INTRODUCTION AU COLLOQUE - LE GROUPE DE POINCARE

Exposé de Louis MICHEL

Cette première journée du colloque est consacrée au groupe de Poincaré et à ses relations avec les groupes de symétrie des particules élémentaires. De nombreux travaux sont parus à ce sujet dans les journaux de physique. Il n'est pas question de les passer en revue dans cette conférence d'introduction. Je voudrais simplement rappeler ici quelques résultats, ceux qui me paraissent les plus importants sur ce sujet.

Il est inutile de donner des définitions que tous les membres de cette audience connaissent. Je me contenterai donc d'indiquer les notations.

Pour tout point x de l'espace-temps $\mathcal{E}$ (espace affiné réel à quatre dimensions), le produit intérieur de Minkovski permet de définir Γ_x^+ (respectivement Γ_x^-) l'intérieur du cône futur (resp. passé) de x, $\partial\Gamma_x^+$, $\partial\Gamma_x^-$, leur frontière moins x. Nous notons $\Gamma_x = \Gamma_x^+ \cup \Gamma_x^-$ et sa fermeture $\overline{\Gamma}_x$ est le cône de lumière de x, c'est-à-dire l'ensemble des points y tels que $(x-y).(x-y) = 0$.

Le groupe de Lorentz $\mathcal{L}$ est le groupe des transformations linéaires qui laissent fixe un point x et préservent le produit intérieur de Minkovski. Si on exige de plus que le sens du temps soit préservé, on se restreint alors au sous-groupe orthochrone $\mathcal{L}^\uparrow$, le groupe total étant le produit direct $\mathcal{L} = \mathcal{L}^\uparrow \times Z_2$ où Z_2 est le groupe de deux éléments : $\mathcal{L}^\uparrow$ comprend deux nappes $\mathcal{L}_0$ composante connexe de l'identité de $\mathcal{L}$ et son translaté par les symétries d'espace. $\mathcal{L}_0$ est un groupe de Lie simple, réel, sans centre, non compact, de dimension 6. Son revêtement universel $\overline{\mathcal{L}}_0$ est isomorphe à $SL(2,C)$, le groupe des matrices 2 par 2 sur le corps des complexes et de déterminant = 1. Le centre de $\overline{\mathcal{L}}_0$ a deux éléments : $\overline{\mathcal{L}}_0/Z_2 = \mathcal{L}_0$.

Les homothéties dans $\mathcal{E}$ de centre x, de rapport positif λ forment un groupe isomorphe à $\mathbb{R}_+^{\otimes}$ (le groupe multiplicatif des réels positifs) ; elles commutent avec les transformations du groupe de Lorentz laissant x fixe et il est utile de considérer les produits directs: $\mathcal{L} \times \mathbb{R}_+^x$, $\mathcal{L}^\uparrow \times \mathbb{R}_+^x$, $\mathcal{L}_0 \times \mathbb{R}_+^x$.

L'action sur l'espace-temps du groupe $\mathcal{L} \times \mathbb{R}_+^{\otimes}$ laissant fixe x se décompose en quatre orbites : x lui-même, Γ_x, $\partial\Gamma_x = \Pi_x^+ \cup \partial\Gamma_x^-$ et $\mathcal{E} - \overline{\Gamma}_x$, l'ensemble des points de genre espace par rapport à x.

Soit $\mathcal{C}$ le groupe des translations de $\mathcal{E}$. Le groupe de Lorentz inhomogène est appelé groupe de Poincaré par les physiciens [1]. C'est le produit semi-direct $\mathcal{P} = \mathcal{C}_\wedge\ \mathcal{L}$. Nous considérerons aussi les sous-groupes orthochrone $\mathcal{P}^\uparrow = \mathcal{C}_\wedge\ \mathcal{L}^\uparrow$ et connexe $\mathcal{P}_0 = \mathcal{C}_\wedge\ \mathcal{L}_0$, ainsi que le recouvrement $\overline{\mathcal{P}}_0 = \mathcal{C}_\wedge\ \overline{\mathcal{L}}_0$ de $\mathcal{P}_0$. Enfin, avec les dilatations (homothéties positives) on peut former les groupes $\mathcal{D} = \mathcal{C}_\wedge\ (\mathcal{L} \times \mathbb{R}_+^{\otimes}) = \mathcal{P}_\wedge\ \mathbb{R}_+^{\otimes}$, et respectivement $\mathcal{D}^\uparrow$ et $\mathcal{D}_0$.

E. C. Zeeman a donné une caractérisation remarquable de ces groupes La relation $y \in \Gamma_x^+$ (y dans le futur de x) est une relation d'ordre partiel sur $\mathcal{E}$ qu'on appelle la relation de causalité. Une permutation f de $\mathcal{E}$ (= une application biunivoque de $\mathcal{E}$ sur lui-même) préserve la causalité si $y \in \Gamma_x^+ \Rightarrow f(y) \in \Gamma_{f(x)}^+$. Zeeman [2] a montré que les permutations de $\mathcal{E}$ qui, ainsi que leur inverse, préservent la causalité, forment le groupe $\mathcal{D}^\uparrow$. Nous reviendrons que l'importance de ce théorème pour les théories relativistes. Notons que la notion de continuité, ni celle de linéarité, n'interviennent [3, Dans le même ordre d'idée, on peut établir que tous les automorphismes de Poincaré sont continus [5, 6], et plus précisément :

$$\mathrm{Aut}\ \mathcal{P} = \mathrm{Aut}\ \mathcal{P}^\uparrow = \mathrm{Aut}\ \mathcal{P}_0 = \mathcal{D}.$$

Une <u>théorie physique est relativiste</u> si son groupe d'automorphisme $\mathcal{G}$ contient le groupe $\mathcal{P}_0$. Nous savons depuis la découverte de la non-conservation de la parité que $\mathcal{G}$ ne contient pas $\mathcal{P}^\uparrow$, pour les interactions faibles. Les transformations de Poincaré fenversant le temps doivent être réinterprétées physiquement comme renversement du mouvement, une telle transformation pouvant toujours être réalisée sur un système physique (transformation "active" au sens de Wigner [7]. Cela n'est pas le cas pour les symétri d'espace, (lorsque le système contient des neutrinos), ni pour les dilatations l'invariance "passive" pour les dilatations est simplement de l'analyse dimensionnelle).

La première fois que fut caractérisée toute une famille de représentations linéaires, unitaires, continues, irréductibles d'un groupe de Lie non abélien, non compact, ce fut par E. Wigner (8), pour le groupe de Poincaré (représentations de masse réelle). Complété par les travaux de Gelfand et Naimark (9) et de Bargmann (10), celui de Wigner caractérise toutes les représentations continues unitaires et même projectives de $\mathcal{P}_o$. Dans d'autres exposés aujourd'hui, G. Fuchs et P. Renouard vous parleront des "distributio caractères" de $\mathcal{P}_o$ et Rideau de la "formule de Plancherel" pour $\mathcal{P}_o$.

La cinématique des particules élémentaires (conservation de l'énergie impulsion, du moment cinétique, les règles de sélections, les corrélations angulaires, les effets de polarisation, etc...) n'est qu'une étude du groupe de Poincaré. La masse, le spin, éventuellement la parité, sont des invariants du groupe $\mathcal{P}_o$ (éventuellement $\mathcal{P}^{\uparrow}$). Leur détermination pour les nouvelles particules ou "résonnances" que l'on découvre nombreuses depuis quelques années, ne font intervenir que des considérations cinématiques. Les particules sont encore caractérisées par d'autres nombres quantiques qu'il est tentant de rattacher à d'autres sous-groupes de $\mathcal{G}$, le groupe d'automorphismes de la théorie des particules fondamentales. Cependant une théorie physique est plus ou moins approchée et les physiciens cherchent à trouver le groupe $\mathcal{G}$ le plus grand possible, quitte à ne considérer qu'une approximation assez grossière. Comme vous le savez, SU3 est alors un sous-groupe intéressant de $\mathcal{G}$. Mais des groupes bien plus grand ont été considérés : SU6, U6xU6 et même U(6,6), dont nous entendrons parler à ce colloque, les jours prochains.

Sachant que dans une théorie relativiste $\mathcal{P}_o$ est sous-groupe de $\mathcal{G}$, qu'est-ce que celà implique pour ce dernier ?

Si $\mathcal{P}_o$ est sous-groupe invariant de $\mathcal{G}$, parce que $\mathcal{P}_o$ n'a pas de centre et que Aut $\mathcal{P}_o = \mathfrak{D}$ est un produit semi-direct $\mathcal{P}_o \wedge (\tau_2 \times \tau_2 \times R_+^x)$, on peut en conclure(11)° (sans considération de continuité) que $\mathcal{G}$ est un produi semi-direct $\mathcal{G} = \mathcal{P}_0 \wedge Q$ où Q est le "groupe d'invariance interne de la théorie". Ce produit semi-direct est entièrrement caractérisé par l'homomorphisme $f : Q \to \mathfrak{D}/\mathcal{P}_0 = Z_2 \times Z_2 \times R^x_+$. Si Im $f_\wedge R^x_+$ n'est pas réduit à l'unité, la théorie contient des dilatations et par conséquent un spectre de masses. Le plus petit spectre de masse correspond aux plus petits sous-groupes de R^x_+, c'est Z, (groupe cyclique infini) qui donne un spectre de masse $m = \alpha^n m_0$, $\alpha > 0$, n entier, m_0 masse fixe. Lorsque f est trivial, $\mathcal{G}$ se réduit au produit direct $\mathcal{P}_0 \times Q$.

Evidemment les physiciens sont prêts à abandonner l'hypothèse que $\mathcal{P}_0$ est sous-groupe invariant de $\mathcal{G}$. Par analogie avec des cas simples de la mécanique quantique non relativiste (oscillateur harmonique, potentiel coulombien) ils ont alors espéré que le groupe $\mathcal{G}$, baptisé alors "groupe dynamique" pouvait donner le spectre de masse des particules élémentaires. Mais le théorème d'O'Reafartaigh[12] dont deux preuves rigoureuses, non encore publiées, sont dues à R. Jost et à I.E. Segal, rend bien mince ces espoirs : soit $\mathcal{U}$ une représentation unitaire, continue, irréductible d'un groupe de Lie connexe de dimension finie, contenant $\mathcal{P}_0$; si le spectre de masse de la restriction de $\mathcal{U}$ à $\mathcal{P}_0$ contient un point isolé, le spectre de masse se réduit à ce point[13].

Notons aussi le prix de la conciliation de ce point de vue avec le théorème de Zeeman. Si nous admettons que le groupe $\mathcal{G}$ agit (en tant que groupe !) sur l'espace temps $\mathcal{E}$, et si nous voulons préserver la causalité, alors $\mathcal{G}$ n'agit pas effectivement, son action étant à travers le quotient $\mathcal{G}/\mathcal{K}$, sous groupe de $\mathfrak{D}$. Pour simplifier la discussion, admettons que ce quotient est $\mathcal{P}_0$. Si $\mathcal{G}$ contient $\mathcal{P}_0$, on en conclut qu'il est le produit semi-direct $\mathcal{G} = \mathcal{K}_\wedge \mathcal{P}_0$.

La structure $\mathcal{G}/\mathcal{K} = \mathcal{P}_0$ du groupe d'invariance d'une théorie quantique relativiste (on dit encore que $\mathcal{G}$ est une extension de $\mathcal{P}_0$ par $\mathcal{K}$) peut-être obtenue de plusieurs hypothèses générales [14],[15]. La théorie des extensions de groupes nous permet de caractériser $\mathcal{G}$ dans les cas les plus intéressants[16]. Par exemple, si $\mathcal{K}$ est un groupe simple compact[17] alors

$$\mathcal{G}_\alpha = (\mathcal{K} \times \mathcal{P}_0)/Z_2$$

? où Z_2 est engendré par (α, ω), α racine carrée de ___ $\in \mathcal{H}$, ω élément non trivial du centre de P_o. Cette équation est encore valable pour une large classe de groupes $\mathcal{K}$ (18). Si d'autre part on se borne pour $\mathcal{G}$ aux groupes de Lie finis, on peut alors passer aux algèbres de Lie de $\mathcal{H}$ et P_o et la litterature mathematique permet de caracteriser toutes les extensions de l'algèbre de Lie de P_o par $\mathcal{K}$ (19). Bien que ces considérations permettent de comprendre la relation entre spin et charges $(-1)^{2j} = (-1)^{h+l}$, comme l'ont montré Lurçat et Michel (14). Elles conduisent en définitive à une trop faible relation entre invariance relativiste et symetrie interne, ce qui anéantit l'espoir d'expliquer ainsi (comme l'a aussi montré Mc Glinn (20)) la relation entre masses et nombres quantiques internes due à Gell-Mann (21) et Okubo (22).

Il y a vingt mois, Gursey et Radicati (23) et independemment Sakita (... ont montré l'utilité de grouper les particules élémentaires en "supermultiple... de masses voisines et de spins différents, analogues aux supermultiplets considérés par Wigner pour les noyaux (25). Bien que la théorie non relativiste (invariance Galiléenne) de Wigner ait un groupe d'invariance (26), la théorie relativiste étiquetée au début SU6 ne peut possèder un tel groupe d'invarianc... à moins de payer un prix prohibitif, non seulement par le nombre de paramètre... du groupe (SL6,C en a 70, les différentes formes non compactes de U12 en ont 144) mais par d'autres défauts physiques plus graves (spectre de masse continu, abandon de la causalité, dont S. Coleman nous entretiendra dans son exposé demain (28). Par contre F. Gürsey nous donnera directement son point de vue sur l'interpretation de U6.

Comme vous le savez, on parle moins maintenant de groupe d'invariance et l'emphase en est aux algèbres de courants, sujet qui sera traité le dernier jour, principalement par L. Radicati et Y. Ne'eman.

Il semble bien que pour la symétrie dite d'invariance de spin (combinée où non avec l'invariance par rapport à l'isospin ou SU 3) il n'existe pas de limite où cette invariance devienne exacte si ce passage à la limite entraîne aussi le passage à la limite non relativiste. L'electrodynamique quantique, appliquée par exemple aux etats atomiques est un bon exemple d'un tel cas; en effet dans les atomes les moments cinetiques orbital et du spin sont conservés séparemment dans une bonne approximation (couplage de Russel-Sanders = spin independance) les interactions spin-orbite faisant intervenir un ordre supérieur de la constante de structure fine $\alpha \sim \frac{1}{137}$. Cela peut s'expliquer par l'invariance du Lagrangian d'interaction $\int \overline{\varphi_\alpha}(x)\, \gamma^\mu_{\alpha\beta}\, \varphi(x)\, A_\mu(x)\, d^4x$ pour le groupe $\mathcal{G} = \mathcal{P}'_0 \times SL(2, C)$ où $\mathcal{P}'_0$ isomorphe au groupe de Poincaré, agit sur la variable x (par sur action transitive sur l'espace-temps) tandis que $SL(2, C)$ agit sur les indices spinoriels α, β et vectoriels, μ . L'action "physique" du recouvrement du groupe de Poincaré, $\overline{\mathcal{P}_0}$ est définie par l'injection de $f \times g$ de $\overline{\mathcal{P}_0} \xrightarrow{f \times g} \mathcal{P}'_0 \times SL(2, C)$ où $\overline{\mathcal{P}_0} \xrightarrow{f} \mathcal{P}'_0$ a pour noyau Z_2 , le centre de $\overline{\mathcal{P}_0}$ et $\overline{\mathcal{P}_0} \xrightarrow{g} SL(2, C)$ a pour noyau le groupe $\mathcal{T}$ des translations. ($\mathrm{Ker}\, f \wedge \mathrm{Ker}\, g = 1 \Rightarrow f \times g$ injectif). Cette invariance par $\mathcal{P}'_0 \times SL(2, C)$ s'applique à tout le Lagragian de l'electrodynamique excepté au terme $\int \overline{\varphi}(x)\, \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x\mu}\, \varphi(x)\, d''x$, (terme d'energie cinetique du Lagrangian libre des Fermions). Or on ne sait pas construir une théorie cohérente où ce terme serait identiquement nul (ce serait une théorie relativiste dite "du couplage fort"). Mais pour les atomes les effets de ces termes sont petits. L'invariance de spin de l'electrodynamique quantique a été élégamment discutée par H. Lipkin.[29, 30]

Le passage à une autre approximation (par exemple de la relativité restreinte à la relativité galilienne), activité caractéristique des physiciens, n'a été que peu étudiée par les mathématiciens jusqu'alors. Le problème a pourtant été bien posé par Segal il y a quinze ans [31] et un cas particulier a été étudié par Inönü et Wigner [32], la contraction de groupe de Lie, problème plus récemment repris par Saletan [33] et d'autres physiciens.

Depuis peu, cependant, la déformation des structures algébriques est devenue d'actualité chez les mathématiciens. Pour les algèbres de Lie, cela peut être présenté de plusieurs manières. La plus géométrique est la suivante: considérer ensemble tous les algèbres de Lie qu'on peut construire sur un espace vectoriel E_n de dimension n . Chacun est défini par $N = n^2(n-2)/2$ constantes de structures et dans cet espace E_n les relations de Jacobi définissent une variété algébrique (intersection du Cours du second degré ayant leur sommet commun à l'origine). Si les constantes de structures varient, comme fonction d'un paramètre (vitesse de la lumière, temps) on suit un chemin sur la variété de Jacobi. Le groupe linéaire GLn sur E_n transforme une algèbre de Lie en algèbre isomorphe. Les points de la variété de Jacobi représentant une algèbre de Lie à un isomorphisme près forment donc une orbite de GLn , qui est GLn/Aut L , le groupe d'automorphisme de l'algèbre au point L étant le stabilisateur de ce point. Si l'orbite est une morceau de sous-variété de dimension inférieure au morceau de la variété de Jacobi où elle se trouve, on déforme l'algèbre en sortant de cette sous-variété.

Pour une algèbre semi-simple sur E_n , l'orbite a donc une dimension $n^2 - n$ et c'est un ouvert dans la variété de Jacobi. Les algèbres semi-simples ne sont donc pas déformables (34). Mais si l'on se rend sur la frontière de leur orbite on les contracte! Madame Levy, s'enspirant d'un travail de Gerstenhaber (35) a établi quelques nouveaux résultats et nous dira aussi cet après-midi quelles sont les déformations possibles de l'algèbre de Poincaré.

REFERENCES

(1)

(2) E.C. ZEEMAN, J. Math. Phys. 5, 491, 1964.

(3) ZEEMAN a donné d'autres formes a) et b) de son théorème :

a) $\mathfrak{D}^{\uparrow}$ est le groupe des permutations qui, avec leur inverse, préserve la relation $y \in \partial\Gamma_x^+$ (qui n'est pas une relation d'ordre) cf. Ref. 2 Notons que le theorème est faux si on se restreint à $y \in \partial\Gamma_x$ (i.e. tout rayon de lumière est transformé en rayon de lumière).

b) $\mathfrak{D}$ est le groupe des permutations respectant le genre de la séparation. Les points de l'espace temps i.e. les relations $x = y$ (coincidence) $y \in \partial\Gamma_x$ (séparation de lumière) $y \in \Gamma_x$ (séparation de temps), $y \in \varepsilon - \bar{\Gamma}_x$ (séparation d'espace); la preuve est donnée en référence 4.

(4) L. MICHEL, Cours à l'Ecole d'été de Brandeis (doit être publié par Gordon and Breach en 1966).

(5) Ce résultat a été annoncé dans L. MICHEL, Lectures on theoretical Physics Vol.VII a, p. 118, University of Colorado Press (1964), mais avec une preuve incomplète, complétée en réf. 4. Une autre preuve est donnée en réf. 6. Notons que les groupes Aut $\mathcal{C}$ et Aut $\mathcal{L}$ pour les groupes abstraits $\mathcal{C}u - \mathcal{L}$ sont morbidement grands.

(6) L. MICHEL, Cours à l'Ecole d'été 1965 de Cargèse (Corse) (doit être publié par Gordon and Breach en 1966).

(7) E.P. WIGNER, N. Cim. 3, 517 (1956); see also A.S. WIGHTMAN N. Cim. Supp. N. Cim 14, 81, 1959

(8) E.P. WIGNER, Ann. Math. 40, 149 (1939)

(9) I.M. GELFAND, M.A. NAIMARK, Acad. Sci. USSR, J. Phys. 10, 93, 1946 and Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. 11, 411 (1947)

(10) V. BARGMAN, Ann. Math. 48, 568 (1947)

(11) Voir par exemple: L. MICHEL , Phys. Rev. 137B, 405, 1965 ou ref. 6 .

(12) L. O'RAIFEARTAIGH , Phys. Rev. Letters 14, 575 (1965)

(13) La preuve de I.E. SEGAL peut s'etendre à un point discret (non isolé) du spectre; communication de l'auteur.

(14) Voir par exemple: F. LURÇAT and L. MICHEL , N.Cim 21 (574) 1961 or Comptes Rendus Conference Aix-en-Provence (C.E.N. Saclay, France, 1962) p. 183 .

(15) L. MICHEL , Lectures at the Istanbul Summer School 1962 edited Group Theoretical concepts and method in elementary particle physics (F. GÜRSEY, Editor Gordon and Breach, New York, 1964)

(16) L. MICHEL , Nuclear Physics 57, 356, 1964.

(17) Cela ne requiert pas non plus d'hypothèses de continuité.

(18) L'équation n'est valable que pour les extension centrales, c'est-à-dire celles où l'homomorphisme canonique correspondant $P \dashrightarrow \mathrm{Out}\,\mathcal{K}$ est trivial. C'est ce cas qui est traité en ref. 16 et qui correspond à la situation physique.

(19) Le théorème pertinent, qui permet de se ramener a un problème classique et soluble, est le théorème 13 de C. HOCHSCHILD and J.P. SERRE Ann. Maths. S 7, 591, 1953.

(20) W.D. MC GLINN , Phys. Rev. Letters 12, 467 (1964)

(21) M. GELL'MANN

(22) S. OKUBO

(23) F. GÜRSEY et L. RADICATI , Phys. Rev. Letters 13, 299, 1964

(24) B. SAKITA , Phys. Rev. 136B, 1756, 1964

(25) E.P. WIGNER , Phys. Rev. 51, 106, 1937

(26) L. MICHEL , 2nd Coral Gables Conference on Symmetry Principles at High Energy p. 331 (Freeman, San Francisco 1965) .

(27) L. MICHEL et B. SAKITA , Ann. Inst. H.Poincaré 2, 167, 1965.

(28) Voir son exposé pour des réferences. Caractérisons ici le schéma de ZIMMERMANN, Ann. of Phys. (New York) 37, 303, 1966 (voir aussi, T. FULTON, WEISS , ibid 37, 1966) utilisant SL(6,C) inhomogène qui agit sur un espace à 36 (eventuellement 72 dimensions) qu'on peut projeter sur l'espace temps à 4 dimensions, $\mathcal{E}_4$. Mais alors SL(6,C) n'agit pas comme groupe sur $\mathcal{E}_4$ et son plus grand sous-groupe qui le fait est SL(2, C) x SU_3 !

(29) H. LIPKIN , pretirage.

(30) Les "théories" basées sur SU(6,6) (par exemple les nombreuses publications de Trieste) sont basées sur le même schéma, mais où le groupe SL(2,C) , au lieu d'être remplacé par SL(6,C) l'est par $SU(6,6) \supset SU(2,2) \times SU_3 \supset SL(2,C) \times SU_3$. La considération que tous les mésons qui "peuvent" exister, semblent exister.

(31) I.E. SEGAL , Duke. Math. J. 18, 221, 1951

(32) E. INÖNÜ , E.P. WIGNER, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. 39, 510, 1953

(33) E. J. SALETAN , J. Math. Phys. 2, 1, 1961

(34) Ce qui est rassurant pour les algèbres de courants, qui sont semi-simples. Définies à un temps donné, une transformation de Poincaré change leurs constantes de structures. Dans quel corps (ou même anneau) sont-elles définies? C'est une question à laquelle il n'a pas été répondu explicitément! Ce pourrait-être un corps de fonctions.

(35) M. GERSTENHABER , Ann. Math. 79, 59, 1964