Relations entre Symétries Internes et Invariance Relativiste

LOUIS MICHEL
Institut des Hautes Etudes Scientifiques
91 Bures-sur-Yvette, France

1. Introduction

Ces notes correspondent au cours de cinq leçons données à Cargèse. Leur but est de familiariser le lecteur avec certains aspects de la structure des groupes.

Le Chapitre 2 contient donc toutes les notions élémentaires utiles à cette étude. Le Chapitre 3 donne une application de ces notions en déterminant tous les automorphismes du groupe de Poincaré. Le Chapitre 4 traite rapidement des extensions de groupes. Comme ce sujet a déjà été traité par l'auteur dans deux écoles d'été (Istanbul 1962, Brandeis, 1965, les trois écoles ayant le même éditeur: Gordon and Breach) pour éviter trop de redites on réfèrera pour des preuves ou des détails à l'un ou l'autre de ces cours par M.I. et M.B. respectivement. Le cours de Cargèse est plus condensé sur ce sujet mais donne presque autant de résultats. Ce Chapitre 4 est un *cours* qui montre, trop succintement, au lecteur quelles méthodes, quels outils les mathématiques lui donnent pour résoudre les problèmes que se posent beaucoup de physiciens travaillant sur les symétries de particules élémentaires. Il ne s'agissait pas de traiter toutes les questions (en général très élémentaires) que l'on voit surgir de ce propos dans l'avalanche de préprints sur la combinaison de l'invariance relativiste et des symétries internes, spécialement $SU6$, mais de permettre au lecteur de répondre par lui-même aux questions simples qui l'intéressent dans ce domaine.

Pour les applications physiques, le lecteur est renvoyé aux diverses communications de l'auteur, qu'il est inutile de reproduire ici, puisqu'elles sont déjà imprimées ailleurs.

Le cours d'Istanbul, "Relations between internal symmetry and relativistic invariance", *Phys. Rev.* **137**, B, 405, 1965.

"Group of invariance of a relativistic supermultiplet theory", with B. Sakita, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **2**, 167, 1965.

Les communications à la seconde conférence de Coral Gables (Floride, Janvier, 1965).

Et au Colloque international du CNRS (avril 1966), sur les "Extensions du groupe de Poincaré aux symétries des particules élémentaires".

Mentionnons aussi les papiers préhistoriques sur ce sujet: En collaboration avec F. Lurçat, *N. Cim.* **21**, 574, 1961, et *Comptes-Rendus de la Conférence d'Aix-en-Provence* p. 183 (Edition CEN Saclay, France, 1962.

2. Outils pour une Etude Elementaire des Groupe

2.1. *Liste des Notions Supposées Connues et des Notations*

Même le lecteur le moins attentif des chapitres précédents de ce livre sait ce qu'est pour deux ensembles E, E' une application f de E dans E': $E \xrightarrow{f} E'$ et la signification d'injective, surjective, bijective comme qualificatif d'application.

Nous utiliserons la notation suivante: $f^{-1}(M')$ est l'ensemble des x de E tel que $f(x) \in M' \subset E'$. Le lecteur est aussi censé savoir ce qu'est une relation d'équivalence R sur E. Le quotient de E par R est l'ensemble des classes d'équivalence. Enfin si le lecteur sait aussi ce qu'est un groupe et un sous-groupe d'un groupe, il sait tout ce qu'il lui faut pour suivre ce cours!

Comme application de ces notions, soit G un groupe, H un sous-groupe; la relation $y^{-1}x \in H$ (ou $x \in yH$) est une relation d'équivalence entre éléments de G. Ces classes d'équivalence sont de la forme xH. Ce sont les translatés à gauche de H. De même les translatés à droite de H (de la forme Hx) sont les classes d'équivalence de la relation $yx^{-1} \in H$ (ou $y \in Hx$).

Nous définissons ici les notations que nous utiliserons:

M ensemble d'éléments du groupe G: $M \subset G$.

M sous-groupe de G: $M < G$

De M et $N \subset G$ on définit $M.N \subset G$, $M.N$ étant l'ensemble $\{xy, x \in M, y \in N\}$.

Exercice 1. Si $M < G$, $N < G$ prouver $M.N = N.M \Leftrightarrow M.N < G$.

Définitions. Le centralisateur dans G de $M \subset G$ est l'ensemble des éléments de G qui commute avec chaque éléments de M. Nous le notons $\mathscr{C}_G(m)$

$$\mathscr{C}_G(M) = \{x \in G, \forall\, m \in M, xm = mx\}$$

$\mathscr{C}_G(G)$ est le centre de G.

Le normalisateur de M dans G est l'ensemble des éléments de G commutant "globalement" avec ceux de M:

$$\mathfrak{N}_G(M) = \{x \in G, x.M = M.x\}$$

K sous-groupe invariant de G (noté $K \lhd G$) $= \mathfrak{N}_G(K) = G$.

Exercice 2. Prouvez le théorème $\mathscr{C}_G(M) \lhd \mathfrak{N}_G(M)$.

Exercice 3. Si $K \lhd G$, ses translatés à gauche et à droite sont identique ($xK = Kx$).

2.2. *Homomorphismes de Groupe*

Ce sera notre principal outil. Un homomorphisme $G \xrightarrow{f} G'$ est une application de G dans G' telle que $f(x)f(y) = f(xy)$.

L'ensemble des valeurs de f est l'image de f, noté $\mathrm{Im} f$. On appelle noyau de f, l'ensemble $f^{-1}(1)$, c'est-à-dire l'ensemble des $x \in G$ appliqués sur $1 \in G'$, on le note $\mathrm{Ker}\, f$.

Prouvez $\mathrm{Im} f < G'$ et $\mathrm{Ker}\, f \lhd G$; plus généralement si $K' \lhd G'$, $f^{-1}(K') \lhd G$.

Une propriété essentielle des applications qui est partagée par les homomorphismes est de pouvoir les composer:

$$G \xrightarrow{f} G' \xrightarrow{g} G'' \text{ définit un homomorphism } G \xrightarrow{g \circ f} G'' \text{ sur}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Cette loi de composition est associative. Celà nous permet de définir des *diagrammes commutatifs* d'homomorphismes (ou d'applications). C'est une famille de groupes (ou d'ensembles) et d'homomorphismes (applications) entre eux tels que toutes les compositions possibles d'homomorphismes (d'applications) entre deux groupes (ensembles) donnés du diagramme définissent le même homomorphisme.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & G' \arrow[dl, "g"] \\ & G'' & \end{tikzcd} ;$$

Exemple 1. Le plus simple des diagrammes commutatifs est il est équivalent à $h=g \circ f$.

Tous les diagrammes que nous écrirons désormais seront commutatifs.

Suite exacte d'homomorphismes. Une suite d'homomorphismes

$$\ldots \to G_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} G_n \xrightarrow{f_n} G_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} G_{n+2} \to \ldots$$

est exacte si pour tout n

$$\mathrm{Im} f_n = \mathrm{Ker} f_{n+1}$$

Dès maintenant, sauf mention explicite du contraire, toute suite d'homomorphismes avec des flèches alignées sera exacte.

Exemple 2. Les plus simples de suites exactes

$1 \to G \xrightarrow{i} G' \Leftrightarrow i$ injectif

$G \xrightarrow{p} G' \to 1 \Leftrightarrow p$ surjectif

$1 \to G \to G' \to 1 \Leftrightarrow G \simeq G'$ (G isomorphe à G')

Etant donné $G \xrightarrow{f} G'$ on a

$$1 \to \mathrm{Ker} f \to G \to \mathrm{Im} f \to 1$$

Plus généralement, si $K \lhd G$, on définit le groupe quotient G/K, dont les éléments sont les translatés $xK=Kx$ de K, et la loi de groupe, induite par celle de G, est $xK\ yK=xyK$. On a alors

$$1 \to K \to G \to G/K \to 1$$

Suites exactes et diagrammes commutatifs sont devenus eux-mêmes des objets de mathématiques. Nous les utiliserons simplement ici comme une notation condensée et très idéographique. Par exemple:

Si $A \lhd G$, $B \lhd G$, on a alors le diagramme avec

$$X = \frac{A}{A \cap B} = \frac{A.B}{B}$$

$$Y = \frac{B}{A \cap B} = \frac{A.B}{A}$$

$$Z = \frac{G}{A \cap B}$$

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[dl] & \\
1 \arrow[r] & A \cap B \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & A \arrow[r] \arrow[d] & & X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ddl] & 1 & 1 \\
1 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[dd] & G \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[dr] & & G/B \arrow[r] \arrow[dd] \arrow[urr] & 1 & \\
 & & & Z \arrow[dl] \arrow[ur] \arrow[r] & 1 & & \\
1 \arrow[r] & Y \arrow[r] \arrow[dd] \arrow[urr] & G/A \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[dl] & & G/A.B \arrow[r] \arrow[dd] & 1 & \\
1 \arrow[uur] & 1 & & & & & \\
 & 1 & 1 & & 1 & &
\end{tikzcd}$$

DIAGRAMME 1

Nous noterons Hom (G,G') l'ensemble des homomorphismes de G dans G'. Si G' est un groupe Abelien (noté ici additivement) sa loi de groupe induit sur Hom (G,G') une loi de groupe Abelien par

$$(f-g)(x) = f(x)-g(x) \quad \text{(Défini en } G'\text{)}$$

2.3. *Groupe de Transformations, Espaces Homogènes*

Soit E un ensemble. Une application bijective $E \to E$ est appelé une permutation des éléments de E. Ces permutations forment un groupe noté $\mathfrak{P}(E)$. On dit que G agit sur E (ou que G est un groupe de transformations de E) si on a un homomorphism $G \xrightarrow{f} \mathfrak{P}(E)$. Si Ker $f = 1$ on dit que G agit "effectivement".

Pour deux éléments α, β de E, on écrira $\alpha_T\beta$ s'il existe $x \in G$ tel que $\beta = f(x)[\alpha]$ (qu'on note plus simplement $x(\alpha)$). La relation $\alpha_T\beta$ est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalences sont les orbites de G dans E. Si E n'est composé que d'une seule orbite, on dit que a agit transitivement sur E et que E est un espace homogène de E.

Exemples d'espaces homogènes

(1) G agit sur lui-même par translation à gauche $f(x)[a] = xa$ ou à droite $f(x)[a] = ax^{-1}$. Homomorphismes d'espaces G-homogènes $E \xrightarrow{\phi} E'$ si le diagramme 2 d'applications est commutatif, pour tout $x \in G$. $E \simeq E'$ (E isomorphe à E') $\Leftrightarrow$ ϕ bijectif.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, dashed, "\phi"] \arrow[d, dashed, "f(x)"'] & E' \arrow[d, dashed, "f'(x)"] \\ E \arrow[r, dashed, "\phi"] & E' \end{tikzcd}$$

DIAGRAMME 2

(2) Soit H sous-groupe de G, et $[G:H]_L$ l'ensemble des translatés à gauche de H dans G, ϕ l'application $G \xrightarrow{\phi} [G:H]_L$ qui à chaque $a \in G$ fait correspondre le translaté à gauche aH. Les translations à gauche de G permuttent les éléments $[G:H]_L$ par $f(x)[a.H] = xaH$. De même $[G:H]_R$ l'ensemble des translaté à droite de H est espace homogène de G pour l'action $f'(x)[Ha^{-1}] = Ha^{-1}x^{-1}$ (translation à droite dans G).

Exercice 4. Prouvez que $[G:H]_L$ et $[G:H]_R$ sont isomorphes. Nous noterons simplement $G:H$ cet espace homogène (défini à un isomorphe près).

Soit E, un espace G-homogène, et $\alpha \in E$. L'ensemble des $x \in G$ tels que $x(\alpha) = \alpha$ forment un sous-groupe $H_\alpha < G$, appelé petit groupe de x (ou stabilisateur de α). Si $\beta \in E$, il existe y tel que $\beta = y(\alpha)$. On voit alors que $H_\beta = yH_\alpha y^{-1}$. (Les stabilisateurs sont conjugués). Nous laissons au lecteur le soin de prouver les isomorphismes d'espace G-homogènes $E \simeq G:H_\alpha \simeq G:H_\beta$.

En résumé, il y a correspondance biunivoque entre les classes d'isomorphisme des espaces homogènes de G et les sous-groupes de G modulo une conjugaison. (Voir plus loin pour des exemples avec le groupe de Lorentz.)

Exercice 5. G n'agit pas effectivement sur $G: H$ si H contient un sous-groupe invariant ($\neq 1$) de G. En effet Ker$f$ (où $G \xrightarrow{f} \mathfrak{P}(G:H)$) est le plus grand sous-groupe invariante de G contenu dans H.

Exemple. Les espaces homogènes du groupe de Lorentz. Le groupe de Lorentz agit sur l'espace de Minkowski, préservant le produit scalaire $a.b = a^\mu g_{\mu\nu} b^\nu$ avec $g_{00} = 1 = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33}$, les autres $g_{\mu\nu}$ étant nuls. Soit Λ une transformation de Lorentz

$$\Lambda a . \Lambda b = a.b \Rightarrow \Lambda^T G \Lambda = G \tag{1}$$

la matrice G ayant pour élément $g_{\mu\nu}$ et Λ^T signifie: la transposée de Λ. Il est bien connu que le groupe L n'est pas connexe, mais composé de 4 nappes définies par $\det \Lambda = \pm 1$, $\Lambda_0^0 \geqslant 1$ ou $\Lambda_0^0 \leqslant -1$. Nous notons $\mathrm{SO}(1,3) = L_0$ ou $L_+^\uparrow$ la composante connexe ($\det \Lambda = 1$, $\Lambda_0^0 \geqslant 1$)

$$\begin{aligned} 0(1,3)^\uparrow &= L^\uparrow \text{ le sous-groupe orthochrome } (\Lambda_0^0 \geqslant 1) \qquad (2)\\ 0(1,3)_+ &= L_+ \text{ le groupe avec } \det \Lambda = 1\\ 0(1,3) &= L \text{ le groupe complet.} \end{aligned}$$

Table 1

Orbites sur l'espace temps et stabilisateur (petit groupe)

Orbite déterminée par la valeur de a^2 et les conditions		$L_+^\uparrow$	$L^\uparrow$	L_+	L
$a = 0$		$SO(3,R)$	$O(3,R)^\uparrow$	$3,R)_+$	$O(3,R)$
$a^2 > 0$	$a^0 > 0$	$SO(3,R)$	$O(3,R)$	$SO(3,R)$	$O(3,R)$
$a^2 > 0$	$a^0 < 0$	$SO(3,R)$	$SO(3,R)$		
$a^2 = 0$	$a^0 > 0$	$P_0(2,R)$	$P(2,R)$	$P_0(2,R)$	$P(2,R)$
$a^2 = 0$	$a^0 < 0$	$P_0(2,R)$	$P(2,R)$		
$a^2 < 0$		$SO(2,1)$	$O(1,2)^\uparrow$	$O(1,2)_+$	$O(1,2)$

$P(2)$ est le groupe Eculidien du plan à deux dimensions et $P_0(2)$ sa composante connexe.

Exercice 6. Etudier d'autres espaces homogènes de L, par exemple ses orbites quand L agit sur les couples de vecteurs $a.b$. Montrez que les valeurs de a^2, $a.b$, b^2, signe de a^0, signe de b^0 ne déterminent pas un orbite de $L_+^\uparrow$ même si $a^2 \neq 0$, $b^2 \neq 0$. Voir Brandeis II.33.

Exercice. Pour l'action de $O(n,m)$ sur l'espace à $n+m$ dimensions, montrez que les orbites et petits groupes sont:

$0, O(n,m)$; $\quad a^2(>0), O(n-1,m)$;

$$a^2(<0), O(n,m-1); \quad a^2 = 0, a \neq 0, P(n-1,m-1).$$

2.4. *Automorphismes de Groupe. Sous-Groupe Caractéristique*

Un homomorphisme de G dans G est appelé un endomorphisme de G. Nous notons $\mathrm{End}\, G = \mathrm{Hom}\,(G,G)$.

Les endomorphismes de G qui sont bijectifs sont des automorphismes. Il forment le groupe $\mathrm{Aut}\, G$.

L'isomorphisme $Z \xrightarrow{n} nZ$ (Z groupe additif des entiers, n est la multiplication par n) n'est pas $\in \mathrm{Aut}Z$ car il n'est pas surjectif. En fait on a:

$$O \rightarrow Z \xrightarrow{n} Z \rightarrow Z_n \rightarrow O \tag{3}$$

où Z_n est le groupe *cyclique* de néléments.

De même $U_1 \xrightarrow{n} U_1$ où U_1 est le groupe unitaire à une dimension (multiplication des nombres complexes de module 1 et n est la n^e puissance) n'est pas un automorphisme parce qu'il n'est pas injectif.

En effet

$$1 \rightarrow Z_n \rightarrow U_1 \xrightarrow{n} U_1 \rightarrow 1 \tag{4}$$

Les automorphismes de G de la forme $a \rightsquigarrow x\ a\ x^{-1} = \psi(x)[a]$ sont dits automorphismes intérieurs de G. Ils forment un groupe: Int G.

Exercice 7. (1) La correspondance $x \rightsquigarrow \psi(x)$ est un homomorphisme avec $\mathrm{Ker}\,\psi = \mathscr{C}(G)$ (centre de G).

(2) $\mathrm{Int}\, G \lhd \mathrm{Aut}\, G$. Nous notons le quotient $\mathrm{Aut}\, G/\mathrm{Int}\, G = \mathrm{Out}\, G$.

Notex que les deux suites exactes correspondantes

$$1 \rightarrow \mathscr{C}(G) \rightarrow G \rightarrow \mathrm{Int}\, G \rightarrow 1 \tag{5}$$

et

$$1 \rightarrow \mathrm{Int}\, G \rightarrow \mathrm{Aut}\, G \rightarrow \mathrm{Out}\, G \rightarrow 1 \tag{6}$$

sont équivalentes à la suite exacte:

$$1 \rightarrow \mathscr{C}(G) \rightarrow G \rightarrow \mathrm{Aut}\, G \rightarrow \mathrm{Out}\, G \rightarrow 1 \tag{7}$$

Définition. Un groupe G est dit complet si $\mathscr{C}(G) = 1$, Out $G = 1$ donc $G \simeq$ Aut G (par l'isomorphisme *naturel*).

On montre que le groupe de permutation des éléments d'un ensemble de puissance cardinale infinie ou finie, mais différente de 2 et 6, est un groupe complet.

De nombreux groupes classiques, parmi eux les groupes SO_{2n+1}, $n > 0$ (groupe orthogonal connexe—groupe des rotations de l'espace Euclidien à $2n+1$ dimensions); ces groupes étant considérés comme abstraits, mais *tous* leurs automorphismes sont intérieurs (et continus). Le groupe Aut G si G n'est pas Abelien et n'a pas de sous-groupe invariant. Le groupe Aut P où P est le groupe de Poincaré-groupe de Lorentz inhomogène.

Nous démontrerons ce résultat en 3.5.

Si $K \triangleleft E$, à tout élément de E correspond un automorphisme intérieur de E qui laisse le sous-groupe invariant K stable et induit donc sur lui un automorphisme. Il est facile de voir que cette correspondance est un homomorphisme

$$K \triangleleft G \Rightarrow G \rightarrow \operatorname{Aut} K \text{ (naturel)} \tag{8}$$

Le noyau de cet automorphisme est $\mathscr{C}_G(K)$.

Définition. Un sous-groupe X de G est dit caractéristique si il est stable pour tous les automorphismes de G. (Il est donc a fortiori invariant.) Nous noterons $X \mathrel{\triangleleft\!\!|} G$. On a alors l'homomorphisme naturel

$$X \mathrel{\triangleleft\!\!|} G \Rightarrow \operatorname{Aut} G \rightarrow \operatorname{Aut} X \tag{9}$$

Exemple. Le centre d'un groupe est sous-groupe charactéristique. Notons que si $K \triangleleft G$, le transformé de K par un automorphisme de G est un sous-groupe invariant de G isomorphe à K. Si G n'a pas d'autres sous-groupes invariants isomorphes à K et distincts de K alors K est caractéristique.

Exercice 8.

$$X \mathrel{\triangleleft\!\!|} K \triangleleft G \Rightarrow X \triangleleft G$$
$$X \mathrel{\triangleleft\!\!|} K \mathrel{\triangleleft\!\!|} G \Rightarrow X \mathrel{\triangleleft\!\!|} G$$

Exercice 9.

$$L_+^\uparrow \mathrel{\triangleleft\!\!|} L^\uparrow \mathrel{\triangleleft\!\!|} L, \quad L_+^\uparrow \mathrel{\triangleleft\!\!|} L_+ \mathrel{\triangleleft\!\!|} L$$

2.5. *Produit Direct et Produit Semi-Direct de Groupes*

Produit direct. Etant donnés deux groupes K, Q (éléments $\alpha, \beta \ldots$ et $a, b \ldots$) on définit sur l'ensemble produit $K \times Q$ une loi de groupe par

$$(\alpha, a)(\beta, b) = (\alpha\beta, ab) \tag{10}$$

Le groupe obtenu est appelé le produit direct $K \times Q$.

Produit semi-direct. Etant donnés deux groupes K, Q et un homomorphismes $Q \xrightarrow{r} \text{Aut } K$, on définit sur l'ensemble produit la loi de groupe

$$(\alpha, a)(\beta, b) = (\alpha, a(\beta), ab) \tag{11}$$

où $a(\beta)$ est une notation simplifiée de $r(a)[\beta]$.

Notons que dans le produit semi-direct

$$(a(\beta), 1) = (1, a)(\beta, 1)(1, a^{-1}).$$

On notera le produit semi-direct $K \wedge Q$.

On voit que l'application $k(a) = (1,a)$ est un homomorphisme $Q \xrightarrow{k} K \wedge Q$ tel que $p \circ k = I$ (Identité automorphisme de Q) où $p(\alpha, a) = a$. Donc le produit semi-direct satisfait le diagramme commutatif 3

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & K \arrow[r] & K \wedge Q \arrow[rr, "p"] & & Q \arrow[r] & \mathbf{1} \\
 & & & Q \arrow[ul, "k"] \arrow[ur, "i"'] & &
\end{tikzcd}$$

DIAGRAMME 3

Réciproquement, le diagramme 3 caractérise un produit semi-direct.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbf{1} & & \\
 & & K \arrow[u] & & \\
1 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[ur, "I"] & K \times Q \arrow[r] \arrow[u] & Q \arrow[r] & 1 \\
 & & Q \arrow[u] \arrow[ur, "I"'] & & \\
 & & \mathbf{1} \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

DIAGRAMME 4

(Le lecteur peut chercher des diagrammes plus faibles, c'est-à-dire ayant moins des flèches, et caractérisant un produit direct.)

Le produit direct est un cas particulier de produit semi-direct où $r\colon Q \xrightarrow{r} \operatorname{Aut} K$ est l'homomorphisme trivial (que nous notons $r=0$). Notons que dans le produit direct Q est aussi sous-groupe invariant. D'où le diagramme caractéristique d'un produit direct.

Exemple de ce qui n'est pas un produit direct

$$1 \to SU_n \to U_n \xrightarrow{\det} U_1 \to 1$$

En fait, U_1 étant le groupe des matrices multiples de l'identité, on peut appliquer le grand diagramme à U_n. On obtient (puisque $SU_n . U_1 = U_n$).

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & & 1 \arrow[d] & \\
1 \arrow[r] & Z_n \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & U_1 \arrow[rr] \arrow[d] & & U_1 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ddl] & 1 \\
1 \arrow[r] & SU_n \arrow[r] \arrow[ddd] & U_n \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[ddd] & & U_1 \arrow[dd] & \\
 & & & U_n/Z_n \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[ddl] & & \\
 & & & & 1 & \\
1 \arrow[r] & SU_n/Z_n \arrow[r] \arrow[uurr] \arrow[d] & SU_n/Z_n \arrow[rr] \arrow[d] & & 1 & \\
 & 1 & 1 & & &
\end{tikzcd}$$

DIAGRAMME 5

Ce qui montre que

$$\frac{U_n}{Z_n} = \frac{SU_n}{Z_n} \times U_1$$

(produit direct).

Par contre $1 \to SU_n \to U_n \xrightarrow{\det} U_1 \to 1$ est un produit semi-direct. On peut en effet prendre comme section $k(e^{i\phi})=$ la matrice diagonale de U_n dont tous les éléments sont 1 sauf le premier qui est $e^{i\phi}$.

Exercice 10. De façon similaire, si K est un corps commutatif, étudier

$$1 \to SL(n,K) \to GL(n,K) \xrightarrow{\det} K^{\times} \to 1$$

où $GL(n,K)$ est le groupe des transformations linéaires de l'espace vectoriel de dimensions n sur le corps K dont $K^\times$ est le groupe multiplicatif.

En déduire, si K = corps des réels, que

$$GL(n,K) = SL(n,K)\times K^\times$$

pour n impair.

Le groupe de Poincaré P est le produit semi-direct $T \wedge L$ où T est le groupe de translation de l'espace temps et L le groupe de Lorentz. Nous allons procéder à son étude.

3. Le Groupe de Poincaré et ses Automorphismes

Nous allons prouver dans ce chapitre que tout automorphisme du groupe de Poincaré est continu. Nous avons déjà donné une telle preuve dans une conférence au "Boulder symposium in inhomogeneous Lorentz group" (lectures in theoretical physics, vol. VIIa, University of Colorado Press, p. 118). Mais cette preuve citait incorrectement le théorème de Zeeman et telle qu'elle est publiée elle se trouve incomplète. (Elle est complétée par la preuve de la variante du théorème de Zeeman publiée dans Brandeis, II.4). Le preuve que nous donnons ici est différente et ne s'appuie plus sur une démonstration de Wigner (équation (32) $\Rightarrow$ (45) ci-dessous).

3.1. *Le Groupe de Poincaré*

C'est le produit direct $T \wedge L$ avec l'action $L \xrightarrow{f} \mathrm{Aut}\, T$ identique à l'action de L sur l'espace-temps d'origine fixée. En notant a, b, c, les éléments de T, Λ, Γ, Δ ... ceux de L, la loi du groupe de Poincaré est donc

$$(a,\Gamma)(b,\Delta) = (a+\Gamma b, \Gamma\Delta) \tag{13}$$

et

$$(a,\Gamma)^{-1} = (-\Gamma^{-1}a, \Gamma^{-1}) \tag{13'}$$

(les translations sont notées additivement et $\Gamma b = f(\Gamma)[b]$.)

Pour former le produit semi-direct on peut prendre n'importe lequel des quatre groupes de Lorentz définis en 2.3, équation (2). D'où les groupes de Poincaré

$$P_0 = P_+^\uparrow, P^\uparrow, P_+, P \tag{14}$$

qui ont entre eux les relations suivantes:

$$P^{\uparrow} = P_{+}^{\uparrow} \wedge Z_2 \quad \text{et} \quad P = P_{+} \wedge Z_2 \quad \text{où} \quad Z_2 = \{1, G\} \tag{15}$$

G étant la matrice $g_{\mu\nu}$ définie en (1). Et

$$P_{+} = P_{+}^{\uparrow} \times Z_2 \quad \text{et} \quad P = P_{+} \times Z_2 \quad \text{où} \quad Z_2(= 1, -1) \tag{16}$$

(Physiquement G est la symétrie d'espace, -1 la symétrie d'espace et de temps).

De plus

$$P_{+}^{\uparrow} \lhd P^{\uparrow} \lhd P \quad \text{et} \quad P_{+}^{\uparrow} \lhd P_{+} \lhd P \tag{17}$$

(similaire à l'exercice 4 de 2.3.)

3.2. *Le Groupe de Poincaré et les Dilatations*

Soit λ un nombre réel positif. Une dilatation d'espace temps est représentée par la matrice $\lambda\mathbf{1}$; elle commute avec les transformations de L et multiplie les translations par λ, c'est-à-dire $a \rightsquigarrow \lambda a$. Une dilatation est un automorphisme du groupe de Poincaré. Les dilatations forment le groupe $R_{+}^{\times}$, groupe multiplicatif des réels positifs (isomorphe au groupe additif des réels). Nous pouvons donc former les 4 produits semi-directs $P \wedge R_{+}^{*}$ dont la loi de groupe est:

$$(a, \Gamma, \lambda)(b, \Delta, \mu) = (a + \lambda\Gamma b, \Gamma\Delta, \lambda\mu) \tag{18}$$

et

$$(a, \Gamma, \lambda)^{-1} = (-\lambda^{-1}\Gamma^{-1}a . \Gamma^{-1}, \lambda^{-1}) \tag{18'}$$

Nous noterons les quatre groupes correspondants

$$D_0 = D_{+}^{\uparrow} = P_{+}^{\uparrow} \wedge R_{+}^{*}, D^{\uparrow}, D_{+}, D \tag{19}$$

Ils satisfont les relations 15, 16, 17.

Nous allons démontrer pour les groupes abstraits (c'est-à-dire sans tenir compte de la topologie)

$$\operatorname{Aut} P_{+}^{\uparrow} = \operatorname{Aut} P^{\uparrow} = \operatorname{Aut} P_{+} = \operatorname{Aut} P = D \tag{20}$$

3.3. *Automorphismes d'un Produit Semi-Direct $G = K \wedge Q$.*

Nous notons la loi de groupe

$$(a, \Gamma)(b, \Delta) = (a . \Gamma b, \Gamma\Delta) \tag{21}$$

Nous allons nous restreindre au cas où $K \lhd K \wedge Q = G$.

Soit F un automorphisme de $K \wedge Q$. Puisque K est sous-groupe caractéristique, F induit sur K un automorphisme

$$F(a, 1) = (f(a), 1) \quad \text{avec} \quad f \in \operatorname{Aut} K \tag{22}$$

(La correspondance $F \rightsquigarrow f$ est l'homomorphisme (9) $\operatorname{Aut} K \wedge Q \to \operatorname{Aut} K$)

Posons

$$F(1, \Gamma) = (\phi(\Gamma), \Phi(\Gamma)) \tag{23}$$

ainsi

$$F(a, \Gamma) = (f(a) . \phi(\Gamma), \Phi(\Gamma)) \tag{24}$$

Utilisons le fait que F a un inverse en dénotant:

$F^{-1}(1, \Gamma) \quad \text{par} \quad (\phi'(\Gamma), \Phi'(\Gamma))$

alors $F \circ F^{-1} = F^{-1} \circ F = I \in \operatorname{Aut} G$ donne

$$\Phi \circ \Phi' = \Phi' \circ \Phi = I \in \operatorname{Aut} Q \tag{25}$$

donc Φ est bijectif, et aussi de (22), (23) et (25)

$$\phi'(\Gamma) = f^{-1} \circ \phi \circ \psi^{-1}(\Gamma^{-1}) \tag{25'}$$

De $F(1, \Gamma) F(1, \Delta) = F(1, \Gamma\Delta)$ nous obtenons

$$\phi(\Gamma) . \Phi(\Gamma) [\phi(\Delta)] = \phi(\Gamma\Delta) \tag{26}$$

et

$$\Phi(\Gamma) \Phi(\Delta) = \Phi(\Gamma\Delta) \tag{27}$$

Les équations (25) et (27) montrent que

$$\Phi \in \operatorname{Aut} Q \tag{28}$$

Enfin $F(1, \Gamma) F(b, 1) = F(\Gamma b, \Gamma)$ donne

$$\phi(\Gamma) . \Phi(\Gamma) [f(b)] = f(\Gamma b) . \phi(\Gamma) \tag{29}$$

Dans le cas particulier où G est un produit direct, les équations (26) et (29) nous montrent respectivement que

$$\phi \in \operatorname{Hom}(Q, K) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} \phi \in \mathscr{C}(K) \tag{30}$$

Donc, pour un produit direct avec $K \lhd K \times Q$, tout automorphisme F est défini par le triplet (22), (28), (30). En appliquant cela aux produits directs de (16) (satisfaisant 17), puisque les P n'ont pas de centre, ϕ est trivial et puisque Z_2 n'a d'autres automorphismes que l'identité, on a

$$\operatorname{Aut} P = \operatorname{Aut} P^{\uparrow} \quad \text{et} \quad \operatorname{Aut} P_{+} = \operatorname{Aut} P_{+}^{\uparrow} \tag{31}$$

3.4. *Application aux Produits Semi-Directs* $P = T \wedge L$ *et* $P_{+} = T \wedge L_{+}$

On a bien $T \lhd P$. Nous notons T additivement, écrivant alors les équations (27) et (29)

$$\phi(\Gamma) + \Phi(\Gamma)\,\phi(\Delta) = \phi(\Gamma\Delta) \tag{32}$$

$$\Phi(\Gamma) f(b) = f(\Gamma b) \tag{33}$$

Les automorphismes de P sont donc donnés par le triplet $f \in \operatorname{Aut} T$, $\Phi \in \operatorname{Aut} L$ et ϕ, une application de L dans T, tous les trois satisfaisant (32) et (33). Il se trouve que le groupe $\operatorname{Aut} T$ est monstrueux (considérer T comme espace vectoriel sur les rationnels, il a une base dont l'ensemble B des vecteurs de base est de la puissance du contenu et $\mathfrak{P}(B) \subset \operatorname{Aut} T$). Le groupe $\operatorname{Aut} L$ (lorsqu'on considère L comme groupe abstrait) est tout aussi monstrueux: (il contient les automorphismes algébriques du corps des complexes. Ce corps a une base de transcendance B' de la puissance du contenu et $\mathfrak{P}(B') \subset \operatorname{Aut} L$. (Voir par exemple N. Bourbaki algèbre, chap. V, *Act. Sci. Ind.* No. 1102, Hermann, Paris 1950). Mais comme on va le voir équations (32) et (33) éliminent toute pathologie et tout automorphisme de P est continu.

Dans l'équations (33) prenons Γ dans le petit groupe de b: $\Gamma \in L_b$ nous voyons alors que

$$\Phi(\Gamma) \in L_{f(b)}$$

et puisque $\Phi \in \operatorname{Aut} P$ et $f \in \operatorname{Aut} T$ on a

$$\Phi(L_b) = L_{f(b)} \tag{34}$$

Notons encore que si deux vecteurs ont même petit groupe, il sont colinéaires et réciproquement:

$$L_{b'} = L_b \Leftrightarrow b' = \lambda b, \lambda \neq 0 \tag{35}$$

En utilisant (34) nous avons donc

$$L_{f(\lambda b)} = \Phi(L_{\lambda b}) = \Phi(L_b) = L_{f(b)}$$

donc

$$f(\lambda b) = \eta(\lambda, b, f) f(b) \tag{36}$$

où $\eta(\lambda,b,f)$ est un nombre réel $\neq 0$; cette équation est encore vraie si $\lambda = 0$ car alors $\eta(0,b,f) = 0$.

Choisissons un $a \in T$ et écrivons plus simplement $\eta_a(\lambda)$ au lieu de $\eta(\lambda,a,f)$. De même, écrivons $\eta_a'(\lambda)$ pour $\eta(\lambda,f(a),f^{-1})$, c'est-à-dire

$$f^{-1}(\lambda f(a)) = \eta_a'(\lambda)\, a$$

Les deux équations suivantes:

$$\lambda f(a) = f \circ f^{-1}(\lambda f(a)) = \eta_a \circ \eta_a'(\lambda) . f(a)$$

et

$$\lambda a = f^{-1} \circ f(\lambda a) = f^{-1}(\eta^a(\lambda) f(a')) = \eta_a' \circ \eta_a(\lambda)\, a$$

nous montrent que η_a est une application bijective des nombres réels sur eux-mêmes, η_a' étant l'inverse de η_a.

Puisque $f \in \mathrm{Aut}T$, on calcule aisément

$$\eta_a(\lambda+\mu) f(a) = f((\lambda+\mu)a) = f(\lambda a) + f(\mu a) = (\eta_a(\lambda) + \eta_a(\mu)) f(a)$$

et

$$\eta_a(\lambda\mu) f(a) = f(\lambda\mu a) = \eta_a(\lambda) f(\mu a) = \eta_a(\lambda)\, \eta_a(\mu) f(a)$$

Donc η_a est de plus un automorphisme du corps des réels. Mais le seul automorphisme des réels est l'application identique. En effet la structure algébrique de ce corps permet d'y définir une relation d'ordre total en procédant ainsi: pour tout couple d'éléments $\lambda \neq \mu$, de $\lambda - \mu$ et $\mu - \lambda$ l'un est un carré et l'autre ne l'est pas. Si $\lambda - \mu$ (respectivement $\mu - \lambda$) n'est pas un carré on pose $\lambda < \mu$ (respectivement $\mu < \lambda$). Un automorphisme algébrique η applique 0 sur 0, 1 sur 1, laisse donc fixe chaque rationnel, et de plus doit préserver cet ordre total. C'est donc l'identité. D'où

$$\eta_a(\lambda) = \lambda \tag{37}$$

et cela quelque soit $a \neq 0$. L'équation (36) montre alors que f est linéaire

$$f(\lambda b) = \lambda f(b) \tag{38}$$

donc $f \in$ du groupe linéaire réel général à 4 dimensions $GL(4, R)$ qui est le groupe des matrices réelles 4 par 4.

Nous pouvons écrire l'équation (33) comme une équation dans ce groupe

$$\Phi(\Gamma) = f.\Gamma.f^{-1} \tag{33'}$$

et cela pour tout $\Gamma \in L$ ou de L_+ suivant que nous étudions Aut$P$ ou AutP_+. On peut encore traduire cette équation en disant que $f \in N$ (ou N_+) le normalisateur de L (ou L_+) dans $GL(4, R)$. Nous avons déjà défini le sous-groupe L de $GL(4, R)$ par l'équation (1)

$$\Lambda \in L \Leftrightarrow \Lambda^T G \Lambda = G \tag{1}$$

Soit X la matrice de f: dire que $X \in N$ est équivalent à

$$\forall\ \Lambda \in L, (X\,\Lambda\,X^{-1})^T GX\,\Lambda\,X^{-1} = G$$

ou bien

$$\Lambda^T G' \Lambda = G' \tag{39}$$

avec

$$G' = X^T GX \tag{40}$$

De (1), puisque $G = G^{-1} = G^T$, $\Lambda^T = G\Lambda^{-1}G$ et en éliminant Λ^T dans (39) nous obtenons $GG' \in$ centralisateur de L dans $GL(4, R)$. Puisque cette représentation de L est irréductible (même pour le corps des complexes!) les seules matrices qui commutent avec tous les L sont les multiples de l'identité. Donc $GG' = \lambda I$ où λ est réel. Et

$$G' = X^T GX = \lambda(X)\, G \tag{41}$$

Cette équation caractérise donc les éléments $X \in N$. On vérifie aisément que la correspondance $X \rightsquigarrow \lambda(X)$ est un homomorphisme $N \xrightarrow{\lambda} R^*$ où R^* est le groupe multiplicatif des réels. Par définition de L,

$$L = \operatorname{Ker} \lambda \tag{42}$$

L'équation (34) et le tableau 1 nous montrent que f (dont la matrice est X) préserve le signe de b^2, ou plus précisément la nature du vecteur b d'être de temps, d'espace, de lumière, ou nul, car les petits groupes correspondants ne sont pas isomorphes. La traduction de cette propriété dans (41) est

$$\lambda(X) > 0$$

En notant R^* le groupe multiplicatif des réels et R_+^* celui des réels positifs ($R^* = R_+^* \times Z_2$ où $Z_2 = \{1, \ -1\}$), nous avons donc établi $\operatorname{Im} \lambda \subset R_+^*$. Etablissons l'égalité. Les matrices $\alpha\mathbf{1}$ où $\alpha > 0$ forment un sous-groupe R_+^* du centre de N; donc $R_+^* \lhd N$. L'équation (41) nous montre que $\lambda(\alpha\mathbf{1}) = \alpha^2$ donc $\lambda(R_+^*) = R_+^*$ et $\operatorname{Im} \lambda = R_+^*$.

Nous venons donc d'établir (si le lecteur ne le voit pas, le diagramme 1 pour N et ses deux sous-groupes invariants L et R_+^* lui dira immédiatement) que $L.R_+^* = N$. Comme $L \cap R_+^* = \{1\}$ et que $R_+^* \subset$ Centre de N, nous avons même établi

$$N = L \times R_+^* \tag{43}$$

(La décomposition est aisée à faire si $X \in N$, prendre $|\det X|^{1/4} \in R_+^*$). Nous avons appelé en 3.2 les éléments de R_+^* les dilatations puisqu'elles transforment tout vecteur a en αa, avec $\alpha > 0$.

En résumé nous avons établi que tout $f \in \operatorname{Aut} T$ défini en (22) est le produit d'une dilatation $\lambda_f\mathbf{1}$ et d'un élément Λ_f du groupe complet de Lorentz homogène L.

$$f = \lambda_f 1 . \Lambda_f = \Lambda_f . \lambda_f 1 \tag{44}$$

Alors l'équation (33) (réécrite sous la forme 33′ après 38) détermine $\Phi \in \operatorname{Aut} L$ (ou L_+)

$$\Phi(\Gamma) = \Lambda_f \Gamma \Lambda_f^{-1}$$

c'est-à-dire $\Phi(\Gamma)$ est l'automorphisme intérieur de L (ou L_+) engendré par l'élément Λ_f de L (ou L_+).

Il nous reste à étudier l'équation (32). Les différents ϕ solution de cette équation nous donnent les différentes façons de placer le sous-groupe L dans P. Nous allons montrer que ces différentes "positions" de L dans P s'obtiennent par conjugaison dans P.

Si $\Gamma\Delta = \Delta\Gamma$ l'équation (32) s'écrit

$$(1 - \Phi(\Delta))\,\phi(\Gamma) = (1 - \Phi(\Gamma))\,\phi(\Delta)$$

Dans P (resp. P_+) nous pouvons prendre $\Delta = -1$, qui est l'élément non trivial du centre $\mathscr{C}(P)$ de P (resp. $\mathscr{C}(P_+)$). Alors $\Phi(-1) = -1$

et puisque la multiplication par 2 est $\in \mathrm{Aut}T$, elle est inversible, d'où l'équation

$$\phi(\Gamma) = (1-\Phi(\Gamma))\,\mathrm{l} \quad \text{où} \quad \mathrm{l} = \tfrac{1}{2}\phi(-1) \tag{45}$$

est un élément fixé de T.

Ce résultat a été essentiellement obtenu par Wigner (*Ann. Math.* **40**, 149 (1939), comparez ses équations (38) et (39) avec nos équations (32) et (45). Sa preuve est beaucoup plus longue mais elle est aussi purement algébrique).

En utilisant (40) nous pouvons écrire (45):

$$\phi(\Gamma) = (1-\Lambda_f\Gamma\Lambda_f^{-1})\,\mathrm{l} \tag{46}$$

Cette fonction correspond à l'automorphisme interne (l,Λ_f). En effet (en utilisant 13′)

$$(\mathrm{l},\Lambda)\,(a,\Gamma)\,(\mathrm{l},\Lambda)^{-1} = (\Lambda a+\mathrm{l}-\Lambda\Gamma\Lambda^{-1}\mathrm{l},\Lambda\Gamma\Lambda^{-1}) \tag{47}$$

En résumé, nous avons prouvé que tout automorphisme F de P (ou P_+) est donné par

$$F(a,\Gamma) = (f(a)\,\phi(\Gamma),\Phi(\Gamma))$$

avec

$$\begin{aligned} f(a) &= \lambda\Lambda_f a = \Lambda_f\lambda a,\ f\in L\times R_+^*,\ \Lambda_f\in L,\ \lambda\in R_+^* \\ \phi(\Gamma) &= (1-\Lambda\Gamma\Lambda^{-1})\mathrm{l},\ \mathrm{l}\in T,\ \Lambda\in L \\ \Phi(\Gamma) &= \Lambda\Gamma\Lambda^{-1} \end{aligned}$$

Ces automorphismes forment le groupe $T \wedge (L\times R^*) = D$ déjà défini en 3.2. Ce résultat, avec l'équation (31) complète la preuve de notre théorème (énoncé par l'équation 20).

3.5. *Preuve de Aut (AutP)=AutP*†

Puisque $\mathrm{Aut}P = D = P \wedge R_+^*$ est un produit semi-direct, nous pouvons appliquer l'étude du § 3.3 à ce groupe, le sous-groupe invariant P de D étant caractéristique ($P \lhd D$). Les éléments de D étant noté par un triplet (a,A,α) avec $(a,A)\in P$, $\alpha\in R_+^*$, avec la loi de groupe écrite en 18 et 18′ nous trouvons aisément

$$(\mathrm{l},\Lambda,\lambda)\,(a,A,\alpha)\,(\mathrm{l},\Lambda,\lambda)^{-1} = ((1-\alpha\Lambda A\Lambda^{-1})\mathrm{l}+\lambda\Lambda a,\Lambda A\Lambda^{-1},\alpha)$$

† Une autre preuve, utilisant des résultats ultérieurs du cours, sera donnée en appendice (Lemme B).

Nous allons montrer que tout automorphisme de D est intérieur. Notre étude en 3.3 nous montre que $F \in \operatorname{Aut} D$ est défini par un triplet.

$$F \in \operatorname{Aut} D : \{f \in \operatorname{Aut} P = D,\ \Phi \in \operatorname{Aut} R_+^*,$$
$$\phi \text{ application de } R_+^* \text{ dans } P\}$$

Nous noterons f par $(1, \Lambda, \lambda)$ et $\phi(\alpha)$ par $(\phi_T(\alpha), \phi_L(\alpha)) \in P$.

Les trois objets f, Φ, ϕ doivent satisfaire la relation (29) soit ici, en remplaçant b de (29) par $(b, B) \in P$.

$$(\phi_T(\alpha), \phi_L(\alpha)) \cdot (\Phi(\alpha)(\lambda\Lambda b + 1 - \Lambda B\Lambda^{-1} 1), \Lambda B\Lambda^{-1}) =$$
$$= (\lambda\Lambda b\alpha + (1 - \Lambda B\Lambda^{-1})1, \Lambda B\Lambda^{-1}) \cdot (\phi_T(\alpha), \phi_L(\alpha)) \quad (48)$$

Pour la transformation de Lorentz cela donne, pour tout $B \in L$

$$\phi_L(\alpha)\Lambda B\Lambda^{-1} = \Lambda B\Lambda^{-1}\phi_L(\alpha)$$

soit $\operatorname{Im}\phi_L \subset$ Centre de L.

La relation (29) donne de plus pour ϕ_L

$$\phi_L \in \operatorname{Hom}(R_+^*, L)$$

Ces deux relations donnent $\phi_L \in \operatorname{Hom}(R_+^*, Z_2)$ puisque le centre de L a deux éléments. Le seul homomorphisme possible est le trivial.

Avec ce résultat, (48) donne pour la translation

$$\phi_T(\alpha) + \Phi(\alpha)(1 - \Lambda B\Lambda^{-1})1 + \Phi(\alpha)\lambda\Lambda b$$
$$= \alpha\lambda\Lambda b + (1 - \Lambda B\Lambda^{-1})1 + \Lambda B\Lambda^{-1}\phi_T(\alpha)$$

et cela quelque soit $(b, B) \in P$. Pour $B = 1$ on a

$$\Phi(\alpha)\lambda\Lambda b = \alpha\lambda\Lambda b$$

donc $\Phi(\alpha) = \alpha$, Φ est l'automorphisme identique de R_+^*. Il reste donc à satisfaire pour tout B

$$(I - \Lambda B\Lambda^{-1})\phi_T(\alpha) = (I - \Lambda B\Lambda^{-1})(1 - \alpha)1$$

donc

$$\phi_T(\alpha) = (1 - \alpha)1.$$

Ce qui satisfait identiquement (27) et cette fonction de α est déterminée par $f = (1, \Lambda, \lambda) \in \operatorname{Aut} P$. Nous venons donc de prouver

$\mathrm{Aut}P = \mathrm{Aut}D$. Puisque le groupe $D = \mathrm{Aut}P$ n'a pas de centre il est de plus un groupe complet (voir définition en 2.4). Ce résultat a aussi été obtenu en oubliant la topologie de P.† Nous allons rappeler un résultat remarquable obtenu sans hypothèse de continuité ou de linéarité.

3.6. *Théorème de Zeeman*

Notons Γ_x^+ l'intérieur de cône futur de sommet x dans l'espace-temps. Il est aisé de vérifier que la relation $y \in \Gamma_x^+$ est une relation d'ordre partielle dans l'espace-temps. C'est la relation de "causalité" et nous la noterons $x < y$. E. C. Zeeman a prouvé (*J.M.P.* **5**, 490, 1964) le

Théorème Z. Si une permutation f de l'espace temps ainsi que son inverse f^{-1} préserve la relation de causalité (c'est-à-dire

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \quad \text{et} \quad f^{-1}(x) < f^{-1}(y))$$

alors $f \in D^{\uparrow}$.

Autrement dit une telle permutation est le produit d'une transformation de Poincaré orthochrone ($\in P^{\uparrow}$) et d'une dilatation.

Une autre version du théorème de Zeeman est:

Théorème Z'. Le groupe $D = \mathrm{Aut}P$ est le groupe des *permutations* de l'espace-temps préservant la nature "temps", "espace", "lumière", "nulle" de la séparation de tout couple de points de l'espace-temps (voir MB § II.4 pour la preuve Th. $Z \Rightarrow$ Th. Z').

Un tel théorème impose de très fortes restrictions à la structure du groupe d'invariance d'une théorie relativiste!

4. Extensions de Groupes

4.1. *Le Probleme d'Extension de Groupe*

Le problème que nous nous posons (en pensant surtout au groupe de Poincaré pour Q) est: deux groupes K et Q étant donnés, trouver tous les E tels que $K \lhd E$ et $E/K = Q$.

† Les automorphismes "algébriques" (en oubliant la topologie) des groupes de Lie classiques sont tous connus, voir par exemple J. Dieudonné, "La géométrie des groupes classiques".

Considérons $K \lhd E$ de quotient $E/K = Q$. Nous dirons que E est une extension de Q par K. Comme nous l'avons vu en (8) § 2.4, les automorphismes intérieurs de E induisent sur $i(K)$ des automorphismes, d'où l'homomorphisme canonique $E \to \mathrm{Aut}\,K$ (en identifiant K et $i(K)$). Soit $a'\alpha'$ et $a'\beta'$ deux éléments d'un translaté $a'K$ de K dans E, correspondant à l'élément $p(a') = a$ de Q. On peut écrire $\beta' = \alpha'\gamma'$, donc les deux automorphismes de $i(K)$ induits par $a'\alpha'$ et $a'\beta' = a'\alpha'\gamma'$ ne diffèrent que par l'automorphisme intérieur de K induit par γ'. D'où une application $Q \to \mathrm{Out}\,K$ que l'on vérifie aisément être un homomorphisme s'insérant dans le diagramme commutatif 6.

$$\begin{tikzcd}
& & 1 \arrow[d] \\
& & C \arrow[d, "j'"] \\
1 \arrow[rr] & & K \arrow[rr, "i"] \arrow[d, "s'"] & & E \arrow[rr, "p"] \arrow[d, "f"] & & Q \arrow[rr] \arrow[d, "g"] & & 1 \\
1 \arrow[rr] & & \mathrm{Int}\,K \arrow[rr, "j"] \arrow[d] & & \mathrm{Aut}\,K \arrow[rr, "s"] \arrow[dr, "h'"] & & \mathrm{Out}\,K \arrow[rr] \arrow[dl, "h"'] & & 1 \\
& & 1 & & & \mathrm{Aut}\,C & & &
\end{tikzcd}$$

DIAGRAMME 6

Puisque le centre de C est sous-groupe caractéristique de K, en utilisant (9) du § 2.4, on déduit l'existence de h' et puisque $\mathrm{Ker}\,h' \supset \mathrm{Ker}\,s = \mathrm{Int}\,K$, on déduit l'existence de h. Le diagramme 6 résumé donc toute notre information. La complétion de ce diagramme aurait pu être faite "automatiquement" en appliquant des lemmes sous les diagrammes en général (cf. M.B. lemme 3, Colollaire 1 et 2, M.I. lemmata 1 à 5).

Problème. On décompose généralement le problème d'extensions en sous-problèmes.

Etant donné K, Q, $g \in \text{Hom}(Q, \text{out} K)$ trouver tous les groupes E tels que le diagramme 6 soit commutatif.

S'il y a des solutions, comment les compte-t-on? Les mathématiciens ont été amenés à une définition naturelle de l'équivalence des extensions K, Q, g., cette condition, très générale pour les problèmes de type d'extension de structure, s'exprimant en terme de commutativité et d'homomorphismes.

Deux extensions E et E', solutions du problème K, Q, g, sont équivalentes s'il existe un homomorphismes $E \xrightarrow{f} E'$ tel que le diagramme 7 soit commutatif. On déduit que f doit être un isomorphisme, et il est alors aisé de prouver qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & K \arrow[r, "c"] \arrow[d, "I"] & E \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"] & Q \arrow[r] \arrow[d, "I"] & 1 \\
1 \arrow[r] & K \arrow[r, "i'"'] & E' \arrow[r, "p'"'] & Q \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

DIAGRAMME 7

Deux extensions équivalentes sont donc isomorphes (par f). La réciproque n'est pas toujours vraie (par exemple si K n'est pas sous groupe caractéristique de E et si $f \in \text{Aut} E$ déplace K; nous recontrerons d'autres exemples dans la suite).

Cette distinction entre groupe E et E' isomorphes mais qui ne sont pas équivalents est très naturelle dans les applications physiques. On ne saurait trop répéter que si le physicien doit connaître la structure des groupes abstraits qu'il utilise, il n'est pas interessé seulement par le groupe abstrait (défini à un isomorphisme près). Dans le cas d'extensions, la division, parfois plus raffinée, en classe d'équivalence est utile. En effet le physicien donne un nom à la plupart des éléments des groupes qu'il utilise et dans le cas ci-dessus la position de $K \lhd E$ dans E a un sens physique.†

† Cf. Lurçat et Michel, *N. Cim.* **21**, 574 (1961), où les extensions de Poincaré considérés sont isomorphes quand le nombre d'ϵ ayant la valeur 1 est fixe, mais elles sont inéquivalentes et leur signification physique est fort différente!

Le physiciens est même interessé, dans le cas d'un produit semi-direct $E = K \wedge Q$, a la position de Q dans E. Nous étudierons cette question plus loin.

Notons $\mathrm{Ext}_g(Q,K)$ l'ensemble des classes d'extensions K, Q, $Q \xrightarrow{g} \mathrm{Our}\,K$. Nous allons présenter au chapitre suivant un bref aperçu des résultats de la théorie des extensions. Nous ne donnerons que peu preuves et nous renverrons souvent à M.I. ou M.B. Mais surtout, nous recommandons au lecteur interessé par le sujet de lire les articles originaux à ce sujet:

S. Eilenberg et S. Maclane, "Cohomology theory in abstract group I and II", *Ann. Math.* **48,** 51 and 326 (1947).
R. Baer, "Erweiterung von gruppen and ihren homomorphismen", *Math. Zeit.* **38,** 375 (1934).
R. Baer, "Automorphismen von Erweiterungs gruppen", *Act. Sc. Bul.* No. 205. Hermann, Paris 1935.

Je recommande aussi au lecteur le bel exposé d'Eilenberg, "Topological methods in abstract algebra. Cohomology theory of groups", *Bull. Ann. Math. Soc.* **55,** 3 (1949).

Après cela le lecteur pourra jeter un coup d'oeil dans tous les livres intitulé "Homological algebra, Homology, au chapitre sur les extensions de groupes.

4.2. *Extensions par un Noyau Abelien*

Le problème des extensions de Q par le noyau K, lorsque K est Abelien est plus simple; nous commençons donc par lui. Le diagramme 6 lui-même se simplifie en diagramme 8. Nous notons A au lieu de K (A = Abelien, noté additivement, mais $i(A) \lhd E$ sera noté multiplicativement avec $\alpha' = i(\alpha)$).

D'autre part, pour tout $g \in \mathrm{Hom}(Q, \mathrm{Aut}\,A)$ il y a toujours au moins une solution au problème A, Q, g. C'est le produit semi-direct que nous avons vu au § 2.5 et dont la loi de groupe s'écrit, en transcrivant (11)

$$(\alpha, a)(\beta, b) = (\alpha + a\beta, ab) \tag{49}$$

où

$$a\beta = g(a)[\beta] \tag{49'}$$

4.2.1. *Les systèmes de facteurs.* Admettons que nous ayons une extension E satisfaisant au diagramme 8. Puisque l'ensemble E est

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] & E \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f"'] & Q \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 1 \\ & & & \operatorname{Aut} A & \end{tikzcd}$$

DIAGRAMME 8

l'ensemble produit $A \times Q$, nous étiquetons les éléments de E en choisissant une application biunivoque d'ensemble

$$A \times Q \xrightarrow{\rho} E \text{ avec } \rho(\alpha, a) = i(\alpha)\, k(a) = \alpha'\, k(a)$$

où k est une section de E au-dessus de Q, c'est-à-dire une application $k\colon Q \xrightarrow{k} E$ tel que

$$p \circ k = I_Q \tag{50}$$

En d'autre termes, k choisi un représentatif pour chaque translate de K dans E.

Par définition de f,

$$k(a)\, i(\alpha)\, k(a)^{-1} = i(f \circ k(a)\,[\alpha]) = a(g(a)\,[\alpha]) = i(a\alpha) \tag{51}$$

puisque $f = g \circ p$, diagramme 8, et en utilisant 50 et 49′.

L'équation (50) nous montre encore que

$$k(a)\, k(b)\, k(ab)^{-1} \in \operatorname{Ker} p$$

nous poserons

$$k(a)\, k(b)\, k(ab)^{-1} = \omega'(a, b) = i(\omega(a, b)) \tag{52}$$

où ω est une fonction a deux variables de Q dans A. Nous ne choisirons pour k que des sections "normalisées", c'est-à-dire

$$k(1_Q) = 1_E \tag{53}$$

ce qui implique

$$\omega(1, a) = \omega(b, 1) = \omega(1, 1) = 0_A \tag{54}$$

L'associativité de la loi de groupe impose, en calculant des deux façons possibles $k(a)k(b)k(c)$ et en utilisant (51).

$$(\delta\omega)\,(a, b, c) = a\omega(b, c) - \omega(ab, c) + \omega(a, bc) - \omega(a, b) = 0 \tag{55}$$

Réciproquement, étant donné $g \in \mathrm{Hom}(Q, \mathrm{Aut}\, A)$ et sur Q un système de facteur $\omega(a,b)$ à valeur dans A, satisfaisant (53) et (54) on vérifie que sur l'ensemble produit $E = A \times B$ la loi

$$(\alpha, a)(\beta, b) = (\alpha + a\beta + \omega(a,b), ab) \tag{56}$$

est une loi de groupe.

Le choix de section était arbitraire. Si nous avoins changé de section en prenant

$$\hat{k}(a) = \phi'(\alpha)\, k(a) \tag{57}$$

où, par (50), $\rho(\phi'(a)) = 0$ donc $\phi'(a) \in i(K)$.

On calcule directement que le nouveau système de facteur $\hat{\omega}(a,b)$ est relié à l'ancien par

$$\hat{\omega}(a,b) - \omega(a,b) = (\delta\phi)(a,b) \tag{58}$$

avec

$$(\delta\phi)(a,b) = a\phi(b) - \phi(ab) + \phi(a) \tag{59}$$

Notons que $(\delta\phi)(a,b)$ satisfait lui-même l'équation (55) $\delta(\delta\phi) = 0$. C'est donc un système de facteur qui est appelé facteur trivial. En effet, on peut le rendre nul par un changement de section $k(a) \to (\phi'(a))^{-1} k(a)$. On obtient alors la loi (49) du produit semi-direct et la section $k(a) = (0, a)$ est un homomorphisme de ϕ dans E. De façon générale, le problème de trouver les extensions A, Q, g est ramené à celui de la détermination des systèmes de facteurs, modulo un système de facteur trivial. Ce dernier problème appartient à un type classique que l'on rencontre un peu partout en mathématiques. Les méthodes pour le résoudre peuvent donc s'inspirer des branches les plus diverses des mathématiques. La littérature est très abondante. Mais pour la consulter il faut connaître au moins le vocabulaire de la cohomologie. Nous allons le définir dans le cas des groupes, mais de façon générale.

4.2.2. *Langage cohomologique; application aux groupes.* Considérons une suite d'homomorphismes δ_n de groupes abeliens

$$\ldots \to C^{n-2} \xrightarrow{\delta_{n-2}} C^{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} C^{n} \xrightarrow{\delta_{n}} C^{n+1} \xrightarrow{\delta_{n+1}} C^{n+2} \to \ldots \tag{60}$$

tel que

$$\forall n, \delta_n \circ \delta_{n-1} = 0 \tag{61}$$

Cela est équivalent à

$$\forall\, n, \operatorname{Im} \delta_{n-1} \subset \operatorname{Ker} \delta_n \tag{62}$$

Une telle suite est appelée un complexe.

En langage cohomologique:

Les éléments de C^n sont appelés des n-cochaines, $\operatorname{Ker}\delta_n$ est noté Z^n, ses éléments sont appelés des n-cocycles, $\operatorname{Im}\delta_{n-1}$ est noté B^n, ses élements sont appelés des n-cobords. Le quotient $Z^n/B^n = H^n$ est le n^e groupe de cohomolgie du complexe.

Si le complexe était une suite exacte (comme celle considérée en 2.2) alors $\forall\, n$, $B^n = \operatorname{Im}\delta_{n-1} = \operatorname{Ker}\delta_n = Z^n$, donc $H^n = 0$. La cohomologie du complexe mesure donc son manque d'exactitude.

Appliquons celà au groupe Q, pour sa cohomologie à valeur dans A, pour une action donnée $g \in \operatorname{Hom}(Q, \operatorname{Aut} A)$ de Q sur A. Les n-cochaines sont les fonctions $\omega_n(x_1, \ldots, x_n)$ de n variables définies sur Q et à valeur dans A. La loi d'addition dans C^n est donnée par l'addition des valeurs dans A des fonctions ω_n. L'homomorphisme δ_n est défini par

$$\begin{aligned}(\delta_n\, \omega_n)\,(x_1, \ldots, x_{n+1}) = {} & x_1\, \omega_n(x_2, \ldots, x_{n+1}) + \\ & + \sum_{k=1}^{n} \;(-1)^k\, \omega_n(x_1, \ldots, x_k\, x_{k+1}, \ldots, x_{n+1}) \\ & (-1)^{n+1}\, \omega_n(x_1, \ldots, x_n)\end{aligned} \tag{63}$$

Pour $n = 2$, c'est l'identité ecrite en (55) et cette équation signifie qu'un système de facteur est un 2-cocycle. Pour $n = 1$, on a l'équation (59); un système de facteur trivial est donc un 2-cobord. Les éléments de $H^2_g(Q, A)$ sont donc les systèmes de facteurs modulo les facteurs triviaux.

Dans M.I., la correspondance biunivoque entre les éléments de $H^2_g(G, A)$ et les classes d'équivalence d'extensions est établie en détail (la littérature mathematique ne s'abaisse jamais à tant de pédanterie). Puisque $H^2_g(Q, A)$ est un groupe, il y a donc une structure de groupe sur l'ensemble des classes d'extensions $\operatorname{Ext}(Q, A, g)$. Le lecteur est renvoyé encore à MI § 4.4 pour les détails. Comme nous l'avons mentionné, l'élément neutre de $H^2_g(Q, A)$ representé par le système de facteur nul, correspond au produit semi-direct $A \underset{g}{\wedge} Q$.

Nous ne dirons riens ici sur le calcul effectif des $H_g^2(Q,A)$. La littérature mathématique permettant soit de calculer les groupes de cohomologie soit de ramener ce calcul à celui d'autres groupes est vaste et à la disposition du lecteur!

Bornons-nous à donner ici des résultats les plus élémentaires. Si Q est un groupe "libre" (voir définition dans un livre de mathématiques) $\forall\, n>1$, $H_g^n(Q,A)=0$.

Lemme. Si Q est un groupe fini de m éléments, alors

$$\forall\, n, mH_g^n(Q,A) = 0$$

c'est-à-dire

$$\forall\, \alpha \in H_g^n(Q,A), m\alpha = 0$$

(Cf. M.I., théorème 2). Pour le prouver, soit ω_n un n cocycle et

$$\psi_{n-1} = \Sigma_{x_n \in \phi}\, \omega_n(x_1,\ldots,x_n)$$

on a

$$\delta\omega_n = 0 = \delta\psi_{n-1} + (-1)^n m\omega_n$$

Définition. Un groupe Abelien D est divisible, si

$$Vn \text{ entier} \neq 0,\ \forall\, \alpha \in D, \exists\, \beta, \alpha = n\beta$$

Autrement dit, en notation multiplicative, tout élément a au moins une racine n^e, pour tout n (l'unicité de β n'est pas demandée!)

Nous avons un corollaire du résultat précédent.

Lemme. Si Q est fini et si D est un groupe abelien divisible tel que l'homomorphisme $\forall\, n$, $D \xrightarrow{n} nD$ est injectif (c'est-à-dire D n'a pas d'éléments d'ordre fini) alors $\forall\, n$, $H_g^n(\phi, D)=0$.

Preuve. Soit ω_n un cocycle et formons comme dans le lemme précedent ψ_{n-1}. Puisque D est divisible, on peut définir η_{n-1} tel que $\psi_{n-1}=m\eta_{n-1}$ alors $m(\omega_n-(-1)^n\delta\eta_{n-1})=0$. Nos hypothèse impliquent alors $\omega_n=(-1)^n\delta\eta_{n-1}$ qui est un cobord.

Nous venons donc de montrer au lecteur des cas simples de calculs de cohomologie lorsque celle-ci est nulle!

Nous allons simplement montrer au lecteur qu'il a déjà calculé un groupe de cohomologie. Appelons en effet $\Gamma \in \mathrm{Hom}\,(L, \mathrm{Aut} T)$ qui correspond à l'action ordinaire du groupe de Lorentz homogène sur celui des translations.

Dans 3.4, l'équation 32 montre que ϕ est un 1-cocycle $Z^1_{\Gamma\circ\Phi}(L,T)$. Nous avons montré qu'un tel cocycle s'écrit sous la forme (45) ce qui montre que c'est un cobord $\in B^1_{\Gamma\circ\Phi}(L,T)$, donc nous avons calculé:

$$H^1_{\Gamma\circ\Phi}(L,T) = 0 \tag{64}$$

et ce résultat est indépendant aussi de $\Phi \in \operatorname{Aut} L$.

De facon plus générale, nous avons établie en 3.4 une signification du groupe $H^1_g(Q,A)$. Ses éléments correspondent aux sous-groupes du produit semi-direct $A \underset{g}{\wedge} Q$ isomorphes a Q, qui sont des sections, et qui ne sont pas conjugués entre eux (c'est-a-dire changé par les automorphismes intérieurs de $A \wedge Q$).

L'interprétation de $H^0_g(Q,A)$ est simple. Par définition $C^0 = A$ et $B^0 = 0$ donc $H^0 = Z^0$. Or $\alpha \in \operatorname{Ker} \delta_0 \Leftrightarrow \forall a \in \phi,\ \alpha - a\alpha = 0$. Ces éléments sont les points fixes de l'action de ϕ sur A. On note encore le groupe qu'il forme A^Q et nous avons donc

$$A^Q = H^0_g(Q,A) \tag{65}$$

4.2.3. *Extensions centrales de noyau Abelien.* Lorsque $g = 0$, l'homomorphisme trivial de $\operatorname{Hom}(\phi, \operatorname{Aut} A)$, en d'autres termes, lorsque Q n'agit pas sur A, on a alors $H^0_0(Q,A) = A$ et $H^1_0(Q,A) = \operatorname{Hom}(Q,A)$. (Nous en laissons la vérification au lecteur.) Les extensions correspondant à $H^2_0(Q,A)$ sont appelées les extensions *centrales* de Q par A. En effet $A \subset$ Centre de E. Le produit direct $A \times Q$ est l'une d'elles (zéro de $H^2_0(Q,A)$). Un bien plus grand nombre de théorème généraux peuvent être donné dans ce cas-là. Une étude plus particulière des extensions centrales pour un noyau quelconque est faite dans ce cas-là.

4.3. *Extensions par un Noyau non Abelien*

Nous commençons par l'étude du cas le plus simple.

4.3.1. *Etude du cas central $g \in Hom(Q, Out K)$, g est trivial.* Il y a toujours une solution, le produit direct $E = K \times Q$.

Considérons une extension centrale quelconque et l'homomorphisme $E \xrightarrow{f} \operatorname{Aut} K$ Puisque $Q \xrightarrow{g} \operatorname{Out} K$ est trivial, on doit avoir par commutativité du Diagramme 6

$$s \circ f = g \circ p = 0 \quad \text{donc} \quad \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} S = \operatorname{Int} K$$

Les automorphismes intérieurs de E induisent sur K des automorphismes intérieur. Et puisque $K \subset E$, f est surjectif.

Soit $H = \mathrm{Ker} f$, H est le centralisateur de K dans E

$$H = \mathrm{Ker} f = \mathscr{C}_E(K)$$

donc

$$H \cap K = C = \text{centre de } K$$

Nous pouvons alors appliquer le diagramme 2 avec $K \lhd E$, $H \lhd E$, $K \cap H = C < E$. Nous obtenons le diagramme 9 qui prouve que $E/C = \mathrm{Int}\, K \times Q$.

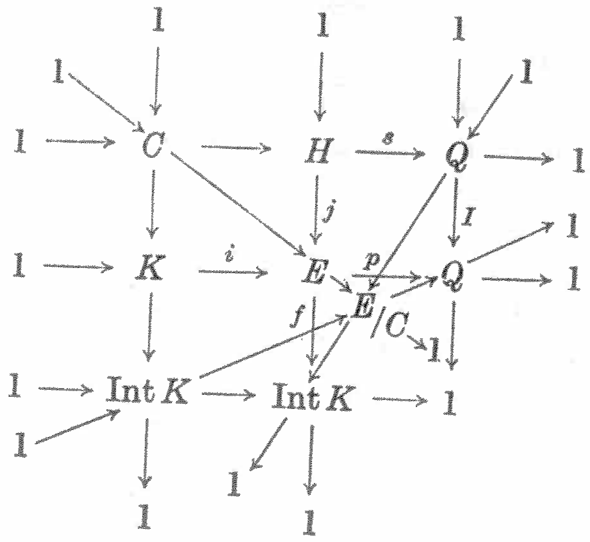

DIAGRAMME 9

Dans le diagramme 9, $p \circ j = s$, surjectif; donc nous pouvons prendre une section $k : Q \to E$, $p \circ k = I$ a valeur dans $j(H)$. Le système de facteur est aussi à valeurs dans le groupe $\mathrm{Im}\, j$.

$$\omega'(a, b) = k(a)\, k(b)\, k(ab)^{-1} \in \mathrm{Im}\, j$$

Il est aussi à valeur dans $\mathrm{Im}\, i$. Puisque $\omega'(a, b) \in \mathrm{Im}\, i \cap \mathrm{Im}\, j$, i et j étant deux injections on en déduit que

$$\omega(a, b) \in C = \text{Centre de } K$$

Ce système de facteur définit à la fois une extension centrale de Q par K et une de Q par C. On vérifie aisément qu'il établit ainsi une correspondance biunivoque entre ces 2 ensembles d'extensions respectent les classes d'équivalence. Donc, en notant $\mathrm{Ext}_0(Q,K)$ l'ensemble des classes d'équivalence des extensions centrales de Q par K, nous obtenons

$$\mathrm{Ext}_0(Q,K) = H_0^2(Q,C)$$

Nous pouvons obtenir aisément ce résultat canoniquement. Etant donné E nous avons obtenu $H = \mathscr{C}_E(K)$, comme extension de Q par C. Il est aisé de vérifier que cette correspondance passe au quotient par la relation d'équivalence (voir M.B. § I.7) d'où une application

$$\mathrm{Ext}_0(Q,K) \xrightarrow{z} H_0^2(Q,C)$$

Soit H une extension centrale de Q par C, d'éléments ξ. On obtient une extension E de Q par K en posant $E = (K \times H)/C'$ ou C' est l'antidiagonale de $C \times C \lhd K \times H$ (les éléments de C' sont de la forme (γ, γ^{-1}) où $\gamma \in C$). On vérifie encore que la correspondance $H \rightsquigarrow E$ passe au quotient pour les relations d'équivalence (voir M.B. § I.7) et que z':

$$H_0^2(Q,C) \xrightarrow{z'} \mathrm{Ext}_0(Q,K)$$

et telle que $z' \circ z = I$, $z \circ z' = I$. La loi de groupe de $H_0^2(Q,C)$ passe sur $\mathrm{Ext}_0(Q,K)$. (Voir par exemple M.I. 7.1. Construction de Baer.)

En résumé, les solutions du problème d'extension K, Q, $g = 0$ sont en correspondance biunivoque avec celles du problème abelien $C =$ Centre de K, Q, $g = 0$. Elles forment le groupe $H_0^2(Q,C)$ dont l'élément neutre représente le produit direct:

Corollaire. Si K est complet ($C(K) = 1$, $\mathrm{Out}\, K = 1$) quelque soit le groupe Q, le produit direct $K \times Q$ est la seule extension de Q par K.

En effet

$$\mathrm{out}\, K = 1 \Rightarrow g \in \mathrm{Hom}\,(Q, \mathrm{out}\, K) = 0$$

et

$$C(K) = 1 \Rightarrow H^2(Q,C) = 0$$

Nous avons donné en 2.4 des exemples de groupes complets.

4.3.2. *Une extension centrale peut-elle être produit semi-direct sans être un produit direct?* Donnons-nous $Q \xrightarrow{r} \operatorname{Int} K$. Nous pouvons alors former le produit semi-direct $E = K \wedge_r Q$ avec la loi

$$(\alpha, a)(\beta, b) = (\alpha . a(\beta), ab) \quad \text{où} \quad a(\beta) = r(a)[\beta]$$

C'est une extension centrale puisque $Q \xrightarrow{g} \operatorname{Out} K$ est trivial. Cette extension est-elle équivalente au produit direct? (Pour la section choisie, le système de facteur est nul, mais puisque pour cette section $(1, a)$ induit sur les éléments de K l'automorphisme interne $2(a)$, la section n'est pas dans $H = \mathscr{C}_E(K)$). Le théorème suivant répond à cette question.

Théorème. La condition nécessaire et suffisante pour que l'extension centrale E, qui est produit semi-direct $K \wedge Q$ par $Q \xrightarrow{r} \operatorname{Int} K$, soit équivalente au produit direct $K \times Q$ est qu'il existe un homomorphisme $t \in \operatorname{Hom}(Q, K)$ tel que $r = s \circ t$ où s est l'homomorphisme canonique $K \xrightarrow{s} \operatorname{Int} K$.

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & 1 \arrow[dl] & \\
 & & & & Q \arrow[dl, "i'"'] \arrow[dr, "I"] & & \\
1 \arrow[r] & K \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "I"'] & & E \arrow[rr, "p"] \arrow[dl, "p'"] \arrow[dd, "f"] & & Q \arrow[r] & 1 \\
 & & K \arrow[dl] \arrow[dr, "s"] & & Q \arrow[ul, "k"'] \arrow[ur, "I"'] \arrow[dl, "r"] & & \\
 & 1 & & \operatorname{Int} K \arrow[d] \arrow[dr] & & 1 \arrow[ul] & \\
 & & & 1 & 1 & &
\end{tikzcd}$$

DIAGRAMME 10

La condition est nécessaire: écrivons les hypothèses dans le Diagramme 10. L'homomorphisme cherché est $t = p' \circ k$.

La condition est suffisante: dans le produit semi-direct $E = K \wedge Q$, avec l'homomorphisme $1 \rightarrow Q \xrightarrow{k} E$ telle que $p \circ k = I$, nous avons la loi

$$\alpha' k(a) \beta' k(b) = \alpha' a(\beta)' k(ab)$$

où

$$a(\beta)' = k(a) \beta' k(a)^{-1}$$

Soit $t \in \operatorname{Hom}(Q, K)$ avec $s \circ t = r$, donc

$$t(a) \beta t(a^{-1}) = s \circ t(a)[\beta] = r(a)[\beta] = a(\beta)$$

et donc $t(a^{-1})' k(a)$ commute avec tout élément β' de $i(K) \lhd E$, posons donc

$$a' = t(a^{-1})' k(a) = i'(a)$$

La correspondance $a \overset{i'}{\rightsquigarrow} a'$ est un homomorphisme $Q \xrightarrow{i'} E$; en effet

$$a' b' = i'(a) i'(b) = t(a^{-1})' k(a) t(b^{-1})' k(b)$$

et puisque $t(b^{-1})' \in i(K)$,

$$a' b' = t(b^{-1})' t(a^{-1})' k(a) k(b) = t((ab)^{-1})' k(ab) = i'(ab)$$

De plus $p \circ i' = I_Q$. Donc l'extension E est équivalente au produit direct $K \times Q$.

Donnons donc un exemple de produit semi-direct central qui n'est pas équivalent à un produit direct. Prenons $K = SL(2, C) = \bar{L}_0$, alors $\operatorname{Int} K = L_0$, prenons pour Q soit L_0 (soit respect. P_0) avec pour r soit I_{L_0} (soit respect. $P_0 \xrightarrow{r} L_0 \rightarrow 1$). Mais il n'y a pas d'homomorphisme non trivial de L_0 ou P_0 dans $\bar{L}_0$.

Examinons un cas semblable mais plus général.

4.3.3. *Conditions nécessaire et suffisante pour qu'un produit semi-direct $K \wedge Q$ soit solution du problème*: $K, Q, g \in \operatorname{Hom}(Q, \operatorname{Out} K)$.

Réponse. C'est qu'il existe un homomorphisme $Q \xrightarrow{r} \operatorname{Aut} K$ tel que $g = s \circ r$ où s est l'homomorphisme canonique $\operatorname{Aut} K \xrightarrow{s} \operatorname{Out} K \rightarrow 1$.

La condition est suffisante, car donné r, nous savons construire le produit semi-direct et le g correspondant est $s \circ r$.

La condition est nécessaire. En effet en construisant le diagramme du produit semi-direct: avec $p \circ k = I$, l'homomorphisme $f \circ k$ est l'homomorphisme r cherché.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & K \arrow[r, "i"] \arrow[d] & K_{\Lambda} Q \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"'] & Q \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 1 \\
 & & & Q \arrow[ul, "k"] \arrow[u, "I"'] & \\
1 \arrow[r] & \operatorname{Int} K \arrow[r] & \operatorname{Aut} K \arrow[r, "s"'] & \operatorname{Out} K \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

DIAGRAMME 11

Notons une autre condition *suffisante*, quel que soit

$$g \in \operatorname{Hom}(Q, \operatorname{Out} K)$$

Cette condition est $\operatorname{Aut} K$ est produit semi-direct:

$$\operatorname{Aut} K = \operatorname{Int} K \wedge \operatorname{Out} K$$

En effet, soit k une section de $\operatorname{Aut} K$ qui soit une injection de $\operatorname{Out} K$, alors $k \circ g \in \operatorname{Hom}(Q, \operatorname{Aut} K)$.

$$\begin{tikzcd}
 & & & Q \arrow[d, "g"'] & & \\
 & & & \operatorname{Out} K \arrow[dl, "k"'] \arrow[dr, "I"] & & \\
1 \arrow[r] & \operatorname{Int} K \arrow[r] & \operatorname{Aut} K \arrow[rr, "s"] & & \operatorname{Out} K \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

DIAGRAMME 12

L'homomorphisme g étant donné, il suffit que $\operatorname{Aut}' K = s^{-1}(\operatorname{Im} g)$ soit un produit semi-direct $(\operatorname{Int} K) \wedge (\operatorname{Im} g)$. Pour de grandes classes de groupes K, $\operatorname{Aut} K$ est ainsi un produit direct;

Soit trivialement:

$$\operatorname{Out} K = 1$$

K Abelien ou encore,

Soit non trivialement et pour un sous-groupe $\mathrm{Aut}'K$ de $\mathrm{Aut}\,K$: K est un groupe de Lie compact, $\mathrm{Aut}'K$ étant le sous-groupe de $\mathrm{Aut}\,K$ formés des automorphismes de groupe de Lie. (Siebenthal, *Comm. Helv. Mat.* 1955.)

Si K est un groupe de Lie compact semi-simple, tous ses automorphismes sont continus et $\mathrm{Aut}'K = \mathrm{Aut}\,K$.

Si g est une injection, cette condition suffisante:

$$s^{-1}(\mathrm{Im}\,g) = \mathrm{Int}\,K \wedge \mathrm{Im}\,g$$

est encore nécessaire pour l'existence d'un produit direct.

Nous allons donc traiter le cas où l'homomorphisme

$$r \in \mathrm{Hom}\,(Q, \mathrm{Aut}\,K)$$

tel que $g = s \circ r$ existe.

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & & & \\
1 \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[dd, "j'"'] & H \arrow[dd, "i'"] & & & \\
 & & & & & \\
1 \arrow[r] & K \arrow[r, "i"] \arrow[dd, "s'"'] & E \arrow[rr, "p"] \arrow[dd, "f"'] & & Q \arrow[r] \arrow[dd, "g"] & 1 \\
 & & & Q \arrow[ur, "1"'] \arrow[dr, "g"] \arrow[dl, "r"'] & & \\
1 \arrow[r] & \mathrm{Int}\,K \arrow[r, "j"'] \arrow[d] & \mathrm{Aut}\,K \arrow[rr, "s"'] \arrow[dr, "h'"'] & & \mathrm{Out}\,K \arrow[r] \arrow[dl, "h"] & 1 \\
 & 1 & & \mathrm{Aut}\,C & &
\end{tikzcd}$$

DIAGRAMME 13

4.3.4. *Solutions du problème d'extension K, Q, $Q \xrightarrow{r} \mathrm{Aut}\,K$.* Nous savons qu'il existe au moins une solution, le produit semi-direct. Admettons que E soit une solution et écrivons toutes les données dans le diagramme commutatif (notons que $r \circ p \neq f$!) Nous avons encore $\mathrm{Ker} f = H = \mathscr{C}_E(K)$, donc $C = H \cap K$.

Nous pouvons prendre pour section une application $Q \xrightarrow{k} E$ telle que $f \circ k(a) = r(a)$. En effet, soit $y \in E$ tel que $p(y) = a$

$$s(f(y^{-1})r(a)) = s \circ f(y^{-1}).s \circ r(a)$$
$$= g \circ p(y^{-1})g(a) = g(a^{-1}a) = 1$$

donc

$$f(y^{-1})r(a) \in \operatorname{Ker} s = \operatorname{Im} j = \operatorname{Im} j \circ s' = \operatorname{Im} f \circ i$$

Il existe donc $\alpha \in K$ tel que

$$f(y^{-1})r(a) = f \circ i(\alpha) = f(\alpha')$$

donc $r(a) = f(y\alpha')$; on peut donc choisir $k(a) = y\alpha'$. Le système de facteur est encore défini par

$$\omega'(a,b) = k(a)k(b)k(ab)^{-1}$$

et en appliquant f, de $f \circ k = r$ nous déduisons

$$\omega'(a,b) \in \operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} i'$$

Puisque aussi

$$\omega'(a,b) \in \operatorname{Ker} p = \operatorname{Im} i$$

nous en déduisons que $\omega(a,b) \in C$. Donc nous avons pu choisir une section qui donne un système de facteur à valeur dans C. Il définit donc à la fois une extension de Q par C et une de Q par K. On vérifie bien que s'il est un cobord pour l'une des extension il l'est pour l'autre, d'où l'égalité

$$\operatorname{Ext}_r(Q,K) = H^2_{h \circ g}(Q,C)$$

Baer a établi canoniquement cette correspondance. Nous la donnons ici sans démonstration.

Si G est une extension $1 \to C \xrightarrow{i'} G \xrightarrow{p'} Q \to 1 \in H^2_{h \circ g}(Q,C)$, et $E_0 = K \wedge Q$, le produit semi-direct avec $r \in \operatorname{Hom}(Q, \operatorname{Aut} K)$, on considère $F < G \times E_0$ forme des éléments tels que $(x', x) \in G \times E_0$ tel que $p'(x') = p(x) \in Q$. Le groupe $C \times C \lhd G \times E_0$ a pour anti-diagonale C'. On obtient toutes les extensions $E \in \operatorname{Ext}_r(Q,K)$ par $E = F/C'$ où G parcourt tout $H^2_{h \circ g}(Q,C)$.

4.3.5. *Critère pour l'existence de solutions au problème d'extension de Q par K pour $g \in Hom(Q, Out K)$*. Nous répétons les conditions suffisantes déjà données:

$$
\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[d, "s'"'] & & & & \\
 & C \arrow[d, "j'"'] & & & & \\
 & K \arrow[d] & & & Q \arrow[d, "g"] & \\
1 \arrow[r] & \mathrm{Int}\,K \arrow[r, "j"'] \arrow[d] & \mathrm{Aut}\,K \arrow[rr, "s"] \arrow[dr, "h'"] & & \mathrm{Out}\,K \arrow[r] \arrow[dl, "h"'] & 1 \\
 & 1 & & \mathrm{Aut}\,C & &
\end{tikzcd}
$$

(1) $\mathrm{Aut}K = \mathrm{Int}K \wedge \mathrm{Out}K$ (produit semi-direct) ou, plus faiblement

$$s^{-1}(\mathrm{Im}\,g) = \mathrm{Int}\,K \wedge \mathrm{Im}\,g$$

(2) $\exists\, r \in \mathrm{Hom}(Q, \mathrm{Aut}K)$ et $s \circ r = g$. Nous ajouterons, sans preuve,

(3) $K = C \wedge \mathrm{Int}K$ (produit semi-direct) qui est trivialement satisfaite si $C = 1$, ainsi que (4), ou encore si K Abelien (satisfait alors aussi trivialement (1).

Et nous donnons une dernière sans preuve, mais encore en terme de cohomologie!

(4) $H^3_{h \circ g}(Q, C) = 0$.

Nous référons à la litterature citée à la fin de 4.1 pour la preuve d'une condition suffisante et nécessaire: c'est qu'un certain 3-cocycle soit un cobord. Cette preuve donne implicitement la condition (3) et elle implique évidemment que (4) est une condition suffisante.

La théorie générale prouve de plus que si le problème K, Q, g a une solution, il y a correspondance biunivoque entre l'ensemble des classes d'équivalence des extensions solutions et celles pour le problème abelien correspondant:

$$\mathrm{Ext}_g(Q, K) = H^2_{h\circ g}(Q, C)$$

Mais en général $\mathrm{Ext}_g(Q,K)$ n'a pas de structure de groupe. En effet, nous avons prouvé que si la condition (2) (l'existence de

$$r \in \mathrm{Hom}\,(Q, \mathrm{Aut}\,K)$$

est seulement condition suffisante) n'est pas satisfaite, alors il n'y a aucun produit semi-direct parmi les solutions. En fait, il n'y a pas d'élément distingué dans $\mathrm{Ext}_g(Q,K)$ et la structure naturelle sur cet ensemble est celle d'espace homogène principal de $H^2_{h\circ g}(Q,C)$ (c'est-à-dire quotient du groupe par le sous-groupe trivial $\{0\}$).

Donnons un exemple d'un tel cas: pour le prendre aussi simple que possible nous choisissons $Q = Z_2$ le groupe de deux éléments $\{1, -1\}$ noté multiplicativement. Nous prendrons K sans centre, donc $H^2(Q,C) = H^3(Q,C) = 0$; la théorie générale prédit alors une et une seule solution. Mais cette unique extension ne serait pas un produit semi-direct. Evidemment K doit avoir une structure assez compliquée pour interdire l'existence de r.

Soit M le groupe somme directe d'une infinité dénombrable de groupes isomorphes à Z, le groupe additif des entiers. C'est-à-dire chaque élément $[n]$ de M est une suite dénombrable d'entiers dont un nombre fini seulement est différent de zéro. Nous dénombrons les éléments de la suite $[n]$ par un indice α prenant toutes les valeurs entières et nous notons n_α l'entier dont l'indice a la valeur α. La loi de groupe $[n] = [n'] + [n'']$ est donnée par $n_\alpha = n'_\alpha + n''_\alpha$. Le groupe M est isomorphe au groupe multiplicatif des nombres rationnels positifs (n_α indique la puissance du α^e nombre premier dans la décomposition en facteurs premiers).

Considérons $\Phi \in \mathrm{Aut}\,M$ défini par $(\Phi([x]))_{\alpha+1} = n_\alpha$. Le groupe engendré par Φ est isomorphe à Z. Evidemment $(\Phi^k([n]))_{\alpha+k} = n_\alpha$. Le groupe K que nous voulons considérer est le produit semi-direct $M \wedge Z$ défini par $Z \xrightarrow{1} \mathrm{Aut}\,M$ avec $1(p) = \Phi^{2p}$. En notant additivement M et en notant ses éléments par des lettres grecques, la loi de groupe de K est donc

$$(\alpha, m)(\beta, n) = (\alpha + \Phi^{2m}(\beta), m+n)$$

alors

$$(\alpha, m)^{-1} = (-\Phi^{-2m}(\alpha), -m)$$

et

$$(\alpha, m)(\beta, n)(\alpha, m)^{-1} = (\Phi^{2m}(\beta) + \alpha - \Phi^{2m}(\alpha), n)$$

ce qui montre que K n'a pas de centre.

Il est simple de vérifier que l'application $K \xrightarrow{\Phi} K, \Phi(\beta, n) = (\Phi(\beta), n)$ est un automorphisme de K qui, d'après l'équation précédente ne peut être intérieur, mais dont le carré est l'automorphisme intérieur induit par l'élément $(0, 1)$.

Donc $(s(\Phi))^2 = 1$ dans $\mathrm{Out}\, K$ (s étant l'homomorphisme $\mathrm{Aut}\, K \xrightarrow{s} \mathrm{Out}\, K \to 1$). Mais le translaté $\mathrm{Int}\, K.\ \Phi$ dans $\mathrm{Aut}\, K$ ne contient aucun élément racine carrée de l'unité. En fait chaque élément engendre le groupe cyclique infini Z. En effet

$$(\alpha, m)\, \Phi(\beta, 0)\, (\alpha, m)^{-1} = (\Phi^{2m+1}(\beta), 0)$$

et l'automorphisme $((\alpha, m), \Phi)^k$ appliqué à β donne $(\Phi^{k(2m+1)}(\beta), 0)$.

Celà montre qu'il n'existe pas d'homomorphisme

$$r \in \mathrm{Hom}\,(Z_2, \mathrm{Aut}\, K)$$

tel que $s \circ r = g$ où $\mathrm{Im}\, g = \{1, s(\Phi)\} \subset \mathrm{Out}\, K$. Il est par contre facile d'écrire une extension de Z_2 par K pour ce g: la théorie générale nous disant que c'est la seule extension à une équivalence près.

Nous notons donc (α, m, ϵ) les éléments de cette extension E avec $\epsilon = \pm 1$ (notation multiplicative). Le choix de la section $Z_2 \to E$ $(\epsilon \to (0, 0, \epsilon))$ et la loi de groupe sont entièrement définis par

$$(\alpha, m, 1)(0, 0, \epsilon) = (\alpha, m, \epsilon)$$

et l'automorphisme interne de E induit par $(0, 0, -1)$. Nous prenons Φ

$$(0, 0, -1)(\alpha, m, 1)(0, 0, -1)^{-1} = (\Phi(\alpha), m, 1)$$

En effet, le carré de cet automorphisme est l'automorphisme intérieur de K: $(\alpha, m) \to (\Phi^2(\alpha), m)$. Puisque K n'a pas de centre, un seul élément induit cet automorphisme; nous avons vu que c'est $(0, 1) \in K$. La loi de group dans E est donc complètement définie par les deux équations précédentes et par

$$(0, 0, -1)^2 = (0, 1, 1).$$

Appendice

Prouvons les lemmes suivants:

Lemme A. $\mathscr{C}(G)=1 \Rightarrow \mathscr{C}_{\mathrm{Aut}\,G}(\mathrm{Int}\,G)=1 \Rightarrow \mathscr{C}(\mathrm{Aut}\,G)=1.$

Soit γ l'homomorphisme canonique $G \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Int}\,G$ (ici γ est un isomorphisme). Soit $\sigma \in \mathscr{C}_{\mathrm{Aut}\,G}(\mathrm{Int}\,G)$. Alors

$$\forall\, a \in G \qquad \sigma\gamma(a) = \gamma(a)\,\sigma$$

Cette égalité appliquée a tout $x \in G$ donne

$$\sigma(axa^{-1}) = a\sigma(x)\,a^{-1}$$

donc

$$\sigma(a)\,\sigma(x)\,\sigma(a)^{-1} = a\sigma(x)\,a^{-1}$$

c'est-à-dire $a^{-1}\sigma(a) \in \mathscr{C}(G)$.

Donc

$$a = \sigma(a) \quad \text{et} \quad \mathscr{C}_{\mathrm{Aut}\,G}(\mathrm{Int}\,G) = 1$$

Si

$$A \subset B \subset X, \mathscr{C}_X(B) \subset \mathscr{C}_X(A)$$

donc

$$\mathscr{C}(\mathrm{Aut}\,G) \subset \mathscr{C}_{\mathrm{Aut}\,G}(\mathrm{Int}\,G) = 1$$

Lemme B. $G=\mathrm{Int}\,G \lhd \mathrm{Aut}\,G \Rightarrow \mathrm{Aut}\,G$ complet. Du lemme A nous savons déjà que $\mathscr{C}(\mathrm{Aut}\,G)=1$.

Puisque $\mathrm{Int}\,G$ est sous-groupe caracteristique de $\mathrm{Aut}\,G$, il existe un homomorphisme

$$\mathrm{Aut}\,\mathrm{Aut}\,G \xrightarrow{\Phi} \mathrm{Aut}\,\mathrm{Int}\,G = \mathrm{Aut}\,G \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}\,\Phi = \mathscr{C}_{\mathrm{Aut}\,\mathrm{Aut}\,G}(G)$$

Soit $k \in \mathrm{Ker}\,\Phi$, $\sigma \in \mathrm{Aut}\,G$, $\alpha \in G=\mathrm{Int}\,G$

$$\Phi(k)\,[\alpha] = k(\alpha) = \alpha$$

de même

$$k(\sigma\alpha\sigma^{-1}) = \sigma\alpha\sigma^{-1}$$

et donc

$$k(\sigma)\,\alpha k(\sigma)^{-1} = \sigma\alpha\sigma^{-1}\sigma^{-1},\ k(\sigma) \in \mathscr{C}_{\mathrm{Aut}\,G}(G)$$

et par le Lemme A $\sigma=k(\sigma)$, $k=1$, donc $\mathrm{Ker}\,\Phi=1$, donc

$$\mathrm{Aut}\,\mathrm{Aut}\,G = \mathrm{Aut}\,G.$$

Appliquons ce résultat au groupe de Poincaré. Nous avons démontré $\mathrm{Aut}P_+^\uparrow = D$. De plus $P_+^\uparrow$ n'a pas de centre donc

$$P_+^\uparrow = \mathrm{Int}P_+^\uparrow \lhd D$$

Mais D n'a pas de sous-groupe invariant distinct de $P_+^\uparrow$ et isomorphe à lui. (La liste de tous les sous-groupes invariants de D est facile à établir). Donc $P_+^\uparrow = \mathrm{Int}P_+^\uparrow \lhd\!\!\cdot\, D$ et le Lemme B établit donc le résultat que D est complet.

5. Application au Groupe de Poincare

Nous considérons surtout le groupe connexe $P_0 = P_+^\uparrow$.

5.1. *P_0 est Sous-Groupe de G*

Il semble que G, le groupe d'invariance d'une théorie relativiste, doive contenir le groupe de Poincaré. C'est un peu fallacieux. (En fait G doit être une extension de P_0). Examinons cependant le problème mathématique:

Que dire de G sachant qu'il a P_0 comme sous-groupe? $P < G$ est une information bien faible. Mais le réflexe doit être de chercher le centralisateur et le normalisateur de P_0 dans G.

Soit

$$H = \mathscr{C}_G(P_0), \quad N = \mathfrak{N}_G(P_0)$$

Nous avons

$$P_0 \lhd N, \quad H \lhd N$$

Posons

$$N/P_0 = Q$$

Puisque P_0 n'a pas de centre $P_0 \cap H = \{1\}$.

Puisque $\mathrm{Aut}P_0 = D$ est un produit semi-direct, nous savons par le théorème de 4.3.3 que N est un produit semi-direct

$$N = P_0 \wedge Q$$

entièrement caractérisé par l'homomorphisme

$$g \in \mathrm{Hom}\,(Q, \mathrm{Out}\,P_0) \quad \text{où} \quad \mathrm{Out}\,P_0 = Z_2 \times Z_2 \times R_+^\times$$

De plus, $\mathrm{Ker}g \approx H$ (application triviale du Diagramme 1).

Si Img contient une dilatation $\lambda \in R_+^\times$, et si une representation de G restreinte à P contient la masse m_0 dans son spectre de masse elle contiendra aussi λm_0, et $\lambda^n m_0$ (correspondant au groupe engendré par λ, n entier).

Donnons une condition suffisante pour $P_0 \lhd G$.

Une condition nécessaire est

$$\forall\, g \in G, \quad \forall\, p \in P_0, \quad g^{-1}pg \in P_0$$

Nous allons prouver qu'une condition suffisante est que celà soit vrai pour un seul $p \in P_0$ qui n'est pas une translation:

$$\forall\, g \in G, \quad \exists\, p \notin T \subset P_0, \quad p \in P_0, \quad g^{-1}pg \in P_0$$

En d'autres termes $p \in K = \mathrm{Ker} f$ où $G \xrightarrow{f}$ Permutation $[G{:}P_0]_L$ c'est-à-dire l'homomorphisme f correspond à l'action de G sur son espace homogène $[G{:}P_0]_L$. Puisque $K \lhd G$, $K \cap P_0 \lhd P_0$ mais puisque $p \in K \cap P_0$ n'est pas une translation, le seul sous-groupe invariant de P_0 qui contient p est P_0 lui-même.

Donc $P_0 < K$ c'est-à-dire $\forall\, q \in P_0, qg \in gP_0$ donc $P_0 \lhd G$.

Cette condition suffisante est plus faible que toutes les hypothèses des nombreux "théorèmes" prouvés par les physiciens, comme généralisation du "théorème" de McGlinn (*Phys. Rev. Let.* **12**, 467, 1964).

5.2. *G est une Extension de P*

Le théorème de Zeeman suggère que G agit sur l'espace-temps qu'à travers D (c'est-à-dire G est une extension de D). Si la théorie n'est pas invariante par les dilatations, alors G est une extension de P. Voir aussi M.I. et les autres références de l'introduction pour d'autres arguments montrant que le groupe d'invariance d'une théorie relativiste G est une extension de P_0.

Soit K le noyau de l'extension.

On montre (L. Michel, *Nuc. Phys.* **57**, 356 (1964) que si C, le centre de K, est fini (ou plus généralement si C n'a pas de sous-groupe divisible et P_0 n'agit pas sur C), alors les seules extensions de P_0 par K sont quotient du produit direct par un sous-groupe de deux éléments:

$$E_\alpha = (K \times \overline{P}_0)/Z_2$$

engendré par l'élément $(\alpha, \omega) \in K \times \overline{P}$ où $\alpha \in C$, $\alpha^2 = 1$ et ω est l'élément non trivial du centre de $\overline{P}_0$ (rotation de 2π). Le produit direct $K \times P_0$ correspond à $\alpha = 1$.

5.3. *Conclusion*

En se souvenant que P est aussi un groupe de Lie! Pour être élémentaire nous n'avons traité que des groupes abstraits. Bien que cela nous ait déjà permis d'obtenir des résultats sur P en tant que groupe abstrait (Aut$P$, les extensions centrales de P_0, $P_0 \lhd G$) il ne faut pas oublier que P_0 est un groupe de Lie. Mais on ne peut faire en cinq leçons un cours sur les groupes topologiques, les groupes localement compacts, les groupes de Lie, ... D'autant plus que la théorie des extensions pour ces différentes espèces de groupes n'est pas si bien parachevée.

Elle se généralise assez bien cependant aux groupes avec structore borélienne: Cf. G. W. Mackey, "Les ensembles Boréliens et les extensions de groupes". *J. Math. Pures Appl.* **36**, 171, 1957. Pour les extensions de groupes localement compacts, voir le lumineux exposé de J. P. Serre au Séminaire Bourbaki, Mars 1950 (Exp. 27). La référence plus moderne est le livre de D. Montgomery et L. Zippin "Topological transformation groups" (*Interscience*, Tract No. 1, N.Y. 1955).

Evidemment la littérature sur les extensions de groupe de Lie ne manque pas (Cf. G. Hochshild, Extensions of Lie group I and II, *Ann. Math.* **54**, 96 and 537, 1951). Il est plus simple d'étudier les extensions d'algèbre de Lie. Et pour le groupe de Poincaré, on peut appliquer directement le dernier théorème de G. Hochschold et J. P. Serre "Cohomologie of Lie Algebra" (*Ann. Math.* **57**, 592, 1953) qui donne dans ce cas particulier,

$$H^2(\mathscr{P}, \mathscr{A}) = H^2(\mathscr{T}, \mathscr{A})^{\mathscr{P}}$$

où $\mathscr{T}$ est l'algèbre de Lie des translations, $\mathscr{A}$ est une algèbre de Lie Abélienne. Puisque $\mathscr{P}$ agit sur $\mathscr{T}$ et $\mathscr{A}$, il agit sur $H^2(\mathscr{T}, \mathscr{A})$ qui est un espace vectoriel et $H^2(\mathscr{T},\mathscr{A})^{\mathscr{P}}$ est le sous-espace annulé par $\mathscr{P}$. Si $\mathscr{T}$ agit trivialement sur $\mathscr{A}$ (pour les algèbres cela signifie qu'à chaque élément de $\mathscr{T}$ correspond l'endomorphisme nul de $\mathscr{A}$) alors $H^2(\mathscr{T},\mathscr{A})^{\mathscr{P}}=0$ et la seule extension centrale de $\mathscr{P}$ par $\mathscr{A}$ est la somme directe des algèbres.

Grace à la formule (66) le problème des extensions de l'algèbre de Poincaré est complètement résolu dans le cas général (dès qu'on connaît les représentations finies de $\mathscr{P}$!). Dans M.I. Chap. 1, on explique comment trouver les groupes de Lie ayant une algèbre de Lie donnée.

Dans M.I., Chap. VIII, on explique aussi comment passer des extensions de P_0 à celle du groupe complet P.

Il nous reste enfin à dire quelques mots sur le cas où $P<G$, groupe de Lie connexe (et de dimension finie!). Il existe en effet un intéressant théorème d'O'Raifeartaigh (*Phys. Rev. Let.* **14**, 575, 1965). Soit U une représentation unitaire irréductible du groupe de Lie connexe G (de dimension finie) contenant P_0 comme sous-groupe de Lie. Si le spectre de masse de la représentations de P_0, obtenue par restriction de U, a un point isolé, ce point est le spectre entier. Bien que la preuve de ce théorème soit d'un niveau de rigueur élevé pour *Phys. Rev. Letters*, elle n'est pas rigoureuse au sens mathématique du mot. Mais ce théorème semble vrai et il réduit les espérances des physiciens qui espèrent obtenir le spectre de masse des particules élémentaires grâce à une représentation du groupe dit "dynamique".

Mais pour cette application à la physique, comme pour toutes les autres, le lecteur est renvoyé aux références citées dans l'introduction.