

III - POLARISATION D'UNE PARTICULE

1.	Opérateur de polarisation pour une particule	III-1
2.	Description de Wigner des états d'une particule	III-4
3.	Etats de polarisation d'une particule d'énergie- impulsion déterminée	III-6
	3.1 Espace h_p des états de polarisation	III-6
	3.2 Cas $\underline{p}^2 = m^2 > 0$	III-8
	3.3 Cas $\underline{p}^2 = m^2 = 0$	III-11
4.	Matrice densité pour la polarisation	III-15
5.	Description covariante de la polarisation	III-19
	5.1 Particule de masse $m > 0$ et de spin $\frac{1}{2}$	III-19
	5.2 Particule de masse $m = 0$ et de spin $\frac{1}{2}$	III-22
	5.3 Particule de masse > 0 et de spin j quelconque	III-27
	5.4 Photon	III-32

1.- OPERATEUR DE POLARISATION POUR UNE PARTICULE

Energie et impulsion ne déterminent généralement pas entièrement l'état d'une particule; on appelle polarisation l'ensemble des observables supplémentaires nécessaires à la description complète de l'état.

Les états d'une particule sont décrits, en mécanique quantique, par les vecteurs normalisés d'un espace de Hilbert \mathcal{H} sur lequel agit une représentation continue, unitaire et irréductible, du groupe de Poincaré restreint \mathcal{P}_0 (plus exactement, du groupe de recouvrement \mathcal{S} universel de \mathcal{P}_0). Une transformation infinitésimale de paramètre da appartenant à ce groupe est représentée par l'opérateur unitaire $I - i A da$, où A est par conséquent hermitique.

L'algèbre de Lie de \mathcal{P}_0 est donc représentée par l'algèbre de Lie \mathcal{A} engendrée par tous les générateurs infinitésimaux A , où le crochet $[A_1, A_2]$ de deux éléments quelconques est déterminé par les relations de commutation des éléments de \mathcal{P}_0 . Considérons, dans \mathcal{A} , une base d'éléments A que nous noterons de la manière suivante :

P^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) pour le générateur du sous-groupe des translations le long de l'axe de coordonnée μ
 $M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu}$ pour le générateur du sous-groupe des transformations de Lorentz homogènes dans le 2-plan $\mu\nu$
 (elles laissent invariantes les deux autres coordonnées).

Leurs crochets valent

$$(1) \quad [i P^\lambda, i P^\mu] = 0$$

$$(1') \quad [i M^{\mu\nu}, i M^{\rho\sigma}] = i M^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + i M^{\nu\sigma} g^{\mu\rho} - i M^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} - \\ - i M^{\nu\rho} g^{\mu\sigma}$$

$$(1'') \quad [i P^\lambda, i M^{\mu\nu}] = i P^\mu g^{\lambda\nu} - i P^\nu g^{\lambda\mu}$$

écrits avec les facteurs i pour qu'apparaisse le fait que \mathcal{A} est, à un isomorphisme près, une algèbre de Lie réelle. D'un point de vue physique, P^0 , \vec{P} et $M^{\mu\nu}$ sont respectivement les observables énergie, impulsion et moment angulaire relativiste.

Le physicien n'utilise pas \mathcal{A} , mais bien son algèbre enveloppante $\widehat{\mathcal{A}}$, c'est-à-dire l'algèbre associative définie de manière canonique à partir de \mathcal{A} et où l'on identifie le commutateur $A_1 A_2 - A_2 A_1$ de deux éléments quelconques avec leur crochet $[A_1, A_2]$. Les observables attachées à la particule sont tous les éléments de $\widehat{\mathcal{A}}$ qui soient des opérateurs hermitiques; ce sont donc toutes les fonctions réelles des P^λ et $M^{\mu\nu}$, et construire un ensemble complet d'observables commutables, c'est construire une sous-algèbre abélienne maximale de $\widehat{\mathcal{A}}$. Cherchons-en une qui contienne les P^λ . Comme les $M^{\mu\nu}$ ne commutent pas avec les P^λ , nous ne pouvons utiliser directement le moment angulaire. Pauli (non publié, cité par Lubanski dans Physica (1942)) et Bargmann et Wigner (Proc. Nat. Acad. Sc. 34, 211 (1948)) ont introduit un pseudo-quadrivecteur \underline{W} commutant avec \underline{P}

$$W_\lambda = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho} P^\mu M^{\nu\rho} \quad (2)$$

où

$$\varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho} = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda, \mu, \nu, \rho \text{ ne sont pas tous différents} \\ -1 & \text{si } \lambda, \mu, \nu, \rho \text{ sont une permutation paire de } 0, 1, 2, 3 \\ 1 & \text{si } \lambda, \mu, \nu, \rho \text{ sont une permutation impaire de } 0, 1, 2, 3 \end{cases}$$

Utilisant (1) et (1''), on voit qu'on a bien

$$[P^\lambda, W_\mu] = 0 \quad (3)$$

Les équations (1'') et (2) fournissent aussi

$$\underline{P}^\lambda W_\lambda = W^\lambda P_\lambda = \underline{P} \cdot \underline{W} = 0 \quad (4)$$

On appelle W l'opérateur relativiste de polarisation, et on peut encore le définir par les équations

$$W^0 = \vec{P} \cdot \vec{J} \quad \text{et} \quad \vec{W} = P^0 \vec{J} - \vec{P} \times \vec{N} \quad (5)$$

$$\text{où } \vec{J} = (M^{23}, M^{31}, M^{12}) \quad \text{et} \quad \vec{N} = (M^{01}, M^{02}, M^{03}) \quad (6)$$

Les équations (1'), (1'') et (2) fournissent les relations de commutation des composantes de W

$$[W_\lambda, M^{\mu\nu}] = i g_{\lambda}^{\mu} W^{\nu} - i g_{\lambda}^{\nu} W^{\mu} \quad (7)$$

$$[W_\lambda, W_\mu] = -i \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho} P^\nu W^\rho \quad (7')$$

Nous utiliserons librement les $g^{\mu\nu}$ pour élever ou abaisser les indices; ainsi

$$W^\nu = g^{\nu\sigma} W_\sigma$$

On montre facilement que les deux opérateurs :

$$\underline{P} \cdot \underline{P} = \underline{P}^2 = P^\lambda g_{\lambda\mu} P^\mu = P^\lambda P_\lambda \quad (8)$$

$$\underline{W} \cdot \underline{W} = \underline{W}^2 = W^\lambda W_\lambda \quad (9)$$

commutent avec tous les P^λ et $M^{\mu\nu}$, donc qu'ils appartiennent au centre de $\widehat{\mathcal{O}}$; mais celui-ci, puisque nous avons considéré une représentation irréductible de \mathcal{P}_0 , ne peut, en vertu du lemme de Schur, contenir que des multiples de l'identité. Par conséquent

$$\underline{P}^2 = m^2 I \quad (10)$$

m étant la masse de la particule, et

$$\underline{W}^2 = -m^2 j(j+1) I \quad (11)$$

dont nous verrons la signification physique dans la suite.

Le système complet d'observables commutables que nous cherchons à construire contiendra donc \underline{P}^2 , \underline{W}^2 , les P^λ et n'importe laquelle, mais une seulement, des composantes W^μ de \underline{W} . Il ne peut en contenir plus d'une, puisqu'elles ne commutent pas entre elles. Avant de décider laquelle nous choisirons, il convient de préciser la réalisation de l'espace \mathcal{H} des vecteurs d'état.

2.- DESCRIPTION DE WIGNER DES ETATS D'UNE PARTICULE

Wigner a classé les représentations continues, unitaires et irréductibles du groupe de Poincaré restreint pour $m \gg 0$, et en a donné une réalisation explicite (An. of Math. 40, 156 (1939)). Nous pouvons utiliser directement son travail ici.

Les vecteurs de l'espace \mathcal{H} sur lequel est représenté $\overline{\mathcal{P}}_0$ sont des applications

$$\chi: \Omega_m \rightarrow \mathcal{H} : \underline{p} \in \Omega_m \rightarrow \chi(\underline{p}) \in \mathcal{H} \quad (12)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_m \text{ est l'hyperboloïde de masse } m : \underline{p}^2 = m^2 \geq 0 \\ \mathcal{H} \text{ est un espace de Hilbert de dimension finie } n \\ \chi(\underline{p}) \text{ est le vecteur de } \mathcal{H} \text{ de composantes } \chi_\alpha(\underline{p}) \text{ et de} \\ \text{norme } \|\chi\|_{\mathcal{H}} \text{ dans } \mathcal{H} . \end{array} \right.$$

Pour que χ appartienne à \mathcal{H} , il faut et il suffit qu'elle satisfasse la condition

$$\begin{aligned} \|\chi\| &= \int \|\chi(\underline{p})\|_{\mathcal{H}}^2 \theta(\underline{p}) d\Omega_m = \\ &= \int \sum_{\alpha=1}^n \bar{\chi}_\alpha(\underline{p}) \chi_\alpha(\underline{p}) \theta(\underline{p}) d\Omega_m < \infty \end{aligned} \quad (13)$$

$$\text{avec } \theta(\underline{p}) = 1 \text{ si } p^0 > 0 \text{ et } = 0 \text{ si } p^0 \leq 0 \quad (13')$$

$\|\chi\|$ est alors la norme de χ dans \mathcal{H} et \mathcal{H} lui-même est une intégrale directe d'espaces de Hilbert $\mathcal{H}(\underline{p}) = \mathcal{H}_p$, tous égaux à \mathcal{H} , relativement à la mesure $\theta(\underline{p}) d\Omega_m$, invariante pour les transformations de \mathcal{P}_0 :

$$\mathcal{H} = \int^{\oplus} \mathcal{H}(\underline{p}) \theta(\underline{p}) d\Omega_m \quad (14)$$

Si (a_1, Λ_1) et (a_2, Λ_2) sont deux transformations de Poincaré quelconques, on sait qu'elles se composent suivant la loi

$$(a_1, \Lambda_1) (a_2, \Lambda_2) = (a_1 + \Lambda_1 a_2, \Lambda_1 \Lambda_2) \quad (15)$$

A partir de là, Wigner a montré comment une transformation de Poincaré (a, Λ) est représentée sur \mathcal{H} :

$$[\mathcal{H}(a,) \chi]_{\alpha}(\underline{p}) = e^{i \underline{p} \cdot \underline{a}} \sum_{\beta=1}^n Q_{\alpha\beta}(\underline{p}, \Lambda) \chi_{\beta}(\Lambda^{-1} \underline{p}) \quad (16)$$

où les $Q_{\alpha\beta}$ sont les éléments d'une matrice unitaire $n \times n$; les matrices $Q(\underline{p}, \Lambda_1)$ et $Q(\underline{p}, \Lambda_2)$ se composent suivant la loi

$$Q(\underline{p}, \Lambda_1) Q(\Lambda_1^{-1} \underline{p}, \Lambda_2) = Q(\underline{p}, \Lambda_1 \Lambda_2) \quad (17)$$

Les transformations de Lorentz homogènes Λ telles que $\Lambda \underline{p} = \underline{p}$ forment un groupe appelé le petit groupe de \underline{p} . L'équation (17) montre que les $Q(\underline{p}, \Lambda)$ constituent une représentation unitaire de dimension finie du petit groupe de \underline{p} . On peut en outre montrer que cette représentation est irréductible du fait que la représentation considérée de ρ_0 sur \mathcal{H} l'est. D'ailleurs, généralisant la théorie des représentations induites donnée par Frobenius pour les groupes finis, Wigner a construit toutes les représentations irréductibles du petit groupe de \underline{p} , où \underline{p} parcourt Ω_m^+ . (Pour plus de détails, voir l'article de A.S. Wightman : "L'invariance dans la mécanique quantique relativiste". Les Houches, 1960).

3.- ETATS DE POLARISATION D'UNE PARTICULE D'ENERGIE-IMPULSION DETERMINEE

3.1 - Espace h_p des états de polarisation

Si l'on désire étudier indépendamment la polarisation de la particule, il est commode de travailler avec les vecteurs $\chi(\underline{p})$ de h_p munis de la norme

$$\|X(\underline{p})\|_h = \sum_{\alpha=1}^n \overline{X_{\alpha}(\underline{p})} X_{\alpha}(\underline{p}) \quad (18)$$

bien que h_p ne soit pas un sous-espace de \mathcal{H} puisque la mesure $\theta(\underline{p})$ d' Ω_m est continue. Considérer h_p comme sous-espace de \mathcal{H} c'est supposer qu'il existe dans \mathcal{H} des éléments de la forme

$$|\underline{p}\rangle = \delta(\underline{p}-\underline{p}') X(\underline{p}) \quad (19)$$

c'est-à-dire des "vecteurs propres" de l'énergie-impulsion

$$P^{\lambda} |\underline{p}\rangle = p^{\lambda} |\underline{p}\rangle \quad \text{avec} \quad \langle \underline{p}_1 | \underline{p}_2 \rangle = \delta(\underline{p}_1 - \underline{p}_2) \quad (20)$$

Les équations (16) et (17) montrent que le petit groupe de \underline{p} est représenté sur h_p par les matrices $Q(\underline{p}, \Lambda)$.

Dans la suite de ce chapitre, nous ne considérerons plus que des états $|\underline{p}\rangle$ où l'énergie-impulsion de la particule soit mesurée. De l'équation (3), il résulte que, pour toute fonction opératorielle $F(\underline{W})$, on a

$$P^{\lambda} F(\underline{W}) |\underline{p}\rangle = p^{\lambda} F(\underline{W}) |\underline{p}\rangle \quad (21)$$

$F(\underline{W})|\underline{p}\rangle$ est aussi un état d'énergie-impulsion \underline{p} , mais en général avec une autre polarisation; nous noterons \underline{W}_p la "restriction" de \underline{W} à h_p .

Remarquons une différence essentielle entre les mécaniques quantiques relativiste et non relativiste pour les particules à spin non nul. Les états de la mécanique non relativiste sont représentés par des fonctions de carré sommable $\psi(\vec{p}, \alpha)$ de la variable

continue \vec{p} (à 3 dim.) et de la variable discrète α , de telle manière que les observables dépendant seulement de l'impulsion agissent uniquement sur \vec{p} , tandis que les observables attachées à la seule polarisation agissent uniquement sur α . L'espace des vecteurs d'état est par conséquent le produit tensoriel $\mathcal{L}(\vec{p}) \otimes h$ de l'espace des fonctions de carré sommable en \vec{p} et d'un espace de Hilbert finidimensionnel, l'espace de polarisation. Par contre, comme l'opérateur relativiste de polarisation \underline{W} est construit à partir des P^λ , il est impossible de dissocier la mesure de la polarisation de celle de l'énergie-impulsion : c'est ce qui explique que l'espace des états relativistes ne soit pas un produit tensoriel mais une intégrale directe.

3.2 - Cas $\underline{p}^2 = m^2 > 0$

Le vecteur \underline{p} est de genre temps et son petit groupe est par conséquent le groupe des rotations de l'espace euclidien à trois dimensions. Les $Q(\underline{p}, \Lambda)$ constituent alors une représentation irréductible $\mathcal{D}^{(j)}$ du groupe des rotations sur l'espace de Hilbert h_p à $n = 2j + 1$ dimensions. Pour rendre claire la signification physique de \underline{W} , nous allons construire, à partir des W_λ , un système de générateurs infinitésimaux $S^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$) de $\mathcal{D}^{(j)}$.

Choisissons, dans l'espace de Muikowski de l'énergie-impulsion, une base adaptée à l'énergie-impulsion particulière \underline{p} . A cet effet, donnons-nous une tétrade de vecteurs unité

$$\underline{n}^{(0)} = \underline{p}/m, \quad \underline{n}^{(i)} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (22)$$

qui forment une base orthonormée

$$\underline{n}^{(\alpha)} \cdot \underline{n}^{(\beta)} = \delta^{\alpha\beta} \quad (23)$$

avec l'orientation "droite"

$$\sum^{\lambda\mu\nu\rho} \underline{n}_{\lambda}^{(\alpha)} \underline{n}_{\mu}^{(\beta)} \underline{n}_{\nu}^{(\gamma)} \underline{n}_{\rho}^{(\delta)} = -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (24)$$

tenant compte de ce que $g^{ij} = -\delta^{ij}$

Ils satisfont aussi à

$$\underline{n}_{\lambda}^{(\alpha)} \delta^{\alpha\beta} \underline{n}_{\mu}^{(\beta)} = \delta_{\lambda\mu} \quad (25)$$

Dans cette base adaptée, nous définissons les opérateurs

$$S^{(\alpha)} = -\frac{1}{m} \frac{W_p}{p} \cdot n^{(\alpha)} \quad (26)$$

L'équation (4) entraîne

$$S^{(0)} = 0 \quad (27)$$

En multipliant (26) par $m \delta_{\alpha\beta} n^{(\beta)}$, (25) fournit

$$\frac{W_p}{p} = m \sum_{i=1}^3 S^{(i)} \underline{n}^{(i)} = m \vec{S} \cdot \vec{n} \quad (28)$$

où \vec{S} , \vec{n} et \cdot sont des notations symboliques pour $S^{(2)}$, $\underline{n}^{(i)}$ et $\sum_{i=1}^3$ respectivement.

On a :

$$\frac{W_p^2}{p} = -m^2 \vec{S} \cdot \vec{S} = -m^2 \vec{S}^2 \quad (29)$$

Les relations de commutation (7"), la définition (26) des $S^{(i)}$ et l'équation (24) fournissent les relations de commutation

$$[S^{(i)}, S^{(j)}] = i \epsilon_{ijk} S^{(k)} \quad (30)$$

qui peut être écrite symboliquement

$$\vec{S} \times \vec{S} = i \vec{S} \quad (30')$$

Les $S^{(i)}$ satisfont les relations de commutation des composantes d'un moment angulaire, c'est-à-dire des éléments d'une base de l'algèbre de Lie du groupe des rotations de l'espace euclidien à 3 dim. Dans le système au repos de la particule, $\underline{n}^{(0)}$ est l'axe de temps, $\underline{n}^{(i)}$ les axes d'espace et (30) montre que \vec{S} est l'opérateur de spin. Dans le référentiel arbitraire où nous travaillons, \vec{S} est donc une généralisation relativiste de l'opérateur de spin.

D'ailleurs, dans le système au repos

$$p^0 = m, \quad \vec{p} = 0, \quad W_p^0 = 0, \quad \vec{W}_p = m \vec{S} = m \vec{J} \quad (31)$$

ce qui montre que l'opérateur de spin \vec{S} dans le système au repos peut être considéré soit comme la partie d'espace $J^1 = M^{23}$, $J^2 = M^{31}$, $J^3 = M^{12}$, du tenseur antisymétrique de moment angulaire, soit comme la partie d'espace du pseudo-vecteur polarisation $\frac{1}{m} \vec{W}_p$ dans h_p .

Puisque les $Q(\underline{p}, \wedge)$ constituent la représentation $D^{(j)}$ du groupe des rotations, les équations (29) et (30) entraînent

$$\underline{W}_p^2 = -m^2 \underline{S}^2 = -m^2 j(j+1) I \quad (32)$$

où $2j$ est un entier ≥ 0 .

Une base orthogonale de l'espace h_p est constituée des $(2j+1)$ vecteurs propres dans h_p de l'opérateur

$$S^{(3)} = I \frac{1}{W} \underline{W}_p \cdot \underline{n}^{(3)} \quad (33)$$

les $2j+1$ valeurs propres distinctes étant spécifiées par μ tel que

$$j - \mu \text{ entier } \geq 0, \quad -j \leq \mu \leq j \quad (33')$$

Il est évident que $\underline{n}^{(3)}$ peut être remplacé par un quadri-vecteur arbitraire orthogonal à \underline{p} . Nous pouvons maintenant répondre à la question posée à la fin du premier paragraphe : comme générateurs d'une sous-algèbre abélienne maximale, nous choisissons les P^λ et $-\frac{1}{m} \underline{W} \cdot \underline{n}^{(3)}$, en remarquant que ce choix ne convient que pour étudier une particule d'énergie-impulsion \underline{p} .

Comme nous avons montré au premier paragraphe que \underline{W}^2 est un multiple de I sur tout l'espace \mathcal{H} , (32) entraîne

$$\underline{W}^2 = -m^2 j(j+1) I \quad (34)$$

On dit que la particule a masse m et spin j ; ces deux quantités sont les invariants de la représentation qu'elles caractérisent entièrement.

3.3 - Cas $\underline{p}^2 = m^2 = 0$

Ce cas est très différent du précédent bien que les physiciens utilisent le même vocabulaire. Le vecteur \underline{p} est ici du

genre lumière et son petit groupe est ^{isomorphe au} ~~le~~ groupe euclidien du plan, dont les $Q(\underline{p}, \wedge)$ constituent une représentation irréductible.

Dans l'espace de l'énergie-impulsion, le 3-plan orthogonal à \underline{p} contient \underline{p} . Nous sommes donc obligés, pour construire notre tétrade, d'introduire un vecteur arbitraire de genre temps \underline{t} avec $\theta(\underline{t}) > 0$ (ce qui signifie que \underline{t} est à l'intérieur du cône d'avenir). D'où

$$\underline{t} \cdot \underline{p} = \alpha > 0 \quad (35)$$

$$\text{Soient } \underline{n}^{(0)} = \underline{t}, \quad \underline{n}^{(1)}, \quad \underline{n}^{(2)}, \quad \underline{n}^{(3)} = \frac{1}{\alpha} \underline{p} - \underline{t} \quad (36)$$

les quatre vecteurs de la tétrade, qui vérifient les conditions (23), (24) et (25); (26) est remplacée par

$$s^{(\alpha)} = - \underline{w}_p \cdot \underline{n}^{(\alpha)} \quad (37)$$

d'où, en vertu de (25) :

$$\underline{w}_p = - s^{(\alpha)} g_{\alpha\beta} s^{(\beta)} \quad (38)$$

$$\text{avec } s^{(0)} + s^{(3)} = \underline{p} \cdot \underline{w}_p = 0 \quad (39)$$

L'équation (29) est donc remplacée par

$$\underline{w}_p^2 = (s^{(0)})^2 - \sum_{i=1}^3 (s^{(i)})^2 = - (s^{(1)})^2 - (s^{(2)})^2 \quad (40)$$

et l'on trouve pour relations de commutation des $s^{(i)}$

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{\alpha} s^{(3)}, s^{(1)} \right] &= i s^{(2)} \\ \left[s^{(2)}, \frac{1}{\alpha} s^{(3)} \right] &= i s^{(1)} \\ \left[s^{(1)}, s^{(2)} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (41)$$

Ces relations de commutation caractérisent bien l'algèbre de Lie du groupe euclidien du plan, $S^{(1)}$ et $S^{(2)}$ représentant les composantes de l'opérateur de translation, $S^{(3)}$ l'opérateur de rotation. Wigner (Ann. of Math. 40, 149 (1939)) a montré que $\underline{W}^2 > 0$ ne peut avoir lieu que pour une représentation de dimension infinie de h_p ; pareille représentation ne présente pas d'intérêt ici puisque aucune particule à "spin continu" n'est connue. Les photons et les neutrinos correspondent au cas

$$\underline{W}^2 = 0 \quad (42)$$

ce qui implique, en vertu de (40)

$$S^{(1)} = S^{(2)} = 0 \quad (42')$$

puisque $(S^{(\alpha)})^* = S^{(\alpha)}$

Il ne nous reste donc qu'un seul opérateur $S^{(3)} = -S^{(0)}$ et h_p est de dimension 1. Comme nous l'avons vu, $\frac{1}{\alpha} S^{(3)}$ est le générateur infinitésimal du groupe des rotations du plan. Sa valeur propre parcourt, en considérant aussi les représentations doublement valuées, l'ensemble des entiers ou demi-entiers λ . On a donc dans h_p

$$\frac{1}{\alpha} S^{(3)} = \lambda \quad \text{où } 2\lambda \text{ est un entier } \geq 0 \quad (43)$$

et (38) fournit

$$\underline{W}_p = S^{(3)} \left(\underline{n}^{(0)} + n^{(3)} \right) = \underline{p} \frac{1}{\alpha} S^{(3)}$$

$$\text{c.à.d.} \quad \underline{W}_p = \lambda \underline{p} \quad (44)$$

L'équation (44) étant vraie quel que soit \underline{p} ,

$$\underline{W} = \lambda \underline{P} \quad (44')$$

L'invariant λ est souvent appelé le spin de la particule de masse zéro. C'est en réalité son hélicité. Dans le référentiel particulier où \underline{t} est l'axe de temps, on a

$$\frac{1}{\alpha} s(3) = \frac{\vec{W} \cdot \vec{p}}{p^0} = \lambda$$

qui est la définition la plus courante de l'hélicité; l'équation (44') en donne simplement une forme covariante et plus générale.

Si l'on considère une représentation irréductible, non de \mathcal{P}_0 , mais du groupe engendré par \mathcal{P}_0 et l'inversion d'espace, le petit groupe de \underline{p} est le groupe engendré par le groupe euclidien et l'inversion totale du plan; appelant toujours h_p l'espace des états de polarisation correspondant à la valeur \underline{p} de l'énergie-impulsion de la particule, c'est maintenant un espace à deux dim. sur lequel

la rotation $\mathcal{R}(\varphi)$ du plan est représentée par la matrice

$$\begin{pmatrix} e^{i|\lambda|\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i|\lambda|\varphi} \end{pmatrix}$$

l'inversion \mathcal{P} du plan est représentée par la matrice

$$\xi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{avec } \xi = \pm 1)$$

h_p possède une base canonique de vecteurs propres $|\underline{p}, \pm\rangle$ de $\frac{1}{\alpha} S^{(3)}$ correspondant aux deux valeurs propres $\lambda = \pm |\lambda|$ ($|\lambda|$ entier ou demi-entier strictement positif); les $|\underline{p}, \pm\rangle$ sont appelés respectivement: états de polarisation circulaire droite ou gauche. On voit que λ est bien un pseudoscalaire ; cela résulte de ce que \underline{W} est un pseudo-vecteur alors que \underline{P} est un vecteur (voir équation (44')).

On aurait pu appeler $|\underline{p}, \pm\rangle$ état d'hélicité droite ou gauche, mais nous ne voyons pas de raison qui justifie l'abandon d'un vocabulaire créé il y a 150 ans par des physiciens fameux. De toute manière, nous nous opposons à l'utilisation de l'hélicité s'agissant de particules de masse non nulle. Car ce n'est plus alors une quantité invariante, comme nous le verrons au paragraphe 5.1 (équation (67)).

4.- MATRICE DENSITE POUR LA POLARISATION

Soit $|n\rangle$ un vecteur d'état normalisé d'un espace de Hilbert H ; cela signifie que $\langle n|n\rangle = 1$. Le projecteur sur ce vecteur d'état est

$$P_n = |n\rangle \langle n| \quad (45)$$

qui vérifie

$$\text{Tr } P_n = \langle n|n\rangle = 1 \quad \text{et} \quad P_n = P_n^* = P_n^2 \quad (46)$$

La valeur moyenne ou espérance mathématique de A dans l'état $|n\rangle$ est

$$\langle n | A | n \rangle = \text{Tr } A P_n \quad (47)$$

Comme multiplier $|n\rangle$ par une phase ne change pas P_n , celui-ci convient mieux pour représenter un état physique que $|n\rangle$ lui-même.

Il arrive souvent que l'information dont nous disposons sur l'état d'un système physique ne soit pas complète. Nous n'en connaissons que la probabilité c_n d'être dans un état $|n\rangle$.

Considérons le cas le plus simple où tous les $|n\rangle$ sont orthogonaux. Bien entendu la probabilité totale, qui est alors $\sum_n c_n$ vaut 1. Nous dirons que l'état physique considéré est un mélange incohérent d'états orthogonaux $|n\rangle$ avec la loi de probabilité c_n . L'espérance mathématique de l'observable A s'écrit maintenant :

$$\sum_n c_n \langle n | A | n \rangle = \text{Tr } A \left(\sum_n c_n |n\rangle \langle n| \right) = \text{Tr } A \rho \quad (48)$$

$$\text{où } \rho = \sum_n c_n |n\rangle \langle n| = \sum_n c_n P_n \quad (49)$$

L'opérateur ρ est appelé la matrice densité du système physique. Citons comme propriétés caractéristiques de la matrice densité

$$\rho^* = \rho \quad (50)$$

$$\text{Tr } \rho = 1 \quad (50')$$

$$\text{Tr } \rho^k \leq 1 \quad \forall k \text{ entier positif} \quad (50'')$$

$$\langle \psi | \rho | \psi \rangle \geq 0 \quad \forall |\psi\rangle \in H \text{ c.à.d. que } \rho \text{ est définie positive} \quad (50''')$$

Le cas $e^k = e (\forall k)$ correspond à un état pur, c'est-à-dire un état qui peut être décrit par un projecteur P_n de dim. 1 ou par le vecteur d'état associé à ce projecteur.

Dans les expériences réelles les états physiques ne peuvent, la plupart du temps, être décrits par des vecteurs d'état, mais seulement par des matrices densité. Nous serons donc souvent amenés à utiliser ce formalisme plus général. La probabilité attachée à une certaine observation dans une expérience sera donnée par $\text{Tr } e A$ où A est un opérateur hermitique correspondant au dispositif expérimental.

Il résulte du 3ème paragraphe qu'une base naturelle pour l'espace de Hilbert \mathcal{H} des états d'une particule de masse $m \neq 0$ et de spin j est constituée des vecteurs $|\underline{p}, \beta\rangle$, où β est une valeur propre de $S^{(3)}$ défini par l'équation (26) ($-j \leq \beta \leq j$). Le produit scalaire est donné par

$$\langle \underline{p}, \alpha | \underline{p}', \beta \rangle = \delta_m(\underline{p}-\underline{p}') \delta_{\alpha\beta} \quad (51)$$

où δ_m est la fonction δ sur l'hyperboloïde de masse donnée par II (1). Tout état $|\chi\rangle$ peut être représenté par ses composantes

$$|\chi\rangle = \int \sum_{\alpha} \chi_{\alpha}(\underline{p}) |\underline{p}, \alpha\rangle d\Omega_m \quad (52)$$

d'où

$$\begin{aligned} \langle \chi' | \chi \rangle &= \int \sum_{\alpha} \sum_{\alpha'} \overline{\chi'_{\alpha'}}(\underline{p}') \chi_{\alpha}(\underline{p}) \delta_m(\underline{p}'-\underline{p}) \delta_{\alpha\alpha'} d\Omega'_m d\Omega_m = \\ &= \int \sum_{\alpha} \overline{\chi'_{\alpha}}(\underline{p}) \chi_{\alpha}(\underline{p}) d\Omega_m \end{aligned}$$

qui est précisément l'expression du produit scalaire impliquée par l'équation (13).

Nous ne considèrerons pas ici le cas général d'une matrice densité dans \mathcal{H} . Nous supposerons que l'impulsion de la particule est, soit non observée, soit mesurée avec une précision suffisante pour pouvoir, sans faire d'approximation excessive, limiter la description de l'état à l'espace de polarisation h_p . L'état de polarisation le plus général sera alors décrit par la matrice densité $\rho(\vec{p})$ qui est un opérateur hermitique sur h_p possédant les propriétés (50). Cette matrice densité fournit la description la plus générale de la polarisation d'un flux parallèle de particules monocinétiques. Elle se transforme, sous l'action du groupe de Poincaré, comme le produit tensoriel $\chi \otimes \widehat{\chi}$; c.à.d. tenant compte de la loi de transformation (16) pour les composantes

$$\rho(\underline{p}) \rightarrow Q(\underline{\Lambda}_p, \Lambda) \rho(\underline{\Lambda}_p) Q^*(\underline{\Lambda}_p, \Lambda) \quad (53)$$

Nous allons maintenant étudier des formes explicites de ρ pour déterminer la quantité covariante qui décrit la polarisation d'un état ou mélange d'états d'énergie-impulsion \underline{p} .

5.- DESCRIPTION COVARIANTE DE LA POLARISATION

5.1 - Particule de masse $m > 0$ et de spin $\frac{1}{2}$

Ce cas est très simple car $\dim h_p = 2j + 1 = 2$; la matrice $\rho(\underline{p})$ la plus générale qui satisfasse les conditions (50) a alors la forme

$$\rho(\underline{p}) = \frac{1}{2} (I + \vec{\zeta}(\underline{p}) \cdot \vec{\tau}) \quad (54)$$

avec

$$0 \leq (\vec{\zeta}(\underline{p}))^2 \leq 1 \quad (54')$$

où les composantes de $\vec{\tau}$ sont les trois matrices de Pauli définies par leurs relations de commutation

$$\frac{\tau_i}{2} \wedge \frac{\tau_j}{2} = i \frac{\tau_k}{2} \quad (55)$$

et qui vérifient

$$\tau^{(i)} \tau^{(j)} + \tau^{(j)} \tau^{(i)} = 2 \delta_{ij} \quad (56)$$

On les représente habituellement par

$$\tau^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (57)$$

(55) montre que, dans h_p , l'opérateur \vec{S} peut être représenté par $\frac{1}{2} \vec{\tau}$; $\rho(\underline{p})$ s'écrit alors

$$\rho(\underline{p}) = \frac{1}{2} \left(I + 2 \vec{\zeta}(\underline{p}) \cdot \vec{S} \right) = \frac{1}{2} \left(I - \frac{2}{m} \vec{\zeta} \cdot \underline{n} \cdot \underline{W}_p \right) \quad (58)$$

$$\text{ou } (\underline{p}) = \frac{1}{2} \left(I - \frac{2}{m} \underline{S} \cdot \underline{W}_p \right) \quad (58')$$

$$\text{si l'on définit } \underline{S} = \vec{\zeta} \cdot \vec{n} \quad (59)$$

Les équations (54') et (59) impliquent respectivement

$$0 \leq -\underline{S}^2 \leq 1 \quad (60)$$

$$\underline{S} \cdot \underline{p} = 0 \quad (61)$$

Sont équivalentes les deux équations

$$\text{Tr } \rho \vec{\tau} = \vec{\zeta} (\underline{p}) \quad (62)$$

$$\text{et } \text{Tr } \rho \underline{W}_p = \frac{m}{2} \underline{S} = \text{Tr } \rho \underline{W} \quad (62')$$

L'équation (62) résulte de (54), (55) et (56), en particulier de ce que (55) entraîne $\text{Tr } \vec{\tau} = 0$. Pour passer à (62') il suffit, en vertu de (28) et de (59), de multiplier les deux membres de (62) par $\frac{m}{2} \vec{n}$.

En résumé, l'état le plus général de polarisation d'une particule de masse $m > 0$, de spin $\frac{1}{2}$ et d'énergie-impulsion \underline{p} , est décrit par le pseudovecteur $\frac{m}{2} \underline{S}$ qui est l'espérance mathématique de l'opérateur \underline{W} . Lorsque $\underline{S} = 0 = \vec{\zeta}$, la particule n'est pas polarisée. Lorsque $\underline{S}^2 = -1 = -\vec{\zeta}^2$, la particule est dans un état pur de polarisation ($\rho^2 = \rho$) le long de \underline{S} . De façon générale la longueur

$$\left(-\underline{S}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\vec{\zeta}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = d \quad (63)$$

est le degré de polarisation. L'état de polarisation partielle \underline{S} peut toujours être considéré comme mélange incohérent des états de

polarisation \underline{S}/d (avec la probabilité $\frac{1+d}{2}$) et de polarisation $-\underline{S}/d$ (avec la probabilité $\frac{1-d}{2}$). Mais si cette décomposition peut être plus commode qu'une autre, elle n'est pas plus physique.

Il est souvent pratique, dans un système de référence donné, de décomposer \underline{S} en parties transverse et longitudinale. Soit $\underline{t} = (1, \vec{0})$ l'axe de temps. Le vecteur longitudinal $\underline{\ell}$ est le vecteur unité de genre temps orthogonal à \underline{p} dans le 2-plan $(\underline{t}, \underline{p})$, c.à.d.

$$\underline{\ell}^2 = -1 \quad (64)$$

$$\underline{\ell} \cdot \underline{p} = 0 \quad (65)$$

$$\underline{\ell} = \left(\frac{E}{m} \frac{\underline{p}}{|\underline{p}|} - \frac{m}{P} \underline{t} = \left(\frac{|\underline{p}|}{m}, \frac{E}{m} \frac{\underline{p}}{|\underline{p}|} \right) \quad (66)$$

$$\text{où } \underline{p} \cdot \underline{t} = E = \sqrt{\underline{p}^2 + m^2} \geq m$$

Dans la tétrade $\frac{\underline{p}}{m}, \underline{n}^{(1)}, \underline{n}^{(2)}, \underline{\ell}$, la composante de temps de $\underline{n}^{(1)}$ et $\underline{n}^{(2)}$ est nulle. La composante de la polarisation \underline{s} dans le 2-plan $(\underline{n}^{(1)}, \underline{n}^{(2)})$ est appelée transverse

$$\underline{s} = \underbrace{\zeta^{(1)} \underline{n}^{(1)} + \zeta^{(2)} \underline{n}^{(2)}}_{\text{transverse}} + \underbrace{\zeta^{(3)} \underline{\ell}}_{\text{longitudinale}} \quad (67)$$

Il est clair que la décomposition de la polarisation en parties transverse et longitudinale n'est pas covariante. Il convient donc, quand on parle de polarisation transverse ou longitudinale, de spécifier dans quel système de référence on travaille. Beaucoup de physiciens appellent $\zeta^{(3)}$ (dans (67)) l'hélicité; encore une fois, cela n'a aucun sens à moins de spécifier le système de référence.

Hélicité et polarisation longitudinale sont une seule et même chose pour une particule de masse non nulle. Cependant le mot hélicité est aussi utilisé pour désigner la polarisation circulaire - qui est, elle, une quantité invariante - d'une particule de masse nulle. Nous ne voyons vraiment pas pourquoi tant de physiciens utilisent le mot hélicité s'agissant de deux notions qui possèdent déjà des noms tout à fait satisfaisants; peut-être seulement pour rendre les choses encore plus obscures pour les non-initiés.

5.2 - Particule de masse $m = 0$ et de spin $\frac{1}{2}$

C'est le cas du neutrino. S'il n'existe qu'une polarisation circulaire pour le neutrino, le problème est banal puisque h_p est de dim. 1. La connaissance de \underline{p} caractérise complètement l'état de la particule, comme pour une particule de spin 0. Comme les neutrinos n'ont que des interactions faibles et que celles-ci ne conservent pas la parité, il paraît satisfaisant de penser qu'il n'existe pas dans la nature de superposition d'états du neutrino avec des polarisations circulaires différentes (par exemple, ces états sont séparés par une règle de supersélection : CP entre $\nu, \bar{\nu}$ ou $\nu', \bar{\nu}'$; "charge muonique" pour distinguer ν et ν' , etc...). Il se peut néanmoins qu'il n'en soit pas ainsi; il faut alors étudier la situation résultant de la possibilité qu'existent des superpositions linéaires de neutrinos de polarisations circulaires opposées. C'est, dans ce cas, une représentation

irréductible du groupe de Poincaré \mathcal{P}' contenant l'inversion d'espace qui agit sur l'espace \mathcal{H} des états du neutrino. Lorsque $m \neq 0$, la restriction à \mathcal{P}_0 d'une représentation irréductible de \mathcal{P}' est une représentation irréductible de \mathcal{P}_0 ; pour $m = 0$, $|\lambda| \neq 0$, au contraire c'est la somme directe des représentations $m = 0$, $|\lambda|$ et $m = 0$, $-|\lambda|$. h_p est donc, comme nous l'avons vu, un espace à deux dim. avec la base canonique $|\underline{p}, \pm \rangle$ définie par les équations

$$\underline{W} |\underline{p}, \pm \rangle = \pm |\lambda| \underline{p} |\underline{p}, \pm \rangle \quad (68)$$

On peut obtenir ce cas $m = 0$, $|\lambda| \neq 0$, comme limite du cas $m > 0$, $j = |\lambda|$. Mais c'est une opération un peu laborieuse, sauf dans le cas $|\lambda| = \frac{1}{2}$ que nous allons examiner maintenant; en effet, pour $|\lambda| = \frac{1}{2}$, $\dim h_p = 2$ reste constante dans le passage à la limite.

Soient les énergies-impulsions \underline{p} avec $\underline{p}^2 = m^2 \neq 0$ et \underline{q} avec $\underline{q}^2 = 0$; le passage à la limite fait tendre \underline{p} vers \underline{q} et nous supposons que le plan $(\underline{p}, \underline{q})$ reste fixe. Les deux relations

$$\underline{p} \cdot \underline{W} = 0 \quad (69)$$

$$\underline{W}^2 = -\frac{3}{4} m^2 \quad (70)$$

restent évidemment valables quelle que soit la valeur de $m (\geq 0)$. Soit \underline{t} un vecteur unité de genre temps dans le 2-plan $(\underline{p}, \underline{q})$. Pour décrire la polarisation de la particule d'énergie-impulsion \underline{p}

nous pouvons utiliser l'une ou l'autre des deux tétrades

$$\underline{p}/_m, \underline{n}^{(1)}, \underline{n}^{(2)}, \underline{l} = \frac{\alpha}{m \sqrt{\alpha^2 - m^2}} \underline{p} - \frac{m}{\sqrt{\alpha^2 - m^2}} \underline{t} \quad (71)$$

$$\underline{t}, \underline{n}^{(1)}, \underline{n}^{(2)}, \underline{n}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2 - m^2}} (\underline{p} - \alpha \underline{t}) \quad (72)$$

$$\text{où } \alpha = \underline{p} \cdot \underline{t} > 0 \quad (73)$$

Ces deux tétrades ont les mêmes vecteurs $\underline{n}^{(1)}$ et $\underline{n}^{(2)}$. La première est une simple généralisation de la tétrade $\underline{p}/_m, \underline{n}^{(1)}, \underline{n}^{(2)}, \underline{l}$ où \underline{l} est le vecteur longitudinal défini par les équations (64) à (66); elle s'y ramène lorsque \underline{t} est l'axe de temps; (67) se généralise en

$$\underline{s} = \zeta^{(1)} \underline{n}^{(1)} + \zeta^{(2)} \underline{n}^{(2)} + \zeta^{(3)} \underline{n}^{(3)} = \underline{s}_T + \zeta^{(3)} \underline{l} \quad (74)$$

Quant à la tétrade (72), elle est particulièrement bien adaptée à l'opération de passage à la limite puisque, pour $\underline{p} \rightarrow \underline{q}, \underline{n}^{(0)}, \underline{n}^{(1)}, \underline{n}^{(2)}$ restent fixes et $m \rightarrow 0$, donc elle tend vers la tétrade définie par (36). Définissant

$$s^{(\alpha)} = - \underline{w}_p \cdot \underline{n}^{(\alpha)} \quad (75)$$

$$\text{on a } \underline{w}_p = s^{(1)} \underline{n}^{(1)} + s^{(2)} \underline{n}^{(2)} + s^{(3)} \underline{n}^{(3)} - s^{(0)} \underline{n}^{(0)} \quad (76)$$

$$\text{avec } s^{(0)} = - \sqrt{\alpha^2 - m^2} \frac{s^{(3)}}{\alpha} \quad (77)$$

puisque $\underline{p} \cdot \underline{w}_p = 0$ (remarquer que la définition (75) diffère de

de (26) par un facteur m). A la limite

$$s^{(1)} \rightarrow 0, \quad s^{(2)} \rightarrow 0, \quad 2 \frac{s^{(3)}}{\alpha} \rightarrow \Sigma$$

où Σ est l'opérateur de polarisation circulaire défini par

$$\Sigma |p, \pm\rangle = \pm |p, \pm\rangle \quad (78)$$

L'équation (62') $S = \frac{2}{m} \text{Tr } \rho \underline{W}_p$ et les équations (74) et (75)

donnent

$$\zeta^{(1)} = \frac{2}{m} \text{Tr } \rho s^{(1)} \quad \zeta^{(2)} = \frac{2}{m} \text{Tr } \rho s^{(2)} \quad \zeta^{(3)} = \text{Tr } \rho L \quad (79)$$

où l'opération de polarisation longitudinale L vaut

$$L = - \frac{2}{m} \underline{W} \cdot \underline{l} = \frac{2}{\sqrt{\alpha^2 - m^2}} \underline{W} \cdot \underline{t} = \frac{-2}{\sqrt{\alpha^2 - m^2}} s^{(0)} = 2 \frac{s^{(3)}}{\alpha} \quad (80)$$

en vertu de (75) et (77). Donc $L \rightarrow \Sigma$, c.à.d. que l'opérateur de polarisation longitudinale de la particule de masse non nulle tend vers l'opérateur de polarisation circulaire de la particule de masse nulle. Il est facile de vérifier que les opérateurs

$\frac{2 s^{(1)}}{m}$, $\frac{2 s^{(2)}}{m}$ et L vérifient les relations de commutation des matrices de Pauli, et cela indépendamment de la valeur de m .

Cela signifie que l'état représenté par $\rho = \frac{1}{2} (I + \vec{\zeta} \cdot \vec{\tau})$ tend vers un état représenté par la même matrice ρ , L et Σ étant représentés par τ_3 . L'opérateur de polarisation transverse

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{m} \underline{W} - L \underline{l} = \\ &= \frac{2}{m} \left[\underline{W} - \frac{s^{(3)}}{\sqrt{\alpha^2 - m^2}} \left(\underline{p} - \frac{m^2}{\alpha} \underline{t} \right) \right] = \end{aligned} \quad (81)$$

$$= \frac{2}{m} \underline{W} - \frac{\alpha}{\alpha^2 - m^2} \underline{W} \cdot \underline{t} \left(\underline{p} - \frac{m^2}{\alpha} \underline{t} \right) \quad (81')$$

est représenté par $\tau^{(1)} \underline{n}^{(1)} + \tau^{(2)} \underline{n}^{(2)}$ qui est un opérateur vectoriel constant, dont la limite est évidemment bien définie. A noter que nous avons parlé de polarisation longitudinale et transverse dans le seul but de rencontrer l'intuition des physiciens. Le vecteur \underline{t} de genre temps peut être choisi arbitrairement, ce dont nous avons d'ailleurs tenu compte tout au long de notre raisonnement : Σ apparaît comme un opérateur invariant alors que I dépend explicitement de \underline{t} . Soient \underline{t}' un autre choix du vecteur unité de genre temps et I' l'opérateur transverse correspondant : de ce que $2 \underline{W} \rightarrow \Sigma \underline{p}$, on trouve $I - I' \rightarrow 0$. Une étude plus détaillée montre que l'on peut supprimer la condition "le plan $(\underline{p}, \underline{q})$ reste fixe lorsque $\underline{p} \rightarrow \underline{q}$ " ; $\underline{n}^{(1)}$ et $\underline{n}^{(2)}$ ne sont plus fixes et la limite dépend de la trajectoire de \underline{p} . Mais on montre que les deux limites ne peuvent différer que d'un vecteur proportionnel à \underline{q} . La polarisation transverse correspondante est modifiée par un pseudovecteur collinéaire à \underline{p} . Physiquement, cela revient à une transformation de jauge. On peut aussi dire que l'espace des vecteurs de polarisation transverse est l'espace-quotient de l'espace des vecteurs orthogonaux à \underline{p} par le sous-espace des vecteurs collinéaires à \underline{p} .

En résumé, la polarisation de la particule de masse nulle et de spin $\frac{1}{2}$ est complètement décrite par un opérateur Σ de polarisation circulaire et un opérateur I de polarisation transverse. Leurs valeurs moyennes $\zeta^{(3)} = \text{Tr } \rho \Sigma$ et $\underline{S}_T = \text{Tr } \rho I$

sont respectivement un pseudoscalaire et un pseudovecteur orthogonal à \underline{p} , ce dernier défini à un pseudovecteur collinéaire à \underline{p} près. Le degré de polarisation vaut

$$d = (\vec{\zeta}^2)^{\frac{1}{2}} = \left((\zeta^{(3)})^2 - \frac{S^2}{T} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (82)$$

5.3 - Particule de masse $m > 0$ et de spin j quelconque

(Ce paragraphe est de Cl. Henry)

Nous considérons, dans h_p , la base composée des $(2j+1)$ vecteurs propres $|jm\rangle$ de $-\frac{1}{m} \underline{W}_p \cdot \underline{n}^{(3)}$. Pour toute transformation \wedge du petit groupe de \underline{p} , ρ se transforme, d'après (53), suivant la loi

$$\rho' = Q(\underline{p}, \wedge) \rho Q^*(\underline{p}, \wedge) \quad (83)$$

$$\text{c.à.d. } \rho'_{m'_1 m'_2} = \sum_{m_1} \sum_{m_2} D^{(j)}_{m'_1 m_1} \rho_{m_1 m_2} \left(D^{(j)} \right)_{m_2 m'_2} =$$

$$= \sum_{m_1 m_2} D^{(j)}_{m'_1 m_1} \overline{D^{(j)}_{m'_2 m_2}} \rho_{m_1 m_2} \quad (83')$$

puisque le petit groupe de \underline{p} est le groupe des rotations.

Les éléments $\rho_{m_1 m_2}$ de la matrice densité apparaissent donc comme les $(2j+1)^2$ composantes d'un vecteur de l'espace support de la représentation $D^{(j)} \otimes \overline{D^{(j)}}$ du groupe des rotations. Comme

$$D^{(j)} \otimes \overline{D^{(j)}} \simeq \bigoplus_{k=0}^{2j} D^{(k)} \quad (84)$$

cet espace possède une base sur laquelle le vecteur en question a les composantes $\rho_q^{(k)}$ ($k = 0, \dots, 2j$; $q = -k, \dots, +k$) qui se transforment respectivement suivant les représentations $D^{(k)}$ du groupe des rotations.

La matrice qui exprime le changement de base est une matrice de coefficients de Clebsh-Gordan, et l'on a :

$$\begin{aligned} \rho_{m_1 m_2} &= \sum_{k=0}^{2j} \sum_{q=-k}^k (-1)^{j+m_1} \sqrt{2k+1} \begin{pmatrix} j & j & k \\ m_1 & -m_2 & -q \end{pmatrix} \rho_q^{(k)} = \\ &= \sum_k \sum_q \frac{\sqrt{2k+1}}{\langle j \| T^{(k)} \| j \rangle} \langle j m_1 | T_q^{(k)} | j m_2 \rangle \rho_q^{(k)} \end{aligned}$$

en vertu de la définition même de l'élément de matrice réduit $\langle j \| T^{(k)} \| j \rangle$ de l'opérateur tensoriel irréductible d'ordre k $T_q^{(k)}$ ($q = -k, \dots, k$) (Pour la démonstration, voir V. Fano and G. Racah "Irreducible tensorial sets", et pour la définition du symbole $3j$ de Wigner en fonction du coefficient de Clebsh-Gordan correspondant, voir A. Messiah "Mécanique quantique", Appendice d).

$$\text{Donc } \rho = \sum_{k=0}^{2j} \sum_{q=-k}^k \frac{\sqrt{2k+1}}{\langle j \| T^{(k)} \| j \rangle} \rho_q^{(k)} T_q^{(k)} \quad (85)$$

Le calcul montre que

$$1) \quad \text{Tr } \rho = \sqrt{2j+1} \rho_0^{(0)} \Rightarrow \rho_0^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \quad (86)$$

puisque $\text{Tr } \rho = 1$

$$2) \operatorname{Tr} \left(\rho_{\mathbb{T}^{(k)}} \right) = (-1)^q \rho_{-q}^{(k)} \frac{\langle j \| \mathbb{T}^{(k)} \| j \rangle}{\sqrt{2k+1}} = \overline{\rho_q^{(k)}} \frac{\langle j \| \mathbb{T}^{(k)} \| j \rangle}{\sqrt{2k+1}} \quad (87)$$

en tenant compte de l'hermiticité de ρ qui entraîne

$$3) \overline{\rho_q^{(k)}} = (-1)^q \rho_{-q}^{(k)} \quad (88)$$

$$4) \sum_k \sum_q \rho_q^{(k)} \overline{\rho_q^{(k)}} = \operatorname{Tr} \rho^2 \Rightarrow \sum_k \sum_q \rho_q^{(k)} \overline{\rho_q^{(k)}} \leq 1 \quad (89)$$

puisque $\operatorname{Tr} \rho^2 \leq 1$

$$5) \sum_{q=-k}^k \rho_q^{(k)} \overline{\rho_q^{(k)}} \leq (2k+1) \max_{m \in \{-j, \dots, j\}} \binom{j \quad j \quad k}{m \quad -m \quad 0}^2 \quad (90)$$

qui est valable pour tout $k = 1, \dots, 2j$, et résulte de ce que ρ est définie positive et de trace 1; (90) permet de définir le degré $d^{(k)}$ de polarisation 2^k polaire de l'état décrit par la matrice ρ

$$d^{(k)} = \left[\sum_{q=-k}^k \rho_q^{(k)} \overline{\rho_q^{(k)}} \right]^{\frac{1}{2}} \left[(2k+1) \max_{m \in \{-j, \dots, j\}} \binom{j \quad j \quad k}{m \quad -m \quad 0}^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (91)$$

l'ensemble des degrés $d^{(k)}$ étant le degré de polarisation de l'état. En raison de (89), il n'existe pas d'état où tous les $d^{(k)}$ atteignent simultanément leur maximum.

On peut choisir

$$\mathbb{T}_q^{(k)} = y_q^{(k)} \vec{S} \quad (92)$$

les $y_q^{(k)}$ étant définis de la manière suivante : dans le polynôme

harmonique $y_q^{(k)}(\vec{r})$, complètement symétrisé par rapport aux composantes correspondantes de \vec{S} , définies par l'équation (26). Les lois de transformation, pour le groupe des rotations, des $y_q^{(k)}(\vec{r})$ et des composantes d'un moment cinétique entraînent que les $y_q^{(k)}(\vec{S})$ se transforment comme les composantes standard d'un opérateur tensoriel irréductible d'ordre h , puisque la symétrie par rapport aux $S^{(i)}$ est conservée par toute transformation linéaire. Par conséquent

$$\begin{aligned}
 \rho &= \frac{1}{2j+1} + \sum_{k=1}^{2j} \sum_{q=-k}^k \frac{\sqrt{2k+1}}{\langle j \parallel y^{(k)} \parallel j \rangle} \rho_q^{(k)} y_q^{(k)}(\vec{S}) = \\
 &= \frac{1}{2j+1} + \sum_k \sum_q \frac{\sqrt{2k+1}}{\langle j \parallel y^{(k)} \parallel j \rangle} \rho_q^{(k)} y_q^{(k)} \left(-\frac{1}{m} \vec{n} \cdot \vec{W}_p \right) = \quad (93) \\
 &= \frac{1}{2j+1} + \sum_k \sum_q \frac{\sqrt{2k+1}}{\langle j \parallel y^{(k)} \parallel j \rangle} \rho_q^{(k)} \left(-\frac{1}{m} \right)^k \sum_{\lambda_1=0}^3 \dots \sum_{\lambda_k=0}^3 W^{\lambda_1} \dots W^{\lambda_k} \\
 y_q^{(k)}(\vec{n}_{\lambda_1}, \dots, \vec{n}_{\lambda_k}) &= \frac{1}{2j+1} + \sum_{k=1}^{2j} \frac{\sqrt{2k+1}}{\langle j \parallel y^{(k)} \parallel j \rangle} \left(-\frac{1}{m} \right)^k \sum_{\lambda_1=0}^3 \dots \\
 \dots \sum_{k=0}^3 W^{\lambda_1} \dots W^{\lambda_k} &\left(\sum_{q=-k}^k \rho_q^{(k)} y_q^{(k)}(\vec{n}_{\lambda_1}, \dots, \vec{n}_{\lambda_k}) \right) = \\
 = \frac{1}{2j+1} + \sum_{k=1}^{2j} \left(-\frac{1}{m} \right)^k \sum_{\lambda_1=0}^3 \dots \sum_{\lambda_k=0}^3 W^{\lambda_1} \dots W^{\lambda_k} s_{\lambda_1} \dots \lambda_k &\quad (94) \\
 = \frac{1}{2j+1} - \frac{1}{m} W^{\lambda_1} + \frac{1}{m^2} W^{\lambda_1} W^{\lambda_2} s_{\lambda_1 \lambda_2} - \frac{1}{m^3} W^{\lambda_1} W^{\lambda_2} W^{\lambda_3} s_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} + \dots
 \end{aligned}$$

où les $s_{\lambda_1 \dots \lambda_k}$ sont les composantes covariantes (dans le sens opposé à contravariantes) d'un tenseur de Minkowski d'ordre k .

Pour que soit claire la définition des $y_q^{(k)}(\vec{n}_{\lambda_1}, \dots, \vec{n}_{\lambda_k})$ donnons un exemple :

$$y_1^{(2)}(\vec{r}) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} z(x+iy) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} (zx+xy+izy+iyz)$$

$$\Rightarrow y_1^{(2)}(\vec{n}_{\lambda_1}, \vec{n}_{\lambda_2}) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \left(n_{\lambda_1}^{(3)} n_{\lambda_2}^{(1)} + n_{\lambda_1}^{(1)} n_{\lambda_2}^{(3)} + i n_{\lambda_1}^{(3)} n_{\lambda_2}^{(2)} + i n_{\lambda_1}^{(2)} n_{\lambda_2}^{(3)} \right).$$

Les $y_q^{(k)}(\vec{n}_{\lambda_1}, \dots, \vec{n}_{\lambda_k})$ possèdent les propriétés

1) d'être complètement symétriques par rapport à l'ensemble des indices $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ (95)

2) d'être homogènes de degré k par rapport à l'ensemble des 3 variables $n_{\lambda_i}^{(2)}$, i fixé, $\forall i \in (1, \dots, k)$ (96)

3) $\overline{y_q^{(k)}(\vec{n}_{\lambda_1}, \dots, \vec{n}_{\lambda_k})} = (-1)^q y_{-q}^{(k)}(\vec{n}_{\lambda_1}, \dots, \vec{n}_{\lambda_k})$ (97)

4) $\sum_{\lambda=0}^3 y_q^{(k)}(\vec{n}_{\lambda_1}, \dots, \vec{n}_{\lambda_i=\lambda}, \dots, \vec{n}^{\lambda_j=\lambda}, \dots, \vec{n}_{\lambda_k}) = 0$ (98)

$$\forall i, \forall j \in \{1, \dots, k\}$$

$$5) \sum_{\lambda_1=0}^3 \sum_{\lambda_k=0}^3 y_q^{(k)} \left(\vec{n}_{\lambda_1}, \dots, \vec{n}_{\lambda_k} \right) \overline{y_{q'}^{(k)}} \left(\vec{n}^{\lambda_1}, \dots, \vec{n}^{\lambda_k} \right) = c(k) \delta_{qq'} \quad (99)$$

la constante réelle $c(k)$ ne dépendant pas de q .

On a alors pour les $s_{\lambda_1} \dots \lambda_k$ les propriétés

$$1) \text{ elles sont toutes réelles (en vertu de (88) et (97)) } \quad (100)$$

$$2) \text{ ce sont les composantes d'un tenseur complètement } \\ \text{symétrique (en vertu de (95))} \quad (101)$$

3) ce tenseur est, pour chacune de ses composantes, orthogonal à \underline{p} , c.à.d.

$$\sum_{\lambda=0}^3 p^\lambda s_{\lambda_1} \dots \lambda_i = \lambda \dots \lambda_k = 0 \quad \forall i \in (1, \dots, k) \quad (102)$$

(en vertu de (96) et (23))

$$4) \sum_{\lambda_1=0}^3 \dots \sum_{\lambda_k=0}^3 s_{\lambda_1} \dots \lambda_k s^{\lambda_1} \dots \lambda_k = \frac{2k+1}{\langle j \| y^{(k)} \| j \rangle^2} c(k) \sum_{q=-k}^k \rho_q^{(k)} \overline{\rho_q^{(k)}} \quad (103)$$

(en vertu de (88), (97) et (99))

(91) et (103) prouvent que les degrés $d^{(k)}$ sont des invariants relativistes.

5.4 - Photon

Nous n'avons pas besoin de la matrice densité pour la polarisation du photon. A titre d'exemples d'application de pareille étude, nous citerons :