# Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences / publiés... par MM. les secrétaires perpétuels

Nous allons montrer que cette expression peut se mettre sous la forme

$$A^4(x) = \frac{1}{8\pi}(z_{\text{ret}} - b), \tag{3}$$

où le point $b$ est la projection orthogonale du point $x$ sur l'asymptote.

On obtient d'abord au moyen d'une intégration par parties

$$\int_z^{z_{\text{ret}}} r \frac{d^2 z}{dr^2} dr = z - r\frac{dz}{dr} - z_{\text{ret}}.$$

En posant ensuite $b_z = z - r(dz/dr)$, on constate que $b_z$ est situé sur la tangente à L en $z$. D'autre part

$$\begin{aligned}(x - z, x - b_z) &= \left(x - z, x - z + r\frac{dz}{dr}\right)\\ &= r^2 - r\left(x - z, \frac{d(x-z)}{dr}\right) = r^2 - \frac{r}{2}\frac{d(r^2)}{dr} = 0.\end{aligned}$$

Par conséquent $x - b_z$ est orthogonal à $x - z$. En faisant tendre $z$ vers $-\infty$ et en désignant $\lim b_z$ par $b$, on voit que ce dernier point n'est que la projection orthogonale de $x$ sur l'asymptote, comme nous l'avons dit tout à l'heure. Ainsi la formule (3) se trouve vérifiée. La tangente unitaire au point $-\infty$ étant désignée, comme plus haut, par B, on aura $b = (B, x)B + E$, E étant un vecteur constant. On en tire $\square_x b = 0$. Dès lors, (2) résulte de (3) par la relation de caractère général (*cf.* plus haut) $A(x) = A^2(x) = \square_x A^4(x)$. On a aussi $\text{rot}_x b = 0$, ce qui met en évidence que le bivecteur $G = \text{rot}_x(z_{\text{ret}} - x)$ figurant dans notre Mémoire (p. 158) est, à un facteur constant près, égal à $\text{rot}_x A^4(x)$. Ajoutons que $\text{div}_x z_{\text{ret}} = \text{div}_x b = 1$ et, par suite, $\text{div}_x(z_{\text{ret}} - b) = 0$.

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Les représentations du groupe des rotations et des retournements. Applications de la conservation de la parité en mécanique quantique* [1]. II. *Annihilation d'une particule et d'une antiparticule de Dirac.* Note de M. **Louis Michel**, présentée par M. Louis de Broglie.

Le groupe R des rotations d'un espace euclidien à trois dimensions n'est pas simplement connexe; son revêtement universel $\mathcal{R}$ simplement connexe est holomorphe à R; à l'unité $1 \in R$ correspond $(1 + \omega)$, sous-groupe distingué de $\mathcal{R}$; $\omega$ est la rotation de $2\pi$ autour d'un axe. Toutes les représentations irréductibles, donc univalentes, de $\mathcal{R}$ sont connues; pour tout rang $n = 2J + 1$ il en existe une seule notée $D_J$; leur produit se décompose ainsi :

$$D_{J'} . D_{J''} = \Sigma_J D_J, \qquad \text{avec} \quad |J' - J''| \leqq J \leqq J' + J''. \tag{1}$$

---

[1] L. Michel, *Comptes rendus*, **234**, 1952, p. 703.

Ces représentations sont isomorphes à $\mathcal{R}$ pour $2J+1$ pair et sont donc bivalentes pour R; elles sont isomorphes à $\mathcal{R}/(1+\omega)$, donc isomorphes à R pour $2J+1$ impair, $J\neq 0$.

Soit P le groupe des rotations et retournements dans E; si S est la symétrie par rapport à l'origine ($S^2=1$), on a $P=(1+S)\times R$, $\times$ indiquant le produit direct de deux groupes. Toutes les représentations de P ne sont pas données par le produit direct de celles de $1+S$ et de R. En effet l'ensemble des éléments $\mathcal{R}+S\mathcal{R}$ peut former plusieurs groupes $\mathfrak{T}$ (à deux nappes chacune simplement connexe) homomorphes à P et à R. Cet homomorphisme donne deux sous-groupes distingués de $\mathfrak{T}$ : $1+\omega$ et $p=1+\omega+s+s\omega$; $\mathfrak{T}/p$ est isomorphe à R. Il est bien connu qu'il n'existe que deux groupes $p$ non isomorphes; d'où deux groupes $\mathfrak{T}$ distincts :

$\mathfrak{T}'$ a pour centre $p'=(1+\omega)\times(1+s')$ avec $s'^2=1$;

$\mathfrak{T}''$ a pour centre $p''=1+\omega+s''+s''\omega$, avec $s''^2=\omega$.

Des considérations précédentes on déduit facilement toutes les représentations irréductibles de $\mathfrak{T}'$ et $\mathfrak{T}''$. En temps que représentations de P, seules celles de $\mathfrak{T}''$ ont été généralement considérées. E. Cartan ([2]) les notes $D^\lambda$ avec $\lambda=\pm 1$, tel que S soit représentée par la matrice

$$\eta=\lambda i^{2J}. \tag{2}$$

La décomposition du produit de ces représentations est

$$D_{J'}^{\lambda'}D_{J''}^{\lambda''}=\sum_{J=|J'-J''|}^{J=J'+J''}D_J^{\lambda},\qquad \text{avec}\quad \lambda=\lambda'\lambda'' i^{2(J+J'+J'')}. \tag{3}$$

Des physiciens ([3]), ([4]) ont considéré aussi des représentations de $\mathfrak{T}'$ comme représentations de P. On voit qu'elles peuvent être encore notées par $D_J^\lambda$ avec la même convention (2) pour $\eta$, mais $\lambda=\pm i$ lorsque $2J+1$ est pair, et l'équation (3) est encore valable pour ces représentations. Lorsque $2J+1$ est impair les représentations irréductibles correspondantes de $\mathfrak{T}'$ et $\mathfrak{T}''$ se confondent et sont isomorphes à P; aussi les notations proposées ne font-elles pas de distinctions entre elles. Il ne subsiste qu'une difficulté : c'est la multiplication de deux représentations de P, l'une isomorphe à $\mathfrak{T}'$ ($\lambda$ imaginaire, $2J+1$ pair), l'autre à $\mathfrak{T}''$ ($\lambda$ réel, $2J+1$ pair), et donc non isomorphes entre elles. Leur produit n'est pas un groupe, mais ses éléments engendrent un groupe linéaire qui se décompose en représentations irréductibles de $p''\times R$, donc de P, et

---

([2]) Par exemple, *Leçons sur la théorie des spineurs*, 1938, Hermann, Paris.

([3]) K. B. JARKOV, *J. Exp. Théor. Phys*, 20, 1950, p. 492; C. N. YANG et J. TIOMNO, *Phys. Rev.*, 79, 1950, p. 495.

([4]) C'est M. Courtois qui me fit noter l'existence de ces deux sortes de représentations non isomorphes entre elles.

auxquelles on peut étendre les notations déjà définies, et (3) se trouve vérifiée avec cette extension de sens; en effet $2J+1$ est alors impair, $\lambda = \pm i$ et $\eta = \lambda i^{2J}$.

Ces considérations s'étendent facilement au groupe propre ou « orthochrone » de Lorentz $\mathcal{L}^{\uparrow}$, et ses représentations irréductibles non équivalentes peuvent être notées $D^{\lambda}_{p/2,\,p/2}$ et $D^{\lambda^2}_{p/2,\,q/2}$ ($p \neq q$ entiers, $\lambda^4 = 1$), ce qui est une extension des notations ordinaires. Par une transformation $\in \mathcal{L}^{\uparrow}$, $\psi$ solution d'une équation de Dirac, est transformée ([5]) en $\psi' = \wedge \psi$; les matrices $\wedge$ forment une représentation de $\mathcal{L}^{\uparrow}$ (il y en a donc deux non équivalentes, correspondant à $\lambda^2 = 1$ et $-1$), et c'est aussi une représentation de P réductible en $D^{\lambda}_{1/2} + D^{-\lambda}_{1/2}$, cette décomposition correspondant à celle en « grandes » et en « petites » composantes de $\psi$ (la masse étant $\neq 0$). La conjuguée de charge $\psi^L = C^{-1}\psi^*$ se transforme en $\psi^{L'} = C^{-1} \wedge^* \psi^*$; on établit facilement la relation $\wedge^* = \varepsilon C \wedge C^{-1}$, et de $C^* = C^{-1}$ on a $\varepsilon = \pm 1$. En particularisant $\wedge$ pour l'opération S on constate que $\varepsilon = \lambda^2$, d'où $\psi^{L'} = \lambda^2 \wedge_S \psi^L$ (donc $\lambda$ réel pour les particules de Majorana, où $\psi^L \equiv \psi$); c'est-à-dire, si les grandes composantes de $\psi$ appartiennent à la représentation $D^{\lambda}_{1/2}$, celles de la particule conjuguée de charge appartiennent à $D^{\lambda^3}_{1/2} = D^{\lambda^*}_{1/2}$.

Les méthodes et résultats d'une précédente Note ([1]) peuvent alors être directement appliqués à l'étude de l'annihilation d'une particule et d'une antiparticule de spin $1/2$, de masse $\neq 0$, et de faible vitesse relative ou formant un système lié (tel que le positronium); ce sont les cas où la contribution des petites composantes est négligeable ainsi que celle des moments orbitaux $\neq 0$. Le moment cinétique total J étant un bon nombre quantique, le vecteur d'état du système appartient à l'une des deux représentations irréductibles du produit $D^+_0 D^{\lambda}_{1/2} D^{\lambda^*}_{1/2} = D^+_1 + D^-_0$; dans tous les cas cela correspondant respectivement aux états $^3S$ et $^1S$. Notons que la parité ([6]) de ces états est $\eta = -1$, [*voir* ([2])]. L'annihilation en un système de bosons donnés, de masses $\neq 0$, sera donc impossible si ce système ne peut être décrit par un vecteur d'état appartenant à $D^+_1$ ou à $D^-_0$. La Note précédente donne la liste de ces états; en se limitant aux bosons scalaires, vectoriels, pseudovectoriels et pseudoscalaires notés ici : S, V, A, P, on trouve que les annihilations suivantes sont interdites :

de l'état $^1S$ en SS, PP, SSS, SV, PA, PPS;

de l'état $^3S$ en SP.

---

([5]) *Voir* par exemple, W, PAULI, *Rev. Mod. Phys.*, 13, 1941, p. 203, dont je suis ici les notations.

([6]) C'est en contradiction avec L. D. LANDAU, *Dokladi Akad. Nauk*, 60, 1948, p. 207; la démonstration de C. N. YANG, *Phys. Rev.*, 77, 1950, p. 242 est erronée; mais ces deux excellents articles furent les premiers à donner les J et $\eta$ impossibles pour l'annihilation en deux photons.

CHRONOMÉTRIE RADIOÉLECTRIQUE. — *Réalisation d'une horloge dont la marche est rigoureusement la moyenne arithmétique des marches de plusieurs garde-temps.* Note (*) de MM. **Bernard Decaux**, **Jacques Lucas** et **Vladimir Yanouchevsky**, présentée par M. André Danjon.

Dans les mesures de temps et de fréquence de très haute précision, on est amené, pour réduire l'influence des régularités de marche des garde-temps ou oscillateurs étalons, à utiliser plusieurs de ces appareils et à prendre la moyenne de leurs indications. On se réfère ainsi à une « pendule moyenne » calculée, mais qui n'a jusqu'ici aucune existence matérielle. Il serait fort intéressant de pouvoir disposer d'un appareil réel qui fournisse directement un courant dont la fréquence aurait pour valeur la moyenne arithmétique de celle des divers oscillateurs constituant les garde-temps individuels.

C'est ce problème que nous avons résolu par une méthode utilisant les opérations arithmétiques sur les fréquences, dont l'emploi est si répandu en radioélectricité et plus spécialement dans les mesures de fréquence (rappelons par exemple que l'addition ou la soustraction de deux fréquences s'obtient par modulation de l'un des courants correspondants par l'autre). Soit à prendre la moyenne des fréquences $F_A$ et $F_B$; celle-ci étant égale à $(F_A + F_B)/2$, il suffit de produire un courant de fréquence $F_A + F_B$ et de démultiplier ensuite par 2. Pratiquement il est presque irréalisable de procéder par voie purement électronique à l'addition directe de deux fréquences sensiblement égales; il est par contre aisé de prendre un artifice consistant à ajouter ou retrancher une troisième fréquence auxiliaire $F_0$, qui s'élimine par la suite.

En modulant par exemple le courant d'un oscillateur auxiliaire de fréquence $F_0$ on obtiendra par filtrage les fréquences $F_0 + F_A$ et $F - F_B$ qui, retranchées l'une de l'autre, donneront $F_0 + F_A - (F_0 - F_B) = F_A + F_B$. Ces diverses additions et soustractions s'effectuent sans aucune difficulté, des circuits sélectifs choisissant les fréquences composées convenables. La démultiplication par 2 de la fréquence $F_A + F_B$ s'opère ensuite par l'un des procédés bien connus.

Si l'on veut prendre la moyenne de trois fréquences, on recommence l'opération précédente, par exemple en produisant $F_0 + (F_A + F_B)$ et $F_0 - F_C$ qui, après modulation et sélection, produisent la fréquence $F_A + F_B + F_C$ qu'il suffit de démultiplier par 3. La méthode se généralise aisément. On voit même qu'il serait possible d'affecter des poids aux diverses composantes, en faisant intervenir plusieurs fois certaines d'entre elles dans l'opération.

Nous avons réalisé et mis en service prolongé des appareils basés sur ce principe, les uns pour prendre la fréquence moyenne de plusieurs oscillateurs

(*) Séance du 19 mai 1952.