C. R. Acad. Sc. Paris, t. 272, p. 433-436 (8 février 1971). Série A

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *Points critiques des fonctions invariantes sur une G-variété.* Note (*) de M. **Louis Michel**, transmise par M. Henri Cartan.

Soient G un groupe de Lie compact de dimension finie, et M une variété réelle, paracompacte, différentiable, C^∞, sur laquelle est définie une action C^∞ de G ([1]). Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions réelles, C^∞, définies sur M et G-invariantes. Nous allons étudier l'ensemble des points $m \in M$ pour lesquels df_m la différentielle en m, de toute fonction $f \in \mathcal{F}$ est nulle.

Rappelons les propriétés essentielles de l'action des groupes de Lie compacts ([2]). Nous notons Φ le morphisme de variétés $G\times M \xrightarrow{\Phi} M$ qui définit l'action de G sur M, $\Phi_g = \Phi(g, .)$ le difféomorphisme de M correspondant à g de G et $\psi_m = \Phi(., m)$ l'application $G \xrightarrow{\psi_m} M$ définie pour chaque m. Nous écrivons aussi $g.m$ pour $\Phi(g, m)$. Le stabilisateur de m est le sous-groupe $G_m = \psi_m^{-1}(m)$ de G; il est fermé. L'orbite $G(m)$ de m est l'image de ψ_m; elle est donc compacte et fermée. Si $n = g.m$, alors $G_n = gG_m g^{-1}$, c'est-à-dire $G_n \in (G_m)$, en notant (H) la classe de conjugaison de H, c'est-à-dire l'ensemble des sous-groupes de G conjugués à H. La relation $\exists\, g \in G$, $K \subset gHg^{-1}$ est une relation d'ordre, notée $\leq$, sur l'ensemble $\mathcal{O}$ des classes de conjugaison des sous-groupes de G. Nous notons $\mathcal{M} \subset \mathcal{O}$ le sous-ensemble des classes de conjugaison (G_m) qui apparaissent dans l'action de G sur M. Il y a une correspondance biunivoque entre $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$, l'ensemble des classes d'isomorphismes (= types) d'orbites de G. Puisque $\dim G_m + \dim G(m) = \dim G$, où dim signifie dimension, on utilise sur $\mathcal{O}'$ la relation d'ordre inverse : plus le stabilisateur G_m est grand, plus l'orbite $G(m)$ est petite. $(G_m) = (G_n)$ est une relation d'équivalence pour les points de M : les classes d'équivalence qu'elle définit sont appelées *strates* et notées $S(m)$; une strate est l'union des orbites de M du même type.

L'espace des orbites M/G est le quotient de M par la relation d'équivalence $G(m) = G(n)$, munie de la topologie quotient qui est séparée puisque les orbites sont fermées. L'application canonique $M \xrightarrow{\pi} M/G$ est ouverte, fermée, propre. L'espace des strates $\mathcal{M}'$, le quotient de M par la relation d'équivalence $S(m) = S(n)$, est un sous-ensemble de $\mathcal{O}'$. L'ensemble M_g des $m = \Phi_g(m)$, points fixes de g, est fermé; il en est donc de même pour $M_H = \bigcap_{g \in H} M_g$. Si H est un sous-groupe maximal de $\mathcal{M}$, alors M_H est une strate, qui est minimale dans $\mathcal{M}'$.

Soit $d(x, y)$ une métrique riemannienne sur M; en la moyennant par la mesure de Haar normalisée de G, on munit M d'une métrique riemannienne

$$\tilde{d}(x, y) = \int_{G} d(g.x, g.y)\, d\mu(g)$$

qui est G-invariante. Le groupe G agit donc par isométries sur M. Soit Q une sous-variété fermée de M, invariante par $G : G.Q = Q$. Il existe un voisinage V_Q de Q tel que pour tout $x \in V_Q$, $\operatorname{Inf}_{q \in Q} \tilde{d}(x, q)$ est bien défini et correspond à un point unique $r_Q(x) \in Q$ (c'est le pied de la géodésique menée par x, perpendiculairement à Q). Puisque la métrique $\tilde{d}$ est invariante par G, la rétraction $V_Q \xrightarrow{r_Q} Q$, qui est différentiable, est équivariante par G.

$$\text{(1)} \qquad \forall g \in G, \quad \Phi_g \circ r_Q = r_Q \circ \Phi_g.$$

Ainsi $g \in G_x \Rightarrow g \in G_{r_Q(x)}$. En prenant pour Q l'orbite $G(m)$, on obtient donc

$$\text{(2)} \qquad \forall x \in V_{G(m)}, \quad G_x \subset G_m.$$

Étude locale de l'action de G_m. — Choisissons un système de coordonnées géodésiques dans le voisinage U_m de m. Le groupe G_m transforme entre elles les géodésiques passant par m; il agit donc linéairement sur U_m par une représentation linéaire équivalente à celle: $g \rightsquigarrow (d\Phi_g)_m$ sur $T_m(M)$, le plan tangent en m à M. En désignant par r la rétraction équivariante sur $G(m)$, définie sur le voisinage $V \supset G(m)$, la variété $r^{-1}(m)$, qui est le plan normal à $G(m)$ en m, est appelée la tranche en m; par (1), elle est invariante par G_m. Ainsi $T_m(M)$ est la somme directe de deux sous-espaces orthogonaux et G_m-invariants, respectivement tangents à l'orbite et à la tranche

$$\text{(3)} \qquad T_m(M) = T_m(G(m)) \overset{\perp}{\oplus} T_m(r^{-1}(m)).$$

Soit $F_m = M_{G_m} \cap r^{-1}(m)$ l'ensemble des points de la tranche fixes pour G_m. L'équation (1) nous montre que F_m est aussi l'intersection de la strate et de la tranche

$$F_m = S(m) \cap r^{-1}(m) \qquad \text{et} \qquad S(m) \cap V_{G(m)} = \bigcup_{m \in G(m)} F_m = \bigcup_{g \in G} F_{g\,m}.$$

Si F_m ne contient que m, nous dirons encore que l'orbite $G(m)$ est *isolée dans sa strate* : $S(m) \cap V_{G(m)} = G(m)$.

Dans le système de coordonnées géodésiques en m, F_m est une sous-variété linéaire de la tranche. Nous pouvons donc décomposer l'espace tangent à la tranche en deux sous-espaces orthogonaux et G_m-invariants

$$\text{(4)} \qquad T_m(r^{-1}(m)) = T_m(F_m) \oplus K_m$$

et

$$\text{(5)} \qquad T_m(S(m)) = T_m(G(m)) \oplus T_m(F_m).$$

Notons que la représentation linéaire de G_m sur K_m ne contient pas la représentation triviale.

Orbites critiques. — Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions réelles, C^∞, définies sur M et G-invariantes : $f(g.m) = f(m)$. Si pour tout $f \in \mathcal{F}$, $df_m = 0$, c'est encore vrai pour tous les points de $G(m)$ et nous dirons que *cette orbite est critique* pour $\mathcal{F}$.

Théorème 1. — *Une orbite est critique pour $\mathcal{F}$ si et seulement si elle est isolée dans sa strate.*

La différentielle df_m est un élément du dual de $T_m(M)$, invariant par G_m et annulant les vecteurs de $T_m(G(m))$. La métrique G-invariante sur M induit sur $T_m(M)$ une structure d'espace euclidien, sur lequel G_m agit par transformations orthogonales. Au lieu de df_m, nous pouvons donc considérer son dual : $(\text{grad} f)_m$. Il est orthogonal à $T_m(G(m))$, le plan tangent à l'orbite, et il est invariant par G_m. Donc

$$\forall f \in \mathcal{F}, \quad (\text{grad} f)_m \in T_m(F_m). \tag{5}$$

Le gradient est orthogonal à l'orbite et tangent à la strate. Si l'orbite en m est isolée dans sa strate, $T_m(F_m) = 0$ et donc $(\text{grad} f)_m = 0$; l'orbite est critique.

Réciproquement, nous allons montrer que si l'orbite $G(m)$ n'est pas isolée dans sa strate, elle n'est pas critique. Par hypothèse, F_m a une dimension > 0. Nous choisissons des coordonnées géodésiques au voisinage de m et pour chaque point t de la tranche : $t \in r^{-1}(m)$, nous définissons deux coordonnées : l'ordonnée ζ sur un axe $mz \in F_m$ et la distance ρ à cet axe. Soit $\chi(\zeta)$ une fonction réelle, C^∞, à support compact définie sur cet axe mz et telle que $\chi'(0) = (d/d\zeta)\chi(\zeta)|_{\zeta=0} \neq 0$. Pour un nombre α convenablement choisi, la fonction

$$\tilde f(t) = \chi(\zeta) \exp -(\alpha^2 - \rho^2)^{-1} \quad \text{si } \rho < \alpha \qquad \text{et} \qquad = 0 \quad \text{si } \rho \geq \alpha$$

est définie pour tout point t de la tranche; elle est réelle, C^∞, à support compact et G_m-invariante :

$$\forall h \in G_m, \quad \tilde f(h.t) = \tilde f(t). \tag{6}$$

Nous allons étendre cette fonction à M. Soit $x \in V_{G(m)}$; si g' et g'' satisfont

$$m = g'.r(x) = g''.r(x), \quad \exists h \in G_m$$

tel que $g'' = hg'$. Nous posons

$$f(x) = \tilde f(g'.x) = \tilde f(g''.x) ;$$

grâce à (6), c'est bien une fonction de $\mathcal{F}$ ($f(x) = 0$ si $x \notin V_{G(m)}$) et $(\text{grad} f)_m \neq 0$: il est porté par mz et sa composante est $\chi'(0)$.

Nous avons donc caractérisé complètement les orbites critiques de $\mathcal{F}$ et nous avons aussi montré :

Corollaire. — *Le point m est sur une orbite critique pour $\mathcal{F}$ si et seulement si la représentation linéaire du stabilisateur G_m sur la tranche en m, ne contient pas la représentation triviale.*

Notons encore que si une strate contient un nombre fini d'orbites, elle est fermée et ses orbites sont critiques.

Nous pouvons encore partiellement localiser d'autres extrêmums pour chaque fonction $f \in \mathcal{F}$, *lorsque* M *est compacte* s'il existe des strates fermées contenant un nombre infini d'orbites (la strate étant compacte, ces orbites ne peuvent être toutes isolées).

Théorème 2. — *Lorsque* M *est compacte, sur toute composante connexe* C_s *d'une strate fermée* S *et dont les points appartiennent à une infinité d'orbites, le gradient de toute fonction* $f \in \mathcal{F}$ *est nul sur au moins deux orbites distinctes.*

Soit $f|_c$ la restriction de la fonction $f \in \mathcal{F}$ à C_s. Puisque pour tout $m \in C_s$, $(\text{grad} f)_m$ est tangent à C_s, on a

$$m \in C_s, \quad (\text{grad} f)_m = (\text{grad} f|_c)_m \tag{7}$$

Lorsque M est compacte, C_s étant fermée, est compacte et $f|_c$ atteint son maximum et son minimum (différents ou non) en au moins deux points m' et m'' d'orbites différentes; le gradient de $f|_c$ est nul sur ces orbites et l'équation (12) montre qu'il en est de même pour le gradient de f.

La théorie de Morse équivariante [8] fournit d'autres conditions sur la localisation et la nature des extrêmums des $f \in \mathcal{F}$.

Dans [4] on trouvera une application de ces deux théorèmes à la physique des particules élémentaires.

(*) Séance du 1er février 1971.

(1) Quand M est compacte, si l'action est C^1, elle est C^∞ : réf. (7).

(2) Pour une revue des actions différentiables d'un groupe de Lie compact, *voir* par exemple [(6), (5), (3)].

(3) Wuchung et Wu-Yi Hsiang, *Amer. J. Math.*, 89, 1967, p. 705.

(4) L. Michel et L. A. Radicati, *Properties of the breaking of hadronic internal symmetry* (*Ann. Phys.*, 1971).

(5) D. Montgomery, *Compact groups of transformations*, p. 43 of *Differential Analysis*, Bombay Colloquium, Bombay, 1964.

(6) R. S. Palais, *The classification of G-spaces* (*Memoirs of the Amer. Math. Soc.*, n° 36, 1960).

(7) R. S. Palais, *Amer. J. Math.*, 92, 1970, p. 748.

(8) A. G. Wassermann, *Topology*, 8, 1969, p. 127.

(*Institut des Hautes Études Scientifiques,*
35, route de Chartres,
91-Bures-sur-Yvette, Essonne.)

183326. — Imp. Gauthier-Villars. — 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.