Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique

C. R. Acad. Sci. Paris, t. 307, Série I, p. 905-910, 1988

Équations différentielles/*Ordinary Differential Equations*

Équations différentielles linéaires d'ordre $n>2$ ayant une algèbre de Lie de symétrie de dimension $n+4$

Jorge KRAUSE et Louis MICHEL

Résumé – Pour une équation différentielle $\mathscr{E}(x, y, y', \ldots, y^{(n)})=0$ d'ordre $n>2$, S. Lie a prouvé que la dimension d_n de l'algèbre de Lie du groupe de symétrie de $\mathscr{E}=0$ satisfait $d_n \leqq n+4$; il a aussi établi que ce maximum est atteint pour l'équation réduite $y^{(n)}=0$ avec $\mathscr{G}_n=\mathscr{A}_n \rtimes \mathrm{GL}_2$ où $\mathscr{A}_k$ est l'algèbre de Lie abélienne de dimension k. Nous établissons pour les équations différentielles linéaires d'ordre $n>2$ l'équivalence entre les propriétés : *a*) pouvoir être transformée en l'équation réduite par un difféomorphisme local du plan $\mathrm{P}(x, y)$, (*b*) avoir $d_n=n+4$, (*c*) être une équation itérée (la définition est donnée dans le texte). De plus $(b) \Rightarrow \mathscr{G} \sim \mathscr{G}_n$.

Linear differential equations of order $n>2$ with a symmetry algebra of dimension $n+4$

Abstract – *For a differential equation $\mathscr{E}(x, y, y', \ldots, y^{(n)})=0$ of order $n>2$, S. Lie proved that the dimension d_n of the Lie algebra of its symmetry group is bounded: $d_n \leqq n+4$. He has also shown that the maximum of d_n is reached for the reduced equation $y^{(n)}=0$ and $\mathscr{G}$ has the structure: $\mathscr{G}_n=\mathscr{A}_n \rtimes \mathrm{GL}_2$ where $\mathscr{A}_k$ denotes the k-dimensional Abelian Lie algebra. For the linear differential equations of order $n>2$ we establish the equivalence between the three properties: (a) the equation can be transformed to the reduced form by a local diffeomorphism of the plane $\mathrm{P}(x, y)$, (b) $d_n=n+4$, (c) the equation is iterative (definition given in the text). Moreover $(b) \Rightarrow \mathscr{G} \sim \mathscr{G}_n$.*

Abridged English Version – This Note sketches the proof of the following

THEOREM. – *For linear differential equations of order $n>2$ [cf. equ. (3)] the following three properties are equivalent: (a) the equation is reducible to the form $y^{(n)}=0$ by a local diffeomorphism of the plane $\mathrm{P}(x, y)$, (b) the Lie algebra $\mathscr{G}$ of its symmetry group has maximal dimension $d_n=n+4$, (c) the equation is iterative [see equ. (2)]. Furthermore $(b) \Rightarrow \mathscr{G} \sim \mathscr{A}_n \rtimes \mathrm{GL}_2$* (we denote by $\mathscr{A}_n$ the n-dimensional Abelian Lie algebra).

Lie has proven $(a) \Rightarrow (b)$. Here we prove first $(b) \Leftrightarrow (c)$, then $(b) \Rightarrow (a)$. The invariance of the equation (3) under translation: $y \mapsto y+\sum_i \beta_i b_i(x)$ where the $\{b_i(x)\}$ form a basis of the vector space $\mathscr{V}_n$ of its solutions, as well as upon dilations: $y \mapsto (1+\delta) y$, are direct consequences of its linearity and homogeneity. Hence $\mathscr{A}_n \rtimes \mathscr{A}_1 \subset \mathscr{G}$ where $\mathscr{A}_n$ is generated by the $\mathrm{B}_i=b_i(x)\,\partial_x$ and $\mathscr{A}_1$ by $\mathrm{D}=y\,\partial_y$. The factor $\mathscr{A}_1$ acts on $\mathscr{A}_n$ by dilations [*cf.* equ. (4)]. Since the symmetry group of $\mathscr{E}_n=0$ transforms its solutions into solutions, $\mathscr{A}_n \rtimes \mathscr{A}_1$ must be an ideal of $\mathscr{G}$. So every $\mathrm{F} \in \mathscr{G}$ such that $\mathrm{F} \notin \mathscr{A}_n \rtimes \mathscr{A}_1$ must be of the form $\mathrm{F}=f(x)\,\partial_x+g(x)\, y\, \partial_y$, with $f(x) \neq 0$. This shows that the kernel of the Lie algebra homomorphism σ: $\mathscr{G} \ni \mathrm{F} \mapsto \sigma(\mathrm{F})=f(x)\,\partial_x \in \mathscr{D}iff(x)$ is precisely the subalgebra $\mathscr{A}_n \rtimes \mathscr{A}_1$ of $\mathscr{G}$. Lie has shown that all finite subalgebras of $\mathscr{D}iff(x)$ are isomorphic and equivalent to SL_2 or to one of its subalgebras. In fact this means that the $f(x)$'s are obtained as linear combinations of the linearly independent solutions u^2, uv, v^2 of an iterative 3rd order equation: $y'''+4py'+2p'y=0$ whose "source equation" $z''+pz=0$ has solutions u, v (by convention we normalize the Wronskian: $w(u, v)=1$). The well known commutation relations of SL_2 follow [*cf.* equ. (7)]. Next, in order to obtain the functions $f(x)$, $g(x)$ for a given linear differential equation $\mathscr{E}_n=0$ we use the technique of prolongation of vector fields $\mathrm{V}=\xi(x, y)\,\partial_x+\eta(x, y)\,\partial_y$, acting on the plane $\mathrm{P}(x, y)$, to the space of derivatives $y^{(k)}$ of

Note présentée par Bernard MALGRANGE.

0249-6291/88/03070905 $ 2.00

$y(x)$. A straightforward [albeit rather long ([1])] calculation yields: $g(x)=(n-1)f'(x)/2$, while $f(x)$ has to satisfy the 3rd order iterative equation shown in equation (14). The corresponding operators F_-, F_0, F_+ form a n-dimensional representation of SL_2 on the vector space of solutions of $\mathscr{E}_n=0$. The operators $F_\pm$ must have a kernel; solving $[F_+, b_0(x)\partial_y]=0$, we obtain $b_0=v^{n-1}$, wherefrom it follows $b_k=(\mathrm{ad}\, F_-)^k b_0 \propto u^k v^{n-1-k}$ [equ. (17)]. Therefore the action of SL_2 on $\mathscr{A}_n$ corresponds to the n-dimensional irreducible representation; this is an implication of the statement (b) of the theorem. Equation (17) shows neatly that $\mathscr{E}_n=0$ is iterative. Conversely, if $\mathscr{E}_n=0$ is iterative, it has solutions $b_k(x)=u^k v^{n-1-k}$; then the 3 operators of equation (16) and the $n+1$ operators of equation (4) form a basis of its symmetry Lie algebra; so $b \Leftrightarrow c$ is proven. Finally, in order to prove $b \Rightarrow a$, we observe that equation (14) can be reduced by a diffeomorphism, which transforms u, v into 1, x and the solutions of $\mathscr{E}_n=0$ into polynomials in x of degree $\leqq n-1$. Clearly, this means that $\mathscr{E}_n=0$ is reducible.

Sophus Lie a étudié la symétrie des équations différentielles. Si $\mathscr{G}$ est l'algèbre de Lie du groupe de symétrie de l'équation différentielle d'ordre n : $\mathscr{E}(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})=0$, Lie [1] a montré :

$$n=2 \Rightarrow \dim \mathscr{G} \leqq 8, \qquad n>2 \Rightarrow \dim \mathscr{G} \leqq n+4, \tag{1}$$

Il a aussi établi [2] que pour l'équation réduite :

$$y^{(n)}=0, \begin{cases} n=2, & \mathscr{G}=SL_3, \\ n>2, & \mathscr{G}=\mathscr{A}_n \rtimes GL_2, \end{cases} \tag{1'}$$

où $\mathscr{A}_n$ est l'algèbre de Lie abélienne de dimension n; le centre de GL_2 agit sur elle par homothétie et la sous-algèbre SL_2, par la représentation irréductible de dimension n. Il était bien connu à l'époque que par des difféomorphismes toutes les équations différentielles linéaires du second ordre pouvaient être transformées sous la forme réduite : $y''=0$. Laguerre [3] et Lie [4] ont caractérisé les équations du 3e ordre qui peuvent être mises sous forme réduite ([2]). Le but de cette Note est d'étudier les équations différentielles linéaires d'ordre $n>2$ qui ont une algèbre de symétrie $\mathscr{G}$ de dimension maximale $n+4$: nous prouvons que $\mathscr{G}$ a la structure de (1′), que ces équations peuvent être mises sous forme réduite. Enfin nous les caractériserons : ce sont les équations $L^n[y]$ itérées d'une équation linéaire du premier ordre :

$$L[y] \equiv r(x)y'+q(x)y=0, \qquad L^n[y]=L^{n-1}[L[y]]. \tag{2}$$

Pour ces équations, n solutions linéairement indépendantes sont de la forme :

$$y_k=u^{n-1-k}v^k, \qquad 0 \leqq k \leqq n-1.$$

Sans perdre en généralité nous pouvons considérer les équations de la forme :

$$\mathscr{E}_n \equiv y^{(n)}+\sum_{k=0}^{n-2} c_k(x)y^{(k)}=0; \tag{3}$$

le terme $c(x)$ du second membre a disparu par la transformation $y \mapsto y+y_p$ où y_p est une solution particulière de l'équation inhomogène, tandis que

$$y \mapsto y \exp\left(-n^{-1}\int^x c_{n-1}(t)\,dt\right)$$

a éliminé le second coefficient. Lorsqu'une équation d'ordre $n \geqq 3$ est itérée et sous la forme (3), le wronskien $w(u, v) \equiv \begin{pmatrix} u & v \\ u' & v' \end{pmatrix}$ est constant. Par convention nous le normalisons à 1; dans ce cas u, v sont des solutions de l'équation $z'' + p(x) z = 0$, $p = w(u', v')$; nous appelons celle-ci « équation source » de l'équation itérée. Cette Note esquisse la preuve du

THÉORÈME. — *Pour les équations linéaires différentielles d'ordre $n > 2$ les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

(*a*) *l'équation peut être mise sous forme réduite* (1'),

(*b*) *l'algèbre de Lie $\mathscr{G}$ de son groupe de symétrie a la dimension $n+4$,*

(*c*) *l'équation est itérée.*

De plus $(b) \Rightarrow \mathscr{G} \sim \mathscr{A}_n \rtimes \mathrm{GL}_2$.

Lie a prouvé : $a \Rightarrow b$. Pour prouver le théorème nous allons montrer successivement $b \Leftrightarrow c$ puis $b \Rightarrow a$. Les solutions de l'équation (3) : $\mathscr{E}_n = 0$ forment un espace vectoriel de fonctions $\mathscr{V}_n$ de dimension n; si $\{b_i\}$ est une base de $\mathscr{V}_n$, toute solution b de $\mathscr{E}_n = 0$ est de la forme : $b = \sum_i \beta_i b_i$. L'équation linéaire $\mathscr{E}_n = 0$ est invariante par les translations $y \mapsto y + \sum_i \beta_i b_i$; puisqu'elle est homogène, elle est aussi invariante par l'homothétie $y \mapsto (1+\delta) y$. Son algèbre de symétrie $\mathscr{G}$ contient donc les $n+1$ champs de vecteurs B_i, D du plan $\mathrm{P}(x, y)$:

$$(4) \quad 1 \leqq i, j \leqq n, \quad \mathrm{B}_i = b_i(x) \partial_y, \quad \mathrm{D} = y \partial_y; \qquad [\mathrm{B}_i, \mathrm{B}_j] = 0, \quad [\mathrm{B}_i, \mathrm{D}] = \mathrm{B}_i \quad \Rightarrow \quad \mathscr{G} \supseteq \mathscr{A}_n \rtimes \mathscr{A}_1.$$

Le groupe de symétrie d'une équation doit transformer l'ensemble de ses solutions en lui-même; donc l'algèbre abélienne $\mathscr{B} = \{\mathrm{B}_i\} \sim \mathscr{A}_n$ doit être un idéal de $\mathscr{G}$.

$$(5) \qquad \begin{cases} \mathscr{G} \ni \mathrm{F} = \xi(x, y) \partial_x + \eta(x, y) \partial_y \notin \mathscr{B} \rtimes \mathscr{A}_1, \\ \forall \mathrm{B} \in \mathscr{B}, [\mathrm{B}, \mathrm{F}] \in \mathscr{B} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{F} = f(x) \partial_x + g(x) y \partial_y. \end{cases}$$

Un terme $d(x) \partial_y$ aurait dû être ajouté, mais inutilement; en effet $[\mathrm{F}, \mathrm{D}] = d(x) \partial_y$ et la translation $y \mapsto y + d$ n'est une symétrie de l'équation que si d en est une solution, c'est-à-dire $d \partial_y \in \mathscr{B}$. De plus on doit avoir $f(x) \neq 0$; en effet F agit linéairement sur $\mathscr{B}$ par $[\mathrm{F}, b \partial_y] = (fb' - gb) \partial_y$. Si $f = 0$ alors la multiplication par g doit transformer l'espace $\mathscr{V}_n$ des solutions en lui-même, ce qui impose à g d'être une constante μ, c'est-à-dire $\mathrm{F} = \mu \mathrm{D}$ ce qui était exclu. Cela montre que le noyau de l'homomorphisme $\mathscr{G} \xrightarrow{\sigma} \mathscr{D}iff(x)$ défini par $\sigma(f(x) \partial_x + (c(x) y + b(x)) \partial_y) = f(x) \partial_x$ est la sous-algèbre de $\mathscr{G}$ définie en (4). Lie [4] a montré que les sous-algèbres finies de $\mathscr{D}iff(x)$ sont toutes isomorphes et équivalentes à SL_2 ou à une de ses sous-algèbres. En effet, considérons une base $\{f_i(x) \partial_x\}$, $1 \leqq i \leqq k$ de $\mathscr{F}$, sous-algèbre finie de $\mathscr{D}iff(x)$. Les seules sous-algèbres abéliennes de $\mathscr{D}iff(x)$ sont unidimensionnelles; si $k > 1$ les k fonctions f_i sont linéairement indépendantes et forment une base de l'espace des solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre

$$k : w(y, f_1, \ldots, f_k) / w(f_1, \ldots, f_k) = 0.$$

Tous les wronskiens $w(f_i, f_j)$ doivent aussi être solutions de cette équation; cela implique $k \leqq 3$. Pour $k = 3$ on trouve aisément la forme générale de l'équation : $y''' + 4py' + 2p'y = 0$. Cette équation peut être mise sous forme réduite [*voir* note ([2])]; c'est aussi une équation itérée dont l'équation source est $z'' + pz = 0$. Soient $u(x)$, $v(x)$ deux solutions de wronskien 1 de cette équation source. Les champs de vecteurs :

$$(6) \qquad \mathrm{E}_- = u^2 \partial_x, \qquad \mathrm{E}_0 = 2uv \partial_x, \qquad \mathrm{E}_+ = -v^2 \partial_x$$

satisfont les relations de commutations :

$$[E_0, E_\pm] = \pm 2 E_\pm, \qquad [E_+, E_-] = E_0 \tag{7}$$

de l'algèbre de Lie SL_2. La connaissance des termes $f(x)\partial_x$ [donnés par l'équation (6)] des opérateurs F de (5), impose certaines conditions sur les fonctions des termes $g(x)y\partial_y$ mais il ne les fixe pas complètement.

Pour déterminer ces fonctions, nous allons utiliser la prolongation des champs de vecteurs sur $P(x, y)$ à l'espace des dérivées des fonctions $y(x)$. Cette technique a été développée par Lie. Pour un exposé récent et excellent on pourra se référer à [5]. La prolongation de $V = \xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y$ est ($\eta^{[0]} \equiv \eta$) :

$$\tilde{V} = \xi\partial_x + \sum_{k=0}^{n} \eta^{[k]}\partial_{y^{(k)}} \quad \text{avec} \quad \eta^{[k]} = \left(\frac{d}{dx}\right)^k (\eta - y'\xi) + y^{(k+1)}\xi \tag{8}$$

où d/dx est la dérivée totale. Grâce à la relation de récurrence

$$\eta^{[k]} = \frac{d}{dx}\eta^{[k-1]} - y^{(k)}\frac{d}{dx}\xi, \tag{9}$$

par un calcul simple mais un peu long, nous pouvons calculer un certain nombre des coefficients des termes de $\eta^{[n]}$ contenant les ordres les plus élevés des dérivées :

$$\begin{aligned} n>3, \quad \eta^{[n]} = {} & (\eta_y - n\xi_x)y^{(n)} - (n+1)\xi_y y' y^{(n)} - \binom{n+1}{2}\xi_y y'' y^{(n-1)} \\ & + n(\eta_{yy} - n\xi_{xy})y' y^{(n-1)} + n\left(\eta_{xy} - \frac{n-1}{2}\xi_{xx}\right)y^{n-1)} \\ & + \binom{n}{2}\left(\eta_{xxy} - \frac{n-2}{3}\xi_{xxx}\right)y^{(n-2)} + \ldots \end{aligned} \tag{10}$$

Le champ de vecteurs V appartient à l'algèbre de Lie de symétrie de l'équation $\mathscr{E} = 0$ si, et seulement si, $\tilde{V}\mathscr{E} = \lambda\mathscr{E}$. Ce qui signifie pour l'équation $\mathscr{E}_n = 0$ de (3) :

$$\eta^{[n]} + \sum_{k=0}^{n-2} (c_k\eta^{[k]} + c'_k\xi y^{(k)}) = 0 \tag{11}$$

$y^{(n)}$ étant remplacée par son expression $-\sum_{k=0}^{n-2} c_k(x)y^{(k)}$ donnée par (3). Les $y^{(k)}$, $0 \leq k \leq n-1$ sont des variables indépendantes dans (11). En annulant respectivement les coefficients des termes en $y'' y^{(n-1)}$, $y' y^{(n-1)}$, $y^{(n-1)}$ nous obtenons les conditions sur V :

$$\xi_y = 0, \qquad \eta_{yy} - n\xi_{xy} = 0, \qquad 2\eta_{xy} - (n-1)\xi_{xx} = 0. \tag{12}$$

Nous en déduisons la forme la plus générale de $V \in \mathscr{G}$:

$$V = f(x)\partial_x + \left(\frac{n-1}{2}f' + \lambda\right)y\partial_y + b(x)\partial_y \tag{13}$$

ce qui implique pour $g(x)$ défini en (5) : $g = (n-1)f'/2$. On vérifie aisément de nouveau que les champs de vecteurs introduits en (4) appartiennent à $\mathscr{G}$. Les équations (12) impliquent la nullité du coefficient de $y' y^{(n-2)}$; celle du coefficient de $y_{(n-2)}$ donne la relation :

$$\binom{n+1}{3}f''' + 4c_{n-2}f' + 2c'_{n-2}f = 0. \tag{14}$$

Cette équation est bien de la forme que nous avions indiquée pour les équations itérées du 3^e ordre; son équation source est :

$$(15) \qquad z''+pz=0 \qquad \text{avec} \quad p(x)=c_{n-2}(x)\binom{n+1}{3}.$$

Si l'équation (3) a la symétrie maximale, les trois générateurs supplémentaires de $\mathscr{G}$ sont donc [*voir* (6) et (13)] :

$$(16) \qquad \begin{cases} F_- = u^2\,\partial_x + (n-1)\,uu'\,y\,\partial_y, \\ F_0 = 2\,uv\,\partial_x + (n-1)\,(uv'+u'v)\,y\,\partial_y, \\ F_+ = -v^2\,\partial_x - (n-1)\,vv'\,y\,\partial_y. \end{cases}$$

Ils satisfont les relations de commutation de (7) et forment une représentation de SL_2 sur l'espace vectoriel $\mathscr{V}_n$ des solutions. Les F_+, F_- doivent avoir un noyau; soit $b_0(x)$ une solution telle que $[F_+, b_0\,\partial_y]=0$, c'est-à-dire $-v^2 b_0'+(n-1)\,vv'\,b_0=0$. Cette équation donne b_0 à un facteur constant près : $b_0=v^{n-1}$. En utilisant les puissances successives de ad F_- nous obtenons un base de $\mathscr{V}_n$:

$$(17) \qquad 0\leqq k\leqq n-1, \qquad b_k=(\text{ad } F_-)^k\, b_0 \propto u^k\, v^{n-1-k}.$$

Ce qui établit que l'action de SL_2 sur $\mathscr{B}$ correspond à la représentation irréductible de dimension n; cela précise l'énoncé (*b*) du théorème. L'équation (17) montre aussi que $\mathscr{E}_n=0$ est itérée; ce qui conclut la preuve de $(b)\Rightarrow(c)$. Réciproquement, si $\mathscr{E}_n=0$ est itérée et si une base de l'espace de ses solutions est donnée par les $b_k=u^k\,v^{n-1-k}$, alors les trois opérateurs de (16) et les $n+1$ de (4) forment une base de son algèbre de Lie de symétrie, c'est-à-dire : $(c)\Rightarrow(b)$.

L'équation (14) pouvant être mise sous forme réduite par un difféomorphisme, celui-ci transforme u, v en 1, t et les solutions de $\mathscr{E}_n=0$ en polynômes en t de degré $\leqq n-1$; ce qui signifie que l'équation $\mathscr{E}_n=0$ est elle-même sous forme réduite; cela prouve $(b)\Rightarrow(a)$ et termine la preuve du théorème.

Nous remercions le professeur Leach de nous avoir communiqué le prétirage [6] d'un travail en collaboration avec Mahomed, dans lequel ces auteurs caractérisent partiellement les équations $\mathscr{E}_n=0$ de symétrie maximale en donnant les coefficients c_{n-k}, $3\leqq k\leqq 8$ en fonction de c_{n-2}; ils montrent de plus que l'algèbre de symétrie d'une équation différentielle linéaire d'ordre $n>3$, est soit $\mathscr{A}_n \rtimes \mathscr{A}_1$, soit $\mathscr{A}_n \rtimes \mathscr{A}_2$, quand elle n'est pas maximale.

Ce travail est partiellement subventionné par un projet de recherche du FONDECYT (Chili), contrat 0364/88.

(1) We use the recursion relation of equation (9). The details of the computation were given in a unpublished manuscript which is available from the Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago.

(2) L'équation $y'''+c_2 y''+c_1 y'+c_0 y=0$ peut être mise sous forme réduite si, et seulement si, ses coefficients satisfont : $54\,c_0-18\,c_1\,c_2+4\,c_2^3-27\,c_1'+18\,c_2\,c_2'+9\,c_2''=0$. Dans ce cas Lie a remarqué que le wronskien de deux solutions est une solution.

Note remise le 10 octobre 1988, acceptée le 13 octobre 1988.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] S. LIE, *Vorlesungen über continuierliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen*, Bearbeitet und herausgegeben von Dr. G. Scheffers, Teubner, Leipzig, 1893, Chap. 12 p. 298, « Satz 3 ».

[2] S. LIE, Klassifikation und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestetten. I, *Math. Ann.*, 22, 1888, p. 213-253, par ex. : p. 236-245. Reproduit dans *Sophus Lie Gesammelte Abhandlungen*, 5, X p. 240-281, par ex. : p. 264-272.

[3] E. LAGUERRE, Sur les équations différentielles linéaires du troisième ordre, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 88, 1879, p. 116-119; Sur quelques invariants des équations différentielles linéaires, *Ibid.*, p. 224-227.

[4] S. LIE, *Theorie der Transformationsgruppen, dritter Abschnitt*, Unter Mitwirkung von Pr. Dr F. Engel, Teubner, Leipzig, 1893, p. 7-11.

[5] P. J. OLVER, *Applications of Lie groups to differential equations*, Springer, New York, 1986.

[6] F. M. MAHOMED et P. G. L. LEACH, *Symmetry Lie algebras of nth order ordinary differential equations*, prétirage, Dep. Computational and Applied Mathematics, Univ. of the Witwatersrand, Johannesburg, S.A.

I.H.E.S., 91440 *Bures-sur-Yvette;*
adresse permanente de J. K. : *Pontifica Universidad Católica de Chile, Facultad de Fisica, Santiago, Chili.*