UNIVERSITÉ PARIS VII

THÈSE de DOCTORAT D'ÉTAT

Spécialité : Mathématiques

Présentée par : Monsieur SOULÉ Christophe

Sujet de la thèse : *Groupes arithmétiques et K-théorie des anneaux d'entiers de corps de nombres.*

soutenue en juin 1978 devant la commission d'examen

JURY : MM. SERRE Jean-Pierre, Président
KAROUBI Max
GERARDIN Paul
LICHTENBAUM Stephen
CONNES Alain

Groupes arithmétiques et K-théorie des anneaux d'entiers de corps de nombres

Par Christophe Soulé, Université Paris VII,
C.N.R.S., 2, Place Jussieu, Tour 45-55, 5e étage,
75221 Paris CEDEX 05

0. INTRODUCTION

Ce texte porte essentiellement sur l'étude du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ des matrices inversibles à coefficients entiers, et de deux séries d'invariants algébriques qui lui sont attachés : sa (co)homologie entière (en tant que groupe discret) et la K-théorie algébrique de l'anneau $\mathbb{Z}$. Rappelons que $K_i(\mathbb{Z}) = \pi_i(\mathrm{BGL}^+(\mathbb{Z}))$, et que la (co)homologie de l'espace $\mathrm{BGL}^+(\mathbb{Z})$ est celle du groupe $\mathrm{GL}(\mathbb{Z}) = \varinjlim_n \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, (pour les inclusions habituelles), ce qui montre le lien étroit entre ces deux séries d'invariants (via le morphisme d'Hurewicz).

Les *résultats obtenus dans le calcul de ces invariants* sont les suivants :

1) Nous calculons complètement la cohomologie (entière) de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$, $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$ et $\mathrm{St}_3(\mathbb{Z})$ (un revêtement d'ordre 2 de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$) (1.1, première partie, Théorèmes 4 et 8).

2) La valeur de $K_*(\mathbb{Z})$ n'est connue que pour K_0, K_1, K_2 et K_3 ($K_3(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/48\mathbb{Z}$). Prolongeant un travail de R. Lee et R.H. Szczarba, nous montrons que $K_5(\mathbb{Z})$ n'a pas de p-torsion si p est un nombre premier > 5, et que $K_4(\mathbb{Z}) =$ (un 2-groupe fini) (0 ou $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$) (§1.3, 1ère partie).

3) Les nombres de Bernoulli b_i interviennent constamment dans l'étude de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ (comme on le sait au moins depuis H. Minkowski). Ainsi, le seul résultat connu, jusqu'à présent, pour la K-théorie supérieure de $\mathbb{Z}$ (outre le calcul de $K_*(Z) \otimes Q$, dû à Borel et des résultats de 2-torsion) était que, si i est pair, $K_{2i-1}(\mathbb{Z})$ contient un groupe cyclique d'ordre le dénominateur de $b_i/2i$ (résultat dû à D. Quillen). Des conjectures dues à S. Lichtenbaum affirment que (à une puissance de 2 près) les nombres rationnels $b_i/2i$ et $(\mathrm{card}(K_{2i-2}(\mathbb{Z}))/(\mathrm{card}(K_{2i-1}(\mathbb{Z}))$ sont égaux.

Ce texte apporte une confirmation partielle à cette conjecture en montrant que si ℓ est un nombre premier proprement irrégulier, i un entier pair inférieur à ℓ, tel que le *numérateur* de $b_i/2i$ soit divisible par ℓ (et pas par ℓ^2), alors

$K_{2i-2}(\mathbb{Z})$ contient un élément d'ordre ℓ (Théorème 2.2.7.2, 2ème partie).

Exemple : $\ell = 691$, $i = 12$.

4) Nous montrons aussi que les classes caractéristiques du fibré standard de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ (dû à l'inclusion de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$) se calculent en termes de dénominateurs de nombres de Bernoulli.
5) Des résultats analogues à 3) et 4) pour des anneaux d'entiers de corps de nombres (la valeur aux entiers négatifs de la fonction zêta de celui-ci remplaçant les nombres de Bernoulli) sont également démontrés.

Nous employons *deux méthodes* (correspondant aux deux parties de cette thèse). La première consiste à majorer les invariants cherchés par un calcul explicite dans le domaine instable, i.e. portant sur des groupes $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ avec n petit. La seconde est de donner un procédé général exhibant des éléments non-triviaux dans la (co)homologie d'un groupe linéaire et la K-théorie d'un anneau, i.e., un procédé de minoration.

Première partie : L'idée est que pour calculer la (co)homologie de $\Gamma = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ il suffit de décrire un espace contractile X où Γ opère proprement. Une suite spectrale relie alors la (co)homologie de Γ à celle de X/Γ et des stabilisateurs dans Γ des points de X (qui sont des groupes finis). Un tel espace X est fourni par les formes quadratiques réelles définies positives, et la *théorie de la réduction* vise à décrire le quotient X/Γ. Mais, pour faire des calculs complets, on remplace X par un Γ-espace contractile dont le quotient par Γ est *compact*, et muni d'une *décomposition cellulaire* (Γ-invariante) (cf. §1.2, première partie).

Nous avons d'abord utilisé pour cela un texte de H. Minkowski (188 ?), et abouti au calcul de $H^*(\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}))$ (§1.1, 1ère partie). Par la suite, D. Mumford, A. Ash ; R. Lee et R.H. Szczarba mirent en évidence que la théorie de Voronoï (1907) est plus adéquate au problème. Celle-ci est développée au §1.2.2, 1ère partie. Elle conduit à des résultats sur $\mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$ et $\mathrm{GL}_5(\mathbb{Z})$, et à la majoration de $K_4(\mathbb{Z})$ (c'est *au plus* $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, modulo 2) et de $K_5(\mathbb{Z})$.

La deuxième partie développe une théorie des classes caractéristiques (dont l'intérêt dépasse sans doute les seuls anneaux d'entiers de corps de nombres). Nous étudions (§2.2, 2ème partie) des morphismes :

$$c_{i,k} : K_{2i-k}(A) \longrightarrow H^k(\operatorname{Spec} A, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}) \,,$$

où ℓ est un nombre premier, A un anneau commutatif unitaire contenant $1/\ell, k, i$ et ν des entiers, et $\mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}$ le faisceau étale des racines ℓ^ν-ièmes de l'unité (tensorisé i fois par lui-même), dont on considère la cohomologie (étale) sur le spectre de A.

Ces morphismes $c_{i,k}$ sont construits, par un procédé du à D. Quillen et L. Illusie, à partir des classes de Chern ℓ-adiques équivariantes associées par A. Grothendieck aux représentations A-projectives d'un groupe discret (§2.1.2, 2ème partie). Leurs propriétés découlent de cette construction. On a ainsi une *formule de multiplication* :

$$c_{i+j,k+k'}(a \cdot b) = \frac{-(i+j-1)!}{(i-1)!(j-1)!}\, c_{i,k}(a) \cup c_{j,k'}(b)\,,$$

où $a \cdot b$ est le produit en K-théorie, et $\cup$ le cup-produit en cohomologie étale (2.2.2.3).

Nous voulons étudier la *surjectivité* des morphismes $c_{i,k}$. Or, si A contient les racines ℓ^ν-ièmes de l'unité, les groupes $H^k(\operatorname{Spec} A, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i})$ sont obtenus par cup-produit à partir des groupes $H^k(\operatorname{Spec} A, \mu_{\ell^\nu})$. On est donc ramené, grâce à la formule de multiplication, à étudier la surjectivité de $c_{1,k}$ (à condition de supposer $i \leq \ell$ pour pouvoir inverser les factorielles). Si A est l'anneau des entiers d'un corps de nombres, $H^k(\operatorname{Spec} A, \mu_{\ell^\nu})$ est nul pour $k \geq 3$, (si ℓ est impair), et le problème porte sur K_0, K_1 et K_2.

Mais on constate que le morphisme $c_{1,0} : K_2(A) \to H^0(\operatorname{Spec} A, \mu_{\ell^\nu})$ est *nul*. On contourne la difficulté en introduisant (selon un procédé dû à W. Browder et M. Karoubi dans le "cas topologique") la *K-théorie à coefficients* $K_*(A; \mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z})$, qui est définie comme homotopie de la fibre homotopique de la multiplication par ℓ^ν dans le H-space commutatif $\mathrm{BGL}^+(A)$. On montre que $c_{i,k}$ se factorise par cette K-théorie à coefficients :

$$\overline{c_{i,k}} = K_{2i-k}(A; \mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z}) \longrightarrow H^k(\operatorname{Spec} A, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i})\,.$$

Si un élément α de $K_2(A; \mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z})$ s'envoie par le morphisme de Bockstein sur un élément d'ordre ℓ^ν dans $A^* \subset K_1(A)$, il se trouve que $\overline{c_{1,0}}(\alpha)$ engendre $H^0(\operatorname{Spec} A, \mu_{\ell^\nu})$.

Ces procédés (joints à ceux de Tate [**?**] et à un argument de transfert), conduisent au résultat suivant (cf. le théorème 2.2.4 pour un énoncé plus général) :

Théorème. *Si A est anneau de S-entiers dans un corps global F, si ℓ est impair* *et $i \leq \ell$, il existe des morphismes* surjectifs

$$\overline{c_{i,k}} : K_{2i-k}(A; \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \longrightarrow H^k(\operatorname{Spec} A[1/\ell], \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}), \quad k = 0, 1, 2\,.$$

Ce résultat est un cas particulier d'une conjecture due à D. Quillen (cf. §2.1.1, 2ème partie). Le lien avec les nombres de Bernoulli (resp. la valeur aux entiers négatifs de la fonction zêta de F, si F est un corps de nombres) est donné par le travail de S. Lichtenbaum reliant la cohomologie ℓ-adique à la fonction zêta.

Le procédé précédent possède un analogue en homologie, qui est d'ailleurs plus simple à maints égards (par exemple, l'hypothèse $i \leq \ell$ n'est plus nécessaire). Son étude est commencée aux paragraphes 2.3 (2ème partie). L'étude de $c_{i,0}$ (qui correspond aux classes de Chern ordinaires) est plus amplement développée (§2.3.2).

Le lecteur trouvera des présentations plus détaillées de certaines parties dans l'article en annexe et en 2.2.0, deuxième partie.

Je tiens à remercier tous ceux dont les conseils et la collaboration m'ont permis d'effectuer ce travail : A. Borel, L. Breen, K. Brown, R. Godement, L. Illusie, J. Lannes, S. Lichtenbaum, J.-L. Loday, R. Steinberg et P. Vogel. Je remercie surtout J.-P. Serre, qui a bien voulu me guider durant mon travail sur $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$, et S. Bloch, M. Karoubi et D. Quillen, qui, en me parlant de leurs travaux, m'ont permis d'effectuer la seconde partie de ce travail. Je tiens enfin à exprimer ma reconnaissance à M. Karoubi pour la façon encourageante dont il m'a aidé à la mise au point de ce texte.

Table des matières

1. PREMIÈRE PARTIE : CALCULS EXPLICITES

1.1 *La cohomologie de* $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$

Voir l'article en annexe (*Topology*, 563, p. 1-22).

1.2 *Théorie de la réduction et minima des formes quadratiques*

Soient n un entier fixé, $\Gamma = \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$, et X l'espace des formes quadratiques réelles $n \times n$ définies positives, modulo les homothéties. On identifie X à l'espace des formes h définies positives ayant un minimum égal à 1 sur $\mathbb{Z}^n - \{0\}$. Le groupe Γ opère sur X par $h \cdot \gamma = \gamma^t \cdot h \cdot \gamma$ où γ^t désigne la matrice transposée de $\gamma \in \Gamma$.

Le but de ce paragraphe est de trouver un espace contractile où le groupe Γ opère proprement et cellulairement, et dont le quotient par Γ soit compact.

La première méthode employée (1.2.1), qui généralise le théorème 1 de l'étude précédente sur $\mathrm{SL}(3, \mathbb{Z})$ consiste à définir un sous-espace X_n de X, où Γ opère avec un quotient compact, et qui est un rétracte par déformation de X.

La deuxième méthode est de considérer une compactification X^* de X due à Voronoï, qui présente l'avantage d'être munie naturellement d'une structure cellulaire Γ-invariante (ce qui sera utile en 2.2.3). Le point délicat consiste à montrer que X est contractile pour la CW-topologie (1.2.2).

1.2.1 *Un "bon" sous-espace de* X

Si h est une forme définie positive, on note $E(h)$ l'ensemble (fini) des vecteurs de $\mathbb{Z}^n - \{0\}$ de longueur minimale pour la métrique définie par h. On désigne par $m(h)$ cette longueur et par $r(h)$ le rang (sur $\mathbb{Q}$) de $E(h)$.

Théorème 1.2.1. *Soit X_n l'ensemble des points h de X tels que $r(h) = n$. Le quotient X_n/Γ est compact et X_n est un rétracte par déformation Γ-invariante de X.*

Remarque. La dimension de X_n est $n(n-1)/2$ c'est-à-dire la dimension cohomologique virtuelle de Γ [**?**, **?**].

Démonstration. (Cette démonstration doit beaucoup à J. Lannes.)
Soit X_k, $k \geq 1$, l'ensemble des $h \in X$ tels que $r(h) \geq k$. Nous allons montrer que X_{k+1} est un rétracte par déformation Γ-invariante de X_k. Le théorème en résultera puisque $X_1 = X$.

On note $V(h)$ le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ engendré par $E(h)$, $V'(h)$ son orthogonal pour le produit défini par h, et φ la forme quadratique positive (non définie) qui vaut 0 sur $V(h)$ et est égal à h sur $V'(h)$.

Lemme 1.2.1.1. *Il existe un réel $t_0 \geq 0$ tel que $h - t\varphi \in X_k - X_{k+1}$ si $t < t_0$, $h - t_0\varphi \in X_{k+1}$, et $h - t\varphi \notin X$ si $t > t_0$.*

Preuve du lemme. Si t est très grand $\text{dét}(h - t\varphi) < 0$. De plus on sait qu'il existe une constante universelle $\mu(n)$ telle que si h' est une forme définie positive on ait

$$m(h') \leq \mu(n)\ \text{dét}(h')^{1/n}\,.$$

On voit donc qu'on peut définir un plus grand nombre réel t_0 tel que $m(h-t\varphi) = 1$ si $t \leq t_0$. Si $t \in [0, t_0]$ on a $E(h) \subset E(h - t\varphi)$, puisque φ est nulle sur $E(h)$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $E(h-t_0\varphi) = E(h)$, i.e. $h-t_0\varphi \notin X_{k+1}$. La fonction $m(\cdot)$ est continue, donc si t est assez proche de t_0 on a $E(h - t\varphi) \subset E(h - t_0\varphi) = E(h)$ et $m(h - t\varphi) = 1$, ce qui contredit la définition de t_0. Comme X_{k+1} ext convexe on voit que t_0 est la plus petite valeur positive de t pour laquelle $h - t\varphi \in X_{k+1}$. q.e.d.

Lemme 1.2.1.2. *La forme φ et le nombre $t_0 = \theta(h)$ dépendent continûment de $h \in X_k - X_{k+1}$.*

Démonstration. Si h' est proche de h on a $E(h') \subset E(h)$, donc X_{k+1} est fermé. Si de plus h' est dans un voisinage de h dans $X_k - X_{k+1}$, on a $V(h) = V(h')$. Comme $\varphi(x) = h(x - \text{pr}_{V(h)}(x))$, où $\text{pr}_{V(h)}$ désigne la projection sur $V(h)$, on voit que φ dépend continûment de h. Quant à t_0, on vérifie que $t_0 = \inf\,(h(x) - 1)/\varphi(x)$, $x \in \mathbb{Z}^n$, $\varphi(x) > 0$, (voir . (., p. .)). Soit t_1 un nombre réel positif tel que $0 < m(h-t_1\varphi) < 1$ pour tout h dans un voisinage V de h_0. Pour une telle forme h le minimum de $(h(x) - 1)/\varphi(x)$ est atteint par un vecteur x de l'ensemble

$$H = \{x \mid h(x) - t_1\varphi(x) < 1\,, \quad \forall\, h \in V\}\,.$$

Si V est assez petit, l'ensemble E est fini, donc t_0 dépend continuement de h.

q.e.d.

Rétraction de X_k sur X_{k+1}.

On pose :

$$\begin{aligned} H_t(h) &= h - t\,t_0\,\varphi \;\text{ si }\; h \in X_k - X_{k+1} \;\text{ et }\; t \in [0,1]\,, \\ H_t(h) &= h \;\text{ si }\; h \in X_{k+1}\,. \end{aligned}$$

D'après ce qui précède H est une déformation de X_k sur X_{k+1} si on peut montrer sa continuité au voisinage d'un point h de X_{k+1}.

Lemme 1.2.1.3. *Il existe une constante $c > 0$ telle que, si h' est assez proche de h et $x \in E(h) - E(h')$, on a $\varphi'(x) > c$.*

Preuve. Les nombres $\varphi'(x) = h'(x - \mathrm{pr}_{V(h')}(x))$ sont proches des nombres $h(x - \mathrm{pr}_{V(h')}(x))$. L'ensemble des vecteurs $x - \mathrm{pr}_{V(h')}(x)$ est fini si h' est proche de h, car $E(h') \subset E(h)$. D'où le lemme.

On déduit de ce lemme que $\theta(h') \leq c^{-1}(h(x) - 1)$ si $x \in E(h) - E(h')$. Donc $\theta(h')$ est proche de zéro si h' est proche de h. Normons les matrices $n \times n$ par la norme sup. On a

$$\|H_t(h') - H_t(h)\| \leq \|h' - h\| + \|h\,\theta(h')\,\varphi'\| \leq \|h' - h\| + \|h - h', \varphi'\|\,.$$

La continuité de H en résulte.

Compacité de X_n/Γ.

Les inégalités $|h_{ij}| \leq h_{ii}$, $h_{ii} \leq h_{i+1,i+1}$ et $h_{11} \cdots h_{nn} \leq$ dét(h) pour les matrices réduites prouvent qu'il suffit de montrer que dét(h) est borné sur X_n (cf. [?]).

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs minimaux pour $h \in X_n$ et g la matrice de $\mathcal{B}$ par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^n$. La matrice dans $\mathcal{B}$ de la forme associée à h est $g^t hg$ et l'on a donc (par une égalité de convexité connue) : dét$(g^t hg) \leq h(e_1) \cdots h(e_n)$.

Comme dét(g) est un entier, on a dét$(h) \leq 1$. q.e.d.

1.2.2 La compactification de Voronoï

On note C^* l'espace des formes quadratiques positives réelles, sur $\mathbb{R}^n$, dont le noyau est engendré par un sous-espace (propre) de $\mathbb{Q}^n$. Soient X^* le quotient de C^* par les homothéties positives, et $p : C^* \to X^*$ l'application quotient.

A un vecteur x de $\mathbb{Z}^n$, on associe un point φ_x de C^* défini par

$$\varphi_x(v) = (x \mid v)^2\,, \quad v \in \mathbb{R}^n\,,$$

(où $(\cdot \mid \cdot)$ est le produit scalaire euclidien), et à un point h de X on associe $C(h)$, image dans X^* de l'enveloppe connexe dans C^* des formes φ_x, $x \in E(h)$:

$$C(h) = p\biggl(\Bigl\{\varphi = \sum_{h(x)=1} \lambda_x\, \varphi_x\,,\ \sum \lambda_x = 1\,,\ \lambda_x \geq 0\Bigr\}\biggr).$$

Définition. *Une forme définie positive h dans X est dite* parfaite *si le système d'équations en la variable h' :*

$$h'(x) = h(x)\,, \quad si\ x \in E(h)\,,$$

a pour unique solution $h = h'$ (rappelons que $m(h) = m(h') = 1$).

Voronoï a démontré en 1907 [**?**] les propriétés suivantes :

i) L'ensemble des formes parfaites est fini modulo Γ.

ii) X^* est la réunion des ensembles $C(\pi)$ quand π parcourt l'ensemble des formes parfaites.

iii) Si π et π' sont deux formes parfaites dans X, l'intérieur de $C(\pi)$ ne rencontre pas $C(\pi')$.

Il en résulte que, si l'on munit X^* de la CW-topologie déduite de sa décomposition cellulaire par les ensembles $C(h)$, le quotient X^*/Γ est compact.

Théorème 1.2.2. *L'espace X^* (muni de la topologie ci-dessus) est contractile. Sa frontière ∂X^* a le type d'homotopie de l'immeuble de Tits T_n de* $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Q})$.

Démonstration. Si V est un sous-espace propre de $\mathbb{Q}^n$, on note $C(V) \subset C^*$ l'ensemble des formes h de noyau $\operatorname{Ker} h = V \otimes \mathbb{R}$ et $X(V) = p(C(V))$. On a donc $X \simeq X(0)$, et ∂X^* est la réunion disjointe des ensembles $X(V)$, pour $V \neq 0$ et $V \neq \mathbb{Q}^n$.

Si $p(h) \in X(V) \cap C(\pi)$ et $h = \sum\limits_{x \in E(\pi)} \lambda_x\, \varphi_x$, on voit que $\lambda_x \neq 0$ implique que x est dans l'orthogonal $V^\perp$ de V dans $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire canonique. Plus précisément $p(h) \in X(V)$ si et seulement si $V^\perp$ est engendré par les x de $E(\pi)$ tels que $\lambda_x \neq 0$.

Lemme 1.2.2.1. *La première subdivision barycentrique de la structure cellulaire de X^* (on notera que les cellules $C(\pi)$ sont projectivement convexes), munit X^* d'une structure simpliciale.*

Preuve. Si $h = \sum_{\pi(x)=1} \lambda_x \, \varphi_x$ on montre le lemme par récurrence sur le cardinal du support de λ. Comme $C(h)$ est convexe, on trouve une valeur minimale de μ telle que $\sum_x \varphi_x - \mu h$ a pour image par p un point situé sur la frontière de $C(\pi)$. Ceci permet d'écrire de façon *unique*

$$h = \lambda\Big(\sum_x \varphi_x\Big) + \sum_x \lambda'_x \, \varphi_x \, ,$$

où le support de λ' est plus petit que le support de λ. q.e.d.

Lemme 1.2.2.2. *Le recouvrement de $X(V)$ par les ensembles $X(V) \cap C(\pi)$ (π forme parfaite) est localement fini pour la* CW*-topologie et pour la topologie ordinaire (i.e. induite de $\mathbb{R}^{n^2}$).*

Preuve. Notons $V^\perp$ l'espace réel orthogonal à V. L'ensemble $X(V) \cap C(\pi)$ est entièrement déterminé par la restriction $\pi|_{V^\perp}$ de π à $V^\perp$. C'est l'ensemble des $h \in X(V)$ tels que $\langle h|_{V^\perp}, \pi|_{V^\perp}\rangle = 1$ où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire sur $\mathrm{End}(V^\perp)$ dû à l'identification $\mathrm{End}(V^\perp) = V^\perp \otimes (V^\perp)'$. Si $\| \cdot \|$ est la norme associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$ on a la propriété suivante :

Pour tout compact $K \subset X(V)$ (pour la topologie ordinaire) il existe une constante $\rho(K) > 0$ telle que si $h \in K$ et $h' \in X(V)$ on a (en identifiant h et h' à leur restriction à $V^\perp$) :

$$\langle h, h' \rangle \geq \rho(K) \|h'\| \, .$$

En effet la quantité $\varphi(h, h') = |\langle h, h' \rangle| - \|h'\|^{-1}$ ne dépend que de $h \in K$ et de l'image $\dot{h}'$ de h' dans l'espace projectif $\mathrm{Proj}(\mathrm{End}\, V^\perp)$. Si une suite $\varphi(h_n, h'_n)$ tend vers zéro, une sous-suite $(h_n, \dot{h}'_n)$ converge dans $K \times \mathrm{Proj}(\mathrm{End}\, V^\perp)$ vers un point $(h, \dot{h}')$ où $h \in K$, $h' \in \overline{X(V)}$ et $\varphi(h, h') = 0$, ce qui est impossible.

Si h est dans un voisinage compact K d'un point K_0 de $C(V)$ si $p(h)$ est dans $C(\pi)$ on voit qu'il existe une constante $\alpha \geq \langle \pi, h \rangle \geq \rho(K) \|\pi|_{V^\perp}\|$. Mais les coordonnées de $\pi|_{V^\perp}$ dont des dénominateurs bornés dans toute base rationnelle de $V^\perp$, ceci à cause de i), de la définition des formes parfaites et du fait que $V^\perp$ est défini sur $\mathbb{Z}$. Donc l'ensemble des formes $\pi|_{V^\perp}$ est discret et $p(K)$ ne peut rencontrer qu'un membre fini des ensembles $C(\pi) \cap X(V)$. q.e.d.

Lemme 1.2.2.3. *Sur $X(V)$ la* CW-*topologie coïncide avec la topologie ordinaire.*

Preuve. Du lemme 1.2.2.1 résulte que la CW-topologie coïncide avec la topologie ordinaire sur toutes les cellules $C(\pi)$. Comme ces cellules sont fermées pour la topologie ordinaire, le lemme 1.2.2.2 permet de conclure. q.e.d.

Notons $\overline{C(V)}$ l'ensemble des formes h telles que $\mathrm{Ker}(h) \supset V$ et $\overline{X(V)} = p(\overline{C(V)})$. Si $h = \sum_{\pi(x)=1} \lambda_x \varphi_x \in \overline{C(V)}$ on voit que $\varphi_x \in \overline{C(V)}$, donc $\overline{X(V)}$ est fermé pour la CW-topologie et $X(V)$ est son intérieur.

De plus $X(V)$ est la réunion disjointe des cellules $X(V')$ telles que V' contienne V.

Lemme 1.2.2.4. *L'espace $\overline{X(V)}$ (et en particulier $X^* = \overline{X(0)}$) est contractile.*

Preuve. Soit h_1 un point de $C(V)$ fixé et posons :

$$H_t(h) = th_1 + (1-t)h\,, \quad \text{si } h \in \overline{C(V)}\,.$$

Il suffira de montrer que $H_t(h)$ dépend continuement du couple (t, h) pour la topologie $\mathcal{T}$ donnée sur $\overline{C(V)}$ par les coordonnées λ_x dans l'écriture $h = \sum_{x\in E(\pi)} \lambda_x \varphi_x$ (lemme 1.2.2.1).

Fixons un point h_0.

1) Montrons d'abord qu'il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que si $t < \varepsilon$ et si h est assez proche de h_0 (au sens de $\mathcal{T}$), le point $H_t(h)$ est dans l'étoile de h.

Soit $h_0 = \sum \lambda_x \varphi_x$, $\lambda_x > 0$. Si h est dans l'étoile de h_0, il s'écrit sous la forme

$$h = \sum \lambda'_x \varphi_x + \sum \lambda_y \varphi_y$$

où les λ'_x sont proches des λ_x et les λ_y sont petits. Si π est une forme parfaite on a

$$\langle \pi, H_t(h)\rangle \geq (1-t)\Big\langle \pi, \sum \lambda'_x \varphi_x \Big\rangle = (1-t)\Big(\sum \lambda'_x \pi(x)\Big)\,.$$

Supposons que $h_0 \notin C(\pi)$. Il existe donc x_0 tel que $\pi(x_0) \geq 1 + 1/d$, où d est un majorant des dénominateurs des coefficients de toutes les formes parfaites dans la base canonique. Donc

$$\langle \pi, H_t(h)\rangle \geq (1-t)\Big(\sum \lambda'_x\Big) + \eta\,, \text{ où } \eta \text{ est une constante} > 0.$$

On peut en déduire que $H_t(h) \notin C(\pi)$ (si t est assez petit et h assez proche de h_0). En effet si $h \in C(\pi')$, on a

$$\langle \pi', H_t(h') \rangle = (1-t)\Big(\sum \lambda'_x\Big) + t\langle \pi', h_1 \rangle + (1-t)\Big(\sum \lambda_y\Big),$$

et cette quantité est aussi proche qu'on veut de $(1-t)\sum \lambda'_x$. On obtient donc $\langle \pi', H_t(h) \rangle < \langle \pi, H_t(h) \rangle$, et $H_t(h) \notin C(\pi)$. q.e.d.

2) La fonction $H_t(h)$ est affine en t et h, donc sa restriction aux points (t, h) tels que h et $H_t(h)$ soient dans l'étoile de h_0 est continue (pour les deux topologies).

3) Dans le cas général, soit (t_0, h_0) un point fixé tel que $t_0 > 0$, d'où $H_{t_0}(h_0) \in C(V)$ (car $h_1 \in C(V)$). D'après 1) et 2), si h est assez proche de h_0, le point $H_\varepsilon(h)$ est aussi proche qu'on veut de $H_\varepsilon(h_0)$, où $\varepsilon < (1-t_0)$ est choisi comme en 1).

Mais on a

$$H_t(h) = H_{(1-t-\varepsilon)/\varepsilon}\left(H_\varepsilon(h)\right)$$

et $H_\varepsilon(h)$ et $H_t(h)$ sont dans $C(V)$ (si $t > 0$), où les topologies coïncident d'après le lemme 1.2.2.3. q.e.d.

Démonstration du Théorème 1.2.1.

Soient I l'ensemble des sous-espaces vectoriels propres non-nuls de $\mathbb{Q}^n$, ordonné par inclusion. L'immeuble de Tits T_n est par définition le complexe simplicial $K(I)$ associé à l'ensemble ordonné I.

On note que $V \subset V'$ équivaut à $\overline{X(V')} \subset \overline{X(V)}$. De plus, si $h \in \partial X^*$, l'ensemble des espaces V tels que $h \in \overline{X(V)}$ admet un minorant dans I : $\mathrm{Ker}(h)$.

Le théorème résulte donc du lemme suivant, appliqué à $\widetilde{X} = \partial X^*$ et à la famille $(X_i)_{i\in I} = (\overline{X(V)})_{V\in I}$.

Lemme 1.2.2.5. (Quillen) *Soit $\widetilde{X}$ un complexe simplicial, et $(X_i)_{i\in I}$ une famille de sous-complexes de $\widetilde{X}$ indexée par un ensemble ordonné, vérifiant les propriétés suivantes :*

i) Si $i < j$, on a $X_j \subset X_i$.

ii) Si $x \in \widetilde{X}$, l'ensemble ordonné des i tels que $x \in X_i$ forme un sous-complexe contractile de $K(I)$.

iii) Chaque complexe X_i est contractile.

Alors $\widetilde{X}$ a le type d'homotopie de $K(I)$.

Ce lemme se démontre en considérant le bicomplexe $K_{\bullet\bullet}$ obtenu en recollant les bi-simplexes

$$(i_1 < \cdots < i_n) \times s\,,\ \text{où } s \text{ est un simplexe de } X_{i_1}\,.$$

Le bicomplexe $K_{\bullet\bullet}$ se projette sur $\widetilde{X}$ et $K(I)$, et les fibres sont contractiles. On voit donc que si un groupe Γ opère sur $\widetilde{X}$ et I de telle sorte que

$$X_i \cdot \gamma = X_{\gamma^{-1}\cdot i}\,,\ \gamma \in \Gamma\,,$$

les équivalences d'homotopie $K_{\bullet\bullet} \to \widetilde{X}$ et $K_{\bullet\bullet} \to K(I)$ sont équivariantes. Ce sera le cas pour l'action de Γ sur ∂X^* et T_n.

1.3 Majoration de l'ordre de $K_4(\mathbb{Z})$ et $K_5(\mathbb{Z})$

1.3.1 La suite spectrale de l'homologie équivariante

Soit (X,Y) une paire de CW-complexes de dimensions finies ($Y \subset X$) et Γ un groupe opérant (à droite) cellulairement sur X et Y. L'homologie équivariante de (X,Y) (à coefficients triviaux) est, par définition,

$$H_*^\Gamma(X,Y) = H_*(X \underset{\Gamma}{\times} E\,\Gamma, Y \underset{\Gamma}{\times} E\,\Gamma)\,,$$

i.e. l'homologie de la paire $(X \underset{\Gamma}{\times} E\,\Gamma, Y \underset{\Gamma}{\times} E\,\Gamma)$, où $E\,\Gamma$ est l'espace total du fibré principal universel $E\,\Gamma \to B\,\Gamma$, et où $X \underset{\Gamma}{\times} E\,\Gamma$ est défini par l'équivalence $(x;e) \sim (x\cdot\gamma, \gamma\cdot e)$.

Cette homologie (qu'on peut aussi décrire comme celle d'un bicomplexe) se calcule de deux façons (cf. [**?**]) :

1) En projetant sur $B\Gamma$ on voit qu'il existe une suite spectrale, dont le second terme est

$$E^2_{p,q} = H_p(\Gamma, H_q(X,Y))\,,$$

convergeant vers l'homologie équivariante $H^\Gamma_{p+q}(X,Y)$.

Exemples :
– Si $Y = \emptyset$ et si X est contractile, $H_p(X) = H_p(\Gamma)$.
– Soient $\Gamma = \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$, $X = X^*$, $Y = \partial X^*$, définis comme au paragraphe 1.2.2. La suite exacte de Mayer-Viétoris et le théorème 1.2.2 donnent des isomorphismes

$$H_q(X,Y) \simeq H_{q-1}(\partial X^*) \simeq H_{q-1}(T_n)$$

(isomorphismes de Γ-modules d'après la fin de la preuve du lemme 1.2.2.5). On sait que T_n est sphérique de dimension $(n-2)$, d'où

$$H_q^\Gamma(X^*, \partial X^*) = H_{q-n+1}(\Gamma, H_{n-2}(T_n)).$$

2) Filtrons X par les complexes K_q obtenus en ajoutant à Y le squelette de dimension q de X. D'après ([**?**], §XV, 7), il existe une suite spectrale dont le premier terme est

$$E^1_{p,q} = H_q(K_p, K_{p-1})$$

et qui converge vers $H^\Gamma_{p+q}(X, Y)$. Si σ est une cellule de $K_p - K_{p-1}$, on note $\Gamma \cdot \sigma$ son orbite. On vérifie que

$$H_q^\Gamma(K_p, K_{p-1}) \simeq \bigoplus_{\sigma_j} H_q(\sigma_j \cdot \Gamma, \partial\sigma_j \cdot \Gamma)$$

où les σ_j décrivent un système de représentants Σ_p des cellules de (K_p, K_{p-1}), modulo Γ. Mais

$$(\sigma \cdot \Gamma, \partial\sigma \cdot \Gamma) \underset{\Gamma}{\times} E\,\Gamma \simeq (\sigma, \partial\sigma) \underset{\Gamma_\sigma}{\times} E\,\Gamma_\sigma\,,$$

où Γ_σ est le stabilisateur de σ, donc

$$H_q^\Gamma(\sigma \cdot \Gamma, \partial\sigma \cdot \Gamma) = H_q^{\Gamma_\sigma}(\sigma, \partial\sigma).$$

D'après la partie 1), on a enfin

$$H_q^{\Gamma_\sigma}(\sigma, \partial\sigma) = H_q(\Gamma_\sigma, \mathbb{Z}_\sigma)$$

où $\mathbb{Z}_\sigma = H_{q-1}(\sigma, \partial\sigma)$ est le module d'orientation de σ. Donc

$$E^1_{p,q} = \bigoplus_{\sigma_j \in \Sigma_p} H_q(\Gamma_{\sigma_j}, \mathbb{Z}_{\sigma_j}).$$

Le lemme suivant décrit la différentielle $d_1 : E^1_{p,q} \to E^1_{p-1,q}$.

Lemme 1.3.1. (K. Brown) *Soient $\sigma \in \Sigma_p$ et $\tau \in \Sigma_{p-1}$ deux cellules telles qu'il existe $g \in \Gamma$ avec $\tau \cdot g^{-1} = \sigma' \subset \sigma$. Le morphisme d_1 est la somme, pour tous les couples (σ, τ) comme ci-dessus, des morphismes $g_* \circ d_{\sigma,\sigma'}$ (N.B. : g_* ne dépend pas du choix de g), où $d_{\sigma,\sigma'}$ est la composée du transfert*

$$H_q(\Gamma_\sigma, \mathbb{Z}_\sigma) \xrightarrow{\text{tr}} H_q(\Gamma_\sigma \cap \Gamma_{\sigma'}, \mathbb{Z}_\sigma)$$

et de la corestriction

$$H_q(\Gamma_\sigma \cap \Gamma_{\sigma'}, \mathbb{Z}_{\sigma'}) \longrightarrow H_q(\Gamma_\sigma, \mathbb{Z}_\sigma)\,.$$

Démonstration. Posons $\Gamma_{\sigma,\sigma'} = \Gamma_\sigma \cap \Gamma_{\sigma'}$. Comme $\Gamma_{\sigma,\sigma'}$-modules, $\mathbb{Z}_\sigma$ et $\mathbb{Z}_{\sigma'}$ sont isomorphes, ce qui donne un sens à l'énoncé. Le morphisme $d_{\sigma,\sigma'}$ est, par définition de d_1, induit par le composé des morphismes suivants de Γ_σ-modules :

$$H_p(\sigma, \partial\sigma) \xrightarrow{\alpha_1} H_{p-1}(\partial\sigma) \xrightarrow{\alpha_2} H_{p-1}(\partial\sigma, \overline{\sigma - \sigma'}\cdot\Gamma_\sigma) \xrightarrow{\alpha_3} H_{p-1}(\sigma'\cdot\Gamma_\sigma, \partial\sigma'\cdot\Gamma_\sigma)$$

et du morphisme (equivariant pour l'injection $\Gamma_\sigma \to \Gamma$)

$$H_{p-1}(\sigma' \cdot \Gamma_\sigma, \partial\sigma' \cdot \Gamma_\sigma) \xrightarrow{\alpha_4} H_{p-1}(\sigma' \cdot \Gamma, \partial\sigma' \cdot \Gamma)\,.$$

Le bord α_1 et l'excision α_3 sont des isomorphismes de Γ_σ-modules. Le morphisme

$$H_{p-1}(\partial\sigma) \xrightarrow{\alpha_3 \circ \alpha_2} H_{p-1}(\sigma' \cdot \Gamma_\sigma, \partial\sigma' \cdot \Gamma_\sigma) = \mathbb{Z}\,[\Gamma_{\sigma,\sigma'} \backslash \Gamma_\sigma]$$

s'identifie à l'application

$$s \longmapsto \sum_{\dot g \in \Gamma_{\sigma,\sigma'} \backslash \Gamma_\sigma} s\dot g\,.$$

Le lemme de Shapiro ([?], §X.7) dit que

$$H_q(\Gamma; \mathbb{Z}\,[\Gamma_{\sigma,\sigma'} \backslash \Gamma_\sigma]) = H_q(\Gamma_{\sigma,\sigma'})$$

et $(\alpha_3 \circ \alpha_2)_*$ s'identifie ainsi au transfert

$$H_q(\Gamma_\sigma, Z_\sigma) \longrightarrow H_q(\Gamma_{\sigma,\sigma'}, Z_{\sigma'})\,.$$

Quant à α_4, le diagramme ci-dessous d'applications équivariantes (pour l'action des groupes indiqués en indice) est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
(\sigma' \cdot \Gamma_\sigma, \partial\sigma' \cdot \Gamma_\sigma)_{\Gamma_\sigma} \arrow[r] & (\sigma' \cdot \Gamma, \partial\sigma' \cdot \Gamma)_\Gamma \\
(\sigma', \partial\sigma')_{\Gamma_{\sigma,\sigma'}} \arrow[u] \arrow[r] & (\sigma', \partial\sigma')_{\Gamma_{\sigma'}} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Ceci montre que $(\alpha_4)_*$ s'identifie à la corestriction

$$H_q(\Gamma_{\sigma,\sigma'}, \mathbb{Z}_{\sigma'}) \longrightarrow H_q(\Gamma_{\sigma'}, \mathbb{Z}_{\sigma'})\,.$$

q.e.d.

1.3.2 Les résultats

On utilise le paragraphe 1.2.2. Voronoï a, dans son article original, classé les formes parfaites à moins de cinq variables [?], ce qui permet de décrire l'action de Γ sur X^* quand $n \leq 5$ [1]. C'est ce qui a été par R. Lee et R.H. Szczarba, dans [?], qui en déduisent que $K_4(\mathbb{Z})$ et $K_5(\mathbb{Z})$ n'ont pas de p-torsion pour $p > 5$. Nous montrons ici le complément suivant de leur résultat (cf. aussi [?]) :

Théorème 1.3.2. *Les groupes* $K_4(\mathbb{Z})$ *et* $K_5(\mathbb{Z})$ *n'ont pas d'élément d'ordre* 5. *La partie* 3*-primaire de* $K_4(\mathbb{Z})$ *est* 0 *ou* $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$*.*

Preuve. Notons Q (resp. Q_n) la catégorie dont les objets sont les $\mathbb{Z}$-modules libres de type fini (resp. de rang inférieur à n) et dont les morphismes sont les classes d'isomorphismes de diagrammes de la forme :

$$M \twoheadleftarrow N \rightarrowtail M' \, ,$$

où $N \rightarrowtail M'$ est injectif et $N \twoheadrightarrow M''$ est surjectif. D'après Quillen [?] on a

$$\pi_{j+1}(\mathrm{BQ}) = K_j(\mathbb{Z}) \, , \quad j \geq 0 \, .$$

De plus, l'homologie du classifiant BQ de la catégorie Q est liée à celle de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ à coefficients dans le module de Steinberg $\mathrm{St}_n = H_{n-2}(T_n)$ par les suites exactes suivantes :

$$\cdots \to H_j \mathrm{BQ}_{n-1} \to H_j \mathrm{BQ}_n \to H_{j-n}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}); \mathrm{St}_n) \to H_{j-1}\mathrm{BQ}_{n-1} \to \cdots$$

On sait que $H_0(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}), \mathrm{St}_n) = 0$ [?], donc $H_n \mathrm{BQ}_n = H_n \mathrm{BQ}$ est un quotient de $H_n \mathrm{BQ}_{n-1}$.

1.3.2.1 La 5-torsion

D'après ce qui précède, et vu qu'aucun des groupes $H_*(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}); \mathrm{St}_n)$, $n \leq 3$, ne contient de 5-torsion (voir 1. par exemple), il suffira de montrer le résultat suivant (où l'on note SL_4, GL_5 au lieu de $\mathrm{SL}_4(\mathbb{Z})$, $\mathrm{GL}_5(\mathbb{Z})$).

Théorème 1.3.2.1. $H_1(\mathrm{SL}_4; \mathrm{St}_4) = H_2(\mathrm{SL}_4; \mathrm{St}_4) = H_1(\mathrm{GL}_5, \mathrm{St}_5) = 0$*, modulo la* 2 *et la* 3*-torsion.*

1. Les formes parfaites à six variables ont été classées en 1957 (!) par E.S. Barnes [?]. Il y a sept classes de telles formes (modulo $\mathrm{GL}_6(\mathbb{Z})$), ce qui m'a découragé de faire un calcul direct dans ce cas.

Pour ce faire on utilise la suite spectrale décrite au paragraphe 1.3.1 :

$$E^1_{p,q} = \underset{\sigma\in\Sigma_p}{\oplus} H_q(\Gamma_\sigma, Z_\sigma) \Longrightarrow H_{p+q-n+1}(\Gamma; \mathrm{St}_n)$$

($\Gamma = \mathrm{SL}_4$ ou GL_5). On reprend les notations de l'article de R. Lee et R.H. Szczarba [?].

1.3.2.1.1. Le cas $n = 4$

On montrera que $E^1_{p,q} = 0$ (mod 2 et 3) si $p + q = 4$ ou 5. On est donc concerné par les cellules σ de $(X_4^*, \partial X_4^*)$ dont le stabilisateur Γ_σ contient un élément d'ordre 5. Ceci implique que Γ_σ est fini et déterminé, à la 2-torsion près, par son image Γ'_σ dans l'ensemble des permutations des sommets de σ (qui sont des formes φ_x pour un ensemble de vecteurs x de rang maximum).

Si dim $\sigma \neq 4, 9$, un élément d'ordre 5 dans Γ_σ doit fixer un sommet de σ, donc il est inclus dans un sous-groupe parabolique propre de Γ ; c'est impossible car $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$ ne contient pas d'élément d'ordre 5.

Si $\sigma = \sigma_2^4$ (resp. σ_3^4), on remarque que Γ_σ fixe la droite contenant x_1^2, x_2^2, et $(x_1 - x_2)^2$ (resp. le plan π_1), donc le même argument s'applique.

Si $\sigma \neq \sigma_4^4$, on voit que $H_1(\Gamma_\sigma, \mathbb{Z}_\sigma)$ ne contient pas de 5-torsion ([?], lemme 4.4).

Enfin le texte cité montre que $E^2_{4,0} = E^2_{5,0} = 0$ (modulo la 2-torsion), car toute cellule σ de dimension 4 ou 5 est telle que Γ_σ contient un élément inversant l'orientation de σ, à l'exception de σ_4^4 et σ_5^5, et le bord

$$d_1 : H_0(\Gamma_{\sigma_5^5}) \longrightarrow H_0(\Gamma_{\sigma_4^4})$$

est un isomorphisme.

1.3.2.1.2. Le cas $n = 5$

Une cellule qui a moins que cinq sommets est contenue dans la frontière ∂X_5^* ; et on sait que $E^2_{0,5} = 0$ (mod 2) (lemme 5.2 de [?]), donc on doit seulement montrer que $E^1_{4,1}$ ne contient pas de 5-torsion.

Soit σ une cellule de dimension 4 de $(X_5^*, \partial X_5^*)$ telle que Γ_σ contient un élément d'ordre 5. Comme dans [?], lemme 5.3, on peut supposer que σ est contenue dans un ensemble S_j^δ, et on voit que son image après réduction modulo 2 contient cinq points distincts. Pour montrer que $H_1(\Gamma_\sigma, \mathbb{Z}_\sigma)$ n'a pas de 5-torsion, on prouvera que Γ_σ contient la permutation de deux sommets, donc que Γ_σ est le groupe des permutations des cinq sommets de σ.

Si quatre sommets de σ sont dans un hyperplan, ce sont, à équivalence par Γ près,

$$(y_1 - y_2)^2\,, \quad (y_1 + y_2)^2\,, \quad (y_1 + y_4)^2\,, \quad (y_2 + \delta_{24} y_4)^2$$

ou

$$(y_1 - y_3)^2\,, \quad (y_1 + y_4)^2\,, \quad (y_2 + y_3)^2\,, \quad (y_2 + \delta_{24} y_4)^2\,.$$

La même transformation que celle utilisée dans [**?**], cas 2, p. 44, échange deux sommets de σ en fixant les autres.

Si trois des sommets de σ sont dans un hyperplan, on utilise le cas 3, p. 45, de [**?**]. q.e.d.

1.3.2.2 La 3-torsion

On va calculer, modulo 2, les groupes intervenant dans les suites exactes suivantes :

$$\begin{array}{rcccccc}
 & H_5\mathrm{BQ}_4 & \longrightarrow & H_5\mathrm{BQ}_5 & \longrightarrow & 0 \\
H_2(\mathrm{GL}_4, \mathrm{St}_4) \to & H_5\mathrm{BQ}_3 & \longrightarrow & H_5\mathrm{BQ}_4 & \longrightarrow & H_1(\mathrm{GL}_4, \mathrm{St}_4) \\
 & H_5\mathrm{BQ}_2 & \longrightarrow & H_5\mathrm{BQ}_3 & \longrightarrow & H_2(\mathrm{GL}_3, \mathrm{St}_3) \\
 & H_5\mathrm{BQ}_1 & \longrightarrow & H_5\mathrm{BQ}_2 & \longrightarrow & H_3(\mathrm{GL}_2, \mathrm{St}_2).
\end{array}$$

1.3.2.2.1. On vérifie que

$$H_3(\mathrm{GL}_2; \mathrm{St}_2) = \widehat{H}^{-3}(\mathrm{GL}_2, \widetilde{Z}) = 0$$

(cf. [**?**]), et il est clair que $H_5\mathrm{BQ}_1 = 0$, d'où $H_5\mathrm{BQ}_2 = 0$.

1.3.2.2.2. On sait que $H_1(\mathrm{GL}_3; \mathrm{St}_3) = 0$ et que $H_2(\mathrm{GL}_3; \mathrm{St}_3) = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ (cf. 2.1.2.3. a)). Donc

$$H_5\mathrm{BQ}_3 = H^2(\mathrm{GL}_3; \mathrm{St}_3) = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\,.$$

1.3.2.2.3. On va montrer que $H_1(\mathrm{GL}_4; \mathrm{St}_4) = 0$ et que $H_2(\mathrm{GL}_4; \mathrm{St}_4) = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. (Le calcul de $H_1(\mathrm{GL}_4; \mathrm{St}_4)$ suffirait pour démontrer le théorème, mais celui de $H_2(\mathrm{GL}_4; \mathrm{St}_4)$ peut être intéressant en lui-même, d'après la remarque 3.2.2.5 ci-dessous.)

Avec les notations de 1.3.2.1, on considère les groupes $H_q(\Gamma_\sigma; \mathbb{Z}_\sigma)$, où $\sigma \in \Sigma_p$, $q > 0$, et $p + q = 4, 5$ ou 6. Ces groupes sont nuls sauf si $\sigma = \sigma_3^3$, σ_2^4, σ_3^4, σ_4^4, σ_2^5, σ_3^5 ou σ_5^5. On remarque aussi que, a priori, si $\dim \sigma \leq 4$, le sous-groupe de Sylow de Γ_σ est d'ordre 3 au plus.

Lemme 1.3.2.2.3. *Le morphisme*

$$d_1 : H_1(\Gamma_\sigma, \mathbb{Z}_\sigma) \longrightarrow H_1(\Gamma_\tau, \mathbb{Z}_\tau)\,, \quad \sigma \in \Sigma_p\,, \quad \tau \in \Sigma_{p-1}\,;$$

est surjectif (mod 2) *si* $(\sigma, \tau) = (\sigma_4^3, \sigma_3^3)$ *ou* (σ_5^5, σ_4^4)*. Il est nul si* $\tau = \sigma_2^4$ *et* $\sigma \neq \sigma_5^5$*.*

Preuve : On utilise le lemme 1.3.1. On sait que $d_1 = 0$ si σ ne contient pas de face équivalente à τ. C'est le cas pour $(\sigma, \tau) = (\sigma_2^5, \sigma_2^4)$ (la configuration associée à σ_2^4 contient une droite, pas celle de σ_2^5, cf. [**?**]).

Dans les cas restants on exhibera une cellule $\sigma' \subset \partial\sigma$ équivalente à τ, et un 3-sous-groupe de Sylow G_3 de $G = \Gamma_\sigma$ tel que, si $H = \Gamma_\sigma \cap \Gamma_{\sigma'}$, le groupe $H_3 = G_3 \cap H$ soit cyclique d'ordre trois (c'est donc un 3-sous-groupe de Sylow de $\Gamma_{\sigma'}$). Le lemme 1.3.1 et le diagramme commutatif ci-dessous

$$\begin{tikzcd}
H_1(G, \mathbb{Z}_\sigma)_{(3)} \arrow[r, "\mathrm{tr}"] \arrow[d, "\wr\, \mathrm{tr}"] & H_1(H, \mathbb{Z}_\sigma)_{(3)} \arrow[r] \arrow[d, "\wr\, \mathrm{tr}"] & H_1(\Gamma_{\sigma'}, Z_{\sigma'})_{(3)} \\
H_1(G_3, \mathbb{Z}_\sigma)^G \arrow[r, "\mathrm{tr}"] & H_1(H_3, \mathbb{Z}_\sigma)^H &
\end{tikzcd}$$

où les groupes de la ligne inférieure désignent les éléments stables dans les groupes de Sylow, au sens de [**?**], §XII 10-1, p. 259, montrent qu'il suffira d'étudier

$$H_1(G_3, \mathbb{Z}_\sigma)^G \xrightarrow{\mathrm{tr}} H_1(H_3, \mathbb{Z}_\sigma)^H\,.$$

1er cas :

$\sigma = \sigma_3^4 : x_1^2, x_3^2, x_4^2, (x_1 - x_2)^2, (x_2 - x_3)^2$
$\tau = \sigma_3^3 : x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2.$

Soient $\sigma' : x_1^2, x_3^2, x_4^2, (x_2 - x_3)^2$
(σ' est visiblement équivalente à τ), et G_3 le groupe cyclique d'ordre 3 engendré par la transformation qui envoie par dualité les formes x_1, x_2, x_3, x_4 sur $x_2 - x_3$, $-x_1 - x_3$, $-x_1$, x_4 (respectivement). On voit que $G_3 = H_3$ et que le normalisateur de H_3 dans H et dans G est engendré par G_3 et par la transformation envoyant x_1, x_2, x_3, x_4 sur $x_2 - x_3$, $x_1 - x_3$, x_3, x_4. Le transfert est donc surjectif.

2ème cas : $(\sigma, \tau) = (\sigma_5^5, \sigma_4^4)$. On sait, par le lemme 3.5 de (.), que σ_5^5 ne contient qu'une face équivalente à σ_4^4. On voit donc que $\Gamma_\sigma \subset \Gamma_{\sigma'}$ et le transfert

$$H_*(\Gamma_\sigma, \mathbb{Z}_\sigma) \longrightarrow H_*(\Gamma_\sigma \cap \Gamma_{\sigma'}, \mathbb{Z}_{\sigma'})$$

est l'identité.

3ème cas :

$\sigma = \sigma_3^5 : x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2, (x_1 - x_2)^2, (x_3 - x_4)^2$
$\tau = \sigma_2^4 : x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2, (x_1 - x_2)^2.$

Soient $\tau = \sigma'$, et $G_3 = C \times C'$, où C (resp. C') est engendré par la transformation envoyant x_1, x_2, x_3, x_4 sur $x_2, x_2 - x_1, x_3, x_4$ (resp. $x_1, x_2, x_4, x_4 - x_3$). On a $C \simeq C' \simeq Z/3Z$ et $H_3 = C$. On vérifie que le transfert $H_1(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \to H_1(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ est nul. q.e.d.

On conclut du lemme précédent que, modulo la 2-torsion, on a $E^2_{4,1} = 0$ et $E^2_{5,1} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ d'où

$$H_1(\mathrm{GL}_4, \mathrm{St}_4) = 0 \quad \text{et} \quad H_2(\mathrm{GL}_4, \mathrm{St}_4) = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\,.$$

Par conséquent $H_5\mathrm{BQ}_4$, $H_5\mathrm{BQ}_5$ et $H_5\mathrm{BQ}$ sont égaux (mod 2) à zéro ou $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

1.3.2.2.4. On sait que $K_3(\mathbb{Z}) = \pi_4\mathrm{BQ} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. On a donc une fibration

$$F \longrightarrow \widetilde{\mathrm{BQ}} \longrightarrow K(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}; 4)$$

où $\widetilde{\mathrm{BQ}}$ est le revêtement universel de BQ (on sait que $\mathrm{BQ} \simeq K(\mathbb{Z}; 1) \times \widetilde{\mathrm{BQ}}$, d'après [?]) et $K(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}; 4)$ est l'espace d'Eilenberg Mac-Lane dont l'homotopie est nulle, sauf $\pi_4 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

La fibre F est 4-connexe (mod 2) et, par le théorème d'Hurewicz relatif et la suite exacte de Serre, on en déduit :

$$K_4(\mathbb{Z}) = \pi_5(\widetilde{\mathrm{BQ}}) = \pi_5(F) = H_5(F) \pmod 2\,.$$

La suite spectrale d'homologie de la fibration considérée (on notera que le π_1 de la base est trivial)

$$E^2_{p,q} = H_p(K(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}; 4); H_q(F)) \Longrightarrow H_{p+q}(\widetilde{\mathrm{BQ}})$$

donne la suite exacte

$$H_6(K(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}; 4)) \longrightarrow H_5(F) \longrightarrow H_5(\widetilde{\mathrm{BQ}}) \longrightarrow H_5(K(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}; 4))\,.$$

Mais on vérifie que les groupes $H_6(K(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}; 4))$ et $H_5(K(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}; 4))$ sont nuls (mod 2) (cf. [?]).

Le théorème 1.3.2 est donc démontré.

1.3.2.2.5. Remarques :

i) La suite exacte reliant $H^*(\mathrm{GL}_4(\mathbb{Z}))$, $H^*(\mathrm{GL}_4(\mathbb{Z}))$ et $H_*(\mathrm{GL}_4(\mathbb{Z}); \mathrm{St}_4)$ devrait permettre de déduire des calculs ci-dessus la cohomologie de $\mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, modulo sa 2-torsion (voir [?], ou 1. §2.3. b)).

ii) On verra dans la deuxième partie (§2.2.7.3) qu'on espère que $K_4(\mathbb{Z})$ n'a pas de 3-torsion.

2. DEUXIÈME PARTIE : A PROPOS DES CONJECTURES DE LICHTENBAUM

2.1 *Présentation des conjectures*

2.1.1 *Leur énoncé [?] :*

Soient F un corps de nombres totalement réel, i un entier *pair* non nul, ζ_F la fonction zêta [?] et $\mathcal{O}_F$ l'anneau des entiers de F. La conjecture de Lichtenbaum est surtout connue sous la forme suivante (où $K_*(\mathcal{O}_F)$ est la K-théorie de l'anneau $\mathcal{O}_F$) :

$$|\zeta_F(1-i)| = \frac{\operatorname{card}\left(K_{2i-2}(\mathcal{O}_F)\right)}{\operatorname{card}\left(K_{2i-1}(\mathcal{O}_F)\right)}$$

(modulo une puissance de 2).

En fait, cet énoncé est la synthèse de deux autres conjectures, reliant respectivement la K-théorie et la fonction zêta à un intermédiaire ; à savoir des groupes de cohomologie ℓ-adique, que nous allons maintenant définir (et qui seront plus amplement décrits au paragraphe 2.2.1).

Fixons un nombre premier *impair* ℓ, F un corps de nombres (quelconque), i un entier pair. On note S l'ensemble des places finies de F qui divisent ℓ ; $\mathcal{O}_S$ l'anneau des S-entiers de F, $\mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}$ (resp. $W_\ell^{\otimes i}$) le faisceau étale des racines ℓ^ν-ièmes (resp. $\ell^{\nu'}$-ièmes, $\nu' \in \mathbb{N}$) de l'unité sur $\operatorname{Spec} F$, tensorisé i fois par lui-même, j l'injection de $\operatorname{Spec} F$ dans $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_S$, et $\mathbb{Z}_\ell$ les entiers ℓ-adiques.

Conjecture 1 (D. Quillen) :

Il existe des isomorphismes

$$K_{2i-2}(\mathcal{O}_S) \otimes \mathbb{Z}_\ell \simeq \varprojlim_\nu H^2(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_S, j_*\, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i})$$

$$K_{2i-1}(\mathcal{O}_S) \otimes \mathbb{Z}_\ell \simeq \varprojlim_\nu H^1(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_S, j_*\, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i})$$

(les groupes de cohomologie considérés sont les groupes de cohomologie étale ; ils forment un système projectif pour les applications induites par les projections $\mu_{\ell^{\nu+1}} \to \mu_{\ell^\nu}$).

Conjecture 2 (S. Lichtenbaum) :

Si F est totalement réel et si i est pair > 0 :

i) Les groupes $H^k(\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_S, j_*\,W_\ell^{\otimes i})$ sont finis,

ii) $H^k(\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_S, j_*\,W_\ell^{\otimes i}) = 0$ si $k \geq 2$,

iii) On a

$$|\zeta_F(1-i)|_\ell = \frac{\mathrm{card}\ H^1(\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_S, j_*\,W_\ell^{\otimes i})}{\mathrm{card}\ H^0(\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_S, j_*\,W_\ell^{\otimes i})}$$

($|\ |_\ell$ désigne ici la partie ℓ-primaire d'un nombre rationnel). Les morphismes de Bockstein des longues suites exactes associées aux suites exactes de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i} \longrightarrow W_\ell^{\otimes i} \xrightarrow{\times\,\ell^\nu} W_\ell^{\otimes i} \longrightarrow 0\,, \quad \nu \geq 1\,,$$

et la conjecture 2, i), donne des isomorphismes

$$H^k(\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_S, j_*\,W_\ell^{\otimes i}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{\nu} H^{k+1}(\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_S, j_*\,\mu_{\ell^\nu}^{\otimes i})\,.$$

Par ailleurs, la suite exacte de localisation de Quillen [**?**] ; et le calcul de $K_*(\mathcal{O}_S)\otimes \mathbb{Q}$ dû à Borel [**?**], montrent que $K_{2i-k}(\mathcal{O}_S)\otimes\mathbb{Z}_\ell$ est isomorphe à la ℓ-torsion de $K_{2i-k}(\mathcal{O}_S)$ (si i est pair et F totalement réel). C'est ce qui permet de regrouper ces conjectures dans l'énoncé donné plus haut.

La conjecture 2 est démontrée par exemple si $F = \mathbb{Q}$ quand ℓ est un nombre premier régulier ou proprement irrégulier [**?**]. C'est à la conjecture 1 que nous nous intéresserons. L'origine de cette conjecture se trouve dans les classes de Chern ℓ-adiques définies par Grothendieck [**?**], comme nous le verrons au paragraphe suivant.

2.1.2 Les classes de Chern ℓ-adiques de Grothendieck

2.1.2.1. Fixons un nombre premier ℓ. Soient A un anneau commutatif unitaire dans lequel ℓ est inversible, P un module projectif sur A, de rang r (sur tout corps résiduel de A), et

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(P)$$

une représentation de G sur P.

Ces données définissent un G-faisceau localement libre E sur Spec$A$. A. Grothendieck associe à E des classes de Chern

$$c_i(\rho) \in H^{2i}(\mathrm{Spec}\,A, G; \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i})\,, \quad r \geq i \geq 0\,, \quad \nu \geq 1\,,$$

qui appartiennent à des groupes de cohomologie étale équivariante, par rapport à l'action *triviale* de G sur $\operatorname{Spec} A$ (cf. [**?**]).

Ces classes de Chern forment un système projectif pour les morphismes induits par $\mu_{\ell^{\nu+1}} \to \mu_{\ell^\nu}$ (elles sont ℓ-adiques). On a $c_0(\rho) = 1$ par définition ; et si on désigne par

$$c(\rho) = 1 + c_1(\rho) + c_2(\rho) + \cdots + c_r(\rho)$$

la classe de Chern "totale", on a les propriétés suivantes (loc. cit., §2.3, p. 247)

i) Fonctorialité :

Si f est un système de morphismes compatibles

$$A \to A', \quad G \to G', \quad P \to P', \quad \text{on a} \quad c_i(f \circ \rho) = f^*(c_i \circ \rho) .$$

ii) Normalisation :

$c(\rho) = 1 + c_1(\rho)$, si P est un module de rang 1, la classe $c_1(\rho)$ étant définie comme l'image de la classe

$$\xi(\rho) \in H^1(\operatorname{Spec} A, G; G_m) ,$$

qui classifie le G-fibré inversible sur $\operatorname{Spec} A$ associé à ρ, par le morphisme de Bockstein β_ν dû à la suite exacte de faisceaux étales

$$0 \longrightarrow \mu_{\ell^\nu} \longrightarrow G_m \xrightarrow{\times\, \ell^\nu} G_m \longrightarrow 0$$

(comme $1/\ell \in A$, l'application $G_m \xrightarrow{\times\, \ell^\nu} G_m$ est étale, cf. [**?**] 2.5). Plus généralement $c_1(\rho) = \beta_\nu(\text{dét}\,(\rho))$.

iii) Additivité :

Si $0 \to P' \to P \to P'' \to 0$ est une suite exacte de G-modules projectifs sur A, on a (avec des notations évidentes)

$$c(\rho) = c(\rho') \cup c(\rho'')$$

(cup-produit dans la cohomologie équivariante).

iv) Multiplicativité :

$$c_s(\rho \otimes \rho') = Q_{r,r',s}(c_1(\rho), \cdots, c_r(\rho); c_1(\rho'), \cdots, c_{r'}(\rho')) ,$$

$r + r' \leq s$, où les polynômes $Q_{r,r',s}$ sont des polynômes universels à coefficients entiers qu'on peut décrire par exemple à partir de la même formule pour les classes de Chern ordinaires. On évalue les monômes de $Q_{r,r',s}$ par des cup-produits.

La représentation naturelle de $\mathrm{GL}_n(A)$ sur A^n donne ainsi des classes

$$c_i \in H^{2i}(\operatorname{Spec} A, \mathrm{GL}_n(A); \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i})$$

qui sont "stables", c'est-à-dire ne changent pas si on compose la représentation naturelle avec les plongements habituels de $\mathrm{GL}_n(A)$ (resp. A^n) dans $\mathrm{GL}_{n+1}(A)$ (resp. A^{n+1}).

2.1.2.2. On déduit des classes de Chern ci-dessus des tests pour l'homologie de $\mathrm{GL}_n(A)$. En effet la formule de Künneth (par exemple dans la catégorie des schémas simpliciaux, dont font partie $\operatorname{Spec} A$ et le classifiant BG du groupe G) montre que le groupe

$$H^{2i}(\operatorname{Spec} A, G; \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}) = H^{2i}(\operatorname{Spec} A \times \mathrm{BG}; \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i})$$

s'envoie surjectivement sur

$$\bigotimes_{0 \leq k \leq 2i} \operatorname{Hom}(H_{2i-k}(G; \mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z}), H^k(\operatorname{Spec} A, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}))\,.$$

D'où des morphismes

$$c_{i,k}(\rho) : H_{2i-k}(G; \mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z}) \longrightarrow H^k(\operatorname{Spec} A; \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i})\,,$$

que nous étudierons au paragraphe 2.3.

2.1.2.3. Selon un procédé dû à L. Illusie et D. Quillen [**?**], les classes de Chern ℓ-adiques conduisent aussi à des morphismes tests pour la K-théorie (algébrique) de l'anneau A.

Voici comment. Rappelons d'abord que, si $p \geq 1$, on a par définition $K_p(A) = \pi_p(\mathrm{BGL}^+(A))$, où $\mathrm{GL}(A) = \varinjlim_n \mathrm{GL}_n(A)$, la limite étant prise pour les injections habituelles de GL_n dans GL_{n+1} (pour une introduction à cette définition de la K-théorie de rang supérieur, on peut se référer à [**?**]).

La formule de Künneth s'écrit, en termes de catégories dérivées, sous la forme

$$R\Gamma(\operatorname{Spec} A \times \mathrm{BG}; \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}) = R\Gamma(\mathrm{BG}, R\Gamma(\operatorname{Spec} A, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}))\,.$$

Les groupes de cohomologie équivariante sont ainsi identifiés à des groupes d'hypercohomologie ([?], chap. XVII)

$$H^{2i}(\operatorname{Spec} A, G; \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}) = H^{2i}(\mathrm{BG}; R\Gamma(\operatorname{Spec} A, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}))\,.$$

Soit $D(\mathbb{Z})$ la catégorie dérivée des $\mathbb{Z}$-modules (on prend des complexes bornés à gauche). On considère une résolution du faisceau $\mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}$ par des faisceaux injectifs de groupes abéliens. La classe dans $D(\mathbb{Z})$ du complexe des sections d'une telle résolution est par définition $R\Gamma(\operatorname{Spec} A, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i})$ (cf. [?]).

L'hypercohomologie ainsi définie est représentable, par exemple par le procédé suivant. Soit $F \in R\Gamma(\operatorname{Spec} A; \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i})$. On translate les indices de F par $-2i$, obtenant ainsi le complexe $F[2i]$. On tronque $F[2i]$ aux valeurs négatives (en ne gardant en degré zéro que le noyau de la différentielle) : soit $\tau_{\leq 0}F[2i]$ le complexe obtenu. Le transformé de Dold-Puppe $K(F, 2i)$ de $\tau_{\leq 0}F[2i]$ est alors un groupe abélien simplicial tel que :

$$\pi_*(K(F, 2i)) = H_*(\tau_{\leq 0}F[2i]) = H_{*-2i}(F)$$

(cf. [?]). En effet, l'homotopie d'un groupe abélien simplicial est l'homologie du complexe de groupes aéliens obtenu en lui appliquant le foncteur de "normalisation" N (défini comme l'intersection des faces d'indice 0, la différentielle étant alors donnée par la 0-ième face). Le foncteur K est un foncteur inverse de N, à homotopie universelle près.

Soit $\overline{\mathrm{WG}}$ l'ensemble simplicial standard de réalisation BG, et $\mathbb{Z}(\overline{\mathrm{WG}})$ le groupe abélien simplicial libre de base $\overline{\mathrm{WG}}$. On a :

$$\begin{aligned} H^{2i}(\mathrm{BG}; F) &= H_0(\operatorname{Hom}^\bullet_{\mathbb{Z}}(N(\mathbb{Z}(\overline{\mathrm{WG}}))),\, \tau_{\leq 0}F[2i]) \\ &= [\mathbb{Z}(\overline{\mathrm{WG}}), K(F, 2i)] = \big[\mathrm{BG}, |K(F, 2i)|\big], \end{aligned}$$

où [,] désigne les classes d'homotopie de morphismes de groupes abéliens simpliciaux (resp. d'applications continues) et $|\ \cdot\ |$ la réalisation géométrique d'un ensemble simplicial.

Ainsi, à une représentation ρ de G est associée

$$c_i(\rho) \in \big[\mathrm{BG}, |K(R\Gamma(\operatorname{Spec} A, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}), 2i)|\big]\,.$$

On notera, pour simplifier, quand ℓ est fixé,

$$\begin{aligned} C(A,i) &= C(A,i,\nu) = \tau_{\leq 0} R\Gamma(\operatorname{Spec} A, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i})[2i]\,, \\ X(A,i) &= X(A;i,\nu) = K(R\Gamma(\operatorname{Spec} \mathrm{A}, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}), 2i)\,, \\ X(A,\cdot) &= \prod_{i\geq 1} X(A,i)\,. \end{aligned}$$

On a en particulier une classe de Chern "universelle"

$$c_i \in [\mathrm{BGL}(A), X(A,i)]\,, \quad i > 0\,,$$

et une classe totale $c \in [\mathrm{BGL}(A), X(A,\cdot)]$ (correspondant à la représentation naturelle des groupes $\mathrm{GL}_n(A)$). Comme $X(A,i)$ est un H-espace commutatif, la propriété universelle de $\mathrm{BGL}^+(A)$ permet de factoriser les classes précédentes par $\mathrm{BGL}^+(A)$. On notera de même $c_i \in [\mathrm{BGL}^+(A), X(A,i)]$ ces factorisations. Au niveau des groupes d'homotopie, c_i induit des morphismes

$$c_{i,k} : K_{2i-k}(A) = \pi_{2i-k}(\mathrm{BGL}^+(A)) \longrightarrow \pi_{2i-k}(X(A,i))\,.$$

Mais, d'après ce qu'on a vu ci-dessus,

$$\pi_{2i-k}\, X(A,i) = H_{-k}(R\Gamma(\operatorname{Spec} A, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i})) = H^k(\operatorname{Spec} A, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i})\,.$$

Les morphismes "tests" $c_{i,k}$ ainsi obtenus pour différentes valeurs de ν sont compatibles entre eux et donnent des morphismes [1] :

$$\boxed{c_{i,k} : K_{2i-k}(A) \longrightarrow \varprojlim_{\nu} H^k(\operatorname{Spec} A, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i})}$$

Dans le cas où $A = \mathcal{O}_S$ est anneau de S-entiers dans un corps de nombres F, on montre que (cf. 2.2.1) :

- $H^k(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_S, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}) = H^k(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_S, j_* \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i})$.
- Ces groupes sont nuls si $k > 2$.
- Enfin $\varprojlim_{\nu} H^0(\operatorname{Spec} A, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}) = 0$.

1. Ainsi que me l'a fait remarquer M. Karoubi, une telle définition pourrait être faite avec n'importe quel espace $X(A,i)$ représentant la théorie cohomologique

$$X \longmapsto H^*(X \times \operatorname{Spec} A, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i})$$

(pour X un ensemble simplicial disons). On pourrait ainsi remplacer les arguments en termes d'hypercohomologie employés aux paragraphes 2.2.2, 2.2.6.1, $\cdots$, par des raisonnements portant sur cette théorie cohomologique.

On en déduit que, pour une valeur fixée de $2i-k$, un seul des morphismes $c_{i,k}$ peut être non trivial ($c_{i,2}$ si $2i-k$ est pair, et $c_{i,1}$ s'il est impair). C'est une des raisons qui a conduit D. Quillen à la conjecture 1. Il faut cependant noter (comme on le verra au paragraphe 2.2) que ce n'est pas de $c_{i,k}$ qu'on espère obtenir l'isomorphisme de la conjecture 1, mais d'un caractère de Chern $\mathrm{ch}_{i,k}$ vérifiant $c_{i,k} = (-1)^i (i-1)!\,\mathrm{ch}_{i,k}$. Un tel morphisme, si $i > \ell$, reste à définir.

2.2 *K-théorie algébrique et cohomologie étale*

2.2.0 Plan du chapitre

Le but de ce chapitre est de démontrer un théorème de surjectivité (Théorème 2.2.4) pour des morphismes $\overline{c}_{i,k}$ qui sont la version "modulo ℓ" ($i \leq \ell$) des isomorphismes conjecturés par Quillen (Conjecture 1 §2.1.1).

Nous avons regroupé au paragraphe 2.2.1 les faits de cohomologie étale utilisés dans ce chapitre. Ces faits sont très standard, sauf peut-être le lemme 2.2.1.3, qui est un analogue (conjecturalement en tous cas !) de la suite exacte de localisation en K-théorie algébrique (cf. 2.2.4.4, remarque).

Au paragraphe 2.2.2.1 on étudie les comportements des morphismes $c_{i,k}$ (définis plus haut en 1.1.2.3) par rapport au transfert de la K-théorie et à la trace de la cohomologie étale. En 2.2.2.2 est montrée la formule de multiplication annoncée dans l'introduction générale.

La K-théorie à coefficients est introduite en 2.2.3.1. Un lemme de scindage (2.2.3.2.2) permet de définir des morphismes $\overline{c}_{i,k} : K_{2i-k}(A;\mathbb{Z}/\ell^\nu\,\mathbb{Z}) \to H^k(\operatorname{Spec} A, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i})$, par lesquels se factorisent les flèches $c_{i,k}$. La propriété de transfert et la formule de multiplication (pour le produit *externe* de $K_*(A)$ avec $K_*(A;\mathbb{Z}/\ell^\nu\,\mathbb{Z})$) sont montrés pour $\overline{c}_{i,k}$ en 2.2.2.3.

Le paragraphe 2.2.4 énonce un théorème de surjectivité des morphismes $\overline{c}_{i,k}$ ($i \leq \ell$). Par des réductions diverses (utilisant les propriétés de $\overline{c}_{i,k}$), on est ramené au cas de $\overline{c}_{1,1}$ (la surjectivité est conséquence de la définition), $c_{2,2}$ (le travail de Tate montre même, pour les anneaux qui nous intéressent, que $c_{2,2}$ est un isomorphisme ([**?**], cf. 2.4.4), et $\overline{c}_{i,0}$.

Les morphismes $\overline{c}_{i,0}$ sont étudiés en 2.2.5 : un théorème de comparaison dû à Grothendieck montre qu'on peut se ramener au cas des classes de Chern ordinaires, et la surjectivité de $\overline{c}_{i,0}$ est alors un résultat de M. Karoubi, utilisant la K-théorie topologique (à coefficients) du corps des complexes $\mathbb{C}$.

En 2.2.6 on montre que l'hypothèse $i \leq l$ n'est plus nécessaire si A contient toutes les racines l^ν-ièmes de l'unité, pour tout entier ν. Le point est que la cohomologie ℓ-adique de $\operatorname{Spec} A$ est alors sans torsion (en degré 0 et 1).

Enfin, on applique en 2.2.7 le résultat de surjectivité à l'anneau $\mathbb{Z}$. Grâce aux résultats de S. Lichtenbaum et J. Coates sur la conjecture 2 (énoncée en 1.1.1), on obtient de nouvelles classes dans la K-théorie de $\mathbb{Z}$, correspondant aux numérateurs de nombres de Bernoulli (Théorème 2.2.7.2).

2.2.1 *Cohomologie étale*

Soit A un anneau commutatif unitaire intègre dans lequel ℓ est inversible et un ν entier postif. Nous allons décrire les groupes de cohomologie étale $H^k(\operatorname{Spec} A, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i})$ en plusieurs étapes, qui, dans le cas des entiers de corps globaux, ramènent en définitive leur calcul à celui de groupes de cohomologie galoisienne. Ces derniers sont donnés par la théorie du corps de classe.

2.2.1.1. Si $A = F$ est un corps, la cohomologie étale de $\operatorname{Spec} F$ est la cohomologie galoisienne de F, [**?**], c'est-à-dire la cohomologie continue du groupe profini $\operatorname{Gal}(\overline{F}/F)$, où $\overline{F}$ est une clôture séparable de F (cf. [**?**] ou [**?**]).

Si le faisceau de coefficients est le groupe multiplicatif G_m, on a :

$$\begin{aligned} H^0(\operatorname{Spec} F, G_m) &\simeq F^* \\ H^1(\operatorname{Spec} F, G_m) &= 0 \\ H^2(\operatorname{Spec} F, G_m) &\simeq \operatorname{Br}(F)\,,\ \text{le groupe de Brauer de } F. \end{aligned}$$

La cohomologie à valeurs dans le faisceau μ_{ℓ^ν} des racines ℓ^ν-ièmes de l'unité s'en déduit par la longue suite exacte associée à la suite exacte de coefficients (dite suite de Kummer) :

$$0 \longrightarrow \mu_{\ell^\nu} \longrightarrow G_m \xrightarrow{\times \ell^\nu} G_m \longrightarrow 0\,.$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} H^1(\operatorname{Spec} F, \mu_{\ell^\nu}) &\simeq F^*/(F^*)^{\ell^\nu} \\ H^2(\operatorname{Spec} F, \mu_{\ell^\nu}) &\simeq \operatorname{Br}(F)_{(\ell^\nu)}\,, \end{aligned}$$

où $\operatorname{Br}(F)_{(\ell^\nu)}$ désigne les éléments d'ordre ℓ^ν dans le groupe de Brauer.

Le cup-produit [?] $H^1(\operatorname{Spec} F, \mu_{\ell^\nu}) \times H^1(\operatorname{Spec} F, \mu_{\ell^\nu}) \to H^2(\operatorname{Spec} F, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes 2})$ admet la description suivante. Le choix d'une racine ℓ^ν-ième primitive de l'unité $\zeta_\nu \in F^*$ permet d'identifier μ_{ℓ^ν} et $\mu_{\ell^\nu}^{\otimes 2}$ au faisceau constant $\mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z}$, donc $H^2(\operatorname{Spec} F, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes 2}) \simeq \operatorname{Br}(F)_{(\ell^\nu)}$. Si a et b sont des éléments de $F^\times$, on note $\mathcal{A}_{\zeta_\nu}(a,b)$ l'algèbre engendrée sur F par des éléments x et y satisfaisant aux relations :

$$x^q = a \cdot 1\,,\ y^q = b \cdot 1\,,\ x \cdot y = \zeta_\nu\, y \cdot x$$

(avec $q = \ell^\nu$). On peut montrer que $\mathcal{A}_{\zeta_\nu}(a,b)$ est simple, centrale, de dimension q^2, et que sa classe dans le groupe de Brauer $\operatorname{Br}(F)$ est d'ordre q et s'identifie au cup-produit des images de a et b dans $F^*/(F^*)^q$ (cf. [?], §15, et [?], Chap. XIV, Prop. 5).

Supposons que F vérifie la propriété suivante :

$$\begin{cases} (B,q) : \text{Tout élément d'ordre } q \text{ dans le groupe de Brauer de } F \\ \text{est décomposé par une extension cyclique } F' \text{ de degré } q \text{ de } F \\ \text{(i.e. son image est nulle dans } \operatorname{Br}(F')). \end{cases}$$

Alors le cup-produit $H^1(\operatorname{Spec} F, \mu_{\ell^\nu}) \times H^1(\operatorname{Spec} F, \mu_{\ell^\nu}) \to H^2(\operatorname{Spec} F, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes 2})$ est surjectif ([?], Chap. XIV, Prop. 1, Cor. 2). Ceci est le cas si F est un corps local ou global. (Rappelons qu'un corps local est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ou bien un corps complet pour une valuation discrète avec corps résiduel fini, et qu'un corps global est un corps de nombres ou une extension de degré de transcendance 1 d'un corps fini, cf. [?].)

Notons enfin que si F est un corps local ou global on a

$$H^k(\operatorname{Spec} F, G_m) = 0\,, \quad \text{si } k \geq 3 \text{ [?]}.$$

2.2.1.2. Le calcul de $H^k(\operatorname{Spec} A, G_m)$ donne les résultats suivants.

$$\begin{aligned} H^0(\operatorname{Spec} A, G_m) &= A^* \\ H^1(\operatorname{Spec} A, G_m) &= \operatorname{Pic}(A)\,, \end{aligned}$$

le groupe des classes d'idéaux de A, si A est un anneau de Dedekind [?].

Soient F un corps global, S un ensemble fini de valuations non archimédiennes de F, et $\mathcal{O}_S$ l'anneau des S-entiers de F, c'est-à-dire les éléments x de F tels que $v(x) \geq 0$ pour toute valuation finie v n'appartenant pas à S. En particulier, $\mathcal{O}_\emptyset = \mathcal{O}$ est l'anneau des entiers de F.

Le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(F)$ s'envoie bijectivement dans le sous-groupe de $\Big(\bigoplus_{v\in S_f}\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\Big)\times(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{r_1}$ formé des éléments dont la somme des coordonnées (dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$) est nulle. Dans ce produit S_f désigne l'ensemble des places finies de F, et r_1 le nombre de places réelles de F. Chaque composante est donnée par l'invariant local inv_v associé à la valuation v (cf. [**?**]).

Si $A=\mathcal{O}_S$, on a $H^k(\operatorname{Spec} A, G_m)=0$ si $k\geq 3$ et des suites exactes

$$0\longrightarrow A^\times\longrightarrow F^\times\longrightarrow \bigoplus_{v\in S_f-S}\mathbb{Z}\longrightarrow \mathrm{Pic}(A)\longrightarrow 0$$

(la deuxième flèche a pour composante les valuations $v:F^\times\to\mathbb{Z}$), et [**?**]

$$0\to H^2(\operatorname{Spec} A,G_m)\to \mathrm{Br}(F)\xrightarrow{\oplus\mathrm{inv}_v}\bigoplus_{v\in S_f-S}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\to H^3(\operatorname{Spec} A,G_m)\to 0\,.$$

On voit donc que si $S\neq\emptyset$, on a $H^3(\operatorname{Spec} A,G_m)=0$. De plus, comme $\oplus\,\mathrm{inv}_v$ est scindée, si $r_1=0$ ou si ℓ est impair, $H^2(\operatorname{Spec} A,G_m)$ est un groupe divisible. Le fait que $1/\ell\in A$ signifie ici que ℓ ne divise pas la caractéristique de F, et, quand cette caractéristique est nulle et $A=\mathcal{O}_S$, que S contient les valuations négatives sur ℓ. Sous les hypothèses ci-dessus on a donc : $H^k(\operatorname{Spec} A,\mu_{\ell^\nu}^{\otimes i})=0$ si $k\geq 3$ (par contre $H^3(\operatorname{Spec} A,\mu_{2^\nu}^{\otimes i})=(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{r_1}$).

2.2.1.3. Le calcul de $H^k(\operatorname{Spec} A,\mu_{\ell^\nu}^{\otimes i})$ peut aussi être effectué en se ramenant directement au cas où A est un corps. Supposons que A est noethérien et intégralement clos, et désignons par j l'injection de $\operatorname{Spec} F$ dans $\operatorname{Spec} A$, et $j_*j^*\mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}$ l'image directe de la restriction du faisceau $\mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}$ à $\operatorname{Spec} F$.

Lemme 2.2.1.3.1. *Le morphisme de faisceaux (sur* $\operatorname{Spec} A$*)*

$$\mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}\longrightarrow j_*j^*\mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}$$

induit un isomorphisme en cohomologie.

Preuve : Ceci résulte du fait que le faisceau $\mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}$ est localement constant (pour la topologie étale). Grâce au lemme 2.2.4.iii) ci-dessous, on peut se ramener au cas $\mu_{\ell^\nu}\subset A$, autrement dit considérer le faisceau constant $\mathbb{Z}/\ell^\nu Z$. Le lemme résulte alors de [**?**] p. 102. (En fait les faisceaux de l'énoncé sont isomorphes.

On peut le voir aussi en considérant d'abord le cas où $i = 1$, et le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & \mu_{\ell^\nu} \arrow[d] & j_*j^*\mu_{\ell^\nu} \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & G_m \arrow[r] \arrow[d, "\times\ell^\nu"] & j_*j^*G_m \arrow[r] \arrow[d, "\times\ell^\nu"] & D \arrow[r] \arrow[d, "\times\ell^\nu"] & 0 \\
0 \arrow[r] & G_m \arrow[r] \arrow[d] & j_*j^*G_m \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

et en remarquant que le faisceau des diviseurs de Cartier D est sans torsion.)

Le lemme précédent permet de passer de A à F par la suite spectrale de Leray du foncteur j_* :

$$H^p(\operatorname{Spec} A, (R^q j_*)\, j^* \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}) \Rightarrow H^{p+q}(\operatorname{Spec} F, j^* \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i})\,.$$

En basse dimension on voit ainsi que

(2.2.1.3.2) $\qquad H^0(\operatorname{Spec} A, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}) = H^0(\operatorname{Spec} F, j^* \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i})$

et $\qquad H^1(\operatorname{Spec} A, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i})$ s'envoie injectivement dans $H^1(\operatorname{Spec} F, j^* \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i})$.

Par abus d'écriture, nous noterons désormais $\mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}$ au lieu de $j^* \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}$.

Supposons que A soit un anneau de Dedekind et $q \geq 1$. On peut calculer les groupes $H^p(\operatorname{Spec} A, R^q j_* \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i})$ comme suit. Soient v une place finie de F correspondant à un idéal $\mathcal{P}$ de A, et $i_v : \operatorname{Spec} k(v) \to \operatorname{Spec} A$ l'immersion fermée correspondante ($k(v) = A/\mathcal{P}$). Si $\mathcal{F}$ désigne le faisceau $R^q j_* \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}$, l'application $\mathcal{F} \to \bigoplus_v i_{v*}\, i_v^* \mathcal{F}$ est un isomorphisme (ceci se voit sur les fibres). On a de plus ([**?**], 3.6, II)

$$\begin{aligned}
& H^p(\operatorname{Spec} A, i_{v*}\, i_v^* \mathcal{F}) \simeq H^p(\operatorname{Spec} k(v), i_v^* \mathcal{F}) \\
= \;& H^p(\operatorname{Gal}(\overline{k(v)}/k(v)); (i_v^* \mathcal{F})(\operatorname{Spec}(\overline{k(v)}))),
\end{aligned}$$

où $\overline{k(v)}$ est une clôture séparable de $k(v)$. Le module $(i_v^* \mathcal{F})(\operatorname{Spec}(\overline{k(v)}))$ est isomorphe ([**?**], Cor. 4.8) à $(R^q j_* \mathcal{F})_y$, la fibre géométrique au point $y = \operatorname{Spec}(\overline{k(v)})$ du faisceau $\mathcal{F}$. Soit $\widetilde{A}_v$ le hensélisé strict de A en v, F_v la complétion de F en

v, T_v l'extension maximale non ramifiée de F_v, et $\widetilde{F}_v$ le hensélisé strict de F en v. On a des isomorphismes

$$(R^q\,\mathcal{F})_y = H^q(\mathrm{Spec}(\widetilde{A}_v \underset{A}{\otimes} F), \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}) \qquad ([\textbf{?}], 3.3)$$

$\simeq H^q(\mathrm{Spec}\,\widetilde{F}_v; \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i})$ (car A est de dimension de Krull un)

$\simeq H^q(\mathrm{Spec}\,T_v; \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i})$ (cf. [**?**], th. 2, ii)).

On trouve [**?**] :

$H^q(T_v, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}) = 0$ si $q > 2$,

$H^0(T_v, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}) \simeq \mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z}$,

et $H^1(T_v, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}) \simeq (T_v^*/(T_v^*)\ell^\nu) \otimes \mu_{\ell^\nu}^{\otimes(i-1)}$ si $i \geq 1$.

Si $i \geq 2$ on remarque que $T_v^* \otimes \mu_{\ell^\nu}^{\otimes(i-1)}$ est isomorphe à $\mu_{\ell^\nu}^{\otimes(i-1)}$ (tout élément de valuation nulle est ℓ-divisible dans T_v^*) et cet isomorphisme commute à l'isomorphisme de $\mathrm{Gal}(T_v/F_v)$ avec $\mathrm{Gal}(\overline{k(v)}/k(v))$.

Si $k(v)$ est fini, $\mathrm{Gal}(\overline{k(v)}/k(v)) = \widehat{\mathbb{Z}}$ (le complété profini de $\mathbb{Z}$) et donc $H^p(\mathrm{Spec}\,A, R^1 j_*\,\mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}) = 0$ si $p > 2$ ([**?**], Chapitre XIII, §1).

En conclusion (cf. aussi [**?**]) :

Lemme 2.2.1.3.3. *Si A est un anneau de Dedekind, il existe une suite exacte :*

$$\begin{aligned}\cdots \quad \to \quad & H^k(\mathrm{Spec}\,A, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}) \to H^k(\mathrm{Spec}\,F, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}) \to \bigoplus_v H^{k-1}(k(v), \mu_{\ell^\nu}^{\otimes(i-1)}) \\ \to \quad & H^{k+1}(\mathrm{Spec}\,A, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}) \to \cdots .\end{aligned}$$

Cette suite exacte se termine avec $\bigoplus_v H^1(k(v), \mu_{\ell^\nu}^{\otimes(i-1)})$, i.e. $k = 2$, si A est un anneau de S-entiers $\mathcal{O}_S$.

2.2.1.4. Si A^* contient un élément d'ordre ℓ^ν, le faisceau $\mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}$ est le faisceau constant $\mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z}$, donc :

2.2.1.4.1. $H^0(\mathrm{Spec}\,A, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}) \simeq \mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z}$,
et le cup-produit $H^0(\mathrm{Spec}\,A, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes(i-1)}) \otimes H^k(\mathrm{Spec}\,A, \mu_{\ell^\nu}) \to H^k(\mathrm{Spec}\,A, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i})$ est un isomorphisme.

Le lemme suivant permet de se ramener à cette situation. On note F_ν l'extension de F par les racines ℓ^ν-ièmes de l'unité (dans une clôture séparable $\overline{F}$ de F), A_ν l'anneau des entiers de F_ν, $P_\nu[X]$ le polynôme minimal d'une racine primitive ℓ^ν-ième de l'unité $\zeta_\nu \in F_\nu$, et $A'_\nu = A[X]/(P_\nu[X])$. Rappelons que $1/\ell \in A$.

Lemme 2.2.1.4.2. *i) L'anneau A'_ν est étale sur A.*
ii) Il existe une suite spectrale (dite de Hochschild-Serre) dont le second terme est

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathrm{Gal}(F_\nu/F), H^q(\mathrm{Spec}\, A'_\nu, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}))$$

et qui converge vers $H^{p+q}(\mathrm{Spec}\, A, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i})$.
iii) Si A est intégralement clos, le morphisme de A-modules $A'_\nu \to A_\nu$ qui envoie X sur ζ_ν est un isomorphisme.

Preuve : La preuve se résume au fait que, puisque ℓ est inversible dans A, “il n'y a pas de problème de ramification”. Précisons.
i) Utilisons le critère II.1.1, c) de [**?**]. Soit r un ideal premier (non trivial) de $A[X]$ contenant l'idéal I engendré par $P_\nu[X]$. On doit montrer que le polynôme dérivé $P'_\nu[X]$ n'est pas dans r. Or $P_\nu[X]$ divise $X^{\ell^\nu} - A$, soit $X^{\ell^\nu} - 1 = P_\nu[X] \cdot Q[X]$. Donc $\ell^\nu X^{\ell^\nu - 1} = P'_\nu[X]\, Q[X] + P_\nu[X]\, Q'[X]$. Si $P'_\nu[X]$ était dans r, il en serait de même de $\ell^\nu X^{\ell^\nu - 1}$, donc de $X^{\ell^\nu - 1}$ (car $1/\ell$ est dans A), d'où $1 \in r$. Contradiction.
ii) Le revêtement étale $\mathrm{Spec}\, A'_\nu \to \mathrm{Spec}\, A$ est principal de groupe $\Gamma_\nu = \mathrm{Gal}(F_\nu/F)$. Ce groupe opère sur A'_ν en envoyant X sur les différentes racines de P_ν. La suite spectrale de l'énoncé est celle décrite dans [**?**], p. 92, ou dans [**?**], §VIII, p. 406.
iii) Le morphisme $A'_\nu \to A$ est toujours injectif par définition de P_ν. Pour montrer que c'est un isomorphisme, on peut localiser la situation, i.e. tensoriser ces anneaux par $A_{(\mathcal{P})}$ (on inverse tous les éléments de A qui ne sont pas dans $\mathcal{P}$), où $\mathcal{P}$ est un idéal premier quelconque de A. Le résultat est alors, par exemple, la Proposition 16, Remarque 2, p. 67, de [**?**].

Remarques : 1) Même si A ne contient pas de racine ℓ-ième de l'unité, P_ν n'est pas nécessairement égal à $X^{\ell^\nu} - 1$.

Exemple : $\ell = 5$, $\nu = 1$, $A = \mathbb{Q}(\zeta_1 + \zeta_1^{-1})$.

2) Si ℓ n'est pas inversible dans A, il se peut que A'_ν soit différent de A_ν.

Exemple : A est l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right)$, $\ell = 2$, $i = 4$. L'anneau A_ν contient $\left(1 + i\sqrt{3}\right)/2$, qui n'est pas dans A'_ν.

3) La suite spectrale du lemme ii) dégénère si $\nu = 1$, car $\Gamma_1 = \mathrm{Gal}(F_1/F)$ est d'ordre premier à ℓ (il divise $\ell-1$). Donc $H^p(\mathrm{Spec}\, A, \mu_\ell^{\otimes i}) = H^p(\mathrm{Spec}\, A_1, \mu_\ell^{\otimes i})^{\Gamma_1}$.

2.2.2 Propriétés des classes de Chern

On utilise les notations du paragraphe 1.1.2.

2.2.2.1 Transfert

Soit A un anneau commutatif unitaire où ℓ est inversible, $P[X]$ un polynôme de degré d à coefficients dans A, totalement décomposé dans l'anneau $B = A[X]/(P[X]) = A(x)$. On note $x_1, \cdots, x_d$ les racines de $P[X]$ dans B, g_j le morphisme de B sur A qui envoie x sur x_j, $1 \leq j \leq d$, φ le morphisme évident $A \to B$, et φ^* (resp. g_j^*) le morphisme induit par (resp. g_j) en K-théorie ou en cohomologie étale.

Lemme 2.2.2.1.
i) On peut définir un transfert en K-théorie algébrique $\varphi_* : K_*(B) \to K_*(A)$, et il vérifie la formule

$$\varphi^* \cdot c_{i,k} \cdot \varphi_* = \sum_{j=1}^{d} g_j^* \cdot c_{i,k}\,, \quad i \geq 0,\ k \geq 0\,.$$

ii) Si B est étale sur A, on peut aussi définir un "transfert" φ_* en cohomologie étale, et l'on a

$$d(\varphi_* \cdot c_{i,k} - c_{i,k} \cdot \varphi_*) = 0\,, \quad d = d^c(P[X])\,.$$

Preuve : Ce lemme est dû à S. Bloch, [?], Lemme 3.5.3, dans une situation très analogue.
i) Le transfert φ_* peut être défini à l'aide de la deuxième définition de la K-théorie algébrique, puisque B est de type fini et libre sur A (grâce à l'algorithme d'Euclide) : cf. [?], §4. Désignons par $\mathcal{P}(B)$ la catégorie des B-modules projectifs de type fini. Le morphisme $\varphi^* \circ \varphi_*$ est induit par le foncteur de $\mathcal{P}(B)$ dans $\mathcal{P}(B)$ qui à un B-module M associe le B-module à droite

$$M \underset{A}{\otimes} B \simeq M \underset{B}{\otimes} (B \underset{A}{\otimes} B) \simeq M \underset{B}{\otimes} (B[Y]/\prod_J (Y - x_j))\,.$$

On pose $\mathrm{Filt}_j\, M = M \underset{B}{\otimes} I_j$, où I_j est l'idéal principal de $B[Y]$ engendré par $(Y - x_1) \cdots (Y - x_{j-1})$. On voit que les B-modules $\mathrm{Filt}_j(M)$ vérifient

$$\mathrm{Filt}_j(M)/\mathrm{Filt}_{j+1}(M) \simeq g_j^*(M)\,.$$

D'où la formule $\varphi^* \cdot \varphi_* = \sum_j g_j^*$, d'après [?], §2, Cor. 1.

La fonctorialité des classes de Chern 2.1.2.1. i) implique par conséquent

$$\varphi^* \circ c_{i,k} \circ \varphi_* = c_{i,k} \circ \varphi^* \circ \varphi_* = c_{i,k} \circ \left(\sum_j g_j^* \right) = \sum_j g_j^* \circ c_{i,k} \,.$$

ii) En cohomologie étale, φ_* est le composé de l'isomorphisme $H^*(\operatorname{Spec} B, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}) = H^*(\operatorname{Spec} A, \varphi_* \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i})$ et du morphisme trace induit par la "somme des valeurs sur les feuillets" : $\varphi_* \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i} \mapsto \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}$ ([?], par exemple). On vérifie que $\varphi_* \cdot \varphi^* = d$ et $\varphi^* \cdot \varphi_* = \sum_j g_j^*$, et il suffit alors d'appliquer φ_* à la formule donnée en i)

$$\begin{tikzcd}
K_{2i-k}(B) \arrow[r, "c_{i,k}"] \arrow[d, bend left, "\varphi_*"] & H^k(\operatorname{Spec} B, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}) \arrow[d, bend left, "\varphi_*"] \\
K_{2i-k}(A) \arrow[r, "c_{i,k}"] \arrow[u, bend left, "\varphi^*"] & H^k(\operatorname{Spec} A, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}) \arrow[u, bend left, "\varphi^*"]
\end{tikzcd}$$

2.2.2.2 *Structure additive*

2.2.2.2.1. L'identification de $H^{2i}(\operatorname{Spec} A, G; \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i})$ avec $[\mathrm{BG}, X(A,i)]$ (cf. 2.1.2) permet de représenter le cup-produit en cohomologie étale équivariante par l'application

$$X(A,i) \times X(A',j) \xrightarrow{\alpha_{i,j}} X(A \otimes A', i+j)$$

induite par le produit tensoriel des complexes de $R\Gamma(\operatorname{Spec} A, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i})$ et de $R\Gamma(\operatorname{Spec} A', \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i})$, grâce au théorème d'Eilenberg-Zilber

$$N(X(A,i) \times X(A',j)) = N(X(A,i)) \otimes N(X(A',j))\,.$$

On notera que $\alpha_{i,j}$ induit en homotopie le cup-produit

$$H^k(\operatorname{Spec} A, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}) \times H^{k'}(\operatorname{Spec} A', \mu_{\ell^\nu}^{\otimes j}) \longrightarrow H^{k+k'}(\operatorname{Spec} A \otimes A', \mu_{\ell^\nu}^{\otimes (i+j)})$$

par le procédé suivant. On remarque d'abord que $\alpha_{i,j}$ est homotope à l'application triviale sur le "wedge" $X(A,i) \vee X(A',j)$. On en déduit une application, unique à homotopie près (cf. [?], Lemme 1.3.6) de $X(A,i) \wedge X(A',j)$ vers $X(A \otimes A', i+j)$. Comme $S^{2(i+j)-(k+k')} = S^{2i-k} \wedge S^{2j-k'}$ on en déduit un produit

$$\pi_{2i-k}(X(A,i)) \otimes \pi_{2j-k'}(X(A',j)) \longrightarrow \pi_{2(i+j)-(k+k')}(X(A \otimes A', i+j))$$

qui s'identifie au cup-produit ci-dessus, comme on le voit en reprenant l'interprétation en terme d'homologie des normalisés de Dold-Puppe.

2.2.2.2.2. La formule d'additivité pour les classes de Chern 2.1.2.1. iii), se traduit donc par la commutativité du diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{BGL}^+(A) \times \mathrm{BGL}^+(A) \arrow[r, "c\times c"] \arrow[d, "\oplus"] & X(A,\cdot) \times X(A,\cdot) \arrow[d, "\alpha"] \\ \mathrm{BGL}^+(A) \arrow[r, "c"] & X(A,\cdot) \end{tikzcd}$$

où $\oplus$ est induite par la somme directe des modules et

$$(N\alpha)((x_i),(y_j))_m = x_m + y_m + \sum_{i+j=m} (N\alpha_{i,j})(x_i,y_j)\,.$$

2.2.2.2.3. Si $G = \{1\}$ est le groupe trivial, les classes de Chern considérées en 2.1.2 sont associées à tout module projectif P et appartiennent à $H^{2i}(\operatorname{Spec} A, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}) = \pi_0(X(A,i))$. Elles s'interprètent donc comme des éléments de $[K_0(A), X(A,i)]$, où $K_0(A)$ est l'ensemble discret $K_0(A)$ (à cause de la formule d'addition et du fait que les classes de Chern d'un module libre sont nulles). Il s'agit, dans la terminologie de [**?**], de la partie "inessentielle" des classes caractéristiques c_i.

Notons $\mathcal{K}(A)$ le produit de $K_0(A)$ et de $\mathrm{BGL}^+(A)$. La formule d'addition ci-dessus sera encore vérifiée par la classe $c \in [\mathcal{K}(A), X(A,\cdot)]$ définie en composant les applications

$$K_0(A) \times \mathrm{BGL}^+(A) \xrightarrow{c\times c} X(A,\cdot) \times X(A,\cdot) \xrightarrow{\alpha} X(A,\cdot)\,.$$

Remarque : Une telle classe est universelle pour les représentations projectives au sens suivant. Si $G \xrightarrow{\rho} \mathrm{Aut}(P)$ est une telle représentation, la classe $c(\rho) \in [\mathrm{BG}, X(A,\cdot)]$ se factorise par l'application (définie à homotopie près)

$$\mathrm{BG} \longrightarrow K_0(A) \times \mathrm{BGL}^+(A)$$

qui envoie $x \in \mathrm{BG}$ sur $([P], B(\rho \oplus 1_Q)(x))$, où Q est un module projectif tel que $P \oplus Q$ soit libre, et

$$\rho \oplus 1_Q : G \longrightarrow \mathrm{GL}(A)$$

est la somme de ρ et de la représentation triviale de G sur Q ($[P]$ désignant la classe de P dans $K_0(A)$).

2.2.2.3 Structure multiplicative

Soient A et A' deux anneaux (unitaires et tels que ℓ soit inversible dans tout corps résiduel), k'', n et n' trois entiers positifs, $a \in K_n(A)$, $b \in K_{n'}(A')$. Faisons l'hypothèse simplificatrice suivante :

(M) Il existe au plus un seul couple de tests $(c_{i,k}, c_{j,k'})$ tels que $2i - k = n$, $2j - k' = n'$, $k + k' = k''$, et que $c_{i,k}(a)$ et $c_{j,k'}(b)$ soient non nuls.

Proposition 2.2.2.3. *Sous l'hypothèse* (M) *on a la formule*

$$c_{i+j,k+k'}(a \cdot b) = \frac{-(i+j-1)!}{(i-1)!\,(j-1)!}\ c_{i,k}(a) \cup c_{j,k'}(b)$$

où $a \cdot b \in K_{2(i+j)-(k+k')}(A \otimes A')$ *désigne le produit en* K*-théorie algébrique, et*

$$c_{i,k}(a) \cup c_{j,k}(b) \in H^{k+k'}(\mathrm{Spec}(A \otimes A'), \mu_{\ell^\nu}^{\otimes(i+j)})$$

désigne le cup-produit en cohomologie étale des classes $c_{i,k}(a)$ *et* $c_{j,k'}(b)$.

Démonstration : Nous suivons là encore la preuve donnée par S. Bloch d'un résultat analogue, dans son étude sur le lien entre K-théorie et cohomologie crystalline ([**?**], Théorème 2.3).

La formule de multiplicativité de 2.1.2.1. iv)

$$c_s(\rho \otimes \rho') = Q_{r,r',s}(c_1(\rho), \cdots, c_r(\rho); c_1(\rho'), \cdots, c_{r'}(\rho'))$$

s'interpète d'abord par la commutativité à homotopie près du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{K}_r(A) \times \mathcal{K}_{r'}(A') \arrow[r, "c \times c"] \arrow[d, "\gamma"] & X(A, \cdot) \times X(A', \cdot) \arrow[d, "\mu''"] \\
\mathcal{K}(A \otimes A') \arrow[r, "c"] & X(A \otimes A', \cdot)\,.
\end{tikzcd}$$

Expliquons les notations utilisées. L'écriture $\mathcal{K}_r(A)$ désigne le produit $K_0(A) \times \mathrm{BGL}_r(A)$ et γ est l'application induite par le produit tensoriel. Celle-ci est donnée par la formule

$$\gamma(([P], x), ([P'], y)) = ([P \otimes P'], \varphi(x, y) \oplus \varphi_P(y) \oplus \varphi_{P'}(y))\,,$$

où

$$\varphi : \mathrm{BGL}_r(A) \times \mathrm{BGL}_{r'}(A') \longrightarrow \mathrm{BGL}_{rr'}(A \otimes A') \longrightarrow \mathrm{BGL}(A \otimes A')$$

vient du produit tensoriel de A^r et $A'^{r'}$ et, si $P \oplus Q = A^{r_0}$ est libre, φ_P est induite par

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathrm{GL}_{r_0 r'}(A \otimes A') \\ g & \longmapsto & (g + 1_Q) \otimes 1_{A'^{r'}} \end{array}$$

($\varphi_{P'}$ est définie de même par symétrie). L'application ainsi construite est définie à homotopie près (voir [**?**]).

Notons $H(?, C(A, \cdot))$ la théorie cohomologique représentée par $X(A, \cdot)$ (cf. 2.2.3 (*)). L'application

$$\mu'' \in [X(A, \cdot) \times X(A', \cdot), X(A \otimes A', \cdot)] = H^0(X(A, \cdot) \times X(A', \cdot); C(A \otimes A', \cdot)$$

est par définition la classe ε'' de composantes

$$\varepsilon''_s = Q_{s;r,r'}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r, \varepsilon'_1, \cdots, \varepsilon'_{r'}),$$

où

$$\varepsilon_i \in H^0(X(A, \cdot), C(A, i)) = [X(A, \cdot), X(A, i)]$$

est la classe de la projection de $X(A, \cdot)$ sur $X(A, i)$ (et de même pour ε'_j), et où les monômes de $Q_{s;r,r'}$ sont évalués par des cup-produits.

Mais on a

$$c(\rho \otimes \rho') = c(\rho)^{\dim(\rho')} c(\rho')^{\dim(\rho)} \widetilde{c}$$

où

$$\widetilde{c}_s = P_s(c_1(\rho), c_2(\rho), \cdots; c_1(\rho'), c_2(\rho'), \cdots),$$

et P_s est un polynôme universel (indépendant de r et r' !) à coefficients entiers (pour des détails et la formulation de ceci en termes de λ-anneaux, voir [**?**]).

On notera $\varepsilon \cdot \varepsilon'$ la classe de $H^0(X(A, \cdot) \times X(A', \cdot), C(A \otimes A', \cdot))$ définie par $(\varepsilon \cdot \varepsilon')_s = P_s(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots; \varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \cdots)$, et par μ' l'application (définie à homotopie près) de $X(A, \cdot) \times X(A', \cdot)$ dans $X(A \otimes A', \cdot)$ qui représente $\varepsilon \cdot \varepsilon'$. On vérifie que la restriction de μ' à $X(A, \cdot) \vee X(A', \cdot)$ est homotopiquement triviale, d'où une application (aussi notée μ') de $X(A, \cdot) \wedge X(A', \cdot)$ dans $X(A \otimes A', \cdot)$. Le produit de la K-théorie algébrique est, quant à lui, induit par l'application (homotopiquement triviale sur $\mathcal{K}(A) \vee \mathcal{K}(A')$)

$$\mu : \mathcal{K}(A) \times \mathcal{K}(A') \longrightarrow \mathcal{K}(A \otimes A'),$$

$\mu(x,y) = \gamma(x,y) - \gamma(x,*) - \gamma(*,y)$, la différence étant prise dans le H-espace commutatif $\mathcal{K}(A \otimes A')$ ($*$ désigne les points bases) (cf. [?]). On obtient donc le diagramme commutatif (à homotopie faible près) suivant, en quotientant par les “wedges” :

(D)
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}(A) \wedge \mathcal{K}(A') & \xrightarrow{c \wedge c} & X(A,\cdot) \wedge (A',\cdot) \\ \downarrow{\scriptstyle \mu} & & \downarrow{\scriptstyle \mu'} \\ \mathcal{K}(A \otimes A') & \xrightarrow{c} & X(A \otimes A',\cdot)\,. \end{array}$$

En homotopie, le diagramme (D) implique le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} K_{2i-k}(A) \otimes K_{2j-k'}(A') & \xrightarrow{c_* \otimes c_*} & \pi_{2i-k}(X(A,\cdot)) \otimes \pi_{2j-k'}(X(A',\cdot)) \\ \Big\downarrow \cdot & & \downarrow{\scriptstyle \mu'_*} \\ & & \pi_{2(i+j)-(k+k')}\, X(A \otimes A',\cdot) \\ & & \downarrow \\ K_{2(i+j)-(k+k')}(A \otimes A') & \xrightarrow{(c_{i+j})_*} & \pi_{2(i+j)-(k+k')}\, X(A \otimes A', i+j)\,. \end{array}$$

L'hypothèse (M) montre qu'il suffit maintenant d'expliciter l'application

$$\pi_{2i-k}(X(A,i)) \otimes \pi_{2j-k'}(X(A',j)) \longrightarrow \pi_{2(i+j)-(k+k')}(X(A \otimes A', i+j))$$

induite par la restriction de $\varepsilon \cdot \varepsilon'$ à $X(A,i) \times X(A',j)$, i.e. une classe de

$$H^0(X(A,i) \times X(A',j); C(A \otimes A',\cdot)) = [X(A,i) \times X(A',j), X(A \otimes A',\cdot)]\,,$$

suivie de la projection sur $X(A \otimes A', i+j)$. Or on a

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i|_{X(A,i') \times X(A',j)}} &= 0 \quad \text{si} \quad i' \neq i\,, \qquad \text{et} \\ \varepsilon'_{j|_{X(A,i') \times X(A',j')}} &= 0 \quad \text{si} \quad j' \neq j\,. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$(\varepsilon \cdot \varepsilon')_{i+j|X(A',i) \times X(A',j)} = P_{i+j}(0,\cdots,0,\varepsilon_i;0,\cdots,0,\varepsilon'_j)$$

$$= \; (-(i+j-1)!/(i-1)!(j-1)!)(\varepsilon_i \cup \varepsilon'_j)\,. \quad \text{Voir loc. cit. [?].}$$

On a vu en 2.2.2.2.1 que $\varepsilon_i \cup \varepsilon'_j$ est représentée par une application $\alpha_{i,j}$ qui induit le cup-produit en cohomologie étale. q.e.d.

Remarque :

Si on ôte l'hypothèse (M), la formule obtenue est :

$$c_{m,k''}(a \cdot b) = -(m-1)! \sum_{\substack{i+j = m \\ k+k' = k'' \\ 2i-k = n \\ 2j-k' = n'}} (c_{i,k}(a)/(i-1)!) \cup (c_{j,k'}(b)/(j-1)!) \,.$$

A chaque fois qu'on pourra définir (de façon suffisamment canonique) un morphisme

$$\mathrm{ch} = \sum_{\substack{k\geq 0 \\ i \geq 1}} \mathrm{ch}_{i,k} \,, \quad \text{avec } (-1)^i (i-1)!\, \mathrm{ch}_{i,k} = c_{i,k} \,,$$

la formule de multiplicativité s'écrira simplement :

$$\mathrm{ch}(a \cdot b) = \mathrm{ch}(a) \cup \mathrm{ch}(b) \,, \quad a \in \bigoplus_{n \geq 0} K_n(A') \,, \quad b \in \bigoplus_{n' \geq 0} K_{n'}(A')$$

(ch est un *caractère* de Chern).

2.2.3 K-théorie à coefficients

2.2.3.1. Soit q un entier positif. On désigne par M_q le cône de la multiplication par q dans le cercle S^1. Autrement dit, on a une cofibration (à homotopie près)

$$S^1 \xrightarrow{q} S^1 \longrightarrow M_q \,.$$

La donnée d'un délaçage (infini) de $K_0(A) \times \mathrm{BGL}^+(A)$ [**?**] permet de définir un Ω-spectre $\mathcal{K}_A$ tel que

$$(\mathcal{K}_A)_n = \Omega^n(K_0(A) \times \mathrm{BGL}^+(A)) \,, \quad \text{si } n \geq 0 \,,$$

et à ce spectre est associée une théorie cohomologique (réduite) $\widetilde{h}^*(\cdot; \mathcal{K}_A)$. L'homotopie du spectre $\mathcal{K}_A$ est la K-théorie de l'anneau A : si S^0 désigne la sphère de dimension zéro et si $n \geq 0$ on a :

$$h^{-n}(S^0; K_A) = \pi_n(\mathcal{K}_A) = K_n(A) \qquad \text{(cf. [?])}.$$

On peut associer à cette théorie cohomologique une théorie ${}_q\widetilde{h}$ "modulo q" définie par :

$${}_q\widetilde{h}^n\,(X) = \varinjlim_k \, [S^k \wedge X \wedge M_q, (\mathcal{K}_A)_{k+2-n}]_* = [X \wedge M_q, (\mathcal{K}_A)_{2-n}]_*$$

([,]$_*$ désigne les classes d'homotopie d'applications pointées). On définit la K-théorie modulo q par

$$K_n(A;\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) = {}_q\widetilde{h}^{-n}(S^0)\,.$$

On a donc, si $n \geq 2$,

$$K_n(A;\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) = \pi_{n-2}(\langle M_q, \mathcal{K}(A)\rangle)\,,$$

où $\langle\ ,\ \rangle$ désigne l'ensemble des applications pointées, muni de la topologie compact ouverte.

La suite exacte

$$\cdots \longrightarrow K_n(A) \xrightarrow{\times q} K_n(A) \longrightarrow K_n(A;\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \longrightarrow K_{n-1}(A) \xrightarrow{\times q} \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow K_2(A;\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \longrightarrow K_1(A) \xrightarrow{\times q} K_1(A)\,,$$

associée à la fibration

$$\langle M_q, \mathcal{K}(A)\rangle \longrightarrow \Omega\,\mathcal{K}(A) \longrightarrow \Omega\,\mathcal{K}(A)$$

s'interprète comme la suite exacte reliant ${}_q\widetilde{h}\,(S^0)$ et $\widetilde{h}\,(S^0)$. Le morphisme de réduction modulo q

$$r_q : K_n(A) \longrightarrow K_n(A;\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$$

correspond ainsi au bord de la suite exacte de la fibration ci-dessus.

L'application

$$\mathcal{K}(A) \wedge \mathcal{K}(A') \xrightarrow{\mu} \mathcal{K}(A \otimes A')$$

qui définit le produit en K-théorie fournit une application

$$\langle M_q, \mathcal{K}(A)\rangle \wedge \mathcal{K}(A') \longrightarrow \langle M_q, \mathcal{K}(A \otimes A')\rangle$$

et donc un produit externe

$$K_n(A;\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \otimes K_m(A') \longrightarrow K_{n+m}(A \otimes A';\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})\,, \quad m \geq 0\,, \quad n \geq 2\,.$$

Si on fait l'hypothèse que $q \neq 2$ modulo 4, la théorie de Araki et Toda [**?**], permet de définir une structure produit sur la théorie ${}_q\widetilde{h}$ elle-même, qui est fonctorielle en l'anneau, et vérifie les propriétés habituelles.

2.2.3.2. Soit $q = \ell^\nu$, où ℓ et ν sont fixés.

Proposition : *Le morphisme $c_{i,k}$ défini au paragraphe 2.2.2.3 se factorise à travers la K-théorie à coefficients $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ en un morphisme $\overline{c_{i,k}}$:*

$$\begin{tikzcd} K_{2i-k}(A) \arrow[rr, "c_{i,k}"] \arrow[dr, "r_4"'] & & H^k(\operatorname{Spec} A, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}) \\ & K_{2i-k}(A;\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \arrow[ur, "\overline{c_{i,k}}"'] & \end{tikzcd}$$

Preuve : Elle résultera du lemme de scindage suivant :

Lemme 2.2.3.2.1. *i) Il existe un isomorphisme naturel en l'anneau A :*

$$\pi_{2i-k-2}(\langle M_q, X(A,i)\rangle) = H^k(\operatorname{Spec} A, \mu_q^{\otimes i}) \oplus H^{k+1}(\operatorname{Spec} A, \mu_q^{\otimes i})$$

ii) La projection p de $\pi_{2i-k-2}(\langle M_q, X(A,i)\rangle)$ sur $H^k(\operatorname{Spec} A, \mu_q^{\otimes i})$ déduite de i) est une section du bord

$$\pi_{2i-k}(X(A,i)) \xrightarrow{\partial} \pi_{2i-k-2}(\langle M_q, X(A,i)\rangle)$$

provenant de la longue suite exacte de la fibration

$$\langle M_q, X(A,i)\rangle \longrightarrow \Omega X(A,i) \longrightarrow \Omega X(A,i)\,.$$

iii) La projection de $\pi_{2i-k-2}(\langle M_q, X(A,i)\rangle)$ sur $H^{k+1}(\operatorname{Spec} A, \mu_q^{\otimes i})$ est induite par l'application

$$\langle M_q, X(A,i)\rangle \longrightarrow \Omega X(A,i)\,.$$

Preuve du lemme : On notera (G,n) le complexe de groupes abéliens égal à G en degré n et zéro ailleurs. Puisque $S^1 = K(\mathbb{Z},1)$, on peut définir M_q comme le transformé de Dold-Puppe $K(\widetilde{M_q})$ du cône $\widetilde{M_q}$ du morphisme de complexes $(\mathbb{Z},1) \xrightarrow{\times q} (\mathbb{Z},1)$. On a donc

$$\widetilde{M_q} = (\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times q} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots)\,.$$

Notons $C_q(A,i)$ l'élément $\tau_{\leq 0}(R\Gamma_{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}(\operatorname{Spec} A,)[2i])$, de la catégorie dérivée des $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$-modules bornés qui est la classe des sections d'une résolution injective de $\mu_q^{\otimes i}$ par des faisceaux de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$-modules sur $\operatorname{Spec} A$ (translatée et tronquée comme 2.1.2.3). Si ε est le morphisme évident de $D(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ dans $D(\mathbb{Z})$, on a $\varepsilon\, C(A,i) = C_q(A,i)$. De plus, on a, puisque $\widetilde{M_q}$ est un complexe de $\mathbb{Z}$-modules libres,

$$\operatorname{Ext}^{2i-k}_{\mathbb{Z}}(\widetilde{M_q}; C(A,i)) \simeq \operatorname{Ext}^{2i-k}_{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}(\widetilde{M_q} \otimes \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}; C_q(A,i))\,,$$

ceci grâce à la proposition 4.1.3, Chap. VI, de [?] (en remarquant qu'on passe des Ext de modules aux Ext de complexes par des suites spectrales connues). Mais $\widetilde{M_q} \otimes \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ est la somme directe de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, 2)$ et $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, 1)$ et les groupes ci-dessus sont isomorphes (d'après la construction de $X(A,i)$) à

$$\pi_{2i-k}(M_q, X(A,i)) \simeq H_{2i-k}(NK \operatorname{Hom}^*_{\mathbb{Z}}(\widetilde{M_q}, C(A,i)) .$$

Ce groupe est donc isomorphe à

$$\begin{aligned} & \operatorname{Ext}^{2i-k}_{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}((\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, 2); C_q(A,i)) \oplus \operatorname{Ext}^{2i-k}_{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}((\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, 1); C_q(A,i)) \\ \simeq \quad & H^k(\operatorname{Spec} A, \mu_q^{\otimes i}) \oplus H^{k+1}(\operatorname{Spec} A, \mu_q^{\otimes i}) . \end{aligned}$$

Tous ces isomorphismes sont naturels en l'anneau A.
ii) Pour voir que le bord ∂ admet la projection p sur $H^k(\operatorname{Spec} A, \mu_q^{\otimes i})$ pour section, il suffit de remarquer que ∂ est induite par l'application $M_q \to S^2$, dont la normalisée est $\widetilde{M_q} \to (\mathbb{Z}, 2)$.
iii) De même la projection sur le second facteur est induite par $(\mathbb{Z}, 1) \to \widetilde{M_q}$.

q.e.d.

Preuve de la proposition : L'application $c_i : \mathcal{K}(A) \to X(A,i)$ induit un morphisme de fibrations :

$$\begin{tikzcd} \langle M_q, \mathcal{K}(A) \rangle \arrow[r] \arrow[d, "Mc_i"] & \Omega\mathcal{K}(A) \arrow[r] \arrow[d, "c_i"] & \Omega\mathcal{K}(A) \arrow[d, "c_i"] \\ \langle M_q, X(A,i) \rangle \arrow[r] & \Omega X(A,i) \arrow[r] & \Omega X(A,i) . \end{tikzcd}$$

On pose $\overline{c_{i,k}} = p \circ (Mc_i)_{2i-k-2}$, où $(Mc_i)_*$ désigne le morphisme induit par Mc_i en homotopie. La proposition résulte alors de l'interprétation donnée en 2.2.3.1 de la réduction modulo q en K-théorie.

On notera de même que la composée de $(Mc_i)_*$ avec la seconde projection (décrite dans le lemme iii)) n'est autre que la composée de $K_{2i-k}(A; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \to K_{2i-k-1}(A)$ avec le morphisme $c_{i,k+1}$. q.e.d.

2.2.3.3. On déduit les propriétés des morphismes $\overline{c_{i,k}}$ de celles de $c_{i,k}$. Les flèches $c_{i,k}$ sont naturelles en A, et le lemme de transfert 2.2.2.1 demeure valable. On a la propriété de multiplication suivante :

Soient n et $n' \in \mathbb{N}$, $n' \geq 2$, $a \in K_n(A)$ et $b \in K_{n'}(A'; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$, m et $k'' \geq 0$.

On fait de plus l'hypothèse simplificatrice qu'il existe au plus une valeur de i, j, k et k' tels que $i+j=m$, $k+k'=k''$, $2i-k=n$, $2j-k'=n'$, et que les éléments $c_{i,k}(a)$ et $c_{j,k'}(b)$ sont non nuls.

Proposition 2.2.3.3. *Sous l'hypothèse précédente, on a la formule :*

$$\overline{c_{i+j,k+k'}}(a\cdot b)=\frac{-(i+j-1)_!}{(1-i)_!\,(j-1)_!}\,c_{i,k}(a)\cup\overline{c_{j,k'}}\,(b)\,,$$

où $a\cdot b$ $K_{n+n'}(A\otimes A';\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ *est le produit externe de* a *et* b.

Démonstration : Le diagramme (D) de 2.2.2.3 fournit un diagramme commutatif à homotopie (faible) près

$$\begin{array}{ccc}
\langle M_q,\mathcal{K}(A)\rangle\wedge\mathcal{K}(A') & \xrightarrow{Mc\wedge c} & \langle M_q;X(A,\cdot)\rangle\wedge X(A',\cdot)\\
\downarrow{\scriptstyle\mu} & & \downarrow{\scriptstyle\mu'}\\
\langle M_q,\mathcal{K}(A\otimes A')\rangle & \xrightarrow{\quad c\quad} & \langle M_q,X(A\otimes A',\cdot)\rangle\,.
\end{array}$$

L'hypothèse de l'énoncé montre qu'il suffit d'expliciter

$$\langle M_q,X(A,i)\rangle\wedge X(A',j)\xrightarrow{\mu'}\langle M_q,X(A\otimes A',i+j)\rangle\,.$$

On a vu dans la proposition 2.2.2.3 que μ' provient (à une constante près) du cup-produit

$$\varepsilon_i\cup\varepsilon_j\in H^0(X(A,\cdot)\times X(A',\cdot);X(A\otimes A',i+j))\,.$$

La flèche

$$\pi_{2i-k-2}(\langle M_q,X(A,i)\rangle)\otimes\pi_{2j-k'}(X(A',j))\longrightarrow\pi_{2(i+j)-k-k'}(\langle M_q,X(A\otimes A',i+j)\rangle)$$

induite par $\varepsilon_i\cup\varepsilon_j$ provient de l'accouplement $C(A,i)\times C(A',j)\to C(A\otimes A',i+j)$ dû au produit tensoriel. Il se projette donc par p sur le cup-produit entre $H^k(\operatorname{Spec}A,\mu_{\ell^\nu}^{\otimes i})$ et $H^{k'}(\operatorname{Spec}A',\mu_{\ell^\nu}^{\otimes j})$. q.e.d.

Remarque : Je ne sais pas si la formule de multiplication ci-dessus est encore vraie pour le produit de deux éléments de la K-théorie à coefficients (défini comme en 2.2.3.1). On montrera cependant une telle formule dans des cas particuliers dans le cours des démonstrations ci-dessous (2.2.4.5). Il faut remarquer à ce propos qu'on n'espère pas que la classe de Chern induise une transformation de théories cohomologiques [**?**].

2.2.4 Surjectivité des classes de Chern

On écrira, par abus d'écriture, $A \supset \mu_q$ si A^* contient un élément d'ordre $\ell^\nu = q$.

Théorème 2.2.4. *Soient ℓ un nombre premier, ν et i deux entiers tels que $i \leq \ell$, A un anneau abélien unitaire intègre, $A[1/\ell]$ le localisé de A au-dessus de ℓ. Sous les hypothèses ci-dessous on peut définir un morphisme naturel*

$$\overline{\mathrm{ch}}_{i,k} : K_{2i-k}(A, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \longrightarrow H^k(\mathrm{Spec}(A[1/\ell]), \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i})$$

et ce morphisme est surjectif*.*

- *D'abord $k = 0, 1$ ou 2.*
- *Si $1/\ell \notin A$ on suppose que A est un anneau de Dedekind à corps résiduels finis.*
- *Si $\mu_{\ell^\nu} \not\subset A$ on suppose que $\nu = 1$.*
- *Si $k = 1$, on suppose que A est un anneau de Dedekind.*
- *Si $k = 2$, on suppose que $i \geq 2$, que A est soit un corps de caractéristique différente de ℓ vérifiant (B, q) (cf. 2.2.1.1), soit un anneau de S-entiers dans un corps global de caractéristique différente de ℓ.*
- *Enfin on suppose que $(\ell^\nu, i, k) \notin \{(2, 2, 1), (2, 2, 0)\}$.*

Démonstration : La démonstration du théorème ci-dessus nous occupera jusqu'à la fin du paragraphe 2.2.5. Nous montrons d'abord qu'on peut supposer $1/\ell \in A$ et $\mu_{\ell^\nu} \subset A$, ce qui sera le cas dans tout le reste de la démonstration.

2.2.4.1. Réduction 1. *On peut supposer* $1/\ell \in A$.

En effet, le cas où nous n'avons pas fait cette hypothèse est celui d'un anneau de Dedekind à corps résiduels finis. Mais on dispose alors de la suite exacte de localisation :

$$\cdots \longrightarrow K_n(A) \longrightarrow K_n(A[1/\ell]) \longrightarrow \bigoplus_{\ell \in m} K_{n-1}(A/m) \longrightarrow K_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots ,$$

où m parcourt l'ensemble des idéaux premiers de A contenant ℓ (cf. [**?**]). Mais, comme A/m est un corps fini de caractéristique première à ℓ, on en déduit que $K_*(A/m)$ est un groupe fini d'ordre premier à ℓ [**?**]. D'après la suite exacte reliant la K-théorie à la K-théorie à coefficients, on voit que le morphisme

$K_*(A;\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \to K_*(A[1/\ell];\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ est un isomorphisme et ce quel que soit le choix du délaçage de $\mathcal{K}(A)$ qui permet de définir $K_1(A;\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ et $K_0(A;\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$, car, pour un anneau noethérien régulier, la K-théorie négative est nulle, cf. 2.2.3.1 et [**?**]. L'isomorphisme précédent permet de définir $\overline{\mathrm{ch}}_{i,k}$ en se ramenant au cas où A contient $1/\ell$. On pose alors

$$\overline{\mathrm{ch}}_{i,k} = ((-1)^i/(i-1)!)\,\overline{c_{i,k}}\,,$$

où $\overline{c_{i,k}}$ est le morphisme défini dans la proposition 2.2.3.2. On notera que c'est l'hypothèse $i \leq \ell$ qui autorise une telle définition.

2.2.4.2. Réduction 2. *On peut supposer que A^* contient un élément d'ordre ℓ^ν.*

En effet, lorsque cette hypothèse est omise, $\nu = 1$. Ceci permet d'appliquer les paragraphes 2.2.1.2, 2.2.1.3 et 2.2.2.1. En reprenant les notations de ces paragraphes, soit $B \neq A[X]/(P_1[X])$. Comme le degré de P_1 divise $(\ell-1)$, on a

$$\varphi_* \circ \overline{\mathrm{ch}}_{i,k} = \overline{\mathrm{ch}}_{i,k} \circ \varphi_*\,,$$

et le "transfert" est surjectif en cohomologie étale. Il suffit donc de montrer la surjectivité de $\overline{\mathrm{ch}}_{i,k}$ pour l'anneau B, qui contient μ_ℓ.

2.2.4.3. Le cas où $i = 1$:

On a vu que $c_1(\rho)$ est l'image par le morphisme de Bockstein β_ν de la classe

$$\xi(\rho) = (\mathrm{d\acute{e}t}(\rho)) \in H^1(\operatorname{Spec} A, G; G_m)$$

du G-fibré de rang un $\mathrm{d\acute{e}t}(\rho)$ 2.1.2.1 ii). On peut associer au système des classes $\xi(\rho)$ des tests

$$\xi_1 : K_0(A) \longrightarrow H^1(\operatorname{Spec} A, G_m)$$

$$\xi_0 : K_1(A) \longrightarrow H^0(\operatorname{Spec} A, G_m)$$

par le même procédé que celui employé pour les classes c_i en 2.1.2.3. La première classe de Chern se factorise donc comme suit

$$\begin{tikzcd} K_0(A) \times \mathrm{BGL}^+(A) \arrow[r, "\xi"] \arrow[dr, "c_1"'] & K(R\Gamma(\operatorname{Spec} A, G_m)1) \arrow[d] \\ & K(R\Gamma(\operatorname{Spec} A, \mu_{\ell^\nu}), 2)\,. \end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme, la verticale de droite provient du triangle suivant dans $D(\mathbb{Z})$ (cf. [?]) :

$$\begin{tikzcd} R\Gamma(\operatorname{Spec} A, G_m) \arrow[rr, "\times \ell^\nu"] & & R\Gamma(\operatorname{Spec} A, G_m) \arrow[dl] \\ & R\Gamma(\operatorname{Spec} A, \mu_{\ell^\nu})\,. \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

Elle induit donc le morphisme de Bockstein :

$$\beta_\nu : H^k(\operatorname{Spec} A, G_m) \longrightarrow H^{k+1}(\operatorname{Spec} A, \mu_{\ell^\nu})$$

sur les groupes d'homotopie. On en déduit que, en ce qui concerne les "tests" de la K-théorie ordinaire, on a

(2.2.4.3.1) $$c_{1,0} = 0\,, c_{1;1} = \beta_\nu \circ \xi_0 \quad \text{et} \quad c_{1,2} = \beta_\nu \circ \xi_1\,.$$

Le morphisme

$$\xi_0 : K_1(A) \longrightarrow H^0(\operatorname{Spec} A, G_m) \simeq A^*\,,$$

est (d'après ce qu'on a vu plus haut) l'application déterminant :

$$K_1(A) = \mathrm{GL}(A)/(\mathrm{GL}(A), \mathrm{GL}(A)) \xrightarrow{\text{dét}} A^*\,.$$

Donc ξ_0 est surjectif. Si A est un corps F on en déduit que

$$c_{1,1} : K_1(\mathbb{F}, \mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z}) = F^*/(F^*)^{\ell^\nu} \longrightarrow H^1(\operatorname{Spec} F, \mu_{\ell^\nu})$$

est un isomorphisme (2.2.1.1). (Ceci reste vrai pour un anneau principal.)

Si A est un anneau de Dedekind, et F son corps de fractions, la suite exacte de localisation montre que $K_1(A; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ a pour image dans $K_1(F; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ l'intersection des noyaux des valuations $K_1(F; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \xrightarrow{\vee_{\mathcal{P}}} \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ associées aux idéaux premiers $\mathcal{P}$ de A. Autrement dit on a la suite exacte de localisation pour la K-théorie à coefficients :

$$\cdots \longrightarrow K_1(A; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \longrightarrow K_1(F; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \longrightarrow \bigoplus_{\mathcal{P}} K_0(A/\mathcal{P}) = \bigoplus_{\mathcal{P}} \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}\,.$$

Les groupes intervenant dans cette suite exacte dépendent a priori du choix d'un délaçage de $\mathcal{K}(A)$ (cf. 2.2.3.1). Mais on remarque que $K_1(F; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ sera toujours égal à $F^*/(F^*)^q$ (puisque $K_0(F; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$), et que $K_0(A/\mathcal{P})$ sera toujours égal à $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ (puisque $K_{-1}(A/\mathcal{P}) = 0$). Pour définir $K_1(A; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ on utilisera un délaçage de $\mathcal{K}(A)$ qui commence par le classifiant $\mathrm{BQ}(A)$ de Quillen ($\Omega\,\mathrm{BQ}(A) = \mathcal{K}(A)$, cf. [?]). Il suffira alors, pour obtenir la suite exacte de localisation ci-dessus, d'écrire la suite exacte de la fibration

$$\prod_{\mathcal{P}} \langle M_q, \mathrm{BQ}(A/\mathcal{P}\rangle \longrightarrow \langle M_q, \mathrm{BQ}(A)\rangle \longrightarrow \langle M_q, \mathrm{BQ}(F)\rangle\,.$$

Pour définir la flèche $\overline{c_{1,1}}$ pour l'anneau A (ce que nous n'avons pas fait jusqu'ici ! !) il suffira de compléter le diagramme commutatif ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
 & K_1(A;\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \arrow[r] & K_1(F;\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{c_{1,1}}"] & \bigoplus_{\mathcal{P}} \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
0 \arrow[r] & H^1(\mathrm{Spec}\,A, \mu_{\ell^\nu}) \arrow[r] & H^1(\mathrm{Spec}\,F; \mu_{\ell^\nu}) \arrow[r] & \bigoplus_{\mathcal{P}} \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}\,.
\end{tikzcd}$$

Le morphisme $\overline{c_{1,1}} : K_1(A;\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \to H^1(\mathrm{Spec}\,A; \mu_{\ell^\nu})$ ainsi obtenu sera surjectif d'après ce que nous savons du cas $A = F$. Ceci démontre le théorème dans le cas où $i = k = 1$.

Nous aurons aussi besoin dans la suite de la description de la flèche

$$c_{1,2} : K_0(A) \longrightarrow H^2(\mathrm{Spec}\,A, \mu_{\ell^\nu})\,.$$

Celle-ci se décrit, d'après 2.2.4.3.1, en composant avec le Bockstein β_ν le morphisme

$$\xi_1 : K_0(A) \longrightarrow H^1(\mathrm{Spec}\,A, G_m) \simeq \mathrm{Pic}(A)\,.$$

L'isomorphisme de $H^1(\mathrm{Spec}\,A, G_m)$ avec $\mathrm{Pic}(A)$ étant précisément obtenu en classifiant les fibrés inversibles sur $\mathrm{Spec}\,(A)$ [?], on voit que, si A est un anneau de Dedekind, ξ_0 s'identifie à la projection de $K_0(A)$ sur la K-théorie “réduite” $\widetilde{K}_0(A) = \mathrm{Pic}(A)$ (rappelons qu'on a $K_0(A) = \mathbb{Z} \oplus \widetilde{K}_0(A)$, cf. [?]).

2.2.4.4. Le cas où $i = 2$ et $k = 2$:

Ce cas a été étudié par J. Milnor [?] et J. Tate [?]. Pour un corps F la classe de Chern

$$c_{2,2} : K_2(F) \longrightarrow H^2(\mathrm{Spec}\,F, \mu_q^{\otimes 2})$$

associe en effet au symbole (a,b), $a,b \in F^*$, le cup-produit $-c_{1,1}(a) \cup c_{1,1}(b)$, ceci à cause de la proposition 2.2.2.3 (et du fait que $(2-1)! = 1$! !). D'après 2.2.1.1, on retrouve bien, au signe près, le symbole décrit par Milnor et Tate.

Si le corps F vérifie la propriété (B, q), la surjectivité résultera de 2.2.1 (surjectivité du cup-produit en cohomologie étale) et de 2.2.4.3 (surjectivité de $c_{1,1}$).

Dans le cas où F est un corps global, J. Tate montre que

$$c_{2,2} : K_2(F)/\ell^\nu\, K_2(F) \longrightarrow H^2(\operatorname{Spec} F, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes 2})$$

est un isomorphisme. Il étudie aussi le cas d'un anneau de S-entiers $\mathcal{O}_S$ dans F (cf. 2.2.1.2 pour la définition). Nous allons en déduire le résultat suivant :

Lemme 2.2.4.4. *Le morphisme*

$$c_{2,2} : K_2(\mathcal{O}_S)/\ell^\nu\, K_2(\mathcal{O}_S) \longrightarrow H^2(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_S ; \mu_{\ell^\nu}^{\otimes 2})$$

est un isomorphisme.

Démonstration : Rappelons qu'on a supposé $\mu_{\ell^\nu} \subset \mathcal{O}_S$ (notons cependant que les arguments de 2.2.4.1 montrent qu'on peut se dispenser de cette hypothèse si $\nu = 1$). On désignera par α un élément de $K_2(\mathcal{O}_S; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ tel que $\beta_\nu(\alpha) \in K_1(\mathcal{O}_S) \simeq \mathcal{O}_S^*$ soit un élément d'ordre q $(= \ell^\nu)$. Si a décrit le groupe de Picard $\operatorname{Pic}(\mathcal{O}_S) = \widetilde{K}_0(\mathcal{O}_S)$, le produit (externe) $\alpha \cup a$ décrit un sous-groupe de $K_2(\mathcal{O}_S; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ que nous noterons Ω.

Soient j l'injection de $\mathcal{O}_S$ dans F, et j_* le morphisme qu'elle induit en K-théorie et en cohomologie étale (N.B. : nos notations diffèrent de celles employées dans la démonstration du lemme 2.2.2.1). On a :

$$j_*(\alpha \cup a) = j_*(\alpha) \cup j_*(a) = 0\,, \quad \text{car } \widetilde{K}_0(F) = 0.$$

Donc $j_*(\beta_\nu(\alpha \cup a)) = \beta_\nu(j_*(\alpha \cup a)) = 0$, et comme $j_* : K_1(\mathcal{O}_S) \to K_1(F)$ est injectif, le groupe Ω est dans le noyau du morphisme de Bockstein β_ν : $K_2(\mathcal{O}_S; \mathbb{Z}/\ell^\nu\,\mathbb{Z}) \to K_1(\mathcal{O}_S)$. Il s'identifie ainsi à un sous-groupe du noyau de

$$K_2(\mathcal{O}_S)/\ell^\nu K_2(\mathcal{O}_S) \xrightarrow{j_*} K_2(F)/\ell^\nu\, K_2(F)\,.$$

Par ailleurs le fait que $c_{1,0}(a) = 0$ (cf. 2.2.4.3) permet d'appliquer la formule de multiplication 2.2.3.3 pour montrer que $c_{2,2}(\alpha \cup a) = c_{1,0}(\alpha) \cup c_{1,2}(a)$. *On verra* au paragraphe 2.2.2.5 que $c_{1,0}(\alpha)$ est un générateur de $H^0(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_S, \mu_{\ell^\nu}) \simeq \mathbb{Z}/\ell^\nu\,\mathbb{Z}$. On sait, d'après 2.2.4.3, que $c_{1,2}(a)$ décrit le sous-groupe $\operatorname{Pic}(\mathcal{O}_S)/\ell^\nu \operatorname{Pic}(\mathcal{O}_S)$ de $H^2(\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_S), \mu_{\ell^\nu})$.

Donc $c_{2,2}(\Omega)$ est le groupe

$$\beta_\nu(H^1(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_S, G_m))\cup H^0(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_S, \mu_{\ell^\nu}) \simeq \operatorname{Pic}(\mathcal{O}_S)\otimes\mu_{\ell^\nu} \subset H^2(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_S, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes 2})\,.$$

Mais J. Tate démontre dans [**?**], Théorème 6.2, que le noyau de

$$K_2(\mathcal{O}_S)/\ell^\nu K_2(\mathcal{O}_S) \longrightarrow K_2(F)/\ell^\nu K_2(F)$$

est isomorphe à $\operatorname{Pic}(\mathcal{O}_S)\otimes\mu_{\ell^\nu}$ (l'énoncé de ce théorème considère le cas $\nu = 1$, mais la démonstration se transpose sans modification au cas d'un entier ν quelconque). Comme le groupe de Picard est fini, on voit que

$$\Omega = \operatorname{Ker}\left(K_2(\mathcal{O}_S)/\ell^\nu K_2(\mathcal{O}_S) \xrightarrow{j_*} K_2(F)/K_2(F)\right)$$

et que $c_{2,2}$ est injectif sur Ω.

Finalement, la suite exacte

$$0 \longrightarrow \Omega \longrightarrow K_2(\mathcal{O}_S)/\ell^\nu K_2(\mathcal{O}_S) \xrightarrow{j_*} K_2(F)/K_2(F)$$

s'envoie par $c_{2,2}$ sur la suite exacte

$$0 \longrightarrow \operatorname{Pic}\mathcal{O}_S\otimes\mu_{\ell^\nu} \longrightarrow H^2(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_S, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes 2}) \longrightarrow H^2(\operatorname{Spec} F, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes 2})$$

(l'exactitude de cette suite résulte aisément du lemme 2.2.1.3.3). Le lemme en résulte, puisqu'on sait que

$$c_{2,2} : K_2\,F/\ell^\nu K_2\,F \longrightarrow H^2(\operatorname{Spec} F, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes 2})$$

est un isomorphisme. q.e.d.

Remarques : – On a ainsi montré que la flèche de Tate $\mu_\ell\otimes\operatorname{Pic}(\mathcal{O}_S) \to K_2(\mathcal{O}_S)/\ell K_2(\mathcal{O}_S)$ s'interprète comme un produit (externe).

– Le Théorème 6.2 et les raisonnements précédents montrent en fait que l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_v K_2(k(v);\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\bar c_{1,0}"] & K_2(\mathcal{O}_S;\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\bar c_{2,2}"] & K_2(F;\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\bar c_{2,2}"] & \bigoplus_v K_1(k(v);\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\bar c_{1,1}"] & \cdots \\
\bigoplus_v H^0(k(v),\mu_q) \arrow[r] & H^2(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_S,\mu_q^{\otimes 2}) \arrow[r] & H^2(F,\mu_q^{\otimes 2}) \arrow[r] & \bigoplus_v H^1(k(v),\mu_q) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

On peut penser plus généralement que la suite exacte de localisation (en K-théorie à coefficients) s'envoient par les classes de Chern sur les suites exactes du lemme 2.2.1.3.3, pour différentes valeurs de i, ℓ et ν. Ainsi qu'il est montré dans [?] pour le K_2, une telle correspondance relierait, dans le cas d'un corps de nombres totalement réels, la Conjecture 2 i) et ii) (cf. §2.1.1) à celle qui affirme que $K_n(\mathcal{O}_S)$ s'envoie injectivement dans $K_n(F)$ (même quand n est impair).

2.2.4.5. Réduction 3. *On peut se ramener au cas où $k = 0$.*

Supposons en effet qu'on ait montré que $\overline{c_{i,0}}$ est toujours surjectif. Si $a \in K_2(A)$ on sait que $c_{2,2}$ est le seul "test" (éventuellement) non trivial sur a (cf. 2.2.4.3). On peut donc appliquer la formule de multiplication

$$\overline{\mathrm{ch}}_{i,2}(a \cdot b) = \mathrm{ch}_{2,2}(a) \cdot \overline{\mathrm{ch}}_{i-2;0}(b)\,,$$

avec $b \in K_{2i-4}(A; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ $(i > 2)$. Comme $\mathrm{ch}_{2,2}$ et $\mathrm{ch}_{i-2,0}$ sont surjectifs ainsi que le cup-produit

$$H^2(\operatorname{Spec} A, \mu_q^{\otimes 2}) \otimes H^0(\operatorname{Spec} A, \mu_q^{\otimes (i-2)}) \longrightarrow H^2(\operatorname{Spec} A, \mu_q^{\otimes i})$$

(cf. 2.2.1.4.1), on voit que $\overline{\mathrm{ch}}_{i,2}$ est aussi surjectif.

Si $k = 1$, le même argument s'applique dans le cas d'un corps F, avec $a \in K_1(F)$ et $b \in K_{2i-2}(F; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ (on utilise 2.2.4.3).

Dans le cas où $k = 1$ et où A est un anneau de Dedekind, on définit le produit de $a \in K_1(A; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ et $b \in K_{2i-2}(A; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ à l'aide de la théorie d'Araki et Toda (cf. 2.2.3.1) et du même délaçage qu'en 2.2.4.3. On sait que $K_1(F; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) = K_1(F)/qK_1(F)$ et que $H^1(\operatorname{Spec} A, \mu_q^{\otimes i})$ s'injecte dans $H^1(\operatorname{Spec} F, \mu_q^{\otimes i})$ (cf. 2.2.1. 3.2). La formule de multiplication est donc encore valable pour le produit (interne) de a et b. On peut en effet, par fonctorialité, la déduire du cas où A est égal au corps F, et elle résulte alors de la formule de multiplication pour le produit (externe) entre $K_1(F)$ et $K_{2i-2}(F; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$. La surjectivité de $\mathrm{ch}_{i,1}$ en résulte.

Il reste donc à étudier le cas où $k = 0$, ce qui sera fait au paragraphe suivant.

2.2.5 Comparaison des classes de Chern ℓ-adiques avec les classes de Chern ordinaires

L'étude des "tests" $c_{i,0}$ est essentiellement due à W. Browder [?] et M. Karoubi [?]. On rappelle qu'on a fixé des entiers $q = \ell^\nu$, et $i \leq \ell$, avec $q \neq 2$ si $i = 2$, ainsi qu'un anneau A contenant $1/\ell$ et une racine ℓ^ν-ième (primitive) de l'unité.

Plaçons-nous d'abord dans le cas où A est un anneau contenu dans le corps des complexes $\mathbb{C}$. On a donc une application $\mathrm{BGL}^+(A) \to \mathrm{BGL}^{\mathrm{top}}(\mathbb{C})$, où le classifiant de droite est celui du groupe topologique $\mathrm{GL}(\mathbb{C})$ (autrement dit $\mathrm{BGL}^{\mathrm{top}}(C) \simeq \mathrm{BU}$). Elle induit un morphisme

$$K_{2i}(A;\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \longrightarrow \pi_{2i-2}(\langle M_q\, \mathrm{BU}\rangle)\,, \quad i \geq 1\,.$$

On sait de plus que

$$\pi_{2i-2}(\langle M_q, \mathrm{BU}\rangle) \simeq \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \simeq K^{\mathrm{top}}_{2i-2}(\mathbb{C};\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})\,.$$

Enfin le choix d'une racine q-ième primitive de l'unité dans A établit des isomorphismes

$$H^0(\mathrm{Spec}\, A, \mu_q^{\otimes i}) \simeq H^0(\mathrm{Spec}\, \mathbb{C}, \mu_q^{\otimes i}) \simeq \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}\,. \tag{2.2.1.4.1}$$

Lemme 2.2.5. *Le diagramme suivant est commutatif (i est ici quelconque)*

$$\begin{tikzcd} K_{2i}(A;\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \arrow[r, "c_{i,0}"] \arrow[d] & H^0(\mathrm{Spec}\, A, \mu_q^{\otimes i}) \arrow[d] \\ K^{\mathrm{top}}_{2i}(C;\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \arrow[r, "c^{\mathrm{top}}_{i,0}"] & \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}\,. \end{tikzcd}$$

Preuve : La naturalité des morphismes $c_{i,0}$ fait qu'on peut supposer $A = \mathbb{C}$. Le choix d'une racine q-ième primitive de l'unité fournit un isomorphisme de faisceaux étales entre $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})_{\text{ét}}$ et $(\mu_q)_{\text{ét}}$ sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{C})$. D'où des isomorphismes en cohomologie équivariante :

$$H^{2i}(\mathrm{Spec}(\mathbb{C}), G; \mu_q^{\otimes i}) \longrightarrow H^{2i}(\mathrm{Spec}(\mathbb{C})_{\mathrm{an}}, G; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})\,.$$

On trouvera dans ( ), §3, la définition de $\mathrm{Spec}(\mathbb{C})_{\mathrm{an}}$, et la démonstration du fait que l'image de la classe de Chern ℓ-adique (associée à une représentation complexe ρ de dimension finie d'un groupe G) est la réduction modulo q de la classe de Chern “transcendante” (ou “topologique”)

$$c_i^{\mathrm{top}}(\rho) \in H^{2i}(\mathrm{Spec}(\mathbb{C})_{\mathrm{an}}, G; \mathbb{Z}) \simeq H^{2i}(G;\mathbb{Z})\,.$$

La classe d'application $\mathrm{BG} \to |K(H^0(\mathrm{Spec}(\mathbb{C})_{\mathrm{an}}, \mathbb{Z}); 2i)| = |K(\mathbb{Z}, 2i)|$ qui représente $c_i^{\mathrm{top}}(\rho)$ est la composée des applications

$$\mathrm{BG} \xrightarrow{B\rho} \mathrm{BU} \xrightarrow{c_i^{\mathrm{top}}} |K(\mathbb{Z}, 2i)|\,.$$

Le résultat de comparaison de Grothendieck se traduit donc par la commutativité (à homotopie près) du diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{BGL}^+(C) \arrow[r, "c_i"] \arrow[dd] & K(R\Gamma(\mathrm{Spec}(\mathbb{C}), \mu_q^{\otimes i}), 2i) \arrow[dr] & \\
\mathrm{BG} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & K(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}; 2i) \\
 & \mathrm{BU} \arrow[r, "c_i^{\mathrm{top}}"] & K(\mathbb{Z}, 2i) \arrow[ur, "\pi"] &
\end{tikzcd}$$

où l'application π est induite par $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.

D'après le lemme 2.2.3.2.1. ii), on voit que l'analogue de la proposition 2.2.3.2 appliqué à $K(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}; 2i)$ fournit le morphisme $c_i^{\mathrm{top}} : K_{2i}^{\mathrm{top}}(\mathbb{C}; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ utilisé dans l'énoncé (on notera que $K_{2i}^{\mathrm{top}}(\mathbb{C}; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) = K_{2i}^{\mathrm{top}}(\mathbb{C})/qK_{2i}^{\mathrm{top}}(\mathbb{C})$). Le lemme en résulte.

Fin de la démonstration du théorème 2.2.4 :

M. Karoubi [**?**] démontre le résultat suivant. Soit $\alpha \in K_2(A; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ n'importe quel élément dont l'image dans $K_1(A)$ est une racine q-ième de l'unité primitive de $A^* \subset K_1(A)$. Alors les puissances α^i de α (pour le produit associé par la K-théorie de Araki et Toda à un délaçage convenable de $\mathcal{K}(A)$) s'envoient par les applications composées

$$K_{2i}(A; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \longrightarrow K_{2i}(\mathbb{C}; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \longrightarrow K_{2i}^{\mathrm{top}}(\mathbb{C}; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$$

sur un générateur de $K_{2i}^{\mathrm{top}}(\mathbb{C}; 2i)$ (et ce, sans restriction sur i). (On montre d'abord ce résultat pour $i = 1$, puis on compare les structures multiplicatives en K-théories algébrique et topologique.) [2]

Le lemme précédent permet donc d'en conclure que $c_{i,0}(\alpha^i)$ engendre H^0 $(\mathrm{Spec}\, A, \mu_q^{\otimes i})$ (si $i \leq \ell$), puisque c_i^{top} est alors un isomorphisme. Si on ne suppose plus que A est contenu dans $\mathbb{C}$, on peut d'abord se restreindre à l'anneau A_0 engendré par $1/\ell$ et les racines q-ièmes de l'unité dans A, en utilisant la naturalité des morphismes $c_{i,0}$ et l'isomorphisme $H^0(\mathrm{Spec}\, A; \mu_q^{\otimes i}) \leftarrow H^0(\mathrm{Spec}\, A_0; \mu_q^{\otimes i})$. Si A_0 est de caractéristique zéro, il admet un plongement dans $\mathbb{C}$. Sinon c'est un corps fini F_{p^r} (où ℓ divise $p^r - 1$). Par conséquent A_0 est le corps résiduel d'une

2. M. Karoubi me signale qu'il peut montrer pour *tout* anneau A (intègre) que α^i est non nul quel que soit i (si $\mu_{\ell^\nu} \subset A$).

extension non ramifiée A_1 de $\mathbb{Q}_p$, et on est ramené au cas précédent (toujours parce que $H^0(\operatorname{Spec} A_1, \mu_q^{\otimes i}) \simeq H^0(\operatorname{Spec} A_0, \mu_q^{\otimes i})$). On a donc montré que $c_{i,0}(\alpha^i)$ est un générateur de $H^0(\operatorname{Spec} A, \mu_q^{\otimes i})$ dès que α a pour image dans $K_1(A)$ un élément d'ordre q de A.

Ceci termine la démonstration du théorème 2.2.4.

2.2.6 Le cas d'un anneau contenant beaucoup de racines de l'unité

Soient $F \subset \mathbb{C}$ un corps de nombres, ℓ un nombre premier impair, et F_ν les corps obtenus en ajoutant à F les racines ℓ^ν-ièmes de l'unité, $\nu \geq 1$. On se donne une suite d'anneaux $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_\nu \subset \cdots$, tels que A_ν soit les S_ν-entiers de F_ν pour un ensemble S_ν de valuations de F contenant celles qui divisent ℓ. On note F_∞ (resp. A_∞) la réunion des corps F_ν (resp. des anneaux A_ν).

Pour tout A, les groupes $K_*(A; \mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z})$ forment un système projectif pour les morphismes de coefficients $\mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/\ell^{\nu-1}\mathbb{Z}$. On convient de noter $K_*(A; \mathbb{Z}_\ell)$ la limite de ce système projectif ($\mathbb{Z}_\ell$ est l'anneau des entiers ℓ-adiques).

Théorème 2.2.6. *Si $A = A_\infty$ ou F_∞, si $k = 0$ ou 1, et si $i \geq 1$ est un entier* quelconque, *on peut définir sur un certain sous-groupe $K'_{2i-k}(A; \mathbb{Z}_\ell)$ de $K_{2i-k}(A; \mathbb{Z}_\ell)$ un morphisme* surjectif :

$$\mathrm{ch}_{i,k} = K'_{2i-k}(A; \mathbb{Z}_\ell) \longrightarrow \varprojlim_{\nu} H^k(\operatorname{Spec} A; \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}) \, .$$

Démonstration :

2.2.6.1. On montre d'abord que les classes de Chern

$$c_{i,k} : K_{2i-k}(A; \mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z}) \longrightarrow H^k(\operatorname{Spec} A, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i})$$

commutent aux morphismes induits par $\mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/\ell^{\nu-1}\mathbb{Z}$ et $\mu_{\ell^\nu}^{\otimes i} \to \mu_{\ell^{\nu-1}}^{\otimes i}$.

On sait que les classes $c_i(\rho)$ de la cohomologie équivariante forment un système projectif (2.1.2.1). On aura donc, avec les notations de 2.1.2.3, des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} \mathcal{K}(A) \arrow[r, "c_i"] \arrow[dr, "c_i"'] & X(A,i,\nu) \arrow[d, "\beta"] \\ & X(A,i,\nu-1), \end{tikzcd}$$

où β est induite par $\mu_{\ell^\nu} \to \mu_{\ell^{\nu-1}}$. Soit

$$\beta' : \langle M_{\ell^\nu}, X(A,i,\nu)\rangle \longrightarrow \langle M_{\ell^{\nu-1}}, X(A,i,\nu-1)\rangle$$

le morphisme induit par β et l'application α qui rend commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
S^1 \arrow[r, "\times \ell^\nu"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & S_1 \arrow[r] \arrow[d, "\times \ell"] & M_{\ell^{\nu-1}} \arrow[d, "\alpha"] \\
S^1 \arrow[r, "\times \ell^{\nu+1}"] & S^1 \arrow[r] & M^{\ell^\nu} .
\end{tikzcd}$$

On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\langle M_{\ell^\nu}, \mathcal{K}(A)\rangle \arrow[r, "Mc_i"] \arrow[d, "\alpha'"] & \langle M_{\ell^\nu}, X(A,i,\nu)\rangle \arrow[d, "\beta'"] \\
\langle M_{\ell^{\nu-1}}, \mathcal{K}(A)\rangle \arrow[r, "Mc_i"] & \langle M_{\ell^{\nu-1}}, X(A,i,\nu-1)\rangle
\end{tikzcd}$$

où α' est induit par α.

Pour montrer le résultat qui nous intéresse, il nous suffit donc de décrire β' en termes de complexes. Or α vient du morphisme $\widetilde{\alpha} : \widetilde{M}_{\ell^\nu} \to \widetilde{M}_{\ell^{\nu-1}}$ suivant :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\times \ell^\nu"] \arrow[d, "\times \ell"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\times \ell^{\nu-1}"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

Donc

$$\widetilde{\alpha}_* : \mathrm{Ext}^0_{\mathbb{Z}}(\widetilde{M}_{\ell^{\nu-1}}, X(A,i,\nu-1)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^0_{\mathbb{Z}}(\widetilde{M}_{\ell^\nu}, X(A,i,\nu-1))$$

a pour projection par p le morphisme de restriction des scalaires de $\mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z}$ à $\mathbb{Z}/\ell^{\nu-1}\mathbb{Z}$. Ceci suffit à montrer que les morphismes $c_{i,k}$ forment un système projectif.

2.2.6.2. On remarque ensuite que les groupes

$$H^k(\mathrm{Spec}\, A, \mathbb{Z}_\ell(i)) \stackrel{\text{déf.}}{=} \varprojlim H^k(\mathrm{Spec}\, A, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i})$$

sont, sous les hypothèses de l'énoncé, sans torsion. Pour $k = 0$ c'est clair car $H^0(\mathrm{Spec}\, A, \mathbb{Z}_\ell(i)) \simeq \mathbb{Z}_\ell$. Pour $k = 1$, on remarque d'abord que le cup-produit

$$H^1(\mathrm{Spec}\, A, \mathbb{Z}_\ell(2)) \otimes H^0(\mathrm{Spec}\, A, \mathbb{Z}_\ell(i-1)) \longrightarrow H^1(\mathrm{Spec}\, A, \mathbb{Z}_\ell(i))$$

est un isomorphisme (puisque c'est vrai, par 2.2.1.4.1, pour chaque faisceau de coefficients $\mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}$). Par ailleurs on peut se ramener au cas du corps F_∞ (la suite spectrale de Leray de l'injection $j_* : \operatorname{Spec} F_\infty \to \operatorname{Spec} A_\infty$ montrant, comme en 2.2.1.3.2, que la cohomologie ℓ-adique de A_∞ s'injecte dans celle de F_∞, en degré 1 en tous cas).

Mais on a

$$H^1(\mathrm{Spec} F_\infty, \mathbb{Z}_\ell(1)) = \varprojlim_\nu F_\infty^*/(F_\infty^*)\,\ell^\nu\,,$$

et si $x = (x_\nu)$ est un élément de torsion de ce groupe, une puissance $x_\nu^{\ell^{\nu'}}$ de chacune des composantes de x est la classe d'un élément infiniment divisible de F_∞^*, donc une racine ℓ^*-ième de l'unité. Il en résulte que x_ν est la classe d'une racine ℓ^*-ième de l'unité, et $x_\nu = 1$. Par conséquent $\varprojlim_\nu\, (F_\infty^*/(F_\infty^*)^{\ell^\nu})$ est sans torsion.

2.2.6.3. Le groupe $K_2(A_\infty;\mathbb{Z}/\ell^\nu\,\mathbb{Z})$ s'envoie surjectivement sur $K_2(A_\infty;\mathbb{Z}/\ell^{\nu-1}$ $\mathbb{Z})$, à cause des suites exactes

$$0 \longrightarrow K_2(A_\infty)/\ell^\nu K_2(A_\infty) \longrightarrow K_2(A_\infty;\mathbb{Z}/\ell^\nu\,\mathbb{Z}) \longrightarrow K_1(A_\infty)_{(\ell^\nu)} \longrightarrow 0\,.$$

Il existe donc un élément $(\alpha_\nu) \in \varprojlim K_2(A_\infty;\mathbb{Z}/\ell^\nu\,\mathbb{Z})$ tel que l'image de α_ν dans (A_ν^*) soit une racine primitive ℓ^ν-ième primitive de l'unité, pour tout $\nu \geq 1$. Il résulte du paragraphe 2.2.5 que $\overline{c_{2,0}}((\alpha_\nu^i))$ est le produit d'un générateur de $H^0(\operatorname{Spec} A, \mathbb{Z}_\ell(i))$ par $(i-1)!$. Comme $H^0(\operatorname{Spec} A, \mathbb{Z}_\ell(i))$ est sans torsion, on peut définir $\overline{\mathrm{ch}}_{i,0} = ((-1)^i/(i-1)!)\,\overline{c}_{i,0}$ sur le $\mathbb{Z}_\ell$-module $K'_{2i}(A_\infty;\mathbb{Z}_\ell) \subset K_{2i}(A_\infty;\mathbb{Z}_\ell)$ engendré par $((\alpha_\nu^i))$. Par ailleurs

$$\overline{\mathrm{ch}}_{1,1} = -\overline{c}_{1,1} : K_1(A_\infty,\mathbb{Z}_\ell) \longrightarrow H^1(\operatorname{Spec} A_\infty, \mathbb{Z}_\ell(i))$$

est surjectif et l'on a la formule de multiplication

$$\overline{c}_{i,1}\,(a\cdot b) = (-1)^i(i-1)!\;\overline{\mathrm{ch}}_{i-1,0}\,(a)\;\overline{\mathrm{ch}}_{1,1}(b)\,,$$

si $a \in K'_{2i-2}(A_\infty;\mathbb{Z}_\ell)$ et $b \in K_1(A_\infty;\mathbb{Z}_\ell)$ (ceci se montre, comme en 2.2.4.5, en se ramenant au cas de F_∞). On peut donc définir

$$\overline{\mathrm{ch}}_{i,1} = ((-1)^i/(i-1)!)\,\overline{c}_{i,1}$$

sur la partie $K'_{2i-1}(A_\infty;\mathbb{Z}_\ell)$ de $K_{2i-1}(A_\infty;\mathbb{Z}_\ell)$ engendrée par le produit de $K_1(A_\infty;\mathbb{Z}_\ell)$ avec $K'_{2i-2}(A_\infty;\mathbb{Z}_\ell)$. Un tel morphisme est surjectif par 2.2.6.2.

q.e.d.

2.2.7 Applications à la K-théorie de $\mathbb{Z}$

2.2.7.1 Classes de Chern et suites exactes de coefficients

On reprend ici les notations générales des paragraphes 2.1.2.3 et 2.2.3. Soient ν et ν' deux entiers. A la suite exacte de coefficients

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/\ell^{\nu}\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/\ell^{\nu+\nu'}\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/\ell^{\nu'}\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

est associée une longue suite exacte pour la K-théorie à coefficients de A. Il en est de même pour la cohomologie étale et la suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mu_{\ell^{\nu}}^{\otimes i} \longrightarrow \mu_{\ell^{\nu+\nu'}}^{\otimes i} \longrightarrow \mu_{\ell^{\nu'}}^{\otimes i} \longrightarrow 0\,.$$

Lemme 2.2.7.1. *Les classes de Chern $\overline{c}_{i,k}$ induisent le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & K_{2i-k}(A;\mathbb{Z}/\ell^{\nu}\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{c}_{i,k}"] & K_{2i-k}(A;\mathbb{Z}/\ell^{\nu+\nu'}\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{c}_{i,k}"] & K_{2i-k}(A;\mathbb{Z}/\ell^{\nu'}\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{c}_{i,k}"] & K_{2i-k-1}(A;\mathbb{Z}/\ell^{\nu}\mathbb{Z}) \cdots \arrow[d, "\overline{c}_{i-1,k}"] \\
\cdots \arrow[r] & H^k(\mathrm{Spec}\, A, \mu_{\ell^{\nu}}^{\otimes i}) \arrow[r] & H^k(\mathrm{Spec}\, A, \mu_{\ell^{\nu+\nu'}}^{\otimes i}) \arrow[r] & H^k(\mathrm{Spec}\, A, \mu_{\ell^{\nu'}}^{\otimes i}) \arrow[r] & H^{k+1}(\mathrm{Spec}\, A, \mu_{\ell^{\nu}}^{\otimes i}) \cdots
\end{tikzcd}$$

Preuve : On vérifie que le cône du morphisme de complexes de groupes abéliens $\widetilde{M}_{\ell^{\nu'}} \to \widetilde{M}_{\ell^{\nu+\nu'}}$ défini par

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\times \ell^{\nu'}"] \arrow[d, "1"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\times \ell^{\nu}"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\times \ell^{\nu'+\nu}"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

est homotope à $\widetilde{M}_{\ell^{\nu}}$. On en déduit une cofibration (à homotopie près) $M_{\ell^{\nu'}} \to M_{\ell^{\nu+\nu'}} \to M_{\ell^{\nu}}$, et une fibration

$$\langle M_{\ell^{\nu}}, \mathcal{K}(A)\rangle \longrightarrow \langle M_{\ell^{\nu+\nu'}}, \mathcal{K}(A)\rangle \longrightarrow \langle M_{\ell^{\nu'}}, \mathcal{K}(A)\rangle$$

dont la suite exacte d'homotopie s'identifie avec la longue suite exacte considérée dans l'énoncé (horizontale supérieure). On sait par ailleurs (2.1.2.1 et 2.2.6.1) que la flèche $c_i : \mathcal{K}(A) \longrightarrow X(A,i,\nu)$ est la composée de $c_i : \mathcal{K}(A) \longrightarrow X(A,i,\nu+1)$ avec l'application induite par la projection $\mu_{\ell^{\nu+\nu'}}^{\otimes i} \to \mu_{\ell^{\nu}}^{\otimes i}$.

On est donc ramené à prouver la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \pi_{2i-k}(\langle M_{\ell^\nu}, X(A,i,\nu+\nu')\rangle) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\alpha_2\circ\alpha_1"] & \pi_{2i-k}(\langle M_{\ell^{\nu+\nu'}}, X(A,i,\nu+\nu')\rangle) \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\alpha_3"] & \pi_{2i-k}(\langle M_{\ell^\nu}, X(A,i,\nu+\nu')\rangle) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\alpha_5\circ\alpha_4"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^k(\operatorname{Spec} A, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}) \arrow[r, "j'"] & H^k(\operatorname{Spec} A, \mu_{\ell^{\nu+\nu'}}^{\otimes i}) \arrow[r, "\rho'"] & H^k(\operatorname{Spec} A, \mu_{\ell^{\nu'}}^{\otimes i}) \arrow[r, "\partial"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

où α_1 (resp. $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$) est induite par $X(A,i,\nu+\nu') \xrightarrow{\pi_1} X(A,i,\nu)$ (resp. $p, p, X(A,i,\nu+\nu') \xrightarrow{\pi_2} X(A,i,\nu'), p$, cf. Lemme 2.2.3.2.1). En termes de complexes, il suffit de vérifier la commutativité (à homotopie près) du diagramme

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}^\bullet_{\mathbb{Z}}(\widetilde{M}_{\ell^\nu}, C(A,i,\nu+\nu')) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "N\pi_1"] & \operatorname{Hom}^\bullet_{\mathbb{Z}}(\widetilde{M}_{\ell^{\nu+\nu'}}, C(A,i,\nu+\nu')) \arrow[r, "\rho"] \arrow[dd, "p"] & \operatorname{Hom}^\bullet_{\mathbb{Z}}(\widetilde{M}_{\ell^{\nu'}}, C(A,i,\nu+\nu')) \arrow[d, "N\pi_2"] \\
\operatorname{Hom}^\bullet_{\mathbb{Z}}(\widetilde{M}_{\ell^\nu}, C(A,i,\nu)) \arrow[d, "p"] & & \operatorname{Hom}^\bullet_{\mathbb{Z}}(\widetilde{M}_{\ell^{\nu'}}, C(A,i,\nu')) \arrow[d, "p"] \\
C(A,i,\nu) \arrow[r, "j'"] & C(A,i,\nu+\nu') \arrow[r, "\rho'"] & C(A,i,\nu')\,.
\end{tikzcd}$$

Soit $\varphi \in \operatorname{Hom}^k_{\mathbb{Z}}(\widetilde{M}_{\ell^\nu}, C(A,i,\nu+\nu'))$,

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_2"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & C_{2+k} \arrow[r] & C_{1+k} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots\,.
\end{tikzcd}$$

On a $(p \circ N\pi_1)(\varphi) = N\pi_1(\varphi_2(1))$, et $(j' \circ N\pi_1)(\varphi_2(1)) = \ell^{\nu'}\varphi_2(1)$ (car l'application composée $\mu_{\ell^{\nu+\nu'}} \to \mu_{\ell^\nu} \to \mu_{\ell^{\nu+\nu'}}$ est la multiplication par $\ell^{\nu'}$) même $(p \circ j)(\varphi) = \ell^{\nu'}\varphi_2(1)$, d'après la description du morphisme $\widetilde{M}_{\ell^{\nu+\nu'}} \to \widetilde{M}_{\ell^\nu}$. La commutativité de la partie droite du diagramme se montre de même (et a été déjà vue en 2.2.6.1). q.e.d.

2.2.7.2 Les numérateurs des nombres de Bernoulli interviennent dans la K-théorie de $\mathbb{Z}$

Quand on a des informations sur les groupes de cohomologie étale intervenant dans le théorème 2.2.4, celui-ci fournit une minoration du groupe de K-théorie correspondant. Nous n'expliciterons ces résultats que pour $K_4(\mathbb{Z})$ (2.2.7.3) et dans le cas suivant :

Théorème 2.2.7.2. *Soit ℓ un nombre premier proprement irrégulier, et b_i un nombre de Bernoulli tels que i est pair, $i \leq \ell$, et ℓ divise le numérateur de $b_i/2i$*

($=\zeta(1-i)$) (cf. les remarques). Alors :

i) L'ordre de $K_{2i-2}(\mathbb{Z})$, ou *ceux de $K_{2i-3}(\mathbb{Z})$ et $K_{2i-1}(\mathbb{Z})$, sont divisibles par ℓ.*

ii) Si de plus ℓ^2 ne divise par l'ordre de $b_i/2i$, ℓ divise certainement l'ordre de $K_{2i-2}(\mathbb{Z})$.

Preuve : La conjecture 2 (2.1.1) a été démontrée par J. Coates et S. Lichtenbaum [**?**] pour l'anneau $\mathbb{Z}[1/\ell]$ quand ℓ est proprement irrégulier (rappelons que cela signifie que ℓ ne divise pas le nombre de classes du corps réel $\mathbb{Q}(\zeta_1+\zeta_1^{-1})$).

Donc l'hypothèse de l'énoncé implique que $H^1(\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[1/\ell], j_*W_\ell^{\otimes i})$ est un groupe fini non nul (rappelons que $W_\ell^{\otimes i}$ est le faisceau sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Q}$ de toutes les racines ℓ^ν-ièmes de l'unité, $\nu\in\mathbb{N}$). La suite exacte de coefficients

$$\begin{aligned}&\cdots\to H^1(\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[1/\ell],\mu_\ell^{\otimes i})\xrightarrow{\varphi} H^1(\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[1/\ell], j_*W_\ell^{\otimes i})\\ &\xrightarrow{\times\ell} H^1(\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[1/\ell], j_*W_\ell^{\otimes i})\xrightarrow{\psi} H^1(\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[1/\ell],\mu_\ell^{\otimes i})\to 0\,,\end{aligned}$$

montre que les groupes $H^k(\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[1/\ell],\mu_\ell^{\otimes i})$, $k=1$ et 2, sont non nuls. Donc, d'après le théorème 2.2.4, on en déduit que les groupes $K_{2i-1}(\mathbb{Z};\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ et $K_{2i-2}(\mathbb{Z};\,\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ sont non nuls.

Considérons la suite exacte

$$\begin{aligned}&\cdots\to K_{2i-1}(\mathbb{Z})\to K_{2i-1}(\mathbb{Z};\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})\xrightarrow{\varphi'} K_{-2i-2}(\mathbb{Z})\xrightarrow{\times\ell} K_{2i-2}(\mathbb{Z})\\ &\xrightarrow{\psi'} K_{2i-2}(\mathbb{Z};\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})\to K_{2i-3}(\mathbb{Z})\to\cdots\,.\end{aligned}$$

i) D'après A. Borel [**?**], on sait que $K_{2i-1}(\mathbb{Z})$ est fini (i est pair). On en conclut que si $K_{2i-2}(\mathbb{Z})$ ne contient pas d'élément d'ordre ℓ, alors les groupes $K_{2i-1}(\mathbb{Z})$ et $K_{2i-3}(\mathbb{Z})$ ont un élément d'ordre ℓ.

ii) Si ℓ^2 ne divise pas le numérateur de $b_i/2i$, la multiplication par ℓ est nulle dans $H^1(\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[1/\ell], W_\ell^{\otimes i})$. Donc il existe un élément $\alpha\in H^1(\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[1/\ell],\mu_\ell^{\otimes i})$ tel que $\psi\circ\varphi(\alpha)$ soit non nul. Mais le morphisme de Bockstein $\beta=\psi\circ\varphi$ est le bord de la longue suite exacte associée à la suite exacte de coefficients

$$0\longrightarrow\mu_\ell^{\otimes i}\longrightarrow\mu_{\ell^2}^{\otimes i}\longrightarrow\mu_\ell^{\otimes i}\longrightarrow 0\,.$$

Soient $a\in K_{2i-1}(\mathbb{Z};\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ un élément tel que $\bar{c}_{i,1}(a)=\alpha$ et β' le Bockstein associé (en K-théorie) à la suite exacte de coefficients

$$0\longrightarrow\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}/\ell^2\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}\longrightarrow 0\,.$$

On a, d'après 2.2.7.1, $\overline{c}_{i,2}\,(\beta'(a)) = \beta\,\overline{c}_{i,1}\,(a)$, et de plus $\beta'(a) = (\psi' \circ \varphi')(a)$. Donc $\varphi'(a)$ est un élément non nul d'ordre ℓ dans $K_{2i-2}(\mathbb{Z})$. q.e.d.

Remarques et perspectives :

i) L'hypothèse $i \leq \ell$ ne rend pas vide le théorème précédent. En effet, les congruences de Kummer

$$b_i/2i \equiv b_{i'}/2i' \pmod{\ell} \quad \text{si } i \equiv i' \not\equiv 0 \pmod{(\ell-1)},$$

montrent que si ℓ est irrégulier il existe toujours un nombre $b_i/2i$ dont ℓ divise le numérateur et $i \leq \ell$. Des exemples sont donnés par $\ell = 691$ et $i = 12$, ou $\ell = 37$ et $i = 32$.

ii) On sait que si $\ell \leq 4001$, il est proprement irrégulier [**?**].

iii) Il est possible que des arguments utilisant les suites exactes de 2.2.7.1 permettent de supprimer l'hypothèse $\mu_{\ell^\nu} \subset A$, $\nu > 1$, dans le théorème 2.2.4 (je sais le faire si $\nu = 2$). Je conjecture que la limite inductive des morphismes $c_{i,k}$

$$\widetilde{c}_{i,k} \neq \varinjlim \overline{c_{i,k}} : \varinjlim_{\nu} K_{2i-k}(A;\mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z}) \longrightarrow H^k(\operatorname{Spec} A; W_\ell^{\otimes i})$$

est surjective sous les hypothèses de 2.2.4 – moins l'hypothèse $\mu_{\ell^\nu} \subset A$. Un tel résultat (qui est compatible au théorème 6.6 de [**?**]) impliquerait la conjecture 2 i) et 2 ii) (grâce au résultat de A. Borel) et la surjectivité dans la conjecture 1 ($i \leq \ell$).

2.2.7.3 Sur la 3-torsion de $K_4(\mathbb{Z})$

Les conjectures de Lichtenbaum et Quillen impliquent que $K_4(\mathbb{Z})$ n'a pas de 3-torsion (*contrairement* à ce que j'avais annoncé dans une version précédente de ce travail).

En effet, si $K_4(\mathbb{Z})$ avait de la 3-torsion, le groupe $H^1(\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[1/3]), j_* W_3^3)$ serait non nul, ainsi que

$$H^2(\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[1/3], \mu_3^{\otimes 3}) = (H^2(\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[1/3][j], \mu_3^{\otimes 3}))^{\operatorname{Gal}(\mathbb{Q}(j)/\mathbb{Q})},$$

où j est un élément d'ordre trois dans C^*. Mais $H^2(\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[1/3][j], \mu_3^{\otimes 3}) = 0$. Notons en effet $A = \mathbb{Z}[1/3][j]$. On a $H^1(\operatorname{Spec} A, G_m)_{(3)} = \operatorname{Pic}(A)_{(3)} = 0$ (car 3 est un nombre premier régulier). De plus, modulo la 2-torsion, on a

$$H^2(\operatorname{Spec} A, G_m) = \operatorname{Ker}(\operatorname{Br}(\mathbb{Q}(j)) \longrightarrow \bigoplus_{v \in S_f - S} \operatorname{Br}(\mathbb{Q}_v)) = 0 \quad \text{(cf. 2.2.1.2)},$$

car le nombre premier 3 est totalement ramifié dans $\mathbb{Q}(j)$, donc $\mathrm{card}(S) = 1$ et $\mathrm{Br}(\mathbb{Q}(j))$ est donné par une seule équation dans $\underset{v \in S_f}{\oplus} \mathrm{Br}(\mathbb{Q}_v)$ (la somme des invariants est zéro).

2.3 Classes de Chern et (co)homologie du groupe linéaire

2.3.1 L'image de l'homologie de la diagonale dans celle du groupe linéaire

Dans ce paragraphe, on fixe un nombre premier impair ℓ, et $H_*(X)$ (resp. $H^*(X)$) désigne l'homologie (resp. la cohomologie) de X à coefficients $\mathbb{Z}/\ell\,\mathbb{Z}$. On note V' le dual d'un $\mathbb{Z}/\ell\,\mathbb{Z}$-espace vectoriel V.

Soit A un anneau intègre unitaire contenant $1/\ell$ et le groupe μ_ℓ des racines ℓ-ièmes de l'unité. Nous ferons l'hypothèse que chaque groupe d'homologie $H_*(\mathrm{GL}_n(A))$, $n \geq 0$, (où $\mathrm{GL}_0(A) = \{1\}$, par convention), est de type fini. En particulier, $A^*/(A^*)^\ell$ est de type fini.

On désigne par C le groupe des unités A^* de l'anneau A, et par ρ_n la représentation diagonale de C^n dans $\mathrm{GL}n(A)$.

Par ailleurs, on note $P_n = P(x_1, \cdots, x_n)$ l'algèbre (graduée) des polynômes à n variables x_j sur $\mathbb{Z}/\ell\,\mathbb{Z}$ (chaque variable étant de degré deux), et $\Lambda_n = \Lambda(A_1^\bullet \times \cdots \times A_n^\bullet)$ l'algèbre extérieure du produit de n copies de $A^\bullet = \mathrm{Hom}(A^*, \mathbb{Z}/\ell\,\mathbb{Z})$, graduée en posant $d^0(A_j^\bullet) = 1$, $1 \leq j \leq n$.

Le groupe symétrique Σ_n opère sur l'algèbre $P_n \otimes \Lambda_n$ par permutation des variables x_j et des copies $A_j^\bullet$ de $A^\bullet$. Les éléments suivants sont invariants par Σ_n :

$$\sigma_{i,n} = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_i \leq n} x_{j_1} \otimes x_{j_2} \otimes \cdots \otimes x_{j_i}$$

$$d\,\sigma_{i,n}(a) = \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \cdots < j_i \leq n \\ 1 \leq k \leq i}} x_{j_1} \otimes \cdots \otimes \widehat{x_{j_k}} \otimes \cdots \otimes x_{j_i} \otimes a_{j_k} \,,$$

pour tout choix d'un élément a dans $A^\bullet$, d'image a_j dans $A_j^\bullet$, $1 \leq j \leq n$. On note M^+ (resp. M^-) l'espace vectoriel engendré par les éléments $\sigma_{i,n}$ (resp. $d\,\sigma_{i,n}(a)$, $a \in A^\bullet$) dans $P_n \otimes \Lambda_n$ et $L_n = P(M^+) \otimes \Lambda(M^-)$ l'algèbre anticommutative libre (graduée) de base $M = M^+ + M^-$ (cf. [**?**]).

Théorème 2.3.1.

i) L'injection $M \to P_n \otimes \Lambda_n$ induit une injection

$$f : L_n \longrightarrow P_n \otimes \Lambda_n \,.$$

ii) L'algèbre $H^*(C^n)$ est isomorphe à $P_n \otimes \Lambda_n$.

iii) L'application composée

$$H^*(\mathrm{GL}_n(A)) \xrightarrow{\rho_n^*} H^*(C^n) \longrightarrow P_n \otimes \Lambda_n$$

contient $f(L_n)$ dans son image.

Démonstration : i) résulte du lemme 9 de Quillen dans [**?**]. En effet M^- a pour base les éléments $d\,\sigma_{i,n}(b)$, où b décrit une base $\mathcal{B}$ de $A^\bullet$, et $0 \leq i \leq n$. Soit w un élément du noyau de f de la forme

$$w = \sum_{I,\, b^I} a_{I,\, b^I}\ d\,\sigma_I(b^I)$$

où $a_{I,b^I} \in P(x_1, \cdots, x_n)$, I décrit les parties de $\{1, \cdots, n\}$, et $b^I = \{b^i, i \in I\}$ les applications de I dans $\mathcal{B}$, et où $d\,\sigma_I(b^I)$ est le produit des éléments $d\,\sigma_{i,n}(b^i)$, $i \in I$, pris en ordre croissant. Soient $a_{I,b^I}\ d\,\sigma_I(b^I)$ un des termes de w, I' le complémentaire de I dans $\{1, \cdots, n\}$, et $b^{I'}$ une application de I' dans $\mathcal{B}$.

Dans l'expression (égale à zéro) $f(w, d\,\sigma_{I'}(b^{I'}))$, le seul terme de la forme $p(x_1, \cdots, x_n) \otimes (b^1_{j_1} \wedge \cdots \wedge b^n_{j_n})$, $1 \leq j_* \leq n$, où $b^i \in b^I$ (resp. $b^{I'}$) si $i \in I$ (resp. $i \in I'$), est $\pm(a_{I,b^I}\ J) \otimes (b^1_1 \wedge \cdots \wedge b^n_n)$, avec, d'après [**?**], $J = \prod_{j<j'} (x_j - x_{j'})$. La description d'une base de $P_n \otimes \Lambda_n$ à partir des x_j et de la base $\mathcal{B}$, montre que le terme ci-dessus est nul, i.e. $a_{I,b^I} = 0$, d'où $w = 0$.
ii) On sait, d'après [**?**], qu'il existe un isomorphisme

$$\varphi_1 : H^*(C) \xrightarrow{\sim} P_1 \otimes \Lambda_1\,.$$

La formule de Künneth montre donc l'existence d'un isomorphisme

$$\varphi_n : H(C^n) \xrightarrow{\sim} P_n \otimes \Lambda_n\,.$$

iii) L'isomorphisme φ_1 peut être décrit à l'aide des classes de Chern décrites au paragraphe 2.1.2.2. Pour cela on notera

$$c'_{i,\varepsilon}(\rho) : H^\varepsilon(\mathrm{Spec}\,A, \mu_\ell^{\otimes i})' \longrightarrow H^{2i-\varepsilon}(G; \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$$

les applications duales des tests

$$c_{i,\varepsilon}(\rho) : H_{2i-\varepsilon}(G; \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \longrightarrow H^\varepsilon(\mathrm{Spec}\,A; \mu_\ell^{\otimes i})\,.$$

Lemme 2.3.1.1.

i) L'inverse de φ_1 sur $H^1(C)$ est l'application composée :

$$A^\bullet \longrightarrow H^1(\operatorname{Spec} A, \mu_\ell)' \xrightarrow{c_{1,1}(\rho_1)'} H^1(C)$$

ii) L'inverse de φ_1 sur $H^2(C)$ est l'application composée

$$\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} H^0(\operatorname{Spec} A, \mu_\ell)' \xrightarrow{c_{1,0}(\rho_1)'} H^2(C)\,.$$

Démonstration :
i) On a vu que $c_{1,1}(\rho_1)$ est l'application déterminant composée avec ρ_1 (et la réduction modulo ℓ).
ii) On sait (cf. 2.2.5) que $c_{1,0}(\rho_1)$ est obtenue par réduction modulo ℓ de la classe de Chern usuelle $c_1(\rho_1) \in H^2(C;\mathbb{Z})$. On obtient bien ainsi un générateur de $H^2(C)$. (On notera que ρ_1 détermine le choix d'un générateur du groupe $\mu_\ell \subset C$, et donc l'application φ_1.) q.e.d.

Notons π_j la projection de C^n sur son j-ième facteur, composée avec ρ_1, et

$$H^\varepsilon(\operatorname{Spec} A, \mu_\ell^{\otimes i})' \xrightarrow{\omega} H^0(\operatorname{Spec} A, \mu_\ell)' \otimes \cdots \otimes H^0(\operatorname{Spec} A, \mu_\ell)' \otimes H^\varepsilon(\operatorname{Spec} A, \mu_\ell)$$

l'application duale du cup-produit.

Lemme 2.3.1.2. *Si $\varepsilon = 0$ ou 1, on a*

$$c'_{i,0}(\rho_n) = \sum_{1\le j_1<\cdots<j_i\le n} [c'_{1,0}(\pi_{j_1}) \otimes \cdots \otimes c'_{1,0}(\pi_{j_i})] \circ \omega$$

$$c'_{i,1}(\rho_n) = \sum_{\substack{1\le j_1<\cdots<j_i\le n\\ 1\le k\le i}} [c'_{1,0}(\pi_{j_1}) \otimes \cdots \widehat{c'_{1,0}}(\pi_{j_k}) \cdots \otimes c'_{1,0}(\pi_{j_i}) \otimes c'_{1,1}(\pi_{j_k})] \circ \omega\,.$$

Preuve : Si $\rho_1 : G_1 \to \mathrm{GL}(A)$ et $\rho_2 : G_2 \to \mathrm{GL}(A)$ sont deux représentations et

$$\rho_1 \boxplus \rho_2 : G_1 \times G_2 \longrightarrow \mathrm{GL}(A)$$

leur somme directe, la formule d'additivité des classes de Chern donne en homologie (d'après la formule de Künneth et 2.1.2.2)

$$c_{i,\varepsilon}(\rho_1 \boxplus \rho_2) = \sum_{\substack{i_1+i_2=i\\ \varepsilon_1\neq\varepsilon_2=\varepsilon}} \omega'_0[c_{i_1,\varepsilon_1}(\rho_1) \otimes c_{i_2,\varepsilon_2}(\rho_2)]$$

où

$$\omega' : H^{\varepsilon_1}(\operatorname{Spec} A, \mu_\ell^{\otimes i_1}) \otimes H^{\varepsilon_2}(\operatorname{Spec} A, \mu_\ell^{\otimes i_2}) \longrightarrow H^{\varepsilon}(\operatorname{Spec} A, \mu_\ell^{\otimes i})$$

est le cup-produit, et où on inclut $c_{0,0} : \mathbb{Z}/\ell\,\mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathbb{Z}/\ell\,\mathbb{Z}$.

Le lemme s'en déduit par dualité en remarquant que

$$\rho_n = \pi_1 \oplus \pi_2 \oplus \cdots \oplus \pi_n \,.$$

Fin de la démonstration du théorème : Le cup-produit est injectif (2.2.1.4.1), donc ω est surjectif. D'après le lemme 2.3.1.1, $c'_{1,\varepsilon}(\rho_1)$ est surjectif et donc l'image de $c'_{i,\varepsilon}(\rho_n)$, $\varepsilon = 0$ ou 1, contient tous les éléments $\sigma_{i,n}$ et $d\sigma_{i,n}(a)$ de $H^*(C^n)$.

q.e.d.

Remarques :

i) Dans [**?**], D. Quillen montre que si A est un corps fini (auquel cas $A^\bullet$ est de dimension 1), on a des isomorphismes

$$L_n \xrightarrow{\sim} (P_n \otimes \Lambda_n)^{\Sigma_n} \simeq H^*(\mathrm{GL}_n(A))$$

(cf. en particulier dans ce texte la remarque 2 du paragraphe 7).

ii) Si les résultats en homologie ont un énoncé plus compliqué, ils présentent cependant l'avantage sur ceux de K-théorie de ne pas nécessiter l'inversion de $(i-1)!$. De plus les travaux de D. Quillen [**?**], [**?**], et K. Brown [**?**], ramènent dans une certaine mesure l'étude de $H_*(\mathrm{GL}_n(A))$ au calcul de l'image dans ce groupe de l'homologie des différents groupes abéliens élémentaires contenus dans $\mathrm{GL}_n(A)$. Or on remarquera que, si par exemple $\mathrm{Pic}(A) = 0$, $1/\ell \in A$, et $\mu_\ell \subset A$, un tel groupe est conjugué à un groupe diagonal. Le problème de l'injectivité des tests $c_{i,k}$ est donc peut-être plus abordable de ce point de vue.

2.3.2 Classes caractéristiques et groupes arithmétiques

Ce paragraphe est indépendant des précédents.

2.3.2.1. Préliminaires :

Soient A un anneau de Dedekind dans un corps de nombre F, et $A' = A[1/\ell]$ son localisé au-dessus d'un nombre premier ℓ. On a vu que

$$H^0(\operatorname{Spec} A'; W_\ell^{\otimes i}) = H^0(\operatorname{Spec} F; W_\ell^{\otimes i})\,.$$

On notera $w_i^{(\ell)}$ l'ordre de ce groupe, et $w_i = \prod_\ell w_i^{(\ell)}$.

On peut calculer $w_i^{(\ell)}$ comme suit. Soient F_ν l'extension de F par les racines ℓ^ν-ièmes de l'unité, et $F_\infty = \bigcup_{\nu \geq 1} F_\nu$ l'extension ℓ-cyclotomique maximale de F. Le groupe $\mathrm{Gal}(F_\nu/F)$ s'envoie dans les unités $\mathbb{Z}_\ell^*$ de l'anneau des entiers ℓ-adiques. En effet, l'action de ce groupe de Galois sur F est déterminé par son action sur une racine ℓ^ν-ième primitive ζ_ν de l'unité. On a : $g(\zeta_\nu) = \zeta_\nu^{\varepsilon(g)}$, où $g \in \mathrm{Gal}(F_\nu/F)$ et $\varepsilon(g) \in (\mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z})^*$. Un choix cohérent des ζ_ν fournira un plongement

$$\varepsilon : \mathrm{Gal}(F_\infty/F) \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell^* \,.$$

Lemme 2.3.2.1. *Soit v_ℓ la valuation ℓ-adique. On a*

$$v_\ell(w_i) = \inf_{\lambda \in \varepsilon(\mathrm{Gal}(F_\infty/F))} (v_\ell(\lambda^i - 1))\,.$$

(On notera $\alpha(\ell, i)$ cette quantité.)

Preuve : On a

$$H^0(\mathrm{Spec}\, F; W_\ell^{\otimes i}) = H^0(\mathrm{Gal}(F_\infty/F); W_\ell^{\otimes i})\,,$$

et le choix de racines primitives de l'unité identifie $W_\ell^{\otimes i}$ à $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$, l'action de $\mathrm{Gal}(F_\infty/F)$ étant donnée par la formule $g * \zeta = \varepsilon(g)^1\zeta$. Un élément ζ d'ordre ℓ^α sera donc invariant pour cette action si et seulement si $\alpha \leq \alpha(\ell, i)$. q.e.d.

Remarque : Ses nombres $\alpha(\ell, i)$ sont finis car $\varepsilon(\mathrm{Gal}(F_\infty/F))$ est d'indice fini dans $\mathbb{Z}_\ell^*$. Si $A = \mathbb{Z}$, on retrouve la définition de Von-Staudt des dénominateurs des nombres de Bernoulli (cf., par exemple, J. Milnor et Stasheff, "Characteristic classes", Appendice, Annals of Math. Studies, n° 67).

Le groupe de Galois de $F_{\alpha(\ell,i)}$ sur F est en général cyclique. En effet $(\mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z})^*$ est cyclique, sauf si $\ell = 2$, $\nu \geq 2$, auquel cas c'est le produit de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par un groupe cyclique. On voit ainsi que $\mathrm{Gal}(F_{\alpha(\ell,i)}/F)$ est cyclique sauf si $\ell = 2$ et $\sqrt{-1} \notin F$. On nommera cette situation *le cas exceptionnel* (cf. [**?**]).

Définissons un groupe $\mu_{\ell,i}$ de racines de l'unité (dans $\mathbb{C}$) comme suit :

- en général $\mu_{\ell,i}$ est le groupe des racines $\ell^{v_\ell(w_i)}$-ièmes de l'unité ;
- dans le cas exceptionnel (où $\mathrm{Gal}(F_{\alpha(2,i)}/F)$ n'est pas cyclique) $\mu_{2,i}$ est le groupe des racines $2^{\alpha(2,i)-1}$-ièmes de l'unité.

Si ℓ et i sont fixés on pose $\Gamma = \mathrm{Gal}(F(\mu_{\ell,i})/F)$. On voit, d'après ce qui précède, que l'ordre γ de Γ est aussi l'exposant de $\mathrm{Gal}(F_{\alpha(\ell,i)}/F)$. Mais par définition de $\alpha(\ell,i)$, tout élément g de $\mathrm{Gal}(F_{\alpha(\ell,i)}/F)$ vérifie $g^i = 1$. Donc on peut écrire $i = \gamma\, s$, pour un certain entier s.

Par ailleurs, l'anneau B engendré dans $F(\mu_{\ell,i})$ par A et $\mu_{\ell,i}$ est libre sur A de rang γ (par l'algorithme d'Euclide, cf. 2.2.2.1).

2.3.2.2. Ordre des classes de Chern entières :

Dans ce paragraphe on note BG l'espace classifiant d'un groupe G, muni de sa topologie si c'est un groupe de Lie, et $H^*(X)$ la cohomologie à coefficients entiers de l'espace topologique (resp. du groupe discret) X. De plus $\mathrm{GL}_\infty = \bigcup\limits_{n\geq 1} \mathrm{GL}_n$.

Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On va définir deux idéaux K et K' dans $H^*(\mathrm{BGL}_n(\mathbb{C})) = H^*(\mathrm{BU}_n)$, l'anneau des polynômes sur $\mathbb{Z}$ en les classes de Chern universelles c_i, $i \leq n$. L'idéal K (resp. K') est l'intersection d'idéaux K_ℓ (resp. K'_ℓ) indexés par les nombres premiers. L'idéal K_ℓ est engendré par les classes $w_i^{(\ell)} c_i$, $i \leq n$. L'idéal K'_ℓ est engendré par les classes $w_i^{(\ell)} c_i$ en général, et $(1/2) w_i^{(2)} c_i$, si $\ell = 2$, dans le cas exceptionnel.

L'inclusion de $\mathrm{GL}_n(A)$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ induit un morphisme Φ entre leurs espaces classifiants.

Théorème 2.3.2.2. *Soit* $\mathrm{Ker}\,\Phi^*$ *le noyau de l'application induite*

$$\Phi^* : H^*(\mathrm{BU}_n) \longrightarrow H^*(\mathrm{GL}_n(A)) .$$

On a

$$K \subset \mathrm{Ker}\,\Phi^* \subset K'$$

(autrement dit, $\mathrm{Ker}\,\Phi^* = K$*, à la 2-torsion près dans le cas exceptionnel) (cf. aussi [*?*]).*

Démonstration : Les idéaux K_ℓ et K'_ℓ décrivent la ℓ-torsion de l'image de Φ^*. Le fait que $\mathrm{Ker}\,\Phi^*$ contienne K a été montré par A. Grothendieck, et résulte de la comparaison entre classes de Chern ℓ-adiques et classes de Chern ordinaires (cf. cor. 4.11 de [**?**]). Montrons que $\mathrm{Ker}\,\Phi^* \subset K'$.

Soient N et i des entiers ≥ 1, et ℓ un nombre premier. Les notations étant celles de 2.3.2.1, effectuons la division euclidienne $n = \gamma k + n'$, $0 \leq n' < \gamma$. Le groupe $\mu_{\ell,i}^k$ opère de la façon évidente sur le A-module libre B^k, ce qui permet de le plonger dans $\mathrm{GL}_{\gamma k}(A)$. La composée ω de ce plongement avec l'inclusion habituelle dans $\mathrm{GL}_n(A)$ va nous servir de test pour les classes de Chern $\Phi^*(c_i)$. Pour cela, soient $x_1, \cdots, x_k$ les classes de Chern des caractères de $\mu_{\ell,i}^k$ obtenus en le projetant sur ses facteurs $\mu_{\ell,i} \subset \mathbb{C}^*$. Si ℓ^α est l'ordre de $\mu_{\ell,i}$ (i.e. $\alpha = \alpha(\ell, i)$ en général et $\alpha = \alpha(2,i)-1$ dans le cas exceptionnel), l'algèbre $H^*(\mu_{\ell,i}^k)$ contient l'algèbre de polynômes $(\mathbb{Z}/\ell^\alpha\mathbb{Z})[x_1, \cdots, x_k]$.

Lemme 2.3.2.3. *La classe de Chern totale $(\omega^*\Phi^*)(c)$ est égale au produit*

$$\prod_{i=1}^{k} f_\Gamma(x_i)\,, \quad \text{où} \quad f_\Gamma(x) = \prod_{g\in\Gamma}(1-\varepsilon(g)x)\,.$$

Démonstration :

On a, par définition,

$$\omega = \sum_{j=1}^{k} \rho \circ \pi_j\,,$$

où π_j est la projection de $(\mu_{\ell,i})^k$ sur son i-ème facteur et ρ le morphisme composé

$$\mu_{\ell,i} \longrightarrow B^* \longrightarrow \mathrm{GL}_\gamma(A) \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C})\,.$$

Mais ρ se factorise par $\mathrm{GL}_\gamma(B)$, où l'action de $\mu_{\ell,i}$ est la multiplication dans un B-module à droite.

On peut filtrer M par des modules M_j, $1 \leq j \leq \gamma$, de telle sorte que M_j/M_{j+1} soit isomorphe à $g_i^*(B)$, où g_i décrit le groupe Γ. La formule d'addition des classes de Chern donne donc

$$c_\rho = \prod_{g\in\Gamma} c(g^*(\rho'))\,,$$

ρ' est l'injection de $\mu_{\ell,i}$ dans B. On a donc $c(g^*(\rho') \circ \pi_j) = 1 - \varepsilon(g)x_j$.

q.e.d.

Lemme 2.3.2.4. *Si Γ est un groupe d'ordre γ contenu dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/\ell^\alpha\mathbb{Z})^*$, on a $f_\Gamma(x) = 1 \pm x^\gamma$, modulo $\ell(\mathbb{Z}/\ell^\alpha\mathbb{Z})[x]$.*

On montre ce lemme par récurrence sur α.

Fin de la preuve du théorème : Des deux lemmes précédents résulte que si $\gamma s \leq r$, on a $(\omega^*\Phi^*)(c_{\gamma s}) = \pm\sigma_s(x_1^\gamma, \cdots, x_k^\gamma)$ plus des éléments d'ordre $< p^\alpha$, où σ_s est la s-ième fonction symétrique élémentaire. Ces classes sont donc d'ordre

ℓ^α, et elles sont algébriquement indépendantes (après réduction modulo $\ell^{\alpha-1}$). Un raisonnement par récurrence sur α termine la démonstration.

Remarque : Le même raisonnement s'appliquerait à un anneau tel que $H_*(\mathrm{GL}_n(A);\mathbb{Z})$ soit de type fini (en particulier A^* est de type fini et donc les nombres $w_i^{(\ell)}$ sont finis). On se restreindra à des nombres $w_i^{(\ell)}$ où ℓ est premier à la caractéristique de A. On pourra remplacer BU par le classifiant étale $\mathrm{BGL}_{\text{ét}}(\overline{F})$, où $\overline{F}$ est la clôture algébrique séparable du corps des fractions de A, ou raisonner avec les $c_{i,k}$ considérés au paragraphe précédent. Un exemple est fourni par un anneau de S-entiers dans un corps de fonctions (de degré de transcendance un sur un corps fini).

Si $A = \mathbb{Z}$, le théorème ci-dessus a été démontré indépendamment par L. Evens et D.S. Kahn [**?**]. Voir aussi [**?**].

2.3.2.3. Le cas de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$:

L'inclusion de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ induit un fibré universel ξ sur $\mathrm{BSL}_n(\mathbb{Z})$. D. Sullivan a montré que la classe d'Euler $e(\xi)$ vérifie $w_n\, e(\xi) = 0$ [**?**]. Comme le carré de $e(\xi)$ pour le cup-produit est la n-ième classe de Pontryagin (si n est pair), on voit que l'ordre de cette classe est divisible par $w_n/2$ [3]. Quant aux classes de Stiefel-Whitney de ξ on voit, en les testant sur la diagonale, qu'elles sont nulles (sauf la première) et algébriquement indépendantes (cf. aussi [**?**], p. 78 et suivantes). Enfin si $n = 2$ ou 3, un calcul explicite montre que $\operatorname{Ker}\Phi^* = K'$ (voir première partie, paragraphe 1).

3. Par contre, pour un groupe comme $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[1/2, 1/3])$, M. Karoubi montre que la classe d'Euler du fibré universel est d'ordre infini (et ce bien que son carré soit tué par $w_2 = 12$) (cf. aussi le contrexemple de Milnor [**?**]). A ce propos, je ne sais pas s'il existe des groupes $G \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, *discrets dans* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, et dont la classe d'Euler ne soit pas une classe de torsion.

Bibliographie

[1] S. Araki et H. Toda, *Osaka Journal*, 1965-66.

[2] M. Artin, *Grothendieck Topologies*, Spring, 1962.

[3] M. Artin et J.-L. Verdier, Seminar on Etale Cohomology of Number Fields, *AMS Summer Institute on Algebraic Geometry*, 1964.

[4] E.S. Barnes, The complete enumeration of extreme senary forms, *Phil. Trans. Roy. Soc. London* A249, pp. 461-506, 1957.

[5] S. Bloch, Some formulas pertaining to the K-theory of commutative group scheme, *preprint*, 1977.

[6] S. Bloch, *Algebraic K-theory and crystalline cohomology.*

[7] A. Borel, *Introduction aux groupes arithmétiques*, Hermann, 1969.

[8] A. Borel, Stable real cohomology of arithmetic groups, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 4ème série, t. 7, pp. 235-272, 1974.

[9] A. Borel, Topics in the homology of fiber bundles, *Lect. Notes in Math.*, Princ., n° 36, 1967.

[10] A. Borel et J.-P. Serre, Corners and arithmetic groups, *Comm. Helv.* **48**, pp. 436-491, 1973.

[11] Z. Borevič et Shafarevič, *Number Theory*, Academic Press, New York, 1966.

[12] W. Browder, Exposé au Congrès d'Evanston, K-théorie algébrique, 1976.

[13] K. Brown, High dimensional cohomology of discrete groups, Proceedings of the Algebraic K-Theory Conference, Evanston, *Lect. Notes* n° 551, 1976.

[14] E. Cartan et S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton University Press, 1956.

[15] J.W. Cassels et A. Frohlich, *Algebraic Number Theory*, Academic Press, 1967.

[16] J. Coates et S. Lichtenbaum, On ℓ-adic zeta functions, *Annals of Math.*, Vol. 98, n° 3, pp. 498-550, Nov. 1973.

[17] P. Deligne, Les constantes locales de l'équation fonctionnelle de la fonction L d'Artin d'une représentation orthogonale, *Invent. Math.* **35**, pp. 299-316, 1976.

[18] A. Dold et D. Puppe, Homologie nicht-additiven Funktoren. Anwendungen., *Annales de L'Institut Fourier*, XI, p. 201, 1961.

[19] L. Evens et D.S. Kahn, Chern classes of certain representations of symmetric groups, *preprint.*

[20] D. Grayson, Higher Algebraic K-theory II, *Lecture Notes*, n° 551.

[21] A. Grothendieck, Classes de Chern des représentations des groupes discrets. Dans *10 exposés sur la cohomologie des schémas*, North-Holland, Masson, 1968.

[22] B. Harris et G. Segal, K_i of rings of algebraic integers, *Ann. of Math.* n° 101, pp. 20-33, 1975.

[23] R. Hartshorne, Residue and duality, *Lecture Notes* n° 20, 1966.

[24] L. Illusie, Lettre à Gersten, 24/02/1974.

[25] M. Karoubi, à paraître.

[26] S. Lang, *Algebraic Number Theory*, Addison Wesley, 1970.

[27] R. Lee et R.H. Szczarba, On the cohomology of congruence subgroups, *Inv. Math.* **33**, pp. 15-63, 1976.

[28] R. Lee et R.H. Szczarba, The group $K_3(\mathbb{Z})$ is cyclic of order 48, *Ann. of Math.* **104**, pp. 31-60, 1976.

[29] R. Lee et R.H. Szczarba, On the torsion in $K_4(\mathbb{Z})$ and $K_5(\mathbb{Z})$, *Duke Journal*, Mars 1978.

[30] S. Lichtenbaum, On the values of zeta and L-functions, I, *Ann. of Math.* **96**, pp. 338-360, 1972.

[31] S. Lichtenbaum, Values of zeta functions, étale cohomology, and algebraic K-theory. Dans *Alg. K-theory II, Lecture Notes*, n° 342.

[32] J.-L. Loday, K-théorie et représentations de groupes, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 4ème série, t. 9, pp. 309-377, 1976.

[33] J. Milnor, Introduction to Algebraic K-theory, *Annals of Math. Studies* n° 72, Princeton.

[34] D. Quillen, Algebraic K-theory I, *Lecture Notes*, n° 341.

[35] D. Quillen, On the cohomology and K-theory of the general linear groups over a finite field, *Ann. of Math.* **96**, pp. 552-586, 1972.

[36] D. Quillen, The spectrum of an equivariant cohomology ring I, II, *Ann. of Math.*, 2ème série, t. 94, pp. 549-602, 1971.

[37] D. Quillen, Characteristic classes of representations, *Lecture Notes*, n° 551.

[38] D. Quillen, The complex of elementary abelian p-subgroups, *preprint*, 1977.

[39] M. Raynaud, Caractéristique d'Euler Poincaré d'un faisceau et cohomologie des variétés abéliennes, dans *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, North Holland, Masson, 1968.

[40] Séminaire H. Cartan, 1954-55, *Algèbres d'Eilenberg Mac-Lane et homotopie*, Benjamin, New York, 1967.

[41] Séminaire de Géométrie Algébrique IV : Exposé VIII, A. Grothendieck, *Lecture Notes* n° 270.

[42] SGA IV 1/2, Cohomologie étale : les points de départ, par P. Deligne, rédigé par J.-F. Boutot, *Lecture Notes* n° 569, 1977.

[43] J.-P. Serre, *Corps locaux*, Hermann, Act. Scient. et Ind., 1968.

[44] J.-P. Serre, *Cohomologie Galoisienne*, Collège de France, 1963.

[45] J.-P. Serre, Cohomologie des groupes discrets, *Ann. Math. Studies* **70**, pp. 225-235, 1971.

[46] V. Snaith, The total Chern and Stiefel-Whitney classes are *not* infinite loop maps, *Illinois* n° 21, 2, p. 300, 1977.

[47] C. Soulé, Addendum to the article "On the torsion in $K_*(\mathbb{Z})$", *Duke Journal*, Mars 1978.

[48] C. Soulé, Classes de torsion dans la cohomologie des groupes arithmétiques, *CRAS*, t. 284, Série A.

[49] D. Sullivan, *Comptes Rendus*, t. 281, Série A, p. 17, 1975.

[50] J. Tate, Relations between K_2 and Galois cohomology, *Inv. Math.* **36**, pp. 257-274, 1976.

[51] C.B. Thomas, *Proc. London Math. Soc.* **34**, pp.87-101, 1977.

[52] G. Voronoi, Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques I, *Crelle* **133**, pp. 97-178, 1907.

[53] J. Wagoner, Delooping classifying spaces in algebraic K-theory, *Topology* **11**, pp. 349-370, 1972.