ_k n'ait pas de point fixe en commun, ni avec ξ , ni avec η , ni avec $\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\xi^{-1}\alpha$ (en supposant que ce dernier est hyperbolique). En conjuguant ce dernier avec α , on voit que pour $|k| \geq K_1$, $\alpha\gamma_k\alpha^{-1}$ n'a pas de point fixe en commun avec $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\xi^{-1}$ (qui est différent de l'identité par (1)). De plus, on voit que pour $|k| \geq K_1$, l'application $\delta_k = \xi\gamma_k$ n'a pas de point fixe en commun avec ξ , et non plus avec γ_k .

(3) Maintenant, si $\text{Fixe}(\delta_k) = \text{Fixe}(\eta)$, alors :

$$\begin{aligned} [\delta_k\eta] &= \text{Id} \\ \Rightarrow \delta_k^{-n}\eta\delta_k^n &= \eta \end{aligned}$$

et donc, en particulier, $\langle \xi, \delta_k^{-n}\eta\delta_k^n \rangle = \langle \xi, \eta \rangle$ est un groupe de Schottky pour tout n . Sinon, $\text{Fixe}(\delta_k) \cap \text{Fixe}(\eta) = \emptyset$. Notons δ_{k*} et δ_k^* les points fixes respectivement répulsif et attractif de δ_k . On voit que :

$$\begin{aligned} \text{Fixe}(\delta_k^{-n}\eta\delta_k^n) &\rightarrow \delta_{k*} \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty \\ \text{Fixe}(\delta_k^{-n}\eta\delta_k^n) &\rightarrow \delta_k^* \text{ lorsque } n \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

De plus, $\|\delta_k^{-n}\eta\delta_k^n\| = \|\eta\| > 0$. Donc, puisque $\text{Fixe}(\delta_k) \cap \text{Fixe}(\xi) \neq \emptyset$, on voit par le corollaire 4.3.15 qu'il existe $N_1(k)$ tel que pour $|n| \geq N_1(k)$ le groupe $\langle \xi, \delta_k^{-n}\eta\delta_k^n \rangle$ soit un groupe de Schottky.

(4) Comme $\text{Fixe}(\gamma_k) \cap \text{Fixe}(\delta_k) = \emptyset$, on voit que :

$$\begin{aligned} \text{Fixe}((\delta_k^n \alpha)^{-1} \gamma_k (\delta_k^n \alpha)) &\rightarrow \alpha^{-1}(\delta_{k*}) \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty \\ \text{Fixe}((\delta_k^n \alpha)^{-1} \gamma_k (\delta_k^n \alpha)) &\rightarrow \alpha^{-1}(\delta_k^*) \text{ lorsque } n \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

Supposons maintenant qu'il existe P tel que :

$$\gamma_k \alpha^{-1}(P) = \alpha^{-1}(P), \delta_k(P) = \xi \gamma_k(P) = P$$

Alors, on voit que :

$$\alpha \gamma_k \alpha^{-1}(P) = P$$

et donc :

$$\begin{aligned} P &= (\alpha \gamma_k \alpha^{-1})(\xi \gamma_k)^{-1}(P) \\ &= \alpha \beta \alpha^{k-1} \alpha^{-k} \beta \xi^{-1}(P) \\ &= \alpha \beta \alpha^{-1} \beta^{-1} \xi^{-1}(P) \end{aligned}$$

Donc $\alpha \gamma_k \alpha^{-1}$ a un point fixe en commun avec $\alpha \beta \alpha^{-1} \beta^{-1} \xi^{-1}$, ce qui est absurde par (2). On voit alors que :

$$\alpha^{-1}(\text{Fixe}(\delta_k)) \cap \text{Fixe}(\gamma_k) = \emptyset$$

Comme $\|(\delta_k^n \alpha)^{-1} \gamma_k (\delta_k^n \alpha)\| = \|\gamma_k\| > 0$ il en découle par le corollaire 4.3.15 qu'il existe $N_2(k) \geq N_1(k)$ tel que pour $|n| \geq N_2(k)$ le groupe $\langle \gamma_k, (\delta_k^n \alpha)^{-1} \gamma_k (\delta_k^n \alpha) \rangle$ soit un groupe de Schottky. \square

Maintenant, pour démontrer le lemme 4.4.11, il suffit de prendre k et n comme dans le lemme précédent et de poser $\Psi = \Psi_{k,n}$.

◇

4.5 Homomorphismes du groupe fondamental et le problème de Plateau.

4.5.1 La décomposition en pantalons.

Dans cette section, on va démontrer le théorème 4.1.4 en utilisant la construction de Gallo, Kapovich et Marden. Afin de comprendre la condition sur l'existence d'un relevé $\hat{\theta}$ de θ dans $\widetilde{\text{Hômeo}}^+(\partial_\infty \tilde{M})$, on va étudier dans la suite la topologie du groupe d'homéomorphismes de la sphère.

Soit Σ une surface de Riemann de genre g et soit M une variété compacte de dimension 3 et à courbure sectionnelle strictement négative. Soit $p_0 \in \Sigma$ et $q_0 \in M$ des points de base, et soit $\theta : \pi_1(\Sigma, p_0) \rightarrow \pi_1(M, q_0)$ un homomorphisme non-élémentaire.

Soit A_g un arbre trivalent à $2g-2$ sommets. C'est-à-dire que A_g contient $g-2$ sommets, dits des sommets *internes* qui sont reliés à 3 autres sommets et g sommets, dits des sommets *externes* qui ne sont reliés qu'à un autre sommet. Les sommets *externes* sont les feuilles de l'arbre (voir la figure 4.5.21).

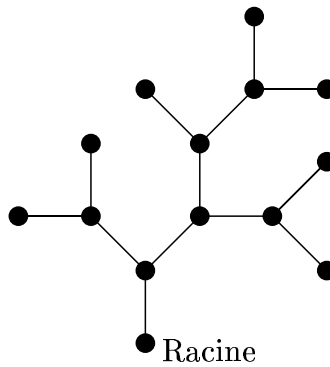


Figure 4.5.21

On choisit un point externe p_0 de A_g qu'on appelle la *racine* de A_g . Soit Dist la métrique maximale sur A_g qui donne à chaque arête une longueur de 1. On définit la fonction hauteur $h : A_g \rightarrow \mathbb{N}$ par :

$$h(p) = \text{Dist}(p, p_0)$$

Pour $p \in A_g$ un point interne, on choisit une orientation pour les trois arêtes partant de p . Notons $A_\downarrow(p)$ l'arête de A_g partant de p vers le bas (c'est-à-dire, l'arête pq où $h(q) = h(p) - 1$). Notons $A_G(p)$ (resp. $A_D(p)$) l'arête de A_g partant de p vers le haut à gauche (resp. à droite). C'est-à-dire que, pour tout p , le triplet $(A_\downarrow(p), A_G(p), A_D(p))$ est orienté positivement relativement à l'orientation qu'on vient de choisir.

Un *pantalon marqué* est un sextuplet $P = (P, p_1, p_2, p_3, \gamma_{13}, \gamma_{32})$ où :

- (i) P est un pantalon et p_1, p_2 et p_3 sont des points dans des composantes connexes distinctes de son bord et,
- (ii) γ_{13} et γ_{32} sont des courbes tracées dans P telles que :

$$\begin{aligned} \gamma_{13}(0) &= p_1 & \gamma_{13}(1) &= p_3 \\ \gamma_{32}(0) &= p_3 & \gamma_{32}(1) &= p_2 \end{aligned}$$

On note :

$$\pi_1(P) = \pi_1(P, p_1)$$

En général, on notera C_i la composante connexe de ∂P contenant p_i , et l'on choisit son orientation de telle sorte que le pantalon se situe à sa gauche (voir la figure 4.5.22).

Le marquage nous permet d'identifier chaque C_i avec un élément de $\pi_1(P)$. En particulier :

$$C_1^{-1} = C_2 \cdot C_3$$

Dans les sections précédentes, on a décrit comment obtenir une décomposition en pantalons marqués $(P_q)_{q \in A_g}$ de la surface Σ et, pour chaque q un homomorphisme $\theta_q : \pi_1(P_q) \rightarrow \pi_1(M, q_0)$, tels que :

- (i) pour chaque $q \in A_g$ on identifie $C_{q,1}, C_{q,2}$ et $C_{q,3}$ respectivement avec $A_\downarrow(p), A_G(p)$ et $A_D(p)$,

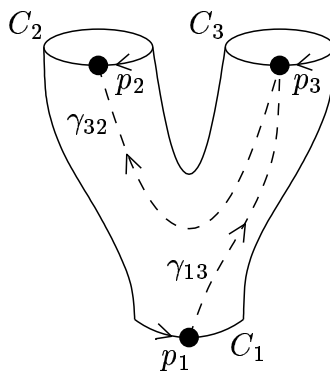


Figure 4.5.22

(ii) pour $q, q' \in A_g$, les pantalons P_q et $P_{q'}$ sont reliés si et seulement si q et q' sont voisins dans A_g ,

(iii) pour $q, q' \in A_g$ voisins, les pantalons P_q et $P_{q'}$ sont reliés le long de la composante du bord identifié à l'arête qq' de A_g ,

(iii) pour $q, q' \in A_g$ voisins, si P_q et $P_{q'}$ sont reliés le long de la courbe $C = C_{q,i}^{-1} = C_{q',j}$, alors, le point $p_{q,i}$ coïncide avec le point $p_{q',j}$,

(iv) pour tout $q \in A_g$, si l'on note $\iota_q : P_q \rightarrow \Sigma$ le plongement canonique, alors :

$$\theta_q = \theta \circ (\iota_q)_*$$

(v) si $q \in A_g$ est un sommet externe, alors le pantalon P_q est recollé à lui-même le long de la courbe $C = C_{q,2} = C_{q,3}^{-1}$ pour former une poignée de telle sorte que les points $p_{q,2}$ et $p_{q,3}$ coïncident, et

(vi) pour tout a , l'image de θ_a est un groupe de Schottky.

4.5.2 Des tresses et la topologie de $\text{Homeo}^+(S^2)$.

Le groupe $\pi_1(M, q_0)$ se plonge canoniquement dans $\text{Homeo}^+(\partial_\infty \tilde{M})$. On considère alors l'application θ comme étant un homomorphisme de $\pi_1(\Sigma, p_0)$ à valeurs dans le groupe $\text{Homeo}^+(\partial_\infty \tilde{M})$.

Soit $X \subseteq Y$ des espaces topologiques. Une *déformation rétraction forte* de Y sur X est une application $\psi : I \times Y \rightarrow Y$ telle que :

- (i) $\psi_0 : Y \rightarrow Y$ est l'identité,
- (ii) $\psi_1(Y) \subseteq X$, et
- (iii) pour tout $t \in I$, la restriction de ψ_t à X est l'identité.

Notons $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ le sphère de rayon un dans \mathbb{R}^3 . On rappelle le résultat suivant concernant le type d'homotopie de $\text{Homeo}^+(S^2)$ (voir [15], [37]) :

Théorème 4.5.1 [Friberg, 1973]

L'espace $\text{Homeo}^+(S^2)$ se rétracte par déformation forte sur $\text{SO}(3, \mathbb{R})$.

En particulier, on obtient :

Corollaire 4.5.2

$$\pi_1(\text{Homeo}^+(S^2), \text{Id}) = \pi_1(\text{SO}(3, \mathbb{R}), \text{Id}) = \mathbb{Z}_2$$

Une *tresse d'ordre 3* dans $\hat{\mathbb{C}}$ est un triplet $\tilde{\gamma} = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$ où $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ sont des courbes telles que, pour tout $t \in I$ les points $\gamma_0(t)$, $\gamma_1(t)$ et $\gamma_2(t)$ soient distincts. Le lecteur intéressé peut trouver un traitement plus détaillé des tresses en générale et le groupe fondamentale de $\mathbb{P}SL(2, \mathbb{C})$ dans l'annexe D. Définissons $\Delta \subseteq \hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}}$ par :

$$\Delta = \left\{ (z_0, z_1, z_2) \hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}} \mid \exists i \neq j \text{ tel que } z_i = z_j \right\}$$

Une tresse d'ordre 3 dans $\hat{\mathbb{C}}$ est alors une courbe dans $\hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}} \setminus \Delta$. Pour tout $t \in I$, on note :

$$\tilde{\gamma}(t) = (\gamma_0(t), \gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

On appelle le point $\tilde{\gamma}(0)$ le *point de base* de la tresse $\tilde{\gamma}$. On dit que la tresse est fermée si et seulement si :

$$\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1)$$

Soit $\tilde{\gamma}_0$ et $\tilde{\gamma}_1$ deux tresses ayant les mêmes extrémités. Une *homotopie* entre $\tilde{\gamma}_0$ et $\tilde{\gamma}_1$ est une famille continue $(\tilde{\eta}_t)_{t \in I}$ de tresses ayant les mêmes extrémités que $\tilde{\gamma}_0$ et $\tilde{\gamma}_1$ telle que :

$$\tilde{\eta}_0 = \tilde{\gamma}_0, \tilde{\eta}_1 = \tilde{\gamma}_1$$

Pour $z_0, z_1, z_2 \in \hat{\mathbb{C}}$ distincts notons $T^0(z_0, z_1, z_2)$ la famille de tresses fermées d'ordre 3 dans $\hat{\mathbb{C}}$ ayant (z_0, z_1, z_2) comme point de base. Soit \sim la relation d'équivalence d'homotopie sur $T^0(z_0, z_1, z_2)$. La loi de composition des courbes nous donne une loi de composition de tresses, et l'ensemble $T^0(z_0, z_1, z_2)/\sim$ forme ainsi un groupe.

Pour $\tilde{\gamma}$ une tresse d'ordre 3, on définit la courbe $\mathcal{P}(\tilde{\gamma}) : I \rightarrow \mathbb{P}SL(2, \mathbb{C})$ telle que, pour tout $t \in I$, $(\mathcal{P}(\tilde{\gamma}))(t)$ soit l'unique élément de $\mathbb{P}SL(2, \mathbb{C})$ qui envoie $\tilde{\gamma}(0)$ en $\tilde{\gamma}(t)$. Pour tout $z_0, z_1, z_2 \in \hat{\mathbb{C}}$ distincts, l'application \mathcal{P} définit un isomorphisme entre $T^0(z_0, z_1, z_2)/\sim$ et $\pi_1(\mathbb{P}SL(2, \mathbb{C}), \text{Id})$. On obtient le résultat suivant :

Lemme 4.5.3

Soit $c : I \rightarrow \text{Homeo}^+(\hat{\mathbb{C}})$ un lacet fermé ayant Id comme point de base. Soit $z_0, z_1, z_2 \in \hat{\mathbb{C}}$ distincts. Définissons $\tilde{\gamma} \in T^0(z_0, z_1, z_2)$ telle que, pour tout $t \in I$:

$$\tilde{\gamma}(t) = (c_t(z_0), c_t(z_1), c_t(z_2))$$

Alors, la courbe c est homotope dans $\text{Homeo}^+(\hat{\mathbb{C}})$ à $\mathcal{P}(\tilde{\gamma})$.

Démonstration : En utilisant la projection stéréographique, on peut trouver une biholomorphie entre $\hat{\mathbb{C}}$ et S^2 qui est unique à rotation près. On peut considérer alors $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ comme un sous-groupe de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$. Par le théorème 4.5.1, il existe une déformation rétraction forte $\varphi : I \times \mathrm{Homeo}^+(\hat{\mathbb{C}}) \rightarrow \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$. Définissons $\tilde{\eta} : I \times I \rightarrow T^0(z_0, z_1, z_2)$ par :

$$\tilde{\eta}(s, t) = (\varphi_s(c_t))(z_0, z_1, z_2)$$

La courbe $\varphi_1(c)$ est homotope à c et, puisqu'elle est dans $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R}) \subseteq \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, on obtient :

$$\varphi_1(c) = \mathcal{P}(\tilde{\eta}_1)$$

Or, $\tilde{\gamma} = \tilde{\eta}_0$ est homotope à $\tilde{\eta}_1$ et donc $\varphi_1(c)$ est homotope à $\mathcal{P}(\tilde{\gamma})$ et le résultat en découle. \square

Donc, pour déterminer le type d'homotopie d'une courbe fermée c dans $\mathrm{Homeo}^+(\hat{\mathbb{C}})$ ayant l'identité comme point de base, il suffit de déterminer le type d'homotopie de la tresse $c(z_0, z_1, z_2)$ pour (z_0, z_1, z_2) un triplet quelconque de points distincts dans $\hat{\mathbb{C}}$.

4.5.3 Le groupe fondamental de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$.

Il est classique que $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ se rétracte par déformation forte sur $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ et donc que son groupe fondamental est isomorphe à \mathbb{Z}_2 . Le théorème 4.5.1 nous donne le même résultat pour $\mathrm{Homeo}^+(\hat{\mathbb{C}})$. Dans cette section, on va montrer le résultat suivant :

Lemme 4.5.4

Soit $c : I \rightarrow \mathrm{Homeo}^+(\hat{\mathbb{C}})$ un lacet fermé ayant l'identité comme point de base. Soit $z_0, z_1, z_2 \in \hat{\mathbb{C}}$ distincts et définissons la tresse $\tilde{\gamma}$ telle que :

$$\tilde{\gamma}(t) = (c_t(z_0), c_t(z_1), c_t(z_2))$$

Soit a un lacet simple fermé ayant z_1 comme point de base et définissons la tresse $\tilde{\eta}$ par :

$$\tilde{\eta}(t) = (z_0, a(t), z_2)$$

Supposons que $\tilde{\gamma}$ est homotope à $\tilde{\eta}$ dans $T^0(z_0, z_1, z_2)$ et que a sépare z_0 et z_2 . Alors c est homotopiquement non-trivial dans $\mathrm{Homeo}^+(\hat{\mathbb{C}})$.

Le groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ agit transitivement sur $\hat{\mathbb{C}}$. Le fixateur de l'infini est le groupe de transformations affines de \mathbb{C} , qui est difféomorphe à $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$. Définissons $i : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ par :

$$i(u, v)z = u + vz$$

On identifie $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ avec son image par i dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ et l'on obtient le résultat suivant :

Lemme 4.5.5

Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ un lacet fermé ayant l'identité comme point de base. Alors γ est homotopiquement trivial dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ si et seulement si elle tourne un nombre pair de fois autour de l'origine.

Démonstration : Définissons $\pi : \mathbb{P}SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ par :

$$\pi(\alpha) = \alpha(\infty)$$

On obtient la suite exacte longue suivante :

$$\pi_2(\hat{\mathbb{C}}, \infty) \xrightarrow{\delta} \pi_1(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, (0, 1)) \xrightarrow{i_*} \pi_1(\mathbb{P}SL(2, \mathbb{C}), I) \xrightarrow{\pi_*} \pi_1(\hat{\mathbb{C}}, \infty)$$

Comme $\pi_1(\hat{\mathbb{C}}, \infty)$ est trivial, l'homomorphisme i_* est surjectif. Donc tout lacet fermé dans $(\mathbb{P}SL(2, \mathbb{C}), I)$ est homotope à un lacet fermé dans $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, (0, 1))$. Ensuite, on sait que $\pi_2(\hat{\mathbb{C}}, \infty)$ est engendré par l'application :

$$\alpha : (\hat{\mathbb{C}}, \infty) \rightarrow (\hat{\mathbb{C}}, \infty); z \mapsto z$$

Le noyau de i_* est alors engendré par $\delta\alpha$. Définissons $\hat{\alpha} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}SL(2, \mathbb{C})$ par :

$$\hat{\alpha}(z)w = \frac{1 + zw}{w - \bar{z}}$$

Donc :

$$\hat{\alpha}(z) = \begin{pmatrix} z & 1 \\ 1 & -\bar{z} \end{pmatrix}$$

En particulier :

$$\begin{aligned} (\pi_*\hat{\alpha})(z) &= \hat{\alpha}(z) \cdot \infty \\ &= z \\ \Rightarrow \pi_*\hat{\alpha} &= \alpha \end{aligned}$$

Soit d l'opérateur de restriction des fonctions sur $\overline{\mathbb{D}}$ à des fonctions sur S^1 . Par définition, $\delta\alpha$ est une courbe $\gamma \in C((S^1, 1), (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, \text{Id}))$ telle que :

$$i_*\gamma = d\hat{\alpha}$$

Maintenant, pour $\lambda \in]0, \infty[$, on pose :

$$\hat{\alpha}_\lambda : S^1 \rightarrow \mathbb{P}SL(2, \mathbb{C}); e^{i\theta} \mapsto \hat{\alpha}(\lambda e^{i\theta})$$

En même temps, on note :

$$\hat{\alpha}_\infty : S^1 \rightarrow \mathbb{P}SL(2, \mathbb{C}); e^{i\theta} \mapsto \begin{pmatrix} e^{i\theta} & \\ & -e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

et l'on voit que $\hat{\alpha}_\lambda \rightarrow \hat{\alpha}_\infty$ lorsque λ tend vers l'infini. Il en découle que α s'étend en une application continue de la compactification de \mathbb{C} par le cercle à l'infini dans $\mathbb{P}SL(2, \mathbb{C})$ et que :

$$(d\hat{\alpha}) = \hat{\alpha}_\infty$$

Définissons $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ par :

$$\gamma(e^{i\theta}) = (0, -e^{2i\theta})$$

On voit que :

$$\begin{aligned} i_*\gamma &= \hat{\alpha}_\infty \\ &= (d\hat{\alpha}) \\ \Rightarrow \delta\alpha &= \gamma \end{aligned}$$

D'où :

$$\delta\pi_2(\hat{\mathbb{C}}, \infty) = 2\pi_1(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, (0, 1))$$

C'est-à-dire que l'image de δ est l'ensemble des courbes dans $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, (0, 1))$ qui tournent $2n$ fois autour de l'origine. Le résultat en découle. \square

On obtient le corollaire immédiat suivant :

Corollaire 4.5.6

Soit z_0, z_1 deux points dans $\hat{\mathbb{C}}$ et soit $a : I \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \setminus \{z_0, z_1\}$ un lacet simple fermé qui sépare z_0 et z_1 . Définissons la tresse fermée $\tilde{\gamma} \in T^0(z_0, a(0), z_1)$ par :

$$\tilde{\gamma}(t) = (z_0, a(t), z_1)$$

Alors, le lacet fermé $\mathcal{P}(\tilde{\gamma})$ est homotopiquement non-trivial dans $\pi_1(\mathbb{P}SL(2, \mathbb{C}))$.

Ces résultats et le lemme 4.5.3 nous permettent de montrer le lemme 4.5.4 :

Démonstration du lemme 4.5.4 : Définissons la tresse $\tilde{\gamma} \in T^0(z_0, z_1, z_2)$ par :

$$\tilde{\gamma}(t) = (c_t(z_0), c_t(z_1), c_t(z_2))$$

Par le lemme 4.5.3, la courbe c est homotope dans $\text{Homeo}^+(\hat{\mathbb{C}})$ à $\mathcal{P}(\tilde{\gamma})$. $\mathcal{P}(\tilde{\gamma})$ est homotope dans $\mathbb{P}SL(2, \mathbb{C})$ à $\mathcal{P}(\tilde{\eta})$. Par le corollaire 4.5.6, la courbe $\mathcal{P}(\tilde{\eta})$ est homotopiquement non-trivial dans $\mathbb{P}SL(2, \mathbb{C})$, et donc elle est homotope à une courbe c' dans $\text{SO}(3, \mathbb{R})$ qui est homotopiquement non-trivial dans $\text{SO}(3, \mathbb{R})$. Donc c est homotope à une courbe dans $\text{SO}(3, \mathbb{R})$ qui est homotopiquement non-trivial dans $\text{SO}(3, \mathbb{R})$ et le résultat en découle. \square

4.5.4 La reconstruction des pantalons.

Soit M une variété compacte de dimension 3 à courbure sectionnelle strictement négative et soit q_0 un point de base dans M . Soit \tilde{M} le revêtement universel de M . Soit $\Gamma \subseteq \pi_1(M, q_0)$ un groupe de Schottky. Pour $\gamma \in \Gamma$ un élément quelconque, notons γ_- et γ_+ les points fixes respectivement répulsif et attractif de γ . Soit $\alpha, \beta \in \Gamma$ les générateurs de ce groupe. Soit C_α^\pm et C_β^\pm quatre cercles tracés dans le sphère $\partial_\infty \tilde{M}$ et orientés de tel sorte que chaque cercle soit placé dans l'extérieur des trois autres. Supposons que :

$$\begin{aligned} \alpha(\text{Ext}(C_\alpha^-)) &= \text{Int}(C_\alpha^+) \\ \beta(\text{Ext}(C_\beta^-)) &= \text{Int}(C_\beta^+) \end{aligned}$$

On va dire que de tels cercles sont des *cercles générateurs* du groupe Γ relativement à (α, β) .

Définissons Ω par :

$$\Omega = \text{Ext}(C_\alpha^-) \cap \text{Ext}(C_\alpha^+) \cap \text{Ext}(C_\beta^-) \cap \text{Ext}(C_\beta^+)$$

Soit a et b des courbes simples tracées dans Ω qui ne s'intersectent pas telles que a (resp. b) va de C_α^- (resp. C_β^-) à C_α^+ (resp. C_β^+) et que :

$$\begin{aligned} \alpha(a(0)) &= a(1) \\ \beta(b(0)) &= b(1) \end{aligned}$$

On appelle (a, b) une paire de courbes *génératrices* de $\Gamma = \langle \alpha, \beta \rangle$. Soit c_1 et c_2 des courbes simples tracées dans Ω ne s'intersectant pas et n'intersectant ni a , ni b telles que c_1 (resp. c_2) va de C_β^+ (resp. C_α^+) à C_α^- (resp. C_β^-) et que :

$$\begin{aligned} \alpha(c_2(0)) &= c_1(1) \\ \beta(c_2(1)) &= c_1(0) \end{aligned}$$

(voir la figure 4.5.23). Les courbes c_1 et c_2 sont définies à homotopie près par le choix de a et de b .

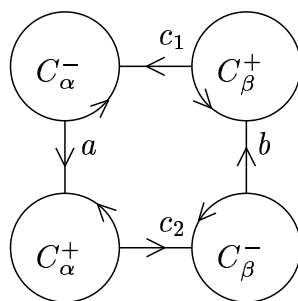


Figure 4.5.23

Les quatre courbes a , b , c_1 et c_2 découpent l'ensemble Ω en deux composantes connexes. Notons \overline{H} l'adhérence dans $\partial_\infty \tilde{M}$ de la composante connexe qui se situe au gauche de la courbe a . Définissons \overline{P} par :

$$\overline{P} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\overline{H})$$

Notons P l'intérieur de \overline{P} . L'ensemble P est un ouvert connexe et simplement connexe dans $\partial_\infty \tilde{M}$ invariant par l'action de Γ sur $\partial_\infty \tilde{M}$. La frontière $\partial P = \overline{P} \setminus P$ de P est une courbe de Jordan dans $\partial_\infty \tilde{M}$ invariant par l'action de Γ sur $\partial_\infty \tilde{M}$. Pour $\gamma \in \Gamma$, les deux points fixes de γ se trouvent dans ∂P . La surface P/Γ est un pantalon et l'on dit que c'est un *pantalon associé* au groupe de Schottky Γ et au choix des courbes a et b . Par abus de langage, on dit également que son revêtement universel P est un *pantalon associé* à Γ et au choix des courbes a et b .

Enfin, soit $q \in A_g$. Posons $\alpha = \theta_q(C_{q,2})$ et $\beta = \theta_q(C_{q,3})$. Soit (a, b) une paire de courbes génératrices du groupe $\langle \alpha, \beta \rangle$. Pour P un pantalon associé au groupe de Schottky $\langle \alpha, \beta \rangle$ et aux courbes a et b , on obtient une application i_q du revêtement universel du pantalon P_q dans $\partial_\infty \tilde{M}$ qui est un homéomorphisme sur son image et qui est équivariant par θ_q . Par définition, si l'on note $\tilde{C}_{q,2}$ et $\tilde{C}_{q,3}$ les relevés respectivement de $C_{q,2}$ et de $C_{q,3}$, alors

$$\begin{aligned} i_q(\tilde{C}_{q,2}) &= a \\ i_q(\tilde{C}_{q,3}) &= b \end{aligned}$$

On va dire que l'homéomorphisme i_q est un *homéomorphisme associé* à θ_q et au choix des courbes génératrices a et b .

4.5.5 Des classes homologiques.

Soit M, \tilde{M} et $\Gamma = \langle \alpha, \beta \rangle$ comme dans la section précédente. Pour $\gamma \in \Gamma$, définissons le tore \mathbb{T}_γ par :

$$\mathbb{T}_\gamma = (\partial_\infty \tilde{M} \setminus \{\gamma_-, \gamma_+\}) / \langle \gamma \rangle$$

Notons $\pi_\gamma : \partial_\infty \tilde{M} \setminus \{\gamma_-, \gamma_+\} \rightarrow \mathbb{T}_\gamma$ la projection canonique. Soit (a, b) des courbes génératrices de Γ et soit P un pantalon associé à Γ et aux courbes a et b . On obtient le résultat suivant :

Lemme 4.5.7

Pour tout $\gamma \in \Gamma$, il existe une unique classe homologique $[P]_\gamma \in H_1(\mathbb{T}_\gamma)$ telle que, pour tout $p_0 \in P$ et pour tout $c : I \rightarrow P$ telle que :

$$c(0) = p_0, \quad c(1) = \gamma(p_0)$$

on ait :

$$[P]_\gamma = [\pi \circ c]$$

Démonstration : En effet, soit p_0 et p_1 dans P . Soit c_0 et c_1 des courbes telles que :

$$\begin{aligned} c_0(0) &= p_0, & c_0(1) &= \gamma(p_1) \\ c_1(0) &= p_1, & c_1(1) &= \gamma(p_1) \end{aligned}$$

Alors, puisque P est connexe, simplement connexe et invariant sous l'action de γ , il existe une homotopie $(c_t)_{t \in [0,1]}$ entre c_0 et c_1 telle que, pour tout t :

$$c_t(1) = \gamma(c_t(0))$$

D'où :

$$[\pi \circ c_0] = [\pi \circ c_1]$$

et le résultat en découle. \square

Notons C_γ une courbe qui tourne une fois autour du cylindre $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{\gamma_\pm\}$ de telle sorte que γ_+ se situe à sa gauche (c'est-à-dire, en son intérieur). C_γ définit une unique classe

homologique $[C_\gamma]$ dans $H_1(\mathbb{T}_\gamma)$. En utilisant la dualité de Poincaré, on obtient un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $H_1(\mathbb{T}_\gamma)$ et l'on définit $\mathcal{C}_\gamma \in H_1(\mathbb{T}_\gamma) \subseteq H_1(\mathbb{T}_\gamma)$ par :

$$\mathcal{C}_\gamma = \{[a] \in H_1(\mathbb{T}_\gamma) \mid \langle [C_\gamma], [a] \rangle = 1\}$$

Heuristiquement \mathcal{C}_γ comprend les courbes dans \mathbb{T}_γ qui traverse C_γ une seule fois et de droite à gauche. On obtient le résultat trivial suivant :

Lemme 4.5.8

Pour tout $\gamma \in \Gamma$:

$$[P]_\gamma \in \mathcal{C}_\gamma$$

Démonstration : Soit $p_0 \in P$ et soit c une courbe dans P reliant p_0 à $\gamma(p_0)$. On peut supposer que c n'intersecte C_γ qu'en ses extrémités. Par définition de \mathcal{C}_γ , la courbe $\pi \circ c$ traverse $\pi \circ C_\gamma$ de droite à gauche, et le résultat en découle. \square

Les courbes a et b définissent des éléments $[a]_\alpha$ et $[b]_\alpha$ respectivement de $\mathcal{C}_\alpha \subseteq H_1(\mathbb{T}_\alpha)$ et de $\mathcal{C}_\beta \subseteq H_1(\mathbb{T}_\beta)$ et, par définition de $[P]$, on obtient :

$$[P]_\alpha = [a]_\alpha, \quad [P]_\beta = [b]_\beta$$

En particulier, en utilisant des twists de Dehn autour de C_α^+ et de C_β^+ , on obtient immédiatement le résultat important d'existence suivant :

Lemme 4.5.9

Soit $\tilde{\alpha} \in \mathcal{C}_\alpha$ et $\tilde{\beta} \in \mathcal{C}_\beta$. Alors, il existe a' et b' des courbes génératrices de Γ telles que :

$$[a']_\alpha = \tilde{\alpha}, [b']_\beta = \tilde{\beta}$$

Donc, si P' est un pantalon associé à Γ et aux courbes a' et b' , alors :

$$[P']_\alpha = \tilde{\alpha}, [P']_\beta = \tilde{\beta}$$

De la même façon, la courbe composée $(\alpha c_1^{-1}) \cdot c_2^{-1}$ définit un élément de $\mathcal{C}_{\alpha\beta}$ et, de nouveau :

$$[P]_{\alpha\beta} = [(\alpha c_1^{-1}) \cdot c_2^{-1}]_{\alpha\beta}$$

Soit $q \in A_g$. Posons $\alpha = \theta_q(C_{q,2})$ et $\beta = \theta_q(C_{q,3})$. Soit (a, b) une paire de courbes génératrices du groupe $\langle \alpha, \beta \rangle$ et soit i_q un homéomorphisme associé à θ_q et au choix des courbes génératrices a et b . Notons \tilde{P}_q le revêtement universel de P_q . Pour tout $c \in \pi_1(P_q)$, définissons $[P_q, i_q]_c \in \mathcal{C}_{\theta_q(c)}$ par :

$$[P_q, i_q]_c = [i_q(\tilde{P}_q)]_{\theta_q(c)}$$

4.5.6 Des relevées des applications.

Soit $\gamma \in \Gamma$. Notons également γ la géodésique dans \tilde{M} reliant γ_- à γ_+ . Notons $\vec{n} : T\tilde{M} \rightarrow \partial_\infty \tilde{M}$ l'application de Gauss-Minkowski et notons N_γ le fibré unitaire en cercles normaux à γ . Par le lemme 4.2.2, l'application $\vec{n} : N_\gamma \rightarrow \partial_\infty \tilde{M} \setminus \{\gamma_\pm\}$ est un homéomorphisme. En utilisant le transport parallèle, on construit $\varphi : \mathbb{R} \times N_{\gamma(0)} \rightarrow N_\gamma$ un isomorphisme canonique de fibrés en cercles. $\mathbb{R} \times N_{\gamma(0)}$ est canoniquement biholomorphe à \mathbb{C}^* . Soit $\alpha : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R} \times N_{\gamma(0)}$ une biholomorphie. Définissons l'homéomorphisme $\psi_\gamma : \mathbb{C}^* \rightarrow \partial_\infty \tilde{M} \setminus \{\gamma_\pm\}$ par :

$$\psi_\gamma = \vec{n} \circ \varphi \circ \alpha$$

L'application ψ_γ dépend du choix de l'image de l'origine (ou du point de base) dans la paramétrisation par longueur de γ et de la biholomorphie avec \mathbb{C}^* . Un autre choix de point de base de la paramétrisation par longueur de γ équivaut à une translation du cylindre N_γ , ce qui est une application conforme. Il en découle que l'application ψ_γ est unique à biholomorphie de \mathbb{C}^* près, et donc, si $\psi'_\gamma : \mathbb{C}^* \rightarrow \partial_\infty \tilde{M} \setminus \{\gamma_\pm\}$ est un autre homéomorphisme défini de la même manière, alors, il existe $w \in \mathbb{C}^*$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$:

$$\psi'_\gamma(z) = \psi_\gamma(wz)$$

L'application ψ_γ se prolonge uniquement en un homéomorphisme entre $\hat{\mathbb{C}}$ et $\partial_\infty \tilde{M}$. Notons aussi ψ_γ cet homéomorphisme. On va appeler ψ_γ une *conformalisation* de $\partial_\infty \tilde{M}$ relative à la géodésique γ . Dans le cas où M est à courbure constante, on peut supposer que $\tilde{M} = \mathbb{H}^3$ et l'application ψ_γ est alors conforme.

Notons $\text{Aut}(\mathbb{C}^*)$ le groupe de biholomorphismes de \mathbb{C}^* . $\text{Aut}(\mathbb{C}^*)$ est le sous-groupe commutatif de $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ engendré par les rotations et les homothéties de \mathbb{C}^* . Ce groupe est isomorphe au groupe multiplicatif \mathbb{C}^* . On définit $\text{Aut}(\gamma)$ par :

$$\text{Aut}(\gamma) = (\psi_\gamma)_* \text{Aut}(\mathbb{C}^*)$$

De la même façon, par abus de notation, on définit $\text{PSL}_2(\gamma)$ par :

$$\text{PSL}_2(\gamma) = (\psi_\gamma)_* \text{PSL}(2, \mathbb{C})$$

Les groupes $\text{Aut}(\gamma)$ et $\text{PSL}_2(\gamma)$ sont des sous-groupes de $\text{Homeo}^+(\partial_\infty \tilde{M})$.

Soit maintenant $c : I \rightarrow \partial_\infty \tilde{M} \setminus \{\gamma_\pm\}$ telle que :

$$\gamma(c(0)) = c(1)$$

Il existe une unique courbe $\tilde{\gamma}$ dans $\text{Aut}(\gamma)$ reliant l'identité à γ telle que, pour tout t :

$$\tilde{\gamma}(t)(c(0)) = c(t)$$

Il en découle que c définit uniquement un relevé $(\gamma; c)$ de γ dans $\widetilde{\text{Homeo}}^+(\partial_\infty \tilde{M})$. En particulier, tout élément $[c]$ de \mathcal{C}_γ définit uniquement un relevé $(\gamma; [c])$ de γ dans $\widetilde{\text{Homeo}}^+(\partial_\infty \tilde{M})$ et donc $[P]_\gamma$ définit uniquement un relevé $(\gamma; P)$ de γ dans $\widetilde{\text{Homeo}}^+(\partial_\infty \tilde{M})$.

Soit $q \in A_g$. Posons $\alpha = \theta_q(C_{q,2})$ et $\beta = \theta_q(C_{q,3})$. Soit (a, b) une paire de courbes génératrices du groupe $\langle \alpha, \beta \rangle$ et soit i_q un homéomorphisme associé à θ_q et au choix des courbes génératrices a et b . Notons \tilde{P}_q le revêtement universel de P_q . Pour tout $c \in \pi_1(P_q)$, définissons $(c; i_q)$ par :

$$(c; i_q) = (\theta_q(c); i_q(\tilde{P}_q))$$

Notons $T_3(\hat{C})$ l'ensemble de tresses d'ordre 3 dans \hat{C} et définissons $T_3(\gamma)$ par :

$$T_3(\gamma) = (\psi_\gamma)_* T_3(\hat{C})$$

Pour $(a, b, c) \in T_3$, on définit $\mathcal{P}(a, b, c) : I \rightarrow \mathbb{P}SL(2, \mathbb{C})$ comme avant telle que, pour tout t , l'application $\mathcal{P}(a, b, c)(t)$ soit l'unique application conforme qui envoie le triplet $(a(0), b(0), c(0))$ en le triplet $(a(t), b(t), c(t))$. Définissons $\mathcal{P}_\gamma : T_3(\gamma) \rightarrow \mathbb{P}SL_2(\gamma)$ par :

$$\mathcal{P}_\gamma = (\psi_\gamma)_* \mathcal{P}$$

Pour tout point $p \in \partial_\infty \tilde{M}$, notons p la courbe constante qui envoie l'intervalle en p . Par définition :

$$(\gamma; c) = \mathcal{P}_\gamma(\gamma_-, c, \gamma_+)$$

On obtient le résultat clé suivant :

Lemme 4.5.10

Notons $\gamma = \alpha\beta$. Posons :

$$\Delta = [P]_{\alpha\beta}^{-1} [P]_\alpha [P]_\beta$$

Alors, Δ , qui est un lacet fermé dans $\text{Homeo}^+(\partial_\infty \tilde{M})$ est homotopiquement non-trivial.

Démonstration : ∂P est homéomorphe au cercle S^1 et est invariant par l'action de $\Gamma = \langle \alpha, \beta \rangle$ sur $\partial_\infty \tilde{M}$. On sait que :

$$\begin{aligned} \alpha_- &\in \text{Int}(\alpha^{-1}(C_\alpha^-)), & \alpha_+ &\in \text{Int}(\alpha(C_\alpha^+)) \\ \beta_- &\in \text{Int}(\beta^{-1}(C_\beta^-)), & \beta_+ &\in \text{Int}(\beta(C_\beta^+)) \end{aligned}$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} \gamma_- &\in \text{Int}(\beta^{-1}(C_\alpha^-)), & \gamma_+ &\in \text{Int}(\alpha(C_\beta^+)) \\ \beta(\gamma_-) &\in \text{Int}(\alpha^{-1}(C_\beta^-)), & \beta(\gamma_+) &\in \text{Int}(\beta(C_\alpha^+)) \end{aligned}$$

Il en découle que les 8 points $\alpha_\pm, \beta_\pm, \gamma_\pm$ et $\beta(\gamma_\pm)$ sont distribués sur ∂P selon le diagramme dans la figure 4.5.24.

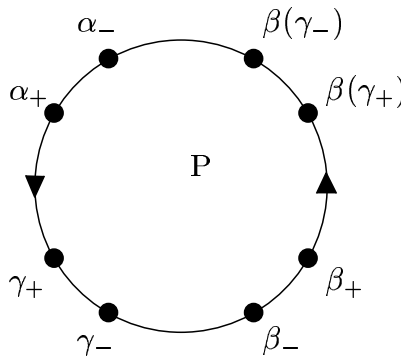


Figure 4.5.24

Pour tout point $p \in \partial_\infty \tilde{M}$ notons p la courbe constante qui envoie l'intervalle en p . Soit $p_0 \in P$. Soit b une courbe dans P reliant p_0 à $\beta(p_0)$. Soit a une courbe dans P reliant $\beta(p_0)$ à $(\alpha \circ \beta)(p_0)$. Par définition :

$$\begin{aligned} [P]_\alpha &= \mathcal{P}_\alpha(\alpha_-, a, \alpha_+) \\ [P]_\beta &= \mathcal{P}_\beta(\beta_-, b, \beta_+) \\ [P]_{\gamma^{-1}} &= \mathcal{P}_\gamma(\gamma_-, (a \cdot b)^{-1}, \gamma_+) \end{aligned}$$

Soit $\eta_\pm : I \rightarrow \partial P$ telle que η_\pm évite β_\mp et que :

$$\eta_\pm(0) = \beta_\pm, \quad \eta_\pm(1) = \gamma_\pm$$

Puisque ∂P est invariant par l'action de β , la courbe $\beta \circ \eta_\pm$ est une courbe dans ∂P qui relie β_\pm à $\beta(\gamma_\pm)$. Soit $(\beth_t^\pm)_{t \in I}$ une famille continue de courbes dans ∂P telle que :

(i) pour tout s :

$$\beth_0^\pm(s) = \beta_\pm$$

(ii) pour tout t :

$$\begin{aligned} \beth_t^\pm(0) &= \eta_\pm(t) \\ \beth_t^\pm(1) &= (\beta \circ \eta)_\pm(t) \end{aligned}$$

Pour être plus précis, on va déformer \beth^- un peu vers l'intérieur de ∂P et \beth^+ vers l'extérieur de ∂P afin qu'elles ne s'intersectent pas. Heuristiquement, \beth_t^\pm est une courbe qui va de γ_\pm à $\beta(\gamma_\pm)$ dans le sens des aiguilles d'une montre. Pour tout t , on peut supposer que les trois points $(\beth_t^-(0), b(0), \beth_t^+(0))$ sont distincts. De plus, pour tout t :

$$\beta(\beth_t^-(0), b(0), \beth_t^+(0)) = (\beth_t^-(1), b(1), \beth_t^+(1))$$

Donc, $(\mathcal{P}_\beta(\beth_t^-, b, \beth_t^+))_{t \in I}$ définit une homotopie entre $\mathcal{P}_\beta(\beta_-, b, \beta_+)$ et $\mathcal{P}_\beta(\beth_1^-, b, \beth_1^+)$, et il en découle que :

$$\mathcal{P}_\beta(\beth_1^-, b, \beth_1^+) = \mathcal{P}_\beta(\beta_-, b, \beta_+)$$

On définit $(\aleph_t^\pm)_{t \in I}$ de la même façon pour α , et l'on obtient :

$$\begin{aligned} [P]_{\gamma^{-1}}[P]_\alpha[P]_\beta &= \mathcal{P}_\gamma(\gamma_-, (a \cdot b)^{-1}, \gamma_+) \mathcal{P}_\alpha(\alpha_-, a, \alpha_+) \mathcal{P}_\beta(\beta_-, b, \beta_+) \\ &= \mathcal{P}_\gamma(\gamma_-, (a \cdot b)^{-1}, \gamma_+) \mathcal{P}_\alpha(\aleph_1^-, a, \aleph_1^+) \mathcal{P}_\beta(\beth_1^-, b, \beth_1^+) \end{aligned}$$

Définissons maintenant la tresse fermée \mathcal{T} par :

$$\mathcal{T} = (\gamma_- \cdot \aleph_1^- \cdot \beth_1^-, (a \cdot b)^{-1} \cdot a \cdot b, \gamma_+ \cdot \aleph_1^+ \cdot \beth_1^+)$$

Puisque \aleph_1^\pm et \beth_1^\pm restent près de ∂P et $(a \cdot b)^{-1} \cdot a \cdot b$ existe à l'intérieur de P , il existe une homotopie entre $(a \cdot b)^{-1} \cdot a \cdot b$ et la courbe constante p_0 qui reste loin de \aleph_1^\pm et de \beth_1^\pm . D'où :

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &\sim (\gamma_- \cdot \aleph_1^- \cdot \beth_1^-, p_0, \gamma_+ \cdot \aleph_1^+ \cdot \beth_1^+) \\ &\sim (\aleph_1^- \cdot \beth_1^-, p_0, \aleph_1^+ \cdot \beth_1^+) \end{aligned}$$

Heuristiquement $\aleph_1^+ \cdot \beth_1^+$ est une courbe qui tourne une fois autour de ∂P dans le sens des aiguilles d'une montre. En plus, cette courbe existe à l'extérieur de ∂P . Il existe alors une homotopie entre cette courbe-ci et la courbe constante q_+ qui reste loin de p_0 et de $\aleph_1^- \cdot \beth_1^-$. D'où :

$$\mathcal{T} \sim (\aleph_1^- \cdot \beth_1^-, p_0, q_+)$$

Enfin, heuristiquement, $\aleph_1^- \cdot \beth_1^-$ est une courbe qui tourne une fois autour de ∂P dans le sens des aiguilles d'une montre. De plus, cette courbe existe à l'intérieur de ∂P . Il en découle qu'elle sépare p_0 et q_+ . Donc, par le lemme 4.5.4, le lacet fermé $[P]_{\gamma^{-1}}[P]_{\alpha}[P]_{\beta}$ est homotopiquement non-trivial, et le résultat en découle. \square

4.5.7 Les recollements des pantalons.

Soit P et P' deux pantalons marqués. Soit $\theta : \pi_1(P) \rightarrow \pi_1(M, q_0)$ et $\theta' : \pi_1(P') \rightarrow \pi_1(M, q_0)$ des homomorphismes dont les images sont des groupes de Schottky. On recolle P et P' le long du cercle $C = C_m^{-1} = C'_n$ pour obtenir un double pantalon marqué $P \cup_C P'$ (la définition d'un double pantalon marqué étant analogue à celle d'un pantalon marqué). Notons $\iota : P \rightarrow P \cup_C P'$ et $\iota' : P' \rightarrow P \cup_C P'$ les plongements canoniques. On dit qu'un *recollement* des deux homomorphismes θ et θ' est un homomorphisme $\tilde{\theta} : \pi_1(P \cup P') \rightarrow \pi_1(M, q_0)$ tel que :

$$\theta = \tilde{\theta} \circ \iota_*, \theta' = \tilde{\theta} \circ \iota'_*$$

On a le résultat immédiat suivant :

Lemme 4.5.11

Il existe un recollement $\tilde{\theta}$ de θ et θ' si et seulement si :

$$\theta(C_m^{-1}) = \theta'(C'_n)$$

On suppose alors que $\theta(C_m^{-1}) = \theta'(C'_n)$. Notons \tilde{P} (resp. \tilde{P}') le revêtement universel du pantalon P (resp P'). Soit $i : \tilde{P} \rightarrow \partial_{\infty} \tilde{M}$ et $i' : \tilde{P}' \rightarrow \partial_{\infty} \tilde{M}$ des homéomorphismes associés respectivement à θ et à θ' . On dit qu'un *recollement* des deux homéomorphismes i et i' est un homéomorphisme local \tilde{i} du revêtement universel de $P \cup_C P'$ dans $\partial_{\infty} \tilde{M}$ tel que :

- (i) \tilde{i} soit équivariant par $\tilde{\theta}$, et
- (ii) \tilde{i} prolonge i et i' .

Suivant le procédé décrit par Gallo, Kapovich et Marden dans la section 8 de [16], on obtient le résultat suivant :

Lemme 4.5.12

Il existe un recollement \tilde{i} de i et de i' si et seulement si :

$$[P, i]_{C_m^{-1}} = [P', i']_{C'_n}$$

4.5.8 La formation des poignées.

Soit P un pantalon marqué et soit $\theta : \pi_1(P) \rightarrow \pi_1(M, q_0)$ un homomorphisme tel que son image soit un groupe de Schottky. Notons P^c la poignée obtenue en recollant P à lui-même le long de $C = C_2^{-1} = C_3$ (la définition d'une poignée marquée étant analogue à celle d'un pantalon marqué). Notons $\iota^c : P \rightarrow P^c$ le plongement canonique. On dit qu'un *recollement* de l'homomorphisme θ est un homomorphisme $\theta^c : \pi_1(P^c) \rightarrow \pi_1(M, q_0)$ tel que :

$$\theta^c \circ \iota_*^c = \theta$$

On a le résultat immédiat suivant :

Lemme 4.5.13

Il existe un recollement θ^c de θ si et seulement s'il existe $\gamma \in \pi_1(M, q_0)$ tel que :

$$\theta(C_2^{-1}) = \gamma^{-1}\theta(C_3)\gamma$$

On suppose alors qu'un tel élément γ existe. En particulier, γ agit sur $\partial_\infty \tilde{M}$ et définit ainsi un homéomorphisme $\gamma : \mathbb{T}_{\theta(C_2^{-1})} \rightarrow \mathbb{T}_{\theta(C_3)}$. De plus :

$$\gamma_* \mathcal{C}_{\theta(C_2^{-1})} = \mathcal{C}_{\theta(C_3)}$$

Notons \tilde{P}^c le revêtement universel de P^c . Soit (a, b) une paire de courbes génératrices pour θ et soit i un homéomorphisme associé à θ et au choix des courbes a et b . On dit qu'on *recollement* de i est un homéomorphisme local i^c de P^c dans $\partial_\infty \tilde{M}$ tel que :

- (i) i^c soit équivariant par θ^c , et
- (ii) i^c prolonge i .

Dans la section 8 de [16], Gallo, Kapovich et Marden montrent le résultat suivant :

Lemme 4.5.14

Il existe un recollement i^c de i si et seulement si :

$$\gamma_*[P, i]_{C_2^{-1}} = [P, i]_{C_3}$$

4.5.9 La construction d'un homéomorphisme.

Dans la section 8 de [16], Gallo, Kapovich et Marden montrent le résultat suivant :

Lemme 4.5.15

Soit P un pantalon marqué et soit $\theta : \pi_1(P) \rightarrow \pi_1(M, q_0)$ un homomorphisme tel que son image soit un groupe de Schottky. Supposons qu'il existe γ tel que :

$$\theta(C_2^{-1}) = \gamma^{-1}\theta(C_3)\gamma$$

Soit $i : P \rightarrow \partial_\infty \tilde{M}$ un homéomorphisme associé à θ qui peut être recollé le long de $C = C_2^{-1} = C_3$. Notons $[c]$ l'élément de $H_1(\mathbb{T}_{\theta(C_1)})$ engendré par une courbe qui tourne une fois autour du cylindre $\partial_\infty \tilde{M} \setminus \{\theta(C_1)_\pm\}$. Alors, pour $[a] \in \mathcal{C}_{\theta(C_1)}$ il existe un homéomorphisme i' associé à θ qui peut être recollé le long de $C = C_2^{-1} = C_3$ ayant $[P, i']_{C_1} = [a]$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$[a] = [P; i]_{C_1} + 2k[c]$$

On obtient alors le résultat suivant :

Lemme 4.5.16

Il existe une famille $(i_q)_{q \in A_g}$ d'homéomorphismes associés à $(\theta_q)_{q \in A_g}$ tel que :

- (i) pour tout $q, q' \in A_g$ voisins, i_q peut être recollé à $i_{q'}$ le long de $C = C_{q,m}^{-1} = C_{q',n}$, et
- (ii) pour tout $q \in A_g$ un point externe, i_q peut être recollé à lui-même le long de $C = C_{q,2}^{-1} = C_{q,3}$,

si et seulement s'il existe un relevé $\hat{\theta}$ de θ dans $\widetilde{\text{Homeo}}^+(\partial_\infty \tilde{M})$.

Démonstration : Supposons d'abord qu'il existe un relevé $\hat{\theta}$ de θ dans $\widetilde{\text{Homeo}}^+(\partial_\infty \tilde{M})$. Notons Id' le relevé de l'identité dans $\widetilde{\text{Homeo}}^+(\partial_\infty \tilde{M})$ qui est différent de l'identité. L'élément Id' est un élément d'ordre 2. Pour tout $q \in A_g$ un point externe, les lemmes 4.5.9 et 4.5.14 nous montrent qu'il existe i_q un homéomorphisme associé à θ_q qui peut être recollé. On peut supposer en plus que, pour tout q :

$$\begin{aligned} (C_{q,2}; i_q) &= \hat{\theta}(C_{q,2}) \\ (C_{q,3}; i_q) &= \hat{\theta}(C_{q,3}) \end{aligned}$$

Par le lemme 4.5.10, on obtient, pour tout $q \in A_g$ un point externe :

$$(C_{q,1}; i_q) = \text{Id}' \hat{\theta}(C_{q,1})$$

Ensuite, on travaille par récurrence en $h(q)$. Pour $q \in A_g$ tel que $h(q) > 0$, on suppose qu'on a déjà construit $i_{q'}$ pour tout $q' \in A_g$ tel que $h(q') > h(q)$. Les lemmes 4.5.9 et 4.5.12 nous montrent alors qu'il existe i_q un homéomorphisme associé à θ_q qui peut être recollé à $i_{q'}$ pour q' un point dans A_g juste au dessus de q . Le lemme 4.5.10 nous permet de montrer alors que, pour tout $q \in A_g$:

$$(C_{q,1}; i_q) = \text{Id}' \hat{\theta}(C_{q,1})$$

Soit $q_1 \in A_g$ le point juste au dessus de la racine q_0 . Il ne reste qu'à montrer qu'en changeant éventuellement i_{q_0} , on peut recoller i_{q_1} à i_{q_0} le long de $C = C_{q_1,1}^{-1} = C_{q_0,1}$. Or :

$$(C_{q_1,1}; i_{q_1})^{-1} = (C_{q_0,1}; i_{q_0})$$

Notons $[c]$ l'élément de $H_1(\mathbb{T}_{\theta(C_{q_0,1})})$ engendré par une courbe qui tourne une fois autour du cylindre $\partial_\infty \tilde{M} \setminus \{\theta(C_{q_0,1})_\pm\}$. Il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$[\mathbf{P}_{q_1}; i_{q_1}]_{\theta(C_{q_1,1}^{-1})} = n[c] + [\mathbf{P}_{q_1}; i_{q_1}]_{\theta(C_{q_1,1})}$$

Une rotation qui fait tourner la sphère une fois autour d'un axe est topologiquement non-triviale dans $\pi_1(\mathbb{P}SL(2, \mathbb{C}))$. Par définition de $(C_{q_1,1}; i_{q_1})$ et de $(C_{q_0,1}; i_{q_0})$, on obtient :

$$(C_{q_1,1}; i_{q_1})^{-1} = (\text{Id}')^n (C_{q_0,1}; i_{q_0})$$

Il en découle que n est pair, et le lemme 4.5.15 nous montre que la famille d'homéomorphismes $(i_q)_{q \in A_g}$ peut être recollé et le premier résultat en découle. Réciproquement, un résultat analogue nous montre que l'existence d'une famille d'homéomorphismes $(i_q)_{q \in A_g}$ nous permet de construire un relevé $\hat{\theta}$ de θ dans $\widetilde{\text{Homeo}}^+(\partial_\infty \tilde{M})$ et le deuxième résultat en découle. \square

Maintenant, on obtient comme corollaire immédiat le théorème principal de ce chapitre :

Théorème 4.1.4

Supposons que M est à courbure sectionnelle inférieure ou égale à -1 . Supposons que θ est non-élémentaire et qu'il se relève en un homomorphisme $\hat{\theta}$ de $\pi_1(\Sigma, Q_0)$ dans le groupe $\widetilde{\text{Homeo}}^+(\partial_\infty \tilde{M})$. Alors, il existe un problème de Plateau φ équivariant par θ .

Annexe A

Quelques résultats topologiques

A.1 Des résultats de base.

LE principe de Jordan nous dit qu'une injection, f , de Σ^{n-1} , la $(n-1)$ -sphère dans \mathbb{R}^n divise ce dernier en deux composantes connexes dont la première, qu'on appelle intérieur de l'image de f , est bornée, et dont la deuxième, qu'on appelle extérieur de l'image de f , est un voisinage de l'infini. Ensuite, le principe de l'invariance du domaine nous dit que, pour $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert dans \mathbb{R}^n et pour $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une injection continue, l'image, $f(\Omega)$, de Ω par f est aussi ouverte. Ces deux lemmes sont en même temps intuitifs et non-triviaux, et ensemble ils permettent d'étudier la topologie de \mathbb{R}^n (et toute espace localement homéomorphe à \mathbb{R}^n). En particulier, pour commencer, on obtient les deux lemmes techniques suivants :

Lemme A.1.1

Soit $f : \overline{B}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une injection continue de la boule fermée de dimension n dans \mathbb{R}^n . Si l'on identifie la frontière de B^n avec Σ^{n-1} , la sphère de dimension $n-1$, alors, l'intérieur de l'image de la restriction de f à Σ^{n-1} coïncide avec l'image de l'intérieur de B^n sous l'action de f .

Démonstration : Par l'injectivité :

$$f(B^n) \cap f(\Sigma^{n-1}) = \emptyset$$

Donc, comme B^n connexe, soit $f(B^n) \subseteq \text{Int}(\Sigma^{n-1})$, soit $f(B^n) \subseteq \text{Ext}(\Sigma^{n-1})$. Notons C la composante connexe du complémentaire de Σ^{n-1} dans lequel se trouve $f(B^n)$. Alors, Par le principe d'invariance du domaine :

$$\partial f(\overline{B}^n) \subseteq f(\partial \overline{B}^n) = f(\Sigma^{n-1})$$

et donc, $f(\overline{B}^n)$ est un sous ensemble fermé de C . Or, en appliquant à nouveau le principe d'invariance du domaine, on voit que $f(B^n)$ est un ensemble ouvert et qu'en particulier, c'est un sous-ensemble ouvert de C . Par définition, C est connexe, et $f(B^n)$ est un sous-ensemble non-vide de C . Il en découle que ces deux ensembles coïncident. Enfin, comme \overline{B}^n est compacte, on voit que $f(B^n)$ est relativement compacte, et donc bornée. On voit alors que C doit être la composante connexe bornée du complémentaire de $f(\Sigma^{n-1})$, d'où :

$$f(B^n) = \text{Int}(\Sigma^{n-1})$$

Le résultat en découle. \square

Lemme A.1.2

Soit $f, g : \Sigma^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux injections continues de la sphère dans \mathbb{R}^n . Soit $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble de \mathbb{R}^n contenu dans l'intérieur de l'image de f . Supposons ensuite que f et g sont homotopes dans $\mathbb{R}^n \setminus X$. Alors X est aussi contenu dans l'intérieur de l'image de g .

Démonstration : Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Pour $\varphi : \Sigma^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$ notons $[\varphi]$ l'élément de $H^1(\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\})$ défini par φ . Or, si φ est injective, le point x_0 se trouve dans l'intérieur de l'image de φ si et seulement si $[\varphi]$ est non-trivial. Mais, si $x_0 \in X$, alors, puisque f est homotope à g dans $\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$:

$$[f] = [g]$$

et le résultat en découle. \square

En utilisant ces lemmes, on peut montrer les résultats qu'on a employé dans le chapitre 2.

◇

A.2 L'injectivité et la surjectivité.

Lemme 2.2.4

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert dans \mathbb{R}^n et soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que chaque f_n soit un homéomorphisme de Ω sur $f_n(\Omega)$. Supposons en plus qu'il existe $f_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un homéomorphisme local tel que $f_n \rightarrow f_0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Soit $K \subseteq f_0(\Omega)$ compact, alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n > N \Rightarrow K \subseteq f_n(\Omega)$$

Démonstration : D'abord, on suppose qu'il existe B une boule ouverte contenue dans Ω telle que :

$$K \subseteq f_0(B)$$

Puisque K et $f_0(\partial B)$ sont compacts, il existe $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$$d(K, f_0(\partial B)) \geq \epsilon$$

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq N$ et pour $x \in \partial B$ on aie :

$$d(f_n(x), f_0(x)) < \epsilon$$

Il s'ensuit que $f_n(\partial B)$ est homotope à $f_0(\partial B)$ dans $\mathbb{R}^n \setminus K$. Par le lemme A.1.1, le compact K est contenu dans l'intérieur de $f_0(\partial B)$. Ensuite, le lemme A.1.2 nous dit que K est contenu dans l'intérieur de $f_n(\partial B)$ et finalement, une seconde application du lemme A.1.1 nous permet de conclure que $K \subseteq f_n(B)$.

Dans le cas général, par compacité, il existe des compacts $K_1, \dots, K_n \subseteq f_0(\Omega)$ et des boules $B_1, \dots, B_n \subseteq \Omega$ tels que, pour tout i :

$$K_i \subseteq f_0(B_i)$$

et le résultat en découle. \square

On peut obtenir maintenant le résultat suivant sur l'injectivité :

Lemme 2.2.2

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert dans \mathbb{R}^n et soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que chaque f_n soit un homéomorphisme de Ω sur $f_n(\Omega)$. Supposons en plus qu'il existe $f_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un homéomorphisme local tel que $f_n \rightarrow f$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Alors f_0 est injective.

Démonstration : On va supposer le contraire et raisonner par l'absurde.

Soit $x_1, x_2 \in U$ tels que $f_0(x_1) = f_0(x_2) = y$. Alors, il existe des voisinages U_i de x_i et V de y tels que $f_0 : U_i \rightarrow V$ soit un homéomorphisme pour chaque i et que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Pour tout n :

$$f_n(U_1) \cap f_n(U_2) = \emptyset$$

On sait qu'il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\overline{B}_\eta(y) \subseteq V = f_0(U_1), f_0(U_2)$$

Par le lemme 2.2.4, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n > N$, la boule fermée, $\overline{B}_\eta(y)$, soit contenue dans $f_n(U_i)$ pour chaque i . On obtient alors :

$$\overline{B}_\eta(y) \subseteq f_n(U_1) \cap f_n(U_2) = \emptyset$$

ce qui est absurde. Le résultat en découle. \square

Ensuite, on obtient une réciproque de ce résultat pour les fonctions C^2 :

Lemme 2.2.3

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, f_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ telles que, f_n tend vers f_0 localement C^2 et que la fonction f_0 soit un difféomorphisme sur son image. Soit $K \subseteq \Omega$ un compact. Alors, il existe $N > 0$ tel que pour $N \geq n$, la restriction de f_n à K soit injective.

Démonstration : Supposons le contraire et raisonnons par l'absurde. Il existe alors deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans K telles que, pour tout n :

$$\begin{aligned} x_n & \neq y_n \\ f_n(x_n) & = f_n(y_n) \end{aligned}$$

Ensuite, par la compacité, on peut supposer qu'il existe $x_0, y_0 \in K$ tels que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendent respectivement vers x_0 et y_0 lorsque n tend vers l'infini. En particulier, on voit que :

$$\begin{aligned} f_0(x_0) & = f_0(y_0) \\ \Rightarrow x_0 & = y_0 \\ \Rightarrow d(x_n, y_n) & \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Maintenant, puisque f_n tend vers f_0 localement C^2 , en utilisant la formule de Taylor, on peut montrer qu'il existe $A, B \in]0, \infty[$ tels que, pour tout n :

$$d(f_n(x_n), f_n(y_n)) \geq Ad(x_n, y_n) - Bd(x_n, y_n)^2$$

et donc, pour n suffisamment grand :

$$\begin{aligned} d(x_n, y_n) & = 0 \\ \Rightarrow x_n & = y_n \end{aligned}$$

ce qui est absurde, et le résultat en découle. \square

◇

A.3 La convergence des inverses.

Lemme A.3.1

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, f_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ telles que chaque f_i soit un homéomorphisme sur son image et que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tende vers f_0 localement uniformément dans Ω lorsque n tend vers l'infini. Notons Ω' l'image de Ω par f_0 . Alors f_n^{-1} tend vers f_0^{-1} localement uniformément dans Ω' lorsque n tend vers l'infini.

C'est-à-dire que, pour tout compact K dans Ω' , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel, que pour $n \geq N$, l'ensemble K soit contenu dans $f_n(\Omega)$ et que f_n^{-1} tende vers f_0^{-1} uniformément sur K lorsque n tend vers l'infini.

Démonstration : Soit B une boule contenue dans Ω et K un compact dans Ω' tels que :

$$\begin{aligned} f_0^{-1}(K) & \subseteq B \\ \Leftrightarrow K & \subseteq f_0(B) \end{aligned}$$

Par le lemme 2.2.4, pour n suffisamment grand :

$$\begin{aligned} K & \subseteq f_n(B) \\ \Leftrightarrow f_n^{-1}(K) & \subseteq B \end{aligned}$$

Il en découle que f_n^{-1} tend vers f_0^{-1} dans la topologie compacte-ouverte, qui est équivalente à la topologie de convergence uniforme, et le résultat en découle. \square

Le lemme 2.2.1 est un corollaire immédiat de ce résultat.

◇

A.4 La convergence d’Hausdorff.

Dans cette section, on va rappeler quelques résultats concernant la convergence d’Hausdorff. D’abord, on a le résultat suivant :

Lemme 3.3.11

Soit (X, d) un espace métrique compact. Soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}, Y_0 \subseteq X$ des sous-ensembles tels que Y_n tende vers Y_0 au sens d’Hausdorff lorsque n tend vers l’infini. Ensuite, soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}, \alpha_0$ des homéomorphismes de X telle que α_n tend vers α_0 dans la topologie compacte-ouverte (c’est-à-dire la topologie de convergence uniforme) lorsque n tend vers l’infini. Alors $\alpha_n(Y_n)$ tend vers $\alpha_0(Y_0)$ au sens d’Hausdorff lorsque n tend vers l’infini.

Démonstration : Pour $t \in]0, \infty[$ et pour $p \in X$, soit $B_t(p)$ la boule de rayon t autour de p dans X . Soit $\epsilon \in]0, \infty[$. Puisque X est compact, et comme α_0 est continue, cette application est uniformément continue. Il existe alors $\delta \in]0, \infty[$ tel que, pour tout $p, q \in X$:

$$d(p, q) < \delta \quad \Rightarrow \quad d(\alpha_0(p), \alpha_0(q)) < \epsilon/2$$

Ensuite, comme α_n tend vers α_0 uniformément, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N_1$ et pour tout $p \in X$:

$$d(\alpha_n(p), \alpha_0(p)) \leq \epsilon/2$$

Et donc, en utilisant l’inégalité triangulaire, pour tout $n \geq N_1$ et pour tout $p, q \in X$:

$$d(p, q) < \delta \quad \Rightarrow \quad d(\alpha_n(p), \alpha_0(q)) < \epsilon$$

Maintenant, pour $A \subseteq X$ un sous-ensemble de X , et pour $t \in]0, \infty[$, posons :

$$B_t(X) = \bigcup_{p \in X} B_t(p)$$

Comme Y_n converge vers Y_0 au sens d’Hausdorff, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N_2$:

$$Y_n \subseteq B_\delta(Y_0), \quad Y_0 \subseteq B_\delta(Y_n)$$

et donc, pour $n \geq \text{Max}(N_1, N_2)$:

$$\alpha_n(Y_n) \subseteq B_\epsilon(\alpha_0(Y_0)), \quad \alpha_0(Y_0) \subseteq B_\epsilon(\alpha_n(Y_n))$$

et le résultat en découle. \square

On utilise aussi le résultat suivant :

Lemme 3.4.4

Soit (X, d) un espace métrique compact. Ensuite soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}, A_0 \subseteq X$ et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}, B_0 \subseteq X$ des compacts tel que A_n et B_n tendent respectivement vers A_0 et B_0 lorsque n tend vers l'infini. Supposons ensuite que, pour tout n :

$$A_n \cap B_n \neq \emptyset$$

Alors :

$$A_0 \cap B_0 \neq \emptyset$$

Démonstration : Pour tout n , soit $p_n \in A_n \cap B_n$. On peut supposer qu'il existe p_0 tel que p_n tend vers p_0 lorsque n tend vers l'infini. Ensuite, soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A_0$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in B_0$ telles que :

$$d(a_n, p_n), d(b_n, p_n) \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

On peut supposer qu'il existe $a_0 \in A_0$ et $b_0 \in B_0$ tels que a_n et b_n tendent respectivement vers a_0 et vers b_0 lorsque n tend vers l'infini. En particulier :

$$a_0 = p_0 = b_0$$

et donc $p_0 \in A_0 \cap B_0$ et le résultat en découle. \square

Annexe B

La géométrie en courbure négative

B.1 Les triangles de comparaison.

POUR tout $\lambda \geq 0$, notons M_λ la variété d'Hadamard de dimension 2 à courbure sectionnelle constante égale à $-\lambda$. M_λ va servir d'espace de comparaison pour les objets dans une variété d'Hadamard quelconque.

Soit $\triangle ABC$ un triangle dans M_λ (par triangle, on entend le sous-ensemble de M_λ comprenant les sommets A , B et C et les arcs géodésiques les reliant. Il hérite de M_λ une structure d'espace métrique). Notons α , β , γ respectivement les tailles des angles aux sommets A , B et C , et notons a, b et c respectivement les longueurs des arêtes BC , AC et AB . En étudiant, par exemple, le modèle du disque de Poincaré de $M_{-1} = \mathbb{H}^2$ et en le dilatant au besoin, on peut voir que la longueur c est uniquement déterminé par le triplet (a, b, γ) . En gardant a et b constants, on obtient ainsi une fonction $\tilde{c}_\lambda : \gamma \mapsto c$ (voir la figure B.1.1).

La fonction \tilde{c}_λ est continue. De plus $\tilde{c}_\lambda(0) = |b - a|$ et $\tilde{c}_\lambda(\pi) = b + a$. Il en découle que

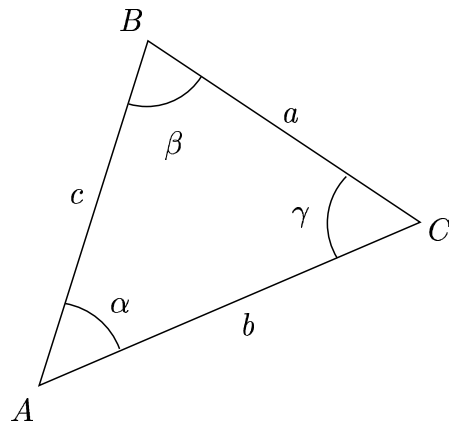


Figure B.1.1

pour tout c tel que :

$$|b - a| \leq c \leq b + a$$

c'est-à-dire, pour tout c satisfaisant à l'inégalité triangulaire, il existe un triangle ΔABC dans M_λ ayant a , b et c comme longueurs d'arêtes. En ce qui concerne l'unicité, on obtient le résultat suivant :

Lemme B.1.1

La fonction \tilde{c}_λ est injective.

Démonstration : Supposons le contraire et raisonnons par l'absurde. Il existe γ, γ' tels que $\tilde{c}_\lambda(\gamma) = \tilde{c}_\lambda(\gamma')$. Fixons les points C et B du triangle, et soient A et A' les troisièmes sommets des triangles (a, b, γ) et (a, b, γ') (voir la figure B.1.2).

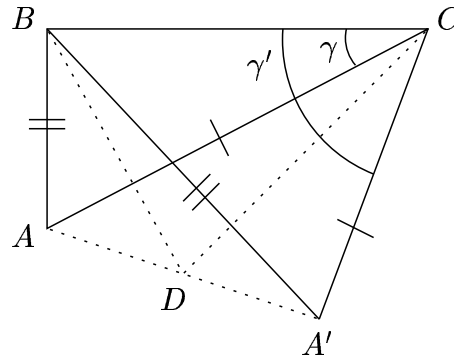


Figure B.1.2

Soit η la géodésique reliant A à A' telle que :

$$\eta(0) = A, \eta(1) = A'$$

Par définition, $AB = A'B$ et $AC = A'C$. Comme $\triangle ABA'$ et $\triangle ACA'$ sont des triangles isocèles, on voit que, si $D = \eta(1/2)$, alors D minimise simultanément sur η les distances à B et à C . Les angles entre BD et η et entre CD et η sont alors des angles droits. Comme on est en dimension 2, les points B, C et D sont alors colinéaires. Il en découle que D se trouve sur le prolongement de BC (voir la figure B.1.3).

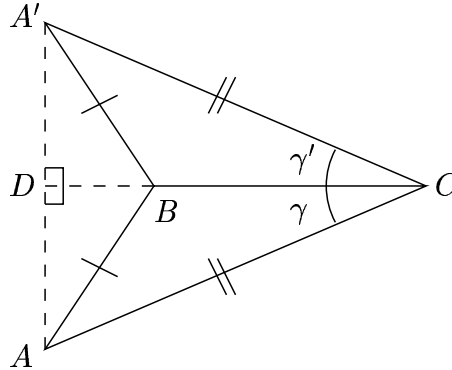


Figure B.1.3

Comme la droite AA' fait un angle droit avec BC , et comme $AD = A'D$, le point A doit être l'image de A' par la réflexion par rapport à la BC . On voit alors que les deux triangles $\triangle ABC$ et $\triangle A'BC$ sont équivalents et le résultat en découle. \square

En particulier, la fonction \tilde{c}_λ est strictement croissant.

◇

B.2 Les théorèmes de Topogonov.

Soit $K > k \geq 0$ et soit M une variété d'Hadamard à courbure pincée entre $-K$ et $-k$. Soient $P \in M$, $P_{-k} \in M_{-k}$ et $P_{-K} \in M_{-K}$. Soient $I_{-k} : T_P M \rightarrow T_{P_{-k}} M_{-k}$ et $I_{-K} : T_P M \rightarrow T_{P_{-K}} M_{-K}$ des isométries. Si l'on note g_{-k} , g et g_{-K} les métriques respectivement sur M_{-k} , M et M_{-K} , d'après le théorème de Rauch :

$$I_{-k}^* \text{Exp}^* g_{-K} \geq \text{Exp}^* g \geq I_{-k}^* \text{Exp}^* g_{-k}$$

ce qui nous permet de montrer les deux théorèmes de comparaison de Topogonov :

Théorème B.2.1 [Topogonov I]

Soit $\triangle ABC$ un triangle dans M et soit $\triangle A'B'C'$ le triangle de comparaison dans M_{-k} tel que $A'B' = AB$, $A'C' = AC$ et que $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$. Alors :

$$BC \geq B'C'$$

De la même façon, si $\triangle A''B''C''$ est le triangle de comparaison dans M_{-K} tel que $A''B'' = AB$, $A''C'' = AC$ et que $\widehat{A''B''C''} = \widehat{ABC}$, alors :

$$BC \leq B''C''$$

Démonstration : On utilise la carte exponentielle de M autour de P . Supposons que $A = 0$, et donc que AB et AC soient des rayons. Donc, si pour une métrique h et une courbe γ quelconques on note $\text{Long}(\gamma, h)$ la longueur de γ par rapport à h , on obtient :

$$\begin{aligned}\text{Long}(AB, I_{-k}^* \text{Exp}^* g_{-k}) &= \text{Long}(AB, \text{Exp}^* g) \\ \text{Long}(AC, I_{-k}^* \text{Exp}^* g_{-k}) &= \text{Long}(AC, \text{Exp}^* g)\end{aligned}$$

De plus, comme I_{-k} est une isométrie, l'angle entre AB et AC en A par rapport à la métrique $I_{-k}^* \text{Exp}^* g_{-k}$ est égale à l'angle en A par rapport à la métrique $\text{Exp}^* g$ entre ces deux arcs. Soit maintenant γ la géodesique relativement à la métrique $I_{-k}^* \text{Exp}^* g_{-k}$ reliant B et C . Alors, par le théorème de Rauch :

$$\begin{aligned}d(B, C; I_{-k}^* \text{Exp}^* g_{-k}) &= \text{Long}(\gamma, I_{-k}^* \text{Exp}^* g_{-k}) \\ &\leq \text{Long}(\gamma, \text{Exp}^* g) \\ &\leq d(B, C; \text{Exp}^* g)\end{aligned}$$

et le premier résultat en découle. Un raisonnement analogue nous permet ensuite d'obtenir le deuxième résultat. \square

On obtient ensuite le corollaire suivant :

Corollaire B.2.2 [Topogonov II]

Soit ΔABC un triangle dans M et soit $\Delta A'B'C'$ le triangle de comparaison dans M_{-k} tel que $A'B' = AB$, $A'C' = AC$ et $B'C' = BC$. Alors :

$$\widehat{BAC} \leq \widehat{B'A'C'}, \quad \widehat{ACB} \leq \widehat{A'C'B'}, \quad \widehat{CBA} \leq \widehat{C'B'A'}$$

De la même façon, si $\Delta A''B''C''$ est le triangle de comparaison dans M_{-K} tel que $A''B'' = AB$, $A''C'' = AC$ et que $B''C'' = BC$, alors :

$$\widehat{BAC} \geq \widehat{B''A''C''}, \quad \widehat{ACB} \geq \widehat{A''C''B''}, \quad \widehat{CBA} \geq \widehat{C''B''A''}$$

Démonstration : Soit $\Delta A'B'C''$ le triangle de comparaison dans M_{-k} tel que $A'B' = AB$, $A'C'' = AC$ et que $\widehat{B'A'C''} = \widehat{BAC}$. Par le théorème de Topogonov I, $BC \geq B'C''$.

On choisit ensuite C' tel que $A'C' = AC$ et que $B'C' = BC$. Par monotonie (lemme B.1.1) :

$$\widehat{B'A'C'} \geq \widehat{B'A'C''} = \widehat{BAC}$$

On obtient ainsi le résultat pour le sommet A . Les résultats pour les deux autres sommets découlent du même raisonnement. Ensuite, un raisonnement analogue nous permet de montrer le deuxième résultat. \square

◇

B.3 La convexité de la fonction distance.

Si ΔABC est un triangle dans M et si $\Delta A'B'C'$ est le triangle de comparaison dans M_λ tel que $A'B' = AB$, $A'C' = AC$ et que $B'C' = BC$, on définit φ_λ , l'homéomorphisme canonique entre $\Delta A'B'C'$ et ΔABC , en posant :

$$\varphi(A') = A, \quad \varphi(B') = B, \quad \varphi(C') = C$$

et en l'étendant ensuite en une fonction sur $\Delta A'B'C'$ par l'interpolation linéaire le long des arêtes. On a le résultat suivant :

Théorème B.3.1

Soit ΔABC un triangle dans M et soit $\Delta A'B'C'$ le triangle de comparaison dans M_{-k} tel que $A'B' = AB$, $A'C' = AC$ et $B'C' = BC$. Soit ensuite $\varphi_{-k} : \Delta A'B'C' \rightarrow \Delta ABC$ l'homéomorphisme canonique, alors φ_{-k} est contractante. C'est-à-dire que, pour tout $P, Q \in \Delta A'B'C'$:

$$d(\varphi_{-k}(P), \varphi_{-k}(Q)) \leq d(P, Q)$$

De la même façon, si $\Delta A''B''C''$ est le triangle de comparaison dans M_{-K} tel que $A''B'' = AB$, $A''C'' = AC$ et que $B''C'' = BC$ et si $\varphi_{-K} : \Delta A''B''C'' \rightarrow \Delta ABC$ est l'homéomorphisme canonique, alors cette application est dilatante. C'est-à-dire que, pour tout $P, Q \in \Delta A'B'C'$:

$$d(\varphi_{-K}(P), \varphi_{-K}(Q)) \geq d(P, Q)$$

Démonstration : En premier lieu, on va montrer le résultat pour P un sommet de $\Delta A'B'C'$. Soit D' un point sur l'arc reliant A' à B' et posons $D = \varphi_{-k}(D')$ (voir la figure B.3.4).

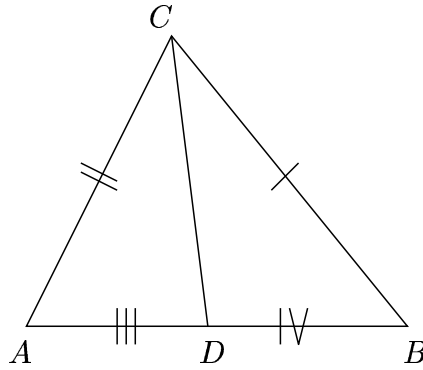


Figure B.3.4

On veut montrer que :

$$d(C, D) \leq d(C', D')$$

Supposons le contraire, et raisonnons par l'absurde. Donc $C'D' < CD$. Soit C'' tel que $A'C'' = A'C' = AC$ et $C''D' = CD$. Par monotonie (lemme B.1.1), on obtient :

$$\widehat{C''A'D'} > \widehat{C'A'D'}$$

et, en appliquant de nouveau la monotonie, on obtient :

$$C''B' > C'B'$$

Maintenant, soit C''' tel que $B'C''' = B'C' = BC$ et $C'''D' = CD$ (voir la figure B.3.5).

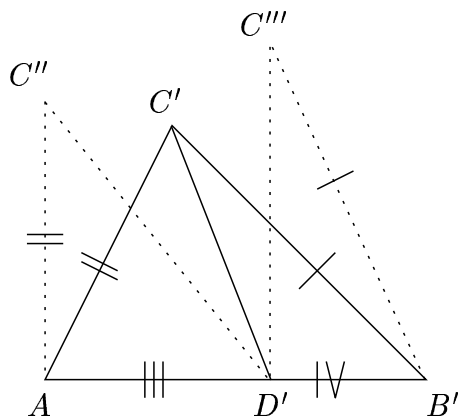


Figure B.3.5

Puisque $B'C'' > B'C' = B'C'''$ et $D'C'' = DC = D'C'''$, la monotonie nous permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} & \widehat{C''D'B'} > \widehat{C'''D'B'} \\ \Rightarrow & \widehat{A'D'C''} + \widehat{B'D'C'''} < \pi \end{aligned}$$

et donc, en utilisant le principe de comparaison, on obtient :

$$\pi = \widehat{ADC} + \widehat{BDC} \leq \widehat{A'D'C''} + \widehat{B'D'C'''} < \pi$$

ce qui est absurde, et le résultat en découle pour P un sommet de $\Delta A'B'C'$.

Maintenant, soit D' et E' des points respectivement sur les droites reliant A' à B' et B' à C' et posons $D = \varphi_{-k}(D')$ et $E = \varphi_{-k}(E')$ (voir la figure B.3.6).

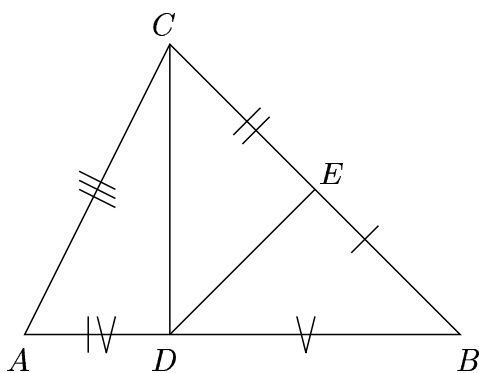


Figure B.3.6

On veut montrer que :

$$d(D, E) \leq d(D', E')$$

On vient de montrer que $D'C' \geq DC$. Soit C'' tel que $B'C'' = B'C' = BC$ et $D'C'' = DC$, et ensuite soit E'' tel que $C''E'' = C'E'$ et que $B'E'' = B'E'$ (voir la figure B.3.7).

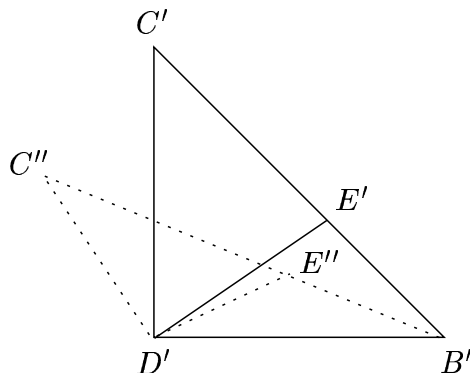


Figure B.3.7

Par monotonie :

$$\begin{aligned} \widehat{C''B'D'} &\leq \widehat{C'B'D'} \\ \Rightarrow D'E'' &\leq D'E' \end{aligned}$$

Mais, comme on vient de montrer le résultat pour des paires de points dont l'un est un sommet du triangle, on voit en particulier que :

$$DE \leq D'E'' \leq D'E'$$

et le premier résultat en découle. En remarquant qu'on n'a utilisé que les théorèmes de comparaison et la monotonie, on voit qu'un raisonnement analogue (obtenu en remplaçant des minoration par des majorations, et vice-versa) nous donnera le deuxième résultat. \square

En particulier, on obtient le résultat suivant :

Corollaire B.3.2

Soit M une variété d'Hadamard et soit $P \in M$. Définissons la fonction $d_P : M \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$d_P(Q) = d(P, Q)$$

Alors, d_P est convexe et d_P^2 est strictement convexe.

Démonstration : Le résultat est trivial dans $M_0 = \mathbb{R}^2$. Soit maintenant $A \neq B \in M$. Soit $\Delta P'A'B'$ le triangle de comparaison dans $M_0 = \mathbb{R}^2$ tel que $P'A' = PA$, $P'B' = PB$ et $A'B' = AB$. Soit maintenant $t \in [0, 1]$ et soit $Q \in AB$ et $Q' \in A'B'$ tels que :

$$AQ = tAB, \quad QB = (1-t)AB, \quad A'Q' = tA'B', \quad Q'B' = (1-t)A'B'$$

On voit que $\varphi_0(Q') = Q$. Par le résultat précédent, on obtient :

$$d_P(Q) = d(P, Q) \leq d(P', Q') \leq (1-t)d(P', A') + td(P', B') = (1-t)d(P, A) + t(P, B)$$

Le premier résultat en découle, et le même raisonnement (pour $t \in]0, 1[$) nous donne également le deuxième résultat. \square

En particulier, la fonction d_P est convexe dans M_λ pour tout λ . On peut obtenir alors le résultat suivant :

Corollaire B.3.3

Soit $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M_\lambda$ une géodésique et soit $P \notin \gamma$. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $d_P(\gamma(t_0)) = A$. Ensuite, supposons qu'il existe $t < t' \in \mathbb{R}$ tels que :

$$d_P(\gamma(t)) = d_P(\gamma(t')) = B > A$$

Alors $t < t_0 < t'$.

Remarque : L'analogie de ce résultat dans le cadre Euclidien est le suivant : Si $\triangle ABC$ est un triangle tel que $AB = AC$ et si D est un point sur le prolongement de la droite BC tel que $AD < AB$, alors D se trouve entre B et C (voir la figure B.3.8).

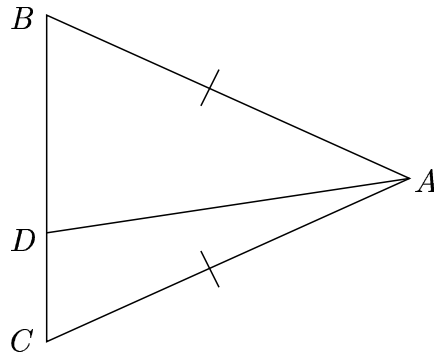


Figure B.3.8

Démonstration : Ceci découle directement de la convexité de la fonction d_P . \square

◇

B.4 Une autre fonction pour les triangles de comparaison.

Comme avant, soit $\triangle ABC$ un triangle dans M_λ et α, β, γ respectivement les tailles des angles aux sommets A, B et C . Notons a, b et c respectivement les longueurs des arêtes BC, AC et AB . L'angle β est uniquement déterminé par le triplet (a, b, γ) . En gardant a

et b constants, on obtient ainsi une fonction $\tilde{\beta}_\lambda : \gamma \mapsto \beta$ (voir la figure B.1.1). On voit que $\tilde{\beta}_\lambda(0) = \pi$ et que $\tilde{\beta}_\lambda(\pi) = 0$. Ensuite, on a le résultat suivant :

Lemme B.4.1

Supposons que $b > a$, alors la fonction $\tilde{\beta}_\lambda$ est injective sur $[0, \pi]$.

Démonstration : Sinon, il existe γ, γ' tels que $\tilde{\beta}_\lambda(\gamma) = \tilde{\beta}_\lambda(\gamma')$. Fixons les points C et B dans le triangle, et soient A et A' les troisièmes sommets respectivement des triangles (a, b, γ) et (a, b, γ') (voir la figure B.4.9).

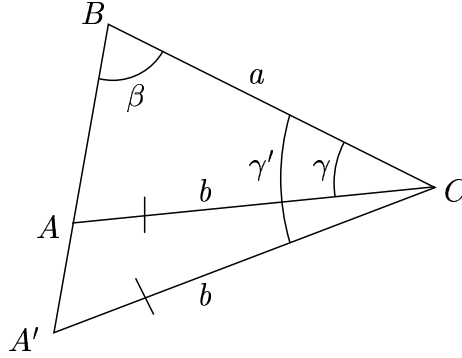


Figure B.4.9

Comme $\tilde{\beta}_\lambda(\gamma) = \tilde{\beta}_\lambda(\gamma')$, les trois points B, A et A' sont colinéaires (ils sont sur la même géodésique). De plus, si l'on note η cette géodésique, et si on la normalise de telle sorte que $B = \eta(0)$, on voit qu'il existe $t, t' \in \mathbb{R}$ tels que $A = \eta(t)$ et $A' = \eta(t')$. Or :

$$CA = CA' = b > a = CB$$

Le corollaire B.3.3 nous permet de conclure que, sans perte de généralité, $t < 0 < t'$. Or, par définition, t et t' ont tous les deux le même signe, ce qui est une contradiction. Le résultat en découle. \square

En particulier, sous ces conditions, la fonction $\tilde{\beta}_\lambda$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[0, \pi]$. On peut également montrer le même résultat sous des hypothèses un peu différentes :

Lemme B.4.2

La fonction $\tilde{\beta}_\lambda$ est injective sur l'intervalle $[\pi/2, \pi]$

Démonstration : Soit D le point dans AB minimisant la distance à C . On voit que l'angle \widehat{CDB} doit être égal à $\pi/2$. Comme la somme des angles dans un triangle dans \mathbb{H}^2 est toujours inférieure ou égale à π , et comme $\widehat{BCA} \geq \pi/2$, on voit que les angles \widehat{BAC} et \widehat{ABC} doivent être tous les deux inférieurs à $\pi/2$. En même temps, et pour les mêmes raisons, on voit que les angles \widehat{DAC} et \widehat{DBC} doivent être, eux aussi, tous les deux inférieurs à $\pi/2$, ce qui nous permet de conclure que D se situe entre A et B (voir la figure B.4.10).

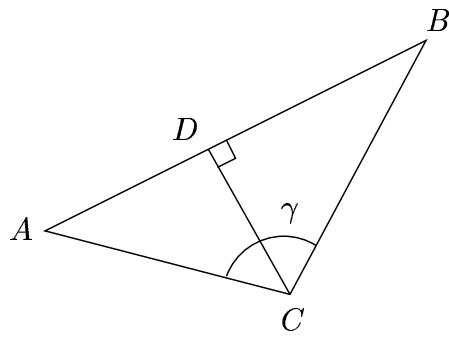


Figure B.4.10

Maintenant, soient $\gamma' > \gamma \geq \pi/2$ tels que $\tilde{\beta}_\lambda(\gamma) = \tilde{\beta}_\lambda(\gamma')$. Fixons ensuite les points B et C et soient A et A' les troisièmes sommets des triangles (a, b, γ) et (a, b, γ') . On voit que B, A et A' sont colinéaires (voir la figure B.4.11).

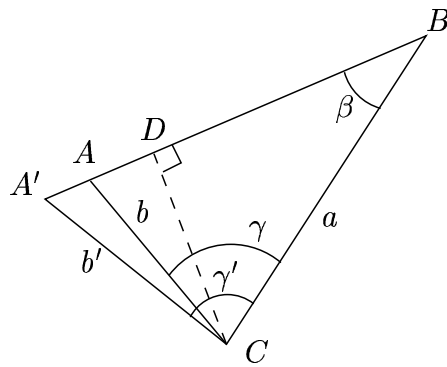


Figure B.4.11

Notons η la géodesique sur laquelle se trouvent ces trois points et normalisons la de telle sorte que $\eta(0) = D$ et que $\eta^{-1}(B) > 0$. Comme D se trouve entre B et A et entre B et A' , on obtient :

$$\eta^{-1}(A), \eta^{-1}(A') < 0$$

Mais, puisque D est le point dans η minimisant la distance à C , par le corollaire B.3.3, les valeurs $\eta^{-1}(A)$ et $\eta^{-1}(A')$ ont des signes différents. On obtient ainsi la contradiction recherchée, et le résultat en découle. \square

On sait que $\tilde{\beta}_\lambda(\pi/2) > 0$ et donc, comme avant, la fonction $\tilde{\beta}$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[\pi/2, \pi]$.

Annexe C

La géométrie différentielle du fibré tangent

C.1 Des distributions sur le fibré tangent.

SOIT M une variété riemannienne. On note $\pi : TM \rightarrow M$ la projection canonique. On note $HTM \subseteq TTM$ le *fibré horizontal* de la dérivée covariante de M . On note $VTM \subseteq TTM$ le *fibré vertical*, c'est-à-dire, le noyau de π dans TTM . On sait que TTM est la somme directe de ces deux fibrés :

$$TTM = HTM \oplus VTM$$

On sait également que chacun de ces deux fibrés est canoniquement isomorphe à π^*TM . Notons i_H (resp. i_V), une section de $\text{End}(HTM, \pi^*TM)$ (resp. $\text{End}(VTM, \pi^*TM)$) l'isomorphisme de HTM (resp. VTM) avec π^*TM . On obtient alors un isomorphisme :

$$i_H \oplus i_V : TTM \rightarrow \pi^*TM \oplus \pi^*TM$$

Posons $j = i_V^{-1} \circ i_H$. C'est un isomorphisme entre HTM et VTM . Pour $X, Y \in \Gamma(M, TM)$ on définit $\{X, Y\} \in \Gamma(TM, TTM)$ par :

$$i_H \oplus i_V \{X, Y\} = (\pi^*X, \pi^*Y)$$

En utilisant une trivialisatlon locale de TM , on peut écrire tout champ de vecteurs sur TTM (au moins localement) en termes d'une combinaison linéaire de tels champs de vecteurs. De la même façon, pour $p \in M$ et pour $X, Y, q \in T_pM$ on définit $\{X, Y\}_q \in T_qTM$ par :

$$(i_H \oplus i_V)_q \{X, Y\}_q = (\pi_q^* X, \pi_q^* Y)$$

Finalement, pour X un champ de vecteurs sur M , définissons X^H et X^V par :

$$\begin{aligned} X^H &= \{X, 0\} \\ X^V &= \{0, X\} \end{aligned}$$

◇

C.2 La dérivée covariante du fibré tangent.

Nous obtenons le résultat suivant sur les crochets de Lie des champs de vecteurs sur TM :

Lemme C.2.1

On a la relation suivante :

$$[\{X, Y\}, \{U, V\}](q) = \{[X, U], \nabla_X V - \nabla_U Y - R_{XU}q\}$$

où ∇ est la dérivée covariante de Levi-Civita sur M , le tenseur R est son tenseur de courbure et q est un point quelconque de TM .

Démonstration : Soit $P \in S^n T^*M$ un polynôme homogène de degré n . Pour $q \in TM$ notons :

$$P(q) = P(q, \dots, q)$$

On voit trivialement que :

$$\begin{aligned} (\{0, X\} P)(q) &= P(X, q, \dots, q) + \dots + P(q, \dots, q, X) \\ &= n(i_X P)(q) \end{aligned}$$

Ensuite, soit X et Y des champs de vecteurs sur M :

$$\begin{aligned} (TY \cdot X)P &= X(Y^*P) \\ &= XP(Y, \dots, Y) \\ \Rightarrow (\{X, \nabla_X Y\} P)(Y) &= XP(Y, \dots, Y) \\ \Rightarrow (\{X, 0\} P)(Y) &= XP(Y, \dots, Y) - (\{0, \nabla_X Y\} P)(Y) \\ &= XP(Y, \dots, Y) - n(i_{\nabla_X Y} P)(Y) \\ &= (\nabla_X P)(Y) \end{aligned}$$

Donc :

$$\{X, Y\} P = \nabla_X P + n i_Y P$$

Ensuite, on calcule :

$$\begin{aligned}\{X, Y\} \{U, V\} P &= \{X, Y\} (\nabla_U P + n i_V P) \\ &= \nabla_X \nabla_U P + n i_Y \nabla_U P + n \nabla_X i_V P + n(n-1) i_Y i_V P\end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned}\{[X, Y], \{U, V\}\} P &= (\nabla_X \nabla_U - \nabla_U \nabla_X - \nabla_{[X, U]}) P + \nabla_{[X, U]} P \\ &\quad + n(i_Y \nabla_U + \nabla_X i_V - \nabla_U i_Y - i_V \nabla_X) P \\ &\quad + n(n-1)(i_Y i_V - i_V i_Y) P\end{aligned}$$

D'abord, on sait que, en tant qu'opérateurs agissant sur l'espace de polynômes :

$$[i_Y i_V] = 0$$

Ensuite :

$$\begin{aligned}[(i_Y \nabla_U - \nabla_U i_Y) P](X) &= U P(Y, X, \dots, X) - P(\nabla_U Y, X, \dots, X) \\ &\quad - (n-1) P(Y, \nabla_U X, X, \dots, X) \\ &\quad - U P(Y, X, \dots, X) + (n-1) P(Y, \nabla_U X, \dots, X) \\ &= -P(\nabla_U Y, X, \dots, X) \\ &= \frac{1}{n} [(-i_{\nabla_U Y}) P](X)\end{aligned}$$

Finalement :

$$(R_{XU} P)(Z) = -n(i_{R_{XU} Z} P)(Z)$$

et donc :

$$\{[X, Y], \{U, V\}\} P = \nabla_{[X, U]} P + i_{\nabla_X V} P - i_{\nabla_U Y} P - i_{R_{XU} q} P$$

Comme la famille des polynômes tronqués est localement dense dans $C^\infty(TM)$ (par rapport à la topologie C_{loc}^0 , et donc au sens de distributions), on voit que pour tout $f \in C^\infty(TM)$:

$$\{[X, Y], \{U, V\}\} f = \{[X, U], \nabla_X V - \nabla_U Y - R_{XU} q\} f$$

et le résultat en découle. \square

On définit la métrique \tilde{g} sur le fibré TTM par :

$$\tilde{g}(\{X, Y\}, \{X, Y\}) = \langle X, X \rangle + \langle Y, Y \rangle$$

On note alors ∇ la dérivée covariante de Levi-Civita sur TTM associée à cette métrique, et, en appliquant le formule de Koszul, on obtient le résultat suivant :

Lemme C.2.2

On a la relation suivante :

$$(\nabla_{\{X, Y\}} \{U, V\})(q) = \left\{ \nabla_X U + \frac{1}{2} R_{qV} X + \frac{1}{2} R_{qY} U, \nabla_X V - \frac{1}{2} R_{XU} q \right\}$$

◇

C.3 Des distributions sur le fibré unitaire.

Pour M une variété riemannienne, notons UM son *fibré unitaire* :

$$UM = \{X \in TM \mid \|X\| = 1\}$$

Ensuite, on définit les deux champs tautologiques T^H, T^V , des éléments de $\xi^\infty(TM)$ par :

$$\begin{aligned} T^H(q) &= \{q, 0\}_q \\ T^V(q) &= \{0, q\}_q \end{aligned}$$

Soit $i : UM \rightarrow TM$ le plongement canonique. Notons HUM et VUM les restrictions respectivement des fibrés HTM et VTM à la variété UM :

$$\begin{aligned} HUM &= i^*HTM \\ VUM &= i^*VTM \end{aligned}$$

Les champs i^*T^H et i^*T^V ne s'annulent pas et définissent alors des sous-fibrés de HUM et de VUM de dimension 1. Pour simplifier la notation, on va appeler aussi ces champs respectivement T^H et T^V et on va noter N^HUM (resp. N^VUM) le sous-fibré de HUM (resp. VUM) engendré par T^H (resp. T^V). Ensuite, on définit les sous-fibrés E^HUM et E^VUM respectivement de HUM et de VUM par :

$$\begin{aligned} E^HUM &= N^HUM^\perp = \langle T^H \rangle^\perp \\ E^VUM &= N^VUM^\perp = \langle T^V \rangle^\perp \end{aligned}$$

On a alors l'identification :

$$i_* : TUM \simeq HUM \oplus E^VUM$$

De nouveau, pour simplifier la notation, on va considérer HUM , E^VUM et VUM également comme des sous-fibrés de TUM . Enfin, on définit le sous-fibré $WUM \subseteq TUM$ par :

$$i_*WUM = E^HUM \oplus E^VUM$$

et on appelle WUM le *fibré de contact* de UM .

◇

C.4 La structure de contact sur le fibré unitaire.

Nos calculs sur la dérivée covariante de Levi-Civita sur TTM nous permettent maintenant de montrer le lemme suivant sur les champs tautologiques :

Lemme C.4.1

On a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} [\{X, Y\}, T^V] &= \{0, Y\} \\ \nabla_{\{X, Y\}} T^V &= \{0, Y\} \end{aligned}$$

Démonstration : Soit $P \in S^n T^* M$ un polynôme homogène de degré n . On voit que :

$$\begin{aligned} (T^V P)(q) &= n(i_q P)(q) \\ &= nP(q) \\ \Rightarrow T^V P &= nP \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned} [\{X, Y\}, T^V]P &= \{X, Y\} T^V P - T^V \{X, Y\} P \\ &= \nabla_X nP + i_Y nP - n\nabla_X P - (n-1)i_Y P \\ &= i_Y P \end{aligned}$$

et le premier résultat en découle. Ensuite, par le lemme C.2.2 :

$$\nabla_{\{0, q\}} \{X, Y\} = \left\{ \frac{1}{2} R_{qq} X, 0 \right\} = 0$$

D'où :

$$\nabla_{\{X, Y\}} T^V = [\{X, Y\}, T^V] - \nabla_{\{0, q\}} \{X, Y\} = \{0, Y\}$$

et le deuxième résultat en découle. \square

On utilise ce résultat pour montrer que WUM définit une structure de contact sur UM :

Lemme C.4.2

La distribution WUM définit une structure de contact sur UM .

Démonstration : Soit $P \in M$ et soit e_1, \dots, e_n une repère de M définie dans un voisinage de P . Soit e^1, \dots, e^n sa base duale, et définissons la forme λ sur TM telle que, pour tout $q \in TM$:

$$\begin{aligned} \lambda(q) \{U, V\} &= \sum_{i=1}^n e^i(X) \langle e_i^H, \{U, V\} \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle e_i^V, T^V \rangle \langle e_i^H, \{U, V\} \rangle \end{aligned}$$

Maintenant, soit U_1, U_2, V_1 et V_2 des champs de vecteurs sur Ω . Alors :

$$\begin{aligned} (\nabla_{\{U_1, U_2\}} \lambda) \{V_1, V_2\} &= \{U_1, U_2\} \sum_{i=1}^n \langle e_i^V, T^V \rangle \langle e_i^H, \{V_1, V_2\} \rangle \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \langle e_i^V, T^V \rangle \langle e_i^H, \nabla_{\{U_1, U_2\}} \{V_1, V_2\} \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n (\{U_1, U_2\} \langle e_i^V, T^V \rangle) \langle e_i^H, V_1 \rangle \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \langle e_i^V, T^V \rangle \langle \nabla_{\{U_1, U_2\}} e_i^H, \{V_1, V_2\} \rangle \end{aligned}$$

On calcule les deux composantes séparément. D'abord, en utilisant le lemmes C.2.2, et C.4.1 on obtient, pour tout i :

$$\begin{aligned} \{U_1, U_2\} \langle e_i^V, T^V \rangle &= \langle \nabla_{\{U_1, U_2\}} e_i^V, T^V \rangle + \langle e_i^V, \nabla_{\{U_1, U_2\}} T^V \rangle \\ &= \langle \left\{ \frac{1}{2} R_{qe_i} U_1, \nabla_{U_1} e_i \right\}, T^V \rangle + \langle e_i^V, \{0, U_2\} \rangle \\ &= \langle \nabla_{U_1} e_i, q \rangle + \langle e_i, U_2 \rangle \end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant de nouveau le lemme C.2.2, on obtient :

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{\{U_1, U_2\}} e_i^H, \{V_1, V_2\} \rangle &= \langle \{ \nabla_{U_1} e_i, -\frac{1}{2} R_{U_1 e_i} q \}, \{V_1, V_2\} \rangle \\ &\quad + \langle \left\{ \frac{1}{2} R_{q U_2} e_i, 0 \right\}, \{V_1, V_2\} \rangle \\ &= \langle \nabla_{U_1} e_i, V_1 \rangle - \frac{1}{2} \langle R_{U_1 e_i} q, V_2 \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle R_{q U_2} e_i, V_1 \rangle \end{aligned}$$

et l'on voit alors que :

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\{U_1, U_2\}} \lambda) \{V_1, V_2\} &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{U_1} e_i, q \rangle \langle e_i, V_1 \rangle + \sum_{i=1}^n \langle e_i, U_2 \rangle \langle e_i, V_1 \rangle \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \langle e_i^V, T^V \rangle \langle \nabla_{U_1} e_i, V_1 \rangle \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \langle e_i^V, T^V \rangle \langle R_{U_1} e_i, V_2 \rangle \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \langle e_i^V, T^V \rangle \langle R_{qU_2} e_i, V_1 \rangle \\
&= \langle V_1, U_2 \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{U_1} (e_i \langle e_i, V_1 \rangle), q \rangle \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \langle e_i \langle e_i, \nabla_{U_1} V_1 \rangle, q \rangle \\
&\quad + \frac{1}{2} \langle R_{qU_2} q, V_1 \rangle + \frac{1}{2} \langle R_{qU_1} q, V_2 \rangle \\
&= \langle V_1, U_2 \rangle + \langle \nabla_{U_1} V_1, q \rangle \\
&\quad + \frac{1}{2} \langle R_{qU_2} q, V_1 \rangle + \frac{1}{2} \langle R_{qU_1} q, V_2 \rangle
\end{aligned}$$

Ensuite, par le lemme C.2.1 :

$$[\{U_1, U_2\}, \{V_1, V_2\}] = \{[U_1 V_1], *\}$$

où l'étoile représente un vecteur qu'on n'a pas besoin de calculer. On voit alors que :

$$\begin{aligned}
d\lambda(\{U_1, U_2\}, \{V_1, V_2\}) &= (\nabla_{\{U_1, U_2\}} \lambda) \{V_1, V_2\} - (\nabla_{\{V_1, V_2\}} \lambda) \{U_1, U_2\} \\
&\quad - \lambda([\{U_1, U_2\}, \{V_1, V_2\}]) \\
&= \langle U_2, V_1 \rangle - \langle U_1, V_2 \rangle
\end{aligned}$$

En particulier, si l'on note $i : UM \rightarrow TM$ l'immersion canonique, alors $i^* \lambda$ définit une 1-forme sur UM et $di^* \lambda = i^* d\lambda$ est non-dégénérée sur WUM . WUM est alors un fibré de contact et le résultat en découle. \square

De plus, on vient de calculer la forme "symplectique" sur WUM :

Corollaire C.4.3

Soit ω la forme "symplectique" sur WUM . Alors, pour tout $\{X_1, X_2\}, \{Y_1, Y_2\} \in WUM$:

$$\omega(\{X_1, X_2\}, \{Y_1, Y_2\}) = \langle X_2, Y_1 \rangle - \langle X_1, Y_2 \rangle$$

Démonstration : Le résultat découle directement ces calculs faits dans la démonstration du lemme précédent. \square

◇

C.5 Les relevées d'hypersurfaces.

Soit $\Sigma = (S, i) \subseteq M$ une hypersurface immergée orientée. Notons $\hat{\Sigma} = (S, \hat{i}) \subseteq UM$ le relevée de Gauss de Σ . Soit II la seconde forme fondamentale de Σ dans M et soit A l'opérateur de Weingarten de Σ . Donc, pour tout U, V :

$$\langle A \cdot U, V \rangle = II(U, V)$$

Soit $P \in S$ un point quelconque et soit X_1, \dots, X_n un repère de S . Définissons A^i_j telle que, pour tout i et pour tout j :

$$A \cdot X_j = A^i_j X_i$$

Pour chaque i , on définit \hat{X}_i par :

$$\hat{X}_i = \{X_i, AX_i\}$$

Chaque \hat{X}_i est alors un champ de vecteurs tangent à $\hat{\Sigma}$. Notons $\pi : TUM \rightarrow WUM$ la projection orthogonale de TUM sur WUM et notons $\nabla^W = \pi \circ \nabla^{UM}$ la dérivée covariante de la distribution W héritée de la dérivée covariante de Levi-Civita de UM . Notons :

$$\tilde{A}_{ijk} = \omega(\nabla_{\hat{X}_i}^W \hat{X}_j, \hat{X}_k)$$

On considère \tilde{A} comme la seconde forme fondamentale de $\hat{\Sigma}$. Puisque $\hat{\Sigma}$ est une sous-variété legendrienne, on obtient le résultat suivant :

Lemme C.5.1

Le tenseur \tilde{A}_{ijk} est symétrique en i, j, k .

Démonstration : D'abord, on voit que :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{ijk} &= \omega(\nabla_{\hat{X}_i} \hat{X}_j, \hat{X}_k) \\ &= \hat{X}_i \omega(\hat{X}_j, \hat{X}_k) - \omega(\hat{X}_j, \nabla_{\hat{X}_i} \hat{X}_k) \end{aligned}$$

Donc, comme $\hat{\Sigma}$, le relevé de Gauss de Σ , est legendrien, on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{ijk} &= \omega(\nabla_{\hat{X}_i} \hat{X}_k, \hat{X}_j) \\ &= \tilde{A}_{ikj} \end{aligned}$$

Ensuite, on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{ijk} &= \omega(\nabla_{\hat{X}_i} \hat{X}_j, \hat{X}_k) \\ &= \omega(\nabla_{\hat{X}_j} \hat{X}_i + [\hat{X}_i \hat{X}_j], \hat{X}_k) \\ &= \omega(\nabla_{\hat{X}_j} \hat{X}_i, \hat{X}_k) \\ &= \tilde{A}_{jik} \end{aligned}$$

Comme les transpositions (12) et (23) engendrent le groupe de permutations de $\{1, 2, 3\}$, le résultat en découle. \square

Comme dans le chapitre 1, pour R un tenseur de courbure quelconque, on note :

$$R_{ijkl} = \langle R_{X_i X_j} X_k, X_l \rangle$$

On obtient un lien entre la première dérivée de A et la seconde forme fondamentale de $\hat{\Sigma}$ en termes du tenseur de courbure R^M de M :

Lemme C.5.2

Soit R^M le tenseur de courbure de M . Alors :

$$\tilde{A}_{ijk} = A_{jk;i} - \frac{1}{2} R_{ij\eta k}^M - \frac{1}{2} R_{\eta p i q}^M A^p_j A^q_k - \frac{1}{2} R_{\eta p j q}^M A^p_i A^q_k$$

où η représente la direction normale extérieure à Σ .

Démonstration : Par définition :

$$\tilde{A}_{ijk} = \omega(\nabla_{\{X_i, AX_i\}}^W \{X_j, AX_j\}, \{X_k, AX_k\})$$

Donc, en appliquant le lemme C.2.2, on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{ijk} &= \omega(\{\nabla_{X_i} X_j, \nabla_{X_i} AX_j\} + \{0, -\frac{1}{2}R_{X_i X_j}^M q\} \\ &\quad + \{\frac{1}{2}R_{qAX_j}^M X_i, 0\} + \{\frac{1}{2}R_{qAX_i}^M X_j, 0\}, \{X_k, AX_k\}) \\ &= \omega(\{\nabla_{X_i} X_j, \nabla_{X_i} AX_j\}, \{X_k, AX_k\}) - \frac{1}{2}\omega(\{0, R_{X_i X_j}^M q\}, \{X_k, AX_k\}) \\ &\quad + \frac{1}{2}\omega(\{R_{qAX_j}^M X_i, 0\}, \{X_k, AX_k\}) + \frac{1}{2}\omega(\{R_{qAX_i}^M X_j, 0\}, \{X_k, AX_k\}) \end{aligned}$$

Ensuite, par définition de ω (voir le corollaire C.4.3) :

$$\begin{aligned} \omega(\{\nabla_{X_i} X_j, \nabla_{X_i} AX_j\}, \{X_k, AX_k\}) &= \langle \nabla_{X_i} X_j, X_k \rangle - \langle \nabla_{X_i} X_j, AX_k \rangle \\ &= \langle \nabla_{X_i}^\Sigma AX_j, X_k \rangle - \langle A \nabla_{X_i}^\Sigma X_j, X_k \rangle \\ &= \langle (\nabla_{X_i}^\Sigma A) X_j, X_k \rangle \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{ijk} &= \langle (\nabla_{X_i}^\Sigma A) X_j, X_k \rangle - \frac{1}{2} \langle R_{X_i X_j}^M q, X_k \rangle \\ &\quad - \frac{1}{2} \langle R_{qAX_j}^M X_i, AX_k \rangle - \frac{1}{2} \langle R_{qAX_i}^M X_j, AX_k \rangle \end{aligned}$$

et le résultat en découle. \square

En particulier, on obtient le résultat suivant concernant la symétrie de $A_{ij;k}$:

Corollaire C.5.3

$$A_{ik;j} - A_{jk;i} = -R_{ij\eta k}^M$$

Démonstration : Ceci découle directement du résultat précédent et de la symétrie de \tilde{A} . \square

En particulier, lorsque M est à courbure constante, $A_{ik;j} = A_{jk;i}$ et donc $A_{ij;k}$ est symétrique en i, j, k .

◇

C.6 Le théorème de Darboux pour les familles.

Soit $r \in]0, \infty]$ et notons $B_r(0)$ la boule de rayon r autour de l'origine dans $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Soit $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de métriques sur $B_r(0)$ qui converge dans la topologie C_{loc}^∞ vers g_0 lorsque n tend vers l'infini. Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de structures de contact sur $B_r(0)$ qui converge dans la topologie C_{loc}^∞ lorsque n tend vers l'infini. Soit h la métrique euclidienne sur E . Soit β la structure de contact canonique sur E :

$$\beta = dt + \sum_{i=1}^n p_i dq_i$$

On obtient le résultat suivant :

Théorème [Darboux]

Il existe $\epsilon \in]0, \infty[$ et $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que :

- (i) pour tout n , la fonction $\varphi_n : B_\epsilon(0) \rightarrow B_r(0)$ est un difféomorphisme sur son image,
- (ii) φ_n tend vers φ_0 dans la topologie C_l^∞ oc lorsque n tend vers l'infini, et
- (iii) pour tout n , il existe $f_n : B_\epsilon(0) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\varphi_n^* \alpha_n = e^{f_n} \beta$$

Démonstration : Notons $W = \{0\} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. Pour tout n , soit $A_n : E \rightarrow E$ une application linéaire telle que :

$$\beta(0) = A_n^* \alpha_n(0), \quad d\beta(0)|_W = A_n^* d\alpha_n(0)|_W$$

Puisque α_n tend vers α_0 lorsque n tend vers l'infini, on peut supposer que A_n tend vers A_0 lorsque n tend vers l'infini. En remplaçant α_n par $A_n^* \alpha_n$, et en réduisant au besoin r , on peut supposer que, pour tout n :

$$\beta(0) = \alpha_n(0), \quad d\beta(0)|_W = d\alpha_n(0)|_W$$

Pour tout n , définissons $\alpha_{n,t}$ pour $t \in [0, 1]$ par :

$$\alpha_{n,t} = (1 - t)\beta + t\alpha_n$$

Puisque $\alpha_{0,t} = \beta(0)$ et $d\alpha_{0,t}|_W = d\beta(0)|_W$ pour tout t , en réduisant au besoin r , on peut supposer que $\alpha_{0,t}$ est une structure de contact dans $B_r(0)$ pour tout t . Comme α_n tend vers α_0 lorsque n tend vers l'infini, on peut supposer que $\alpha_{n,t}$ est une structure de contact dans $B_r(0)$ pour tout t et pour tout n .

Pour tout n et pour tout t soit $Y_{n,t}$ un champ de vecteurs sur $B_r(0)$ tel que :

$$\alpha_{n,t}(Y_{n,t}) = 1, \quad Y_{n,t} \perp \text{Ker}(d\alpha_{n,t})$$

Y_n converge vers Y_0 dans la topologie C_{loc}^∞ sur $I \times B_r(0)$ lorsque n tend vers l'infini. Définissons $h_n : I \times B_r(0) \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$h_{n,t} = \iota_{Y_{n,t}} \partial_t \alpha_{n,t}$$

On voit que la forme $\partial_t \alpha_{n,t} - h_{n,t} \alpha_{n,t}$ s'annule sur $Y_{n,t}$. Il en découle que, pour tout n et t , il existe un unique champ de vecteurs $X_{n,t}$ dans $\text{Ker}(\alpha_{n,t})$ tel que :

$$\partial_t \alpha_{n,t} = h_{n,t} \alpha_{n,t} - \iota_{X_{n,t}} d\alpha_{n,t}$$

En particulier, on voit que, pour tout n et t :

$$X_{n,t}(0) = 0$$

De plus, X_n converge vers X_0 dans la topologie C_{loc}^∞ sur $I \times B_r(0)$ lorsque n tend vers l'infini. Pour tout n , soit $(\Phi_{n,t})_{t \in [0,1]}$ le flot de $X_{n,t}$. On voit que $\Phi_{n,t}(0) = 0$ pour tout n et t . De plus, comme X_n converge vers X_0 , il existe $\epsilon \in]0, \infty[$ tel que $\Phi_{n,t}$ soit définie dans $B_\epsilon(0)$ pour tout n et t . Enfin, Φ_n converge vers Φ_0 dans la topologie C_{loc}^∞ sur $I \times B_r(0)$ lorsque n tend vers l'infini.

Pour V un champ de vecteurs quelconque, notons \mathcal{L}_V la dérivée de Lie par rapport à V . On obtient :

$$\partial_t \Phi_{n,t}^* \alpha_{n,t} = \Phi_{n,t}^* (\partial_t \alpha_{n,t} + \mathcal{L}_{X_{n,t}} \alpha_{n,t})$$

Pour tout V , on sait que $\mathcal{L}_V = d\iota_V + \iota_V d$. Puisque $X_{n,t}$ est dans le noyau de $d\alpha_{n,t}$ pour tout n et t , on obtient :

$$\partial_t \Phi_{n,t}^* \alpha_{n,t} = \Phi_{n,t}^* (\partial_t \alpha_{n,t} + \iota_{X_{n,t}} d\alpha_{n,t})$$

Donc, par définition de $X_{n,t}$, on obtient :

$$\partial_t \Phi_{n,t}^* \alpha_{n,t} = h_t \Phi_{n,t}^* \alpha_{n,t}$$

Comme $\alpha_{n,0} = \beta$ et $\alpha_{n,1} = \alpha_n$, on obtient, pour tout n et t :

$$\Phi_{n,1}^* \alpha_1 = \text{Exp} \left(\int_0^1 h_t dt \right) \beta$$

On pose $\varphi_n = \Phi_{n,1}$ et $f_n = \text{Exp}(\int_0^1 h_t dt)$ et le résultat en découle. \square

Remarque : Salamon et McDuff traitent le théorème de Darboux pour les structures de contact dans la section 3.4 de [44]. L'article [17] de Geiges donne une introduction plus détaillée de la géométrie de contact.

Annexe D

Les groupes de tresses

D.1 Les groupes de tresses.

DANS cette annexe, on étudie les groupes de tresses dans la sphère. Pour $n \in \mathbb{N}$, une *tresse* d'ordre n dans $\hat{\mathbb{C}}$ est un n -uplet $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) : I \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ de courbes dans $\hat{\mathbb{C}}$ tel que, pour tout $t \in I$, et pour tout $i \neq j$:

$$\gamma_i(t) \neq \gamma_j(t)$$

Autrement dit, c'est un lacet fermé dans $\hat{\mathbb{C}}^n$ qui évite les diagonales. On dit que $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ est une *tresse formée* si et seulement si γ_i est un lacet fermée pour tout i . Si γ est fermée, on dit que le point $(z_1, \dots, z_n) \in \hat{\mathbb{C}}^n$ est le *point de base* de la tresse si et seulement si, pour tout i :

$$\gamma_i(0) = \gamma_i(1) = z_i$$

On note $\mathcal{T}_n(\mathbf{z})$ l'ensemble de toutes les tresses fermées d'ordre n dans $\hat{\mathbb{C}}$. Soit $\gamma, \eta \in \mathcal{T}_n(\mathbf{z})$. Une *homotopie* entre γ et η est une fonction $h : I \rightarrow \mathcal{T}_n(\mathbf{z})$ telle que $h(0) = \gamma$, $h(1) = \eta$ et que l'application :

$$(s, t) \mapsto h(s)(t)$$

soit continue. On dit que γ et η sont homotopes si et seulement s'il existe une telle h , et l'on note $\gamma \sim \eta$. On définit l'espace $T_n(\mathbf{z})$ par :

$$T_n(\mathbf{z}) = \mathcal{T}_n(\mathbf{z}) / \sim$$

Pour $\gamma, \eta \in \mathcal{T}_n(\mathbf{z})$, on définit le produit $\gamma \cdot \eta \in \mathcal{T}_n(\mathbf{z})$ par :

$$(\gamma \cdot \eta)(t) = \begin{cases} \eta(2t) & \text{pour } t \in [0, 1/2] \\ \gamma(2t - 1) & \text{pour } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Ce produit préserve les classes d'homotopie, et définit ainsi un produit sur $T_n(\mathbf{z})$. On définit la tresse triviale, $\gamma_0 \in \mathcal{T}_n(\mathbf{z})$ telle que, pour tout t :

$$\gamma_0(t) = \mathbf{z}$$

On voit que, pour tout $\gamma \in \mathcal{T}_n(\mathbf{z})$, on a :

$$\gamma \cdot \gamma_0, \gamma_0 \cdot \gamma \sim \gamma$$

Il en découle que $[\gamma_0] \in T_n(\mathbf{z})$ est l'identité pour ce produit. On définit l'involution i de $\mathcal{T}_n(\mathbf{z})$ telle que, pour tout $\gamma \in \mathcal{T}_n(\mathbf{z})$ et pour tout t :

$$i(\gamma)(t) = \gamma(1 - t)$$

On voit que, pour tout $\gamma \in \mathcal{T}_n(\mathbf{z})$ on a :

$$\gamma \cdot i(\gamma), i(\gamma) \cdot \gamma \sim \gamma_0$$

Il en découle que $[i(\gamma)] \in T_n(\mathbf{z})$ est l'inverse de $[\gamma] \in T_n(\mathbf{z})$ pour ce produit. Enfin, en montrant l'associativité de ce produit, on voit que $(T_n(\mathbf{z}), \cdot)$ est un groupe. Dans la suite, on va noter $T_n(\mathbf{z})$ le groupe obtenu en munissant $T_n(\mathbf{z})$ de ce produit.

◇

D.2 Le nombre d'enlacements relatif.

Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathbf{z} \in \hat{\mathbb{C}}$ un point dans le complémentaire des diagonales et soit $[\gamma] \in T_n(\mathbf{z})$. On peut supposer que $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ où tous les γ_i sont lisses. En particulier, ils sont tous rectifiables, et donc leurs images sont de mesure zéro relativement à la mesure de Lebesgue de dimension 2 sur $\hat{\mathbb{C}}$. Il existe alors un point dans $\hat{\mathbb{C}}$ qui est dans le complémentaire des images de chacun de ces lacets. On peut supposer que ce point est le point à l'infini.

Soit $w_1 \neq w_2 \in \mathbb{C}$ et soit $(\eta_1, \eta_2) \in T_2(\mathbf{w})$. Pour η une courbe quelconque dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, on définit $\text{Wind}(\eta)$ comme étant le nombre d'enlacements (le "winding number") de η autour de l'origine. On définit $\text{Wind}(\eta_1, \eta_2)$, le nombre d'enlacements relatif de (η_1, η_2) par :

$$\text{Wind}(\eta_1, \eta_2) = \text{Wind}(\eta_1 - \eta_2)$$

On définit $\text{Wind}(\gamma)$ par :

$$\text{Wind}(\gamma) = \sum_{j>i} \text{Wind}(\gamma_i, \gamma_j) \text{ Mod } 2$$

On obtient d'abord le résultat suivant :

Lemme D.2.1

Si n est impair, alors $\text{Wind}(\gamma)$ ne dépend pas du choix du point à l'infini.

Démonstration : On peut supposer que les courbes $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ s'intersectent transversalement, et donc en des points isolés. Donc, si l'on choisit deux points $w_0, w_1 \in \hat{\mathbb{C}}$ dans le complémentaire des images de chacun des lacets, il existe une courbe η reliant w_0 à w_1 qui évite les points où les γ_i s'intersectent. De plus, on peut supposer que η intersecte chacun des γ_i transversalement. Soit $0 < t_1 < \dots < t_m < 1$ tel que, pour tout i , il existe $j(i)$ tel que :

$$\eta(t_i) \in \text{Im}(\gamma_{j(i)})$$

et que η évite tous les γ_i dans le complémentaire de $\{t_1, \dots, t_m\}$. Pour tout \mathbf{w} dans le complémentaire des images des γ_i s, notons $\text{Wind}(\gamma; \mathbf{w})$ le nombre d'enlacements relatif de γ relativement au point à l'infini \mathbf{w} .

Soit $(A_t)_{t \in I}$ une courbe lisse dans $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ telle que, pour tout t :

$$A_t(\eta(t)) = \infty$$

Par définition, pour tout t , on a :

$$\text{Wind}(\gamma; \eta(t)) = \text{Wind}(A_t \gamma; \infty)$$

Il en découle que, pour tout i , et pour tout $s, s' \in]t_i, t_{i+1}[$:

$$\text{Wind}(\gamma; \eta(s)) = \text{Wind}(A_s \gamma; \infty) = \text{Wind}(A_{s'} \gamma; \infty) = \text{Wind}(\gamma; \eta(s'))$$

Il suffit alors de savoir ce qui se passe près de chaque t_i . Sans perte de généralité, on peut supposer que η traverse γ_1 en un seul point en t_i . Soit $\epsilon \in]0, \infty[$ et soit $s \in]t_i - \epsilon, t_i[$ et $s' \in]t_i, t_i + \epsilon[$. Par la continuité, on voit que, pour ϵ suffisamment petit et pour tout $i, j \neq 1$:

$$\begin{aligned} \text{Wind}(\gamma_i, \gamma_j; \eta(s)) &= \text{Wind}(A_s \gamma_i, A_s \gamma_j; \infty) \\ &= \text{Wind}(A_{s'} \gamma_i, A_{s'} \gamma_j; \infty) \\ &= \text{Wind}(\gamma_i, \gamma_j; \eta(s')) \end{aligned}$$

Soit τ tel que $\gamma_1(\tau) = \eta(t_i)$. Soit μ un petit cercle partant de $\gamma_1(\tau)$ tournant une fois autour de $\eta(s)$. Soit $\delta \in]0, \infty[$ et définissons la courbe γ'_1 comme étant, heuristiquement, la courbe obtenue en insérant μ dans γ_1 en τ . Formellement :

$$\gamma'_1(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{pour } t \in [0, \tau - \delta] \\ \gamma_1((\tau - \delta) + 2(t - (\tau - \delta))) & \text{pour } t \in [\tau - \delta, \tau - \delta/2] \\ \mu((t - (\tau - \delta/2))/\delta) & \text{pour } t \in [\tau - \delta/2, \tau + \delta/2] \\ \gamma_1(\tau + 2(t - (\tau - \delta/2))) & \text{pour } t \in [\tau + \delta/2, \tau + \delta] \\ \gamma_1(t) & \text{pour } t \in [\tau + \delta, 1] \end{cases}$$

Pour ϵ et δ suffisamment petits, $\gamma' = (\gamma'_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ est une tresse fermée. De plus, en réduisant encore au besoin ϵ et δ , on peut supposer que les tresses γ et γ' sont homotopes dans le complémentaire de $\eta(s')$. Il en découle que :

$$\text{Wind}(\gamma'; \eta(s')) = \text{Wind}(\gamma; \eta(s'))$$

Pour ϵ et δ suffisamment petits et pour tout $i > 1$, puisque $\gamma_i(\tau)$ est dans la composante connexe du complémentaire de μ qui ne contient pas $\eta(s)$, on obtient :

$$\text{Wind}(\eta, \gamma_i(\tau); \eta(s)) = \text{Wind}(A_s \eta, A_s \gamma_i(\tau); \infty) = \text{Wind}(A_s \eta) = \pm 1$$

Définissons γ'_i comme étant, heuristiquement, la courbe obtenue en “pinçant” la courbe γ_i près de τ . Formellement :

$$\gamma'_i(t) = \begin{cases} \gamma_i(t) & \text{pour } t \in [0, \tau - \delta] \\ \gamma_i((\tau - \delta) + 2(t - (\tau - \delta))) & \text{pour } t \in [\tau - \delta, \tau - \delta/2] \\ \gamma_i(\tau) & \text{pour } t \in [\tau - \delta/2, \tau + \delta/2] \\ \gamma_i(\tau + 2(t - (\tau - \delta/2))) & \text{pour } t \in [\tau + \delta/2, \tau + \delta] \\ \gamma_i(t) & \text{pour } t \in [\tau + \delta, 1] \end{cases}$$

Pour ϵ et δ suffisamment petits, la tresse (γ'_1, γ_i) est homotope à la tresse (γ'_1, γ'_i) , et l'on obtient :

$$\begin{aligned} \text{Wind}(\gamma'_1, \gamma_i; \eta(s)) &= \text{Wind}(\gamma'_1, \gamma'_i; \eta(s)) \\ &= \text{Wind}(\gamma_1, \gamma_i; \eta(s)) + \text{Wind}(\eta, \gamma_i; \eta(s)) \end{aligned}$$

Il en découle que :

$$\text{Wind}(\gamma'; \eta(s)) = \text{Wind}(\gamma; \eta(s)) \pm (n - 1)$$

et le résultat en découle. \square

On montre ensuite que le nombre d'enlacements relatif est invariant par des homotopies lisses :

Corollaire D.2.2

Soit n impair. Soit $\gamma_0, \gamma_1 \in \mathcal{T}_n(\mathbf{z})$ des tresses lisses fermées d'ordre n . Supposons qu'il existe une homotopie lisse h entre γ_0 et γ_1 . Alors :

$$\text{Wind}(\gamma_0) = \text{Wind}(\gamma_1)$$

Démonstration : Par compacité, on peut décomposer h en un nombre fini h_1, \dots, h_m d'homotopies telles que, pour tout i , il existe un point $w_i \in \hat{\mathbb{C}}$ tel que chaque h_i évite w_i . On obtient alors, pour tout i :

$$\text{Wind}(h_i(0)) = \text{Wind}(h_i(0); w_i) = \text{Wind}(h_i(1); w_i) = \text{Wind}(h_i(1))$$

et le résultat en découle. \square

Puisque toute tresse peut être approximée par une tresse lisse et puisque toute homotopie entre deux tresses lisses peut être approximée par une homotopie lisse entre ces deux tresses, l'application Wind définit une fonction sur $T_n(\mathbf{z})$ pour n impair. On obtient le résultat suivant :

Lemme D.2.3

Soit n impair. L'application Wind définit un homomorphisme de $T_n(\mathbf{z})$ de \mathbb{Z}_2 .

Démonstration : Soit $\gamma, \gamma' \in \mathcal{T}_n(\mathbf{z})$ deux tresses lisses fermées. On peut supposer que ces deux tresses évitent l'infini. Pour tout $i \neq j$, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{Wind}(\gamma_i \cdot \gamma'_i, \gamma_j \cdot \gamma'_j) &= \text{Wind}(\gamma_i \cdot \gamma'_i - \gamma_j \cdot \gamma'_j) \\ &= \text{Wind}((\gamma_i - \gamma_j) \cdot (\gamma'_i - \gamma'_j)) \\ &= \text{Wind}(\gamma_i - \gamma_j) + \text{Wind}(\gamma'_i - \gamma'_j) \\ &= \text{Wind}(\gamma_i, \gamma_j) + \text{Wind}(\gamma'_i, \gamma'_j) \end{aligned}$$

Le résultat en découle en prenant la somme sur tous les (i, j) . \square

◇

D.3 Les tresses génératrices.

On étudie maintenant les tresses d'ordre 3. Soit $\Delta \subseteq \hat{\mathbb{C}}^3$ la réunion des diagonales dans \mathbb{C}^3 :

$$\Delta = \bigcup_{i \neq j} \left\{ (z_1, z_2, z_3) \in \hat{\mathbb{C}}^3 \mid z_i = z_j \right\}$$

Posons $X = \hat{\mathbb{C}}^3 \setminus \Delta$. Notons $\Pi(\mathbb{P}SL(2, \mathbb{C}))$ l'ensemble de lacets fermés dans $\mathbb{P}SL(2, \mathbb{C})$ ayant l'identité comme point de base. Pour tout $\mathbf{z} \in X$, définissons l'application $\mathcal{A}_{\mathbf{z}} : \mathcal{T}_3(\mathbf{z}) \rightarrow \Pi(\mathbb{P}SL(2, \mathbb{C}))$ telle que pour tout γ et pour tout $t \in I$, $\mathcal{A}_{\mathbf{z}}(\gamma)(t)$ soit l'unique application de Möbius qui envoie \mathbf{z} sur $\gamma(\mathbf{z})$. On voit que $\mathcal{A}_{\mathbf{z}}$ définit un homéomorphisme entre $\mathcal{T}_3(\mathbf{z})$ et $\Pi(\mathbb{P}SL(2, \mathbb{C}))$. En prenant les quotients, on obtient un isomorphisme A entre $\mathcal{T}_3(\mathbf{z})$ et $\pi_1(\mathbb{P}SL(2, \mathbb{C}), \text{Id})$.

Soit $\mathbf{z} \in X$ et soit $\gamma \in \mathcal{T}_3(\mathbf{z})$. Notons $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. On dit que γ est une *tresse génératrice* si et seulement si :

- (i) la courbe γ_2 est un lacet simple qui tourne 1 fois autour du cylindre $\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_3\}$, et,
- (ii) les courbes γ_1 et γ_3 sont constantes.

Si γ est une tresse génératrice, alors, on obtient trivialement :

$$\text{Wind}(\gamma) = 1 \text{ Mod } 2$$

On obtient le résultat suivant :

Lemme D.3.1

Supposons que $\mathbf{z} = (0, 1, \infty)$. Définissons $(A_t)_{t \in I} \in \Pi(\mathbb{P}SL(2, \mathbb{C}))$ par :

$$A_t(z) = e^{2\pi i t} z$$

Alors A est homotope à A^{-1} . De plus, si $\gamma \in \mathcal{T}_3(\mathbf{z})$ est une tresse génératrice, alors $\mathcal{A}_{\mathbf{z}}(\gamma)$ est homotope à A .

Remarque : En particulier, toutes les tresses génératrices en \mathbf{z} sont homotopes, et, si γ est une tresse génératrice, alors $[\gamma] \in T_3(\mathbf{z})$ (qui est un élément non-trivial car $\text{Wind}([\gamma]) \neq 0$) est un élément d'ordre 2.

Démonstration : Puisque $\mathbb{P}SL(2, \mathbb{C})$ est connexe, il existe $(B_t)_{t \in I}$, une famille d'applications de Möbius, telle que $B_0 = \text{Id}$ et que :

$$B_1(0, 1, \infty) = (\infty, 1, 0)$$

On définit $H : I \times I \rightarrow \mathbb{P}SL(2, \mathbb{C})$ par :

$$H(s, t) = B_t A_s B_t^{-1}$$

On voit que H définit une homotopie entre $A = H(\cdot, 0)$ et $A^{-1} = H(\cdot, 1)$ et le premier résultat en découle. Puisque $\mathcal{A}_{\mathbf{z}}(\gamma)$ est trivialement homotope, soit à A , soit à A^{-1} , le deuxième résultat en découle immédiatement. \square

Ce résultat nous permet de montrer que les tresse génératrices sont dans le centre de $T_3(\mathbf{z})$:

Lemme D.3.2

Soit $\gamma, \eta \in \mathcal{T}_3(\mathbf{z})$ et supposons que γ est une tresse génératrice. Alors $\gamma \cdot \eta$ est homotope à $\eta \cdot \gamma$.

Démonstration : Définissons A comme dans le lemme précédent. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\mathbf{z} = (0, 1, \infty)$ et que :

$$\mathcal{A}_{\mathbf{z}}(\gamma) = A$$

Soit $(B_t)_{t \in I}$ telle que :

$$\mathcal{A}_{\mathbf{z}}(\eta) = B$$

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on définit $M_\theta : \text{End}(\mathbb{C}) \rightarrow \text{End}(\mathbb{C})$ par :

$$M_\theta \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & e^{2\pi i \theta} b \\ e^{-2\pi i \theta} c & d \end{pmatrix}$$

En prenant le quotient, on voit que M_θ définit une application de $\mathbb{P}SL(2, \mathbb{C})$ en lui-même. On définit $H : I \times I \rightarrow \mathbb{P}SL(2, \mathbb{C})$ par :

$$H(s, t) = M_t(B_s A_s)$$

L'application H définit une homotopie entre $(B_s A_s)_{s \in I} = H(\cdot, 0)$ et $(A_s B_s)_{s \in I} = H(\cdot, 1)$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} B \cdot A &\sim (B_s A_s)_{s \in I} \\ &\sim (A_s B_s)_{s \in I} \\ &\sim A \cdot B \end{aligned}$$

Le résultat en découle. \square

Ensuite, on construit un plus grand ensemble de courbes qui sont homotopes à des courbes génératrices :

Lemme D.3.3

Soit $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in X$. Soit η une tresse allant de \mathbf{w} à \mathbf{z} et soit $\gamma \in \mathcal{T}_3(\mathbf{z})$ une courbe génératrice. Alors, il existe une courbe génératrice $\gamma' \in \mathcal{T}_3(\mathbf{w})$ telle que :

$$\eta^{-1} \cdot \gamma \cdot \eta \sim \gamma'$$

Démonstration : Posons $A = \mathcal{A}_{\mathbf{z}}(\gamma)$ et $B = \mathcal{A}_{\mathbf{z}}(\eta)$. On a :

$$\mathcal{A}_{\mathbf{w}}(\eta^{-1} \cdot \gamma \eta) = B^{-1} \cdot A \cdot B$$

Définissons $H : I \times I \rightarrow \mathbb{P}SL(2, \mathbb{C})$ par :

$$H(s, t) = B_{st}^{-1} A_s B_{st}$$

L'application H définit une homotopie entre $A = H(\cdot, 0)$ et $(B_s^{-1} A_s B_s)_{s \in I} = H(\cdot, 1)$. Définissons $\gamma' \in \mathcal{T}_3(\mathbf{w})$ telle que :

$$\mathcal{A}_{\mathbf{w}}(\gamma') = A$$

γ' est une tresse génératrice et :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mathbf{w}}(\gamma') &= A \\ &\sim (B_s^{-1} A_s B_s)_{s \in I} \\ &\sim B^{-1} \cdot A \cdot B \\ &= \mathcal{A}_{\mathbf{w}}(\eta^{-1} \cdot \gamma \cdot \eta) \end{aligned}$$

Le résultat en découle. \square

Enfin, notons Σ_3 le groupe de permutations de $\{1, 2, 3\}$. On définit l'action de $\sigma \in \Sigma_3$ sur X par :

$$\sigma(z_1, z_2, z_3) = (z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}, z_{\sigma(3)})$$

On obtient le résultat suivant :

Lemme D.3.4

Soit $\mathbf{z} \in X$ et soit $\gamma \in \mathcal{T}_3(\mathbf{z})$ une tresse génératrice. Alors, pour tout $\sigma \in \Sigma_3$, la tresse fermée $\sigma(\gamma)$ est homotope à une tresse génératrice de $\mathcal{T}_3(\sigma(\mathbf{z}))$.

Démonstration : Notons :

$$\sigma(\gamma) = (\sigma(\gamma)_1, \sigma(\gamma)_2, \sigma(\gamma)_3) = (\gamma_{\sigma(1)}, \gamma_{\sigma(2)}, \gamma_{\sigma(3)})$$

$\sigma(\gamma)_{\sigma^{-1}(1)}$ et $\sigma(\gamma)_{\sigma^{-1}(3)}$ sont des courbes constantes et $\sigma(\gamma)_{\sigma^{-1}(2)}$ est un lacet simple qui tourne une fois autour du cylindre $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{\sigma(z)_{\sigma^{-1}(1)}, \sigma(z)_{\sigma^{-1}(3)}\}$. Posons :

$$A = A_{\sigma(\mathbf{z})}(\sigma(\gamma))$$

On voit que A est un lacet simple. En effet, sinon, il existe $t \neq t'$ tels que $A_t = A_{t'}$ et donc :

$$\gamma_2(t) = A_t(z_2) = A_{t'}(z_2) = \gamma_2(t')$$

ce qui est absurde puisque γ_2 est un lacet simple. Soit $B_1 : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ une application de Möbius telle que, pour tout i :

$$B_1(\sigma(z)_{\sigma(i)}) = \sigma(z)_i$$

Et définissons la tresse $\gamma' \in \mathcal{T}_3(\sigma(\mathbf{z}))$ par :

$$\gamma' = \mathcal{A}_{\sigma(\mathbf{z})}^{-1} \left((B_1^{-1} A_s B_1)_{s \in I} \right)$$

On voit que $(B_1^{-1} A_s B_1(\sigma(z)_1))_{s \in I}$ et $(B_1^{-1} A_s B_1(\sigma(z)_3))_{s \in I}$ sont des courbes constantes. $(B_1^{-1} A_s B_1)_{s \in I}$ est un lacet simple et donc $(B_1^{-1} A_s B_1(\sigma(z)_2))_{s \in I}$ est un lacet simple. De plus, cette courbe-ci n'est pas contractile dans $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{\sigma(z)_1, \sigma(z)_3\}$. En effet, sinon, $(B_1^{-1} A_s B_1)_{s \in I}$ et donc A seraient contractiles dans $\mathbb{P}SL(2, \mathbb{C})$. Il en découle que $\sigma(\gamma)_{\sigma^{-1}(2)}$ serait contractile dans $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{\sigma(z)_{\sigma^{-1}(1)}, \sigma(z)_{\sigma^{-1}(3)}\}$, ce qui est absurde. Il en découle que γ' est une tresse génératrice.

Définissons $H : I \times I \rightarrow \mathbb{P}SL(2, \mathbb{C})$ par :

$$H(s, t) = B_t^{-1} A_s B_t$$

L'application H définit une homotopie entre $\mathcal{A}_{\sigma(\mathbf{w})}(\gamma) = H(\cdot, 0)$ et $\mathcal{A}_{\sigma(\mathbf{w})}(\gamma') = H(\cdot, 1)$, et le résultat en découle. \square

◇

D.4 Un isomorphisme.

Dans cette section, on va montrer le résultat suivant :

Lemme D.4.1

Soit $\mathbf{z} \in X$, alors Wind définit un isomorphisme entre $T_3(\mathbf{z})$ et \mathbb{Z}_2 .

Soit $\mathbf{z} \in X$. Pour $\gamma \in \mathcal{T}_3(\mathbf{z})$ une tresse fermée, il existe une autre tresse fermée γ' dans $\mathcal{T}_3(\mathbf{z})$ qui est proche de γ dans la norme C^0 et qui est lisse. En particulier, γ est homotope à γ' . On peut supposer alors que γ est lisse. Soit γ, η deux lacets fermés lisses et soit h une homotopie entre γ et η . Il existe une autre homotopie h' entre γ et η qui est proche de h dans la norme C^0 et qui est lisse. On peut supposer alors que h est lisse. On définit $\tilde{h} : I \times I \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \times I \times I$ par :

$$\tilde{h}(s, t) = (h(s, t), s, t)$$

D'abord, on a le résultat suivant concernant la transversalité :

Lemme D.4.2

Soit $(\gamma_1, \dots, \gamma_n), (\eta_1, \dots, \eta_n)$ des n -tuplets de tresses fermées. Pour tout i , soit h_i une homotopie lisse de γ_i à η_i . Pour tout k , il existe pour tout i une homotopie h'_i de γ_i à η_i qui est proche de h_i dans la topologie C^k et telle que, pour tout $i \neq j$:

$$\tilde{h}_i \pitchfork \tilde{h}_j$$

Démonstration : On le fait pour le cas $n = 2$, le cas général étant similaire. Notons Δ le diagonal dans $(\hat{\mathbb{C}} \times I \times I)^2$. En utilisant la projection stéréographique, on identifie $\hat{\mathbb{C}}$ avec S_2 , la sphère de rayon 1 dans \mathbb{R}^3 . Soit $\pi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow S_2$ la projection orthogonale. Pour δ petit, soit $B_\delta(0)$ la boule de rayon δ autour de 0 dans \mathbb{R}^3 . Soit $\epsilon \in]0, \infty[$ petit, définissons $D_\epsilon \subseteq I \times I$ par :

$$D_\epsilon = \{(s, t) \in I \times I \mid d((s, t), \partial I \times I) \geq \epsilon\}$$

Soit $\varphi : I \times I \rightarrow [0, \infty[$ une fonction lisse telle que :

- (i) $\varphi|_{\partial I \times I} = 0$,
- (ii) $\|\varphi\|_\infty \leq 1$, et
- (iii) $\varphi|_{D_\epsilon} = 1$.

Définissons $H : (B_\delta(0) \times I \times I)^2 \rightarrow (\hat{\mathbb{C}} \times I \times I)^2$ par :

$$H((x_1, s_1, t_1), (x_2, s_2, t_2)) = ((\pi(h_1(s_1, t_1) + \varphi(s_1, t_1)x_1), s_1, t_1), \\ (\pi(h_2(s_2, t_2) + \varphi(s_2, t_2)x_2), s_2, t_2))$$

Puisque γ et η sont des tresses, les homotopies h_1 et h_2 s'évitent le long de $\partial I \times I$ et donc, pour ϵ suffisamment petit :

$$H(((B_\delta(0) \times D_\epsilon) \times (B_\delta(0) \times D_\epsilon))^c) \cap \Delta = \emptyset$$

Puisque DH est partout surjective sur $(B_\delta(0) \times D_\epsilon)^2$, il en découle que $H \pitchfork \Delta$ (voir [21]), et le résultat en découle. \square

On est maintenant en mesure de montrer le résultat suivant :

Lemme D.4.3

Soit $z \in X$ et soit $\gamma \in \mathcal{T}_3(\mathbf{z})$. Alors γ est homotopiquement triviale si et seulement si $\text{Wind}(\gamma) = 0$.

Démonstration : Notons $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Puisque $\hat{\mathbb{C}}$ est simplement connexe, pour chaque i , il existe une homotopie h_i dans $\hat{\mathbb{C}}$ entre γ_i et la courbe constante z_i . Par le lemme D.4.2, on peut supposer que, pour tout $i \neq j$, les applications \tilde{h}_i et \tilde{h}_j sont transverses. Donc, il n'y a qu'un nombre fini de points isolés (σ, τ) tels que deux des \tilde{h}_i coïncident en (σ, τ) . On va appeler ces points les points critiques. Puisque, pour tout $i \neq j$, les fonctions h_i et h_j sont loin l'une de l'autre sur $\partial(I \times I)$, tous ces points critiques se trouvent à l'intérieur de $I \times I$.

Soit $(\sigma, \tau) \in I \times I$ un point critique. Par le lemme D.3.4, sans perte de généralité, on peut supposer que :

$$h_1(\sigma, \tau) = h_2(\sigma, \tau)$$

et que h_3 reste loin et de h_1 et de h_2 dans un voisinage de (σ, τ) . Comme dans la démonstration du lemme D.2.1, on peut supposer que h_3 est constante dans un voisinage de (σ, τ) . Pour simplifier, on suppose que (σ, τ) est le seul point critique sur $I \times \{\tau\}$. Il existe alors $\epsilon \in]0, \infty[$ tel que (σ, τ) soit le seul point critique sur $I \times]\tau - \epsilon, \tau + \epsilon[$. Enfin, on peut supposer que :

$$h_1(\sigma, \tau) = h_2(\sigma, \tau) = 0$$

Pour tout i , notons Dh_i la dérivée de h_i . Puisque \tilde{h}_1 et \tilde{h}_2 se rencontrent transversalement, la matrice $(Dh_1 - Dh_2)(\sigma, \tau)$ est inversible. Pour δ petit, définissons $c_\delta : I \rightarrow I \times I$ par :

$$c_\delta(t) = (\sigma + \delta \sin(2\pi t), \tau - \delta \cos(2\pi t))$$

Alors, pour $i = 1, 2$:

$$h_i \circ c_\delta(t) = Dh_i \cdot e^{2\pi i t - \pi/2} + O(\delta^2)$$

et, puisque h_3 est constante dans un voisinage de (σ, τ) , pour δ suffisamment petit :

$$h_3 \circ c(t) = h_3(\sigma, \tau)$$

Pour $i = 1, 2$, définissons $c_{i,\delta}$ par :

$$c_{i,\delta}(t) = Dh_i \cdot e^{2\pi i t - \pi/2}$$

et définissons $c_{3,\delta}$ par :

$$c_{3,\delta}(t) = h_3(\sigma, \tau)$$

Puisque $Dh_1 - Dh_2$ est inversible, pour δ suffisamment petit, la tresse fermée $(h_1, h_2, h_3) \circ c_\delta$ est homotope à $(c_{1,\delta}, c_{2,\delta}, c_{3,\delta})$. Définissons maintenant $(A_t)_{t \in I}$ et $(B_t)_{t \in I}$ par :

$$\begin{aligned} A_t &= (1-t)Dh_1 \\ B_t &= (1-t)Dh_1 + (Dh_1 - Dh_2) \end{aligned}$$

Pour $i = 1, 2$, et pour $t \in I$, on définit $c_{i,\delta,t}$ par :

$$\begin{aligned} c_{1,\delta,t}(s) &= A_t \cdot e^{2\pi i s - \pi/2} \\ c_{2,\delta,t}(s) &= B_t \cdot e^{2\pi i s - \pi/2} \end{aligned}$$

Puisque $(Dh_1 - Dh_2)$ est inversible, on voit que $(c_{1,\delta,s}, c_{2,\delta,s}, c_{3,\delta})$ définit une homotopie de tresses entre $(c_{1,\delta}, c_{2,\delta}, c_{3,\delta})$ et $(c_{1,\delta,1}, c_{2,\delta,1}, c_{3,\delta})$. Donc $(c_{1,\delta,1}, c_{2,\delta,1}, c_{3,\delta})$ est une tresse génératrice, il en découle que $(h_1, h_2, h_3) \circ c_\delta$ est homotope à une tresse génératrice.

Notons $h = (h_1, h_2, h_3)$. Soit η une tresse allant de \mathbf{z} à $h(\sigma, \tau)$. Pour δ petit, on obtient :

$$\begin{aligned} h(\cdot, \tau + \delta) &\sim h(\cdot, \tau - \delta)|_{[\sigma, 1]} \cdot (h \circ c_\delta) \cdot h(\cdot, \tau - \delta)|_{[0, \sigma]} \\ &\sim (h(\cdot, \tau - \delta)|_{[\sigma, 1]} \cdot \eta) \cdot (\eta^{-1} \cdot (h \circ c_\delta) \cdot \eta) \cdot (\eta^{-1} \cdot h(\cdot, \tau - \delta)|_{[0, \sigma]}) \end{aligned}$$

Par le lemme D.3.3, la tresse $(\eta^{-1} \cdot (h \circ c_\delta) \cdot \eta)$ est une tresse génératrice. De plus, par le lemme D.3.2, elle commute avec toutes les autres tresses fermées ayant \mathbf{z} comme point de base. On obtient alors :

$$\begin{aligned} h(\cdot, \tau + \delta) &\sim (h(\cdot, \tau - \delta)|_{[\sigma, 1]} \cdot \eta) \cdot (\eta^{-1} \cdot h(\cdot, \tau - \delta)|_{[0, \sigma]}) \cdot (\eta^{-1} \cdot (h \circ c_\delta) \cdot \eta) \\ &\sim h(\cdot, \tau - \delta) \cdot (\eta^{-1} \cdot (h \circ c_\delta) \cdot \eta) \end{aligned}$$

Soit γ_0 une tresse génératrice en \mathbf{z} . Par le lemme D.3.1, on obtient :

$$h(\cdot, \tau + \delta) \sim h(\cdot, \tau - \delta) \cdot \gamma_0$$

Puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de points critiques, et puisque $h(\cdot, 0)$ est la tresse triviale, il en découle qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\gamma = h(\cdot, 1) \sim \gamma_0^n$$

et donc :

$$\text{Wind}(\gamma) = n \text{ Mod } 2$$

Puisque $[\gamma_0]$ est un élément d'ordre 2 dans $T_3(\mathbf{z})$, le résultat en découle. \square

On obtient immédiatement le lemme D.4.1 comme corollaire de celui-ci.

Références

- [1] Alías L.J., Palmer B., On the Gaussian curvature of maximal surfaces and Calabi-Berstein's theorem, *Bull. London. Math. Soc.* **33** (2001), no. 4, 454–456
- [2] Anderson M., The Dirichlet Problem at infinity for manifolds of negative curvature, *J. Diff. Geom.* **18** (1983), 701–702
- [3] Aronszajn N., A unique continuation theorem for elliptic differential equations or inequalities of the second order, *J. Math. Pures Appl.* **36** (1957), 2359–239
- [4] Aubin T., *Nonlinear analysis on manifolds. Monge-Ampère equations*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **252**, Springer-Verlag, New York, (1982)
- [5] Ballman W., Gromov M., Schroeder V., *Manifolds of nonpositive curvature*, Progress in Mathematics, **61**, Birkhäuser, Boston, (1985)
- [6] Bott R., Tu L.W., *Differential forms in algebraic topology*, Graduate Texts in Mathematics, **82**, Springer-Verlag, New York-Berlin, (1982)
- [7] Caffarelli L., Nirenberg L., Spruck J., The Dirichlet problem for nonlinear second-order elliptic equations. I. Monge-Ampère equation. *Comm. Pure Appl. Math* **37** (1984), no. 3, 369–402
- [8] Caffarelli L., Nirenberg L., Spruck J., The Dirichlet problem for nonlinear second-order elliptic equations. II. Complex Monge-Ampère, and uniformly elliptic, equations. *Comm. Pure Appl. Math* **38** (1985), no. 2, 209–252
- [9] Calabi E., An extension of E. Hopf's maximum principle with an application to Riemannian geometry, *Duke Math. J.* **25** (1957), 45–56
- [10] Calabi E., Improper affine hyperspheres of convex type and a generalisation of a theorem by K. Jörgens, *Michigan Math. J.* **5** (1958), 105–126

- [11] Cheeger J., Ebin D.G., *Comparison theorems in riemannian geometry*, North-Holland Mathematical Library, **9**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-Oxford, (1975)
- [12] Cheng S.Y., Yau S.T., On the regularity of the Monge-Ampère equation $\text{Det} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right) = F(x, u)$, *Comm. Pure Appl. Math* **30** (1977), no. 1, 41–68
- [13] Cheng S.Y., Yau S.T., Complete affine hypersurfaces. Part I. The completeness of affine metrics, *Comm. Pure Appl. Math* **39** (1986), no. 6, 839–866
- [14] Corlette K., Immersions with bounded curvature, *Geom. Dedicata* **33** (1990), no. 2, 153–161
- [15] Friberg B., A topological proof of a theorem of Kneser, *Proc. Amer. Math. Soc.* **39** (1973), 421–425
- [16] Gallo D., Kapovich M., Marden A., The monodromy groups of Schwarzian equations on closed Riemann surfaces, *Ann. Math.* **151** (2000), no. 2, 625–704
- [17] Geiges I., Contact Geometry, To Appear In: *Handbook of Differential Geometry*, North Holland
- [18] Gilbard D., Trudinger N. S., *Elliptic partial differential equations of second order*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **224**, Springer-Verlag, Berlin, New York (1977)
- [19] Gromov M., Foliated plateau problem, part I : Minimal varieties, *GAFSA* **1**, no. 1, (1991), 14–79
- [20] Guan B., Spruck J., Boundary value problems on S^n for surfaces of constant Gauss curvature, *Ann. Math.* **138** (1993), no. 3, 601–624
- [21] Guillemin V., Pollack A., *Differential Topology*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., (1974)
- [22] Gutiérrez C.E., *The Monge-Ampère equation*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, **44**, Birkhäuser, Boston, (2001)
- [23] Harvey R., Lawson H. B. Jr., Calibrated geometries, *Acta. Math.* **148** (1982), 47–157
- [24] Hitchin N., The moduli space of special Lagrangian submanifolds, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* **25** (1997), no. 3-4, 503–515
- [25] Jörgens K., Über die Lösungen der Differentialgleichung $rt - s^2 = 1$, *Math. Ann.* **127** (1954), 130–134
- [26] Jost J., *Nonpositive curvature: geometric and analytic aspects*, Lectures in Mathematics ETH Zurich, Birkhäuser Verlag, Basel, (1997)
- [27] Jost J., Xin Y.L., A Bernstein theorem for special Lagrangian graphs, *Calc. Var.* **15** (2002), 299–312
- [28] Labourie F., Immersion isométriques elliptiques et courbe pseudoholomorphes, *J. Diff. Geom.* **30** (1989), 395–424

- [29] Labourie F., Problème de Minkowski et surfaces à courbure constante dans les variétés hyperboliques, *Bull. Soc. Math. France* **119** (1991), 307–325
- [30] Labourie F., Surfaces convexes dans l'espace hyperbolique et $\mathbb{C}P^1$ structures, *J. London Math. Soc.* **45** (1992), no. 2, 549–565
- [31] Labourie F., Exemples de courbes pseudo-holomorphes en géométrie riemannienne, In: *Holomorphic curves in symplectic geometry*, Progress in Mathematics, **117**, Birkhäuser, Basel, (1994)
- [32] Labourie F., Problèmes de Monge-Ampère, courbes holomorphes et laminations, *GAFSA* **7**, no. 3, (1997), 496–534
- [33] Labourie F., Problèmes de Monge-Ampère, courbes pseudo-holomorphes, In: *Geometric Theory of singular phenomena in partial differential equations (Cortona, 1995)*, Sympos. Math., **XXXVIII**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1998)
- [34] Labourie F., Un lemme de Morse pour les surfaces convexes, *Invent. Math.* **141** (2000), 239–297
- [35] Lee J., Melrose R., Boundary behaviour of the complex Monge-Ampère equation, *Acta. Math.* **148** (1982), 159–192
- [36] Lehto O., Virtanen K. I., *Quasiconformal mappings in the plane*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **126**, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, (1973)
- [37] Le Roux F., Thèse doctorale, Grenoble (1997)
- [38] Li A.M., Simon U., Zhao G., *Global affine differential geometry of hypersurfaces*, Walter de Gruyter, Berlin-New York, (1993)
- [39] Lions P.L., Sur les equations de Monge-Ampère. I., *Manuscripta Math.* **41** (1983), no. 1-3, 1–43
- [40] Lions P.L., Sur les equations de Monge-Ampère, *Arch. Rational Mech. Anal.* **89** (1985), no. 2, 93–122
- [41] McDuff D., Examples of symplectic structures, *Invent. Math.* **89** (1987), 13–36
- [42] McDuff D., Elliptic methods in symplectic geometry, *Bull. Amer. Math. Soc.* **23** (1990), no. 2, 311–358
- [43] McDuff D., Salamon D., *J-holomorphic curves and quantum cohomology*, University Lecture Series, **6**, AMS, Providence, (1994)
- [44] McDuff D., Salamon D., *Introduction to symplectic topology*, Oxford, (1995)
- [45] Meeks W.H., Rosenberg H., The uniqueness of the helicoid and the asymptotic geometry of properly embedded minimal surfaces with finite topology, *preprint univ. Paris VII*
- [46] Meeks W.H., Rosenberg H., The theory of minimal surfaces in $M \times \mathbb{R}$, *preprint univ. Paris VII*

- [47] Muller M.P., Gromov's Schwarz lemma as an estimate of the gradient for holomorphic curves, In: *Holomorphic curves in symplectic geometry*, Progress in Mathematics, **117**, Birkhäuser, Basel, (1994)
- [48] Nelli B., Rosenberg H., Minimal surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, *Bull. Braz. Math. Soc.* **33** (2002), no. 2, 263–292
- [49] Pogorelov A. V., On the improper convex affine hyperspheres, *Geometriae Dedicata* **1** (1972), 33–46
- [50] Pogorelov A. V., Improper convex affine hyperspheres, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **202** (1972), 1008–1011
- [51] Rosenberg H., Spruck J. On the existence of convex hyperspheres of constant Gauss curvature in hyperbolic space, *J. Diff. Geom.* **40** (1994), no. 2, 379–409
- [52] Sikorav J. C., Some properties of holomorphic curves in almost complex manifolds, In: *Holomorphic curves in symplectic geometry*, Progress in Mathematics, **117**, Birkhäuser, Basel, (1994)
- [53] Simon L., *Lectures on geometric measure theory*, Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, Australian National University, Canberra, (1983)
- [54] Spivak M., *A comprehensive introduction to differential geometry*, Publish or Perish, Berkeley, (1979)
- [55] Taylor M. E., *Partial differential equations. III. Nonlinear equations*, Applied Mathematical Sciences, **117**, Springer-Verlag, New York, (1997)
- [56] Yuan Y., A Berstein problem for special Lagrangian equations, *Invent. Math.* **150** (2002), 117–125

Résumé

PROBLÈMES ELLIPTIQUES POUR DES SOUS-VARIÉTÉS RIEMANNIENNES

La première partie de la thèse traite les sous-variétés spéciales legendriennes positives dans un certain sens. On obtient un résultat de compacité et l'on étudie des formes dégénérées qui apparaissent.

La seconde partie traite le problème de Plateau pour les hypersurfaces convexes à courbure Gaussienne constante immergées dans l'espace hyperbolique en trois dimensions. On montre l'existence des solutions et la dépendance continue des données dans le cas des surfaces hyperboliques.

La troisième partie prolonge les études de la seconde partie en traitant la structure géométrique des solutions qui sont conformément équivalentes à des surfaces de Riemann compactes à points. On montre qu'elles sont cylindriques près des points critiques.

La quatrième partie traite les représentations des groupes fuchsien compacts dans des groupes kleinien compacts. On montre que, si une telle représentation est non-élémentaire, et si sa seconde classe de Stieffel-Whitney s'annule, alors il existe une réalisation par une immersion convexe d'une surface compacte dans une variété compacte de dimension trois.

Abstract

ELLIPTIC PROBLEMS FOR RIEMANNIAN SUBMANIFOLDS

The first part of the thesis treats special legendrian submanifolds which are positive in a certain sense. We obtain a compactness result and we study certain degenerate forms which appear.

The second part treats the Plateau problem for convex hypersurfaces of constant Gaussian curvature immersed into three dimensional hyperbolic space. We show the existence of solutions and their continuous dependance on initial conditions for the case of conformally hyperbolic surfaces.

The third part continues the work of the second part by treating the geometric structure of solutions which are conformally equivalent to pointed compact Riemann surfaces. We show that such solutions are cylindrical near to critical points.

The fourth part treats representations of compact Fuchsian groups in compact Kleinian groups. We show that if such a representation is non-elementary, and if its second Stiefel-Whitney class vanishes, then it has a realisation by a convex immersion of a compact surface into a compact three dimensional manifold.

Mots Clés: special Lagrangian, special Legendrian, compactness, symplectic geometry, contact geometry, Plateau problem, hyperbolic space, Fuchsian groups, Kleinian groups

AMS Subject Classification: 30F40, 32G15, 32H25, 35J60, 53C12, 53C21, 53C29, 53C38, 53C42, 53C45, 53D10, 53D12, 57M05, 57M60, 58D10, 58J05