

J. BERNSTEIN and L. MICHEL, Phys. 118, 871 (1960)

(Invariance under PTC in  $\pi^0$ -decay)

L. MICHEL and H. RONHANINEJAD, Phys. 122, 242 (1961)

( $\Sigma^0 \Lambda^0$  relative parity from  $\Sigma^0$  decay).

IV - SYMETRIES DISCRETES P, T, C

|   |       |
|---|-------|
| 1. Structure de la probabilité de transition                | IV-1  |
| 2. Non-conservation de la parité                            | IV-4  |
| 2.1 Désintégration spontanée d'un système A<br>non polarisé | IV-6  |
| 2.2 Désintégration d'une particule polarisée<br>de spin 1/2 | IV-8  |
| 3. Invariance par renversement du mouvement                 | IV-9  |
| 4. Invariance par T P                                       | IV-13 |
| 5. Invariance par conjugaison de charge C et par C P        | IV-14 |
| 6. Invariance par C P T                                     | IV-16 |

## 1.- STRUCTURE DE LA PROBABILITE DE TRANSITION

Si  $\rho_i$  est la matrice densité de l'état initial, la distribution de probabilités dans l'état final est caractérisée par la matrice

$$\rho_f = S \rho_i S^* \quad (1)$$

On mesure en général dans une expérience la probabilité de transition vers un état décrit par  $\rho'$ , probabilité qui vaut

$$\mathcal{M} = \text{Tr} (\rho_f \rho') = \text{Tr} (S \rho_i S^* \rho') \quad (1) \quad (2)$$

Lorsqu'on observe l'énergie-impulsion mais non la polarisation (c.à.d. que l'on intègre sur la polarisation dans l'état final)  $\mathcal{M}$  est la quantité utilisée dans le second chapitre où l'on avait fait  $\rho'$  indépendant des variables de polarisation. De façon générale  $\rho'$  est un opérateur hermitique décrivant l'appareil de mesure.

Lorsqu'il y a deux particules dans l'état initial (phénomène de collision),  $\rho_i$  est le produit tensoriel  $\rho_i^1 \otimes \rho_i^2$ . Au contraire  $S \rho_i S^*$  n'est jamais un tenseur décomposable, cela caractérise le fait qu'il y a eu interaction;  $\rho_f$  est une combinaison linéaire à coefficients positifs de produits tensoriels de matrices densité correspondant aux particules sortantes. Mais, de toute

---

(1) L'opération de trace n'étant ici à effectuer que sur l'espace de polarisation de la particule sortante.

toute manière, puisque toute matrice densité dépend linéairement des tenseurs de polarisation  $s^{\lambda_1 \dots \lambda_k}$  de la particule qu'elle décrit, et que  $\mathcal{M}$  dépend linéairement des matrices densité attachées à chacune des particules intervenant dans l'interaction,  $\mathcal{M}$  dépend linéairement du tenseur de polarisation de chacune de ces particules

Nous ne considèrerons désormais que des particules de spin  $\frac{1}{2}$  alors, pour chacune d'entre elles, les grandeurs que l'on observera sont au plus :  $\underline{p}$  et  $\underline{s}$  avec

$$\underline{p}^2 = m^2, \quad \underline{p} \cdot \underline{s} = 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq -\underline{s}^2 \leq 1 \quad (3)$$

Par exemple, dans la désintégration du  $\mu$  polarisé, on observe tout au plus  $\underline{p}_\nu$ ,  $\underline{S}_\nu$ ,  $\underline{p}_e$ ,  $\underline{S}_e$ , mais ni l'énergie-impulsion, ni la polarisation des deux neutrinos (ce qui correspond à une intégration sur ces observables).

Nous supposons évidemment l'invariance pour les transformations du groupe de Poincaré connexe  $\mathcal{P}_0$ ; nous avons alors (voir par exemple H. Weyl "Classical groups") que les seuls invariants que l'on puisse construire avec les quantités observées, à partir desquels l'invariant  $\mathcal{M}$  doit lui-même être construit, sont les produits scalaires du type  $\underline{p}_1 \cdot \underline{S}_2$ ,  $\underline{p}_1 \cdot \underline{p}_2$  et  $\underline{S}_1 \cdot \underline{S}_2$ , ainsi que les déterminants  $(a, b, c, d) = \sum_{\lambda \mu \nu \rho} a^\lambda b^\mu c^\nu d^\rho$  faits de  $\underline{p}$  et de  $\underline{s}$ . Il faut aussi tenir compte de la polarisation circulaire  $\lambda$  des éventuelles particules de masse nulle. La table 1 indique comment ces invariants (pour  $\mathcal{P}_0$ ) sont transformés par symétrie d'espace, renversement du sens du temps et conjugaison de charge :

TABLE I

|  | P ou PC | T ou TC | PT ou PTC |
|--|---------|---------|-----------|
| $\underline{p}_1 \cdot \underline{p}_2$ ou $\underline{s}_1 \cdot \underline{s}_2$                           | +       | +       | +         |
| $\underline{p}_1 \cdot \underline{s}_2$  | -       | +       | -         |
| $(a,b,c,d) \begin{cases} 4 \underline{p} \\ 2 \underline{p}, 2 \underline{s} \\ 4 \underline{s} \end{cases}$ | -       | -       | +         |
| $(a,b,c,d) \begin{cases} 3 \underline{p}, 1 \underline{s} \\ 1 \underline{p}, 3 \underline{s} \end{cases}$   | +       | -       | -         |
| $\lambda$  | -       | +       | -         |

Pour établir cette table, il faut se souvenir que  $\underline{s}$  est un pseudovecteur tandis que  $\underline{p}$  est un vecteur. Quant à la conjugaison de charge  $C$ , elle commute avec toute transformation du groupe de Poincaré puisqu'elle n'agit pas sur les observables cinématiques; elle laisse donc invariants  $\underline{p}$  et  $\underline{s}$ . Pour ce qui est de  $T$ , il faut tenir compte de ce que ce n'est pas seulement le renversement du sens du temps ( $x^0 \rightarrow -x^0$ ,  $\vec{x} \rightarrow \vec{x}$ ), mais aussi, afin que l'énergie reste positive, le renversement du

mouvement  $(E \rightarrow E, \vec{p} \rightarrow -\vec{p} \Rightarrow S^0 \rightarrow S^0, \vec{S} \rightarrow -\vec{S})$ ; la dernière ligne de la table découle immédiatement de l'équation  $\underline{W} = \lambda \underline{P}$ .

## 2.- NON CONSERVATION DE LA PARITE

Comment observer une absence de symétrie pour la réflexion d'espace ? Etant donné un système physique dans un état  $\Sigma_1$ , il se peut qu'existe un système identique dans un état  $\Sigma_1'$  (état "miroir obtenu à partir de  $\Sigma_1$  par une opération de symétrie d'espace P. Si  $\Sigma_1'$  est le même état que  $\Sigma_1$ , on dit qu'il possède une symétrie spatiale interne.

Si  $\Sigma_1'$  n'existe pas, les lois de la nature décrivant des phénomènes où intervient le système en question ne sauraient être invariantes par P. Si  $\Sigma_1'$  existe, nous dirons que les lois de la nature concernées sont invariantes par P si et seulement si la probabilité  $\lambda_{12}$  pour le système d'évoluer de  $\Sigma_1$  vers un autre état  $\Sigma_2$  est égale à la probabilité  $\lambda'_{12}$  d'évolution de  $\Sigma_1'$  vers  $\Sigma_2'$ , où  $\Sigma_1' = P \Sigma_1$  et  $\Sigma_2' = P \Sigma_2$ . Définissant

$$\lambda = \frac{\lambda_{12} + \lambda'_{12}}{2} \quad \text{et} \quad \lambda' = \frac{\lambda_{12} - \lambda'_{12}}{2} \quad (4)$$

la non invariance par P sera généralement démontrée à partir de  $\lambda_{12} \neq \lambda'_{12}$  ou  $\lambda' \neq 0$ .

Comme P échange  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  et  $\lambda_{12}$  avec  $\Sigma'_1$ ,  $\Sigma'_2$  et  $\lambda'_{12}$ , elle laisse invariant  $\lambda$  alors qu'elle transforme  $\lambda'$  en  $-\lambda'$  :  $\lambda$  est un scalaire et  $\lambda'$  un pseudoscalaire. De ce que les probabilités de transition  $\lambda_{12}$  et  $\lambda'_{12}$  ne sont jamais négatives, on tire  $|\lambda'| \leq \lambda$  et l'on pourra parler d'une "violation maxima de la parité" lorsque  $|\lambda'| = \lambda$ . Par contre, il ne suffit pas que  $\lambda' = 0$  pour que la parité soit conservée, en vertu de cette règle de logique très simple mais trop souvent oubliée :

$$(A \Rightarrow B) \quad \text{est équivalent à} \quad \Longleftrightarrow \quad (\text{non } B \Rightarrow \text{non } A)$$

mais n'a aucune influence sur la proposition inverse

$$(B \Rightarrow A) \quad \Longleftrightarrow \quad (\text{non } A \Rightarrow \text{non } B)$$

où A est ici la symétrie par P et B le fait que  $\lambda = 0$ .  
Pour citer un autre exemple historique :

$$P \Rightarrow \text{pas de dipôle électrique du nucléon}$$

et dipôle électrique du nucléon  $\neq 0 \Rightarrow$  non P  
sont des propositions équivalentes et vraies.

non P  $\Rightarrow$  dipôle électrique du nucléon  $\neq 0$   
et pas de dipôle électrique du nucléon  $\Rightarrow$  P  
sont des propositions équivalentes mais fausses.

2.1 - Désintégration spontanée d'un système A non polarisé

$$\text{Soit la réaction } A \rightarrow a + b + \dots \quad (5)$$

où  $a$  a une masse  $m \neq 0$  et un spin  $j_a = \frac{1}{2}$ . Nous supposons que les énergies-impulsions  $\underline{P}$  et  $\underline{p}$  de  $A$  et  $a$ , et la polarisation  $\underline{s}$  de  $a$  sont les seules quantités dynamiques observées. En vertu de ce qui a été établi au premier paragraphe, la probabilité de transition  $\lambda_{12}$  peut s'écrire

$$\lambda_{12}(\underline{s}) = f + g \underline{P} \cdot \underline{s} \quad (6)$$

où  $f$  et  $g$  sont des fonctions (scalaires) de  $\underline{P}^2 = M^2$ ,  $\underline{p}^2 = m^2$  et  $\underline{P} \cdot \underline{p}$ . Pour mettre en évidence une violation de la parité par la réaction (5), il suffit de montrer que  $g \neq 0$ , c.à.d.  $\lambda' \neq 0$  ( $\lambda'$  défini par (4)).  $\lambda_{12}(\underline{s})$  peut aussi s'écrire, en vertu de ce que nous avons vu au chapitre III, :

$$\begin{aligned} \lambda_{12}(\underline{s}) &= \text{Tr}(\rho_f \rho') = \text{Tr}\left(f \left(I - 2 \frac{W}{m} \cdot \underline{a}\right) \frac{1}{2} \left(I - 2 \frac{W}{m} \cdot \underline{s}\right)\right) = \\ &= f(1 - \underline{a} \cdot \underline{s}) = f(1 + \vec{\alpha} \cdot \vec{\xi}) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{où } \underline{a} &= \vec{n} \cdot \vec{\alpha} \quad \text{et } \underline{s} = \vec{n} \cdot \vec{\xi} \quad (\vec{n} = \underline{n}^{(1)}, \underline{n}^{(2)}, \underline{n}^{(3)}) \\ \underline{p} \cdot \underline{a} &= 0 \quad \text{et } 0 \leq -\underline{a}^2 \leq 1 \end{aligned}$$

$\underline{a}$  caractérise le pouvoir polarisant de la réaction (5) et peut aisément être calculé à partir de  $\lambda_{12}(\underline{s})$  :

$$\alpha^i = \frac{\lambda_{12}(\underline{s} = \underline{n}^{(i)}) - \lambda_{12}(\underline{s} = -\underline{n}^{(i)})}{2 \lambda_{12}(\underline{s} = 0)} \quad (8)$$

$f$  apparaît comme la probabilité de transition vers l'état non polarisé de la particule  $a$  avec l'énergie-impulsion  $\underline{p}$  :  $\lambda_{12}(\underline{s}=0) = f$

Les équations (6) et (7) entraînent

$$-f \underline{a} \cdot \underline{s} = g \underline{P} \cdot \underline{s} \quad (9)$$

valable  $\forall \underline{s}$  ; les composantes de  $\underline{a}$  et  $\underline{P}$  dans la triade  $\underline{n}^{(1)}$ ,  $\underline{n}^{(2)}$ ,  $\underline{n}^{(3)}$  sont donc proportionnelles, c.à.d. que  $\underline{a}$  est un vecteur (orthogonal à  $\underline{p}$ ) dans le 2-plan  $(\underline{P}, \underline{p})$ . Par conséquent

$$\underline{a} = \alpha \underline{\ell} \quad (10)$$

où  $\underline{\ell}$  est le vecteur longitudinal de la tétrade  $\frac{\underline{p}}{m}$ ,  $\underline{n}^{(1)}$ ,  $\underline{n}^{(2)}$ ,  $\underline{\ell}$ , en ayant choisi  $\underline{t} = \frac{\underline{P}}{M}$  (voir Chapitre III, paragr. 5.1).

$$0 \leq -a^2 \leq 1 \quad \text{entraîne} \quad -1 \leq \alpha \leq 1 \quad (11)$$

$$\underline{\ell} \cdot \underline{p} = 0 \quad \text{et} \quad \underline{\ell}^2 = -1 \quad \text{entraînent} \quad \underline{\ell} = K_1 \underline{p} - K_2 \underline{P} \quad (12)$$

$$\text{avec} \quad K_1 = \frac{M^2 + m^2 - x^2}{m \sqrt{-\Delta}} \quad \text{et} \quad K_2 = \frac{2m}{\sqrt{-\Delta}} \quad (12')$$

$$\text{sachant que} \quad x^2 = (\underline{P}-\underline{p})^2 \quad \text{et} \quad \Delta = (M+m+x)(-M+m+x)(M-m+x)(M+m-x) \quad (12'')$$

En vertu de (8),  $\alpha = \frac{\lambda_{12}(\underline{s}=\underline{\ell}) - \lambda_{12}(\underline{s}=-\underline{\ell})}{2f}$  ; donc observer  $\lambda_{12}(\underline{s}=\underline{\ell}) \neq \lambda_{12}(\underline{s}=-\underline{\ell})$ , c'est mettre en évidence une violation de la parité.

Dans le système au repos de la particule initiale  $\underline{P} = (M, \vec{0})$ ,  $\alpha \underline{\ell}$  est la polarisation longitudinale; l'équation (12) la donne dans tout système de référence; elle est entièrement caractérisée par le pseudo-invariant  $\alpha$ . Nous pouvons appliquer tout ceci aux réactions

$$\pi \rightarrow \mu + \nu \quad , \quad \pi \rightarrow e + \nu \quad , \quad K \rightarrow \mu + \nu \quad ,$$

à la désintégration  $\beta$  de noyaux non polarisés et aux désintégrations de  $\mu$  et d'hypérons non polarisés.

## 2.2 - Désintégration d'une particule polarisée de spin 1/2

Nous supposons maintenant que  $j_A = 1/2$  et que l'on observe uniquement les énergies-impulsions  $\underline{P}$  et  $\underline{p}$  de A et a (a étant un des produits de désintégration) et la polarisation  $\underline{s}$  de A. A partir de ces quantités, on ne peut former qu'un seul pseudo-invariant  $\underline{p} \cdot \underline{s}$ . La probabilité de transition s'écrit donc :

$$\lambda_{12}(\underline{s}) = f - g \underline{p} \cdot \underline{s}$$

c.à.d., dans le système au repos de A où  $\underline{P} = (M, \vec{0})$  et  $\underline{s} = (0, \vec{s})$

$$\begin{aligned} \lambda_{12}(\vec{s}) &= f + g \vec{p} \cdot \vec{s} = f + g |\vec{p}| |\vec{s}| \cos \theta = \\ &= f (1 + \alpha |\vec{s}| \cos \theta) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\text{ou } \cos \theta = \frac{\vec{p} \cdot \vec{s}}{|\vec{p}| \cdot |\vec{s}|}$$

$|\vec{s}|$  est le degré de polarisation de A

$$\alpha = \frac{g}{f} \frac{|\vec{p}|}{|\vec{s}|} \text{ est le paramètre d'asymétrie}$$

$$\lambda_{12}(\underline{s}) \geq 0 \text{ entraîne } -1 \leq \alpha \leq 1 \quad (14)$$

Observer  $\alpha \neq 0$ , c'est mettre en évidence une violation de la parité. Nous étudierons cette asymétrie dans la désintégration de  $\mu$  et d'hypérons polarisés.

### 3.- INVARIANCE PAR RENVERSEMENT DU MOUVEMENT

Etant donné un système dans l'état  $\Sigma$  caractérisé par des énergies-impulsions  $\underline{p} = (p^0, \vec{p})$  et des polarisations  $\underline{s} = (s^0, \vec{s})$  nous pouvons aussi le considérer dans l'état  $\Sigma^{(\tau)}$  obtenu en remplaçant  $\underline{p}$  et  $\underline{s}$  respectivement par  $\underline{p}^{(\tau)} = (p^0, -\vec{p})$  et  $\underline{s}^{(\tau)} = (s^0, -\vec{s})$  : c'est cet état que nous appelons état de mouvement renversé construit à partir de  $\Sigma$ .

Considérons un cas simple :  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sont deux états d'un même système - c.à.d. sont constitués des mêmes particules - et la transition  $\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$  est une diffusion élastique. Si l'on n'observe qu'une polarisation, elle est alors orthogonale au 3-plan de collision en raison de la conservation de la parité; par exemple  $\underline{s}_1 = (\underline{p}_1 \wedge \underline{p}_2 \wedge \underline{p}'_1)^*$  de composantes  $\xi_{\mu\nu\rho} p_1^\mu p_2^\nu p_1'^\rho$

Appliquons T :

$$\underline{p}_i \longrightarrow \underline{p}'_i(\tau) \quad \underline{p}'_i \longrightarrow \underline{p}_i(\tau) \quad \underline{s}_1 \longrightarrow \underline{s}'_1(\tau) \quad (15)$$

en notant ' les observables attachées à une particule sortante.

Parmi les invariants pour  $\rho_0$  que l'on peut construire et qui sont les seules quantités physiques dont dépende la section efficace, un seul est changé par T ; il s'agit du déterminant  $(\underline{s}_1, \underline{p}_1, \underline{p}_2, \underline{p}'_1)$  qui se transforme en la quantité opposée  $(\underline{s}'_1(\tau), \underline{p}'_1(\tau), \underline{p}'_2(\tau), \underline{p}_1(\tau))$

$$\text{Comme } \underline{p}_1 + \underline{p}_2 = \underline{p}'_1 + \underline{p}'_2 \implies \underline{p}'_1(\tau) + \underline{p}'_2(\tau) = \underline{p}_1(\tau) + \underline{p}_2(\tau)$$

on a :

$$\begin{aligned} (\underline{s}_1, \underline{p}_1, \underline{p}_2, \underline{p}'_1) &= - (\underline{s}'_1(\tau), \underline{p}'_1(\tau), \underline{p}'_2(\tau), \underline{p}_1(\tau)) = \\ &= (\underline{s}'_1(\tau), \underline{p}_1(\tau), \underline{p}_2(\tau), \underline{p}'_1(\tau)) \end{aligned} \quad (16)$$

Puisque la polarisation est orthogonale à chacune des énergies-impulsions, le seul invariant où elle apparaisse est le déterminant que nous avons considéré;  $(\underline{s}_1, \underline{p}_1, \underline{p}_2, \underline{p}'_1)$  exprime donc le pouvoir d'analyse de polarisation de la diffusion  $\underline{p}_1 + \underline{p}_2 \longrightarrow \underline{p}'_1 + \underline{p}'_2$  tandis que  $(\underline{s}'_1(\tau), \underline{p}_1(\tau), \underline{p}_2(\tau), \underline{p}'_1(\tau))$  exprime le pouvoir polarisant de la diffusion  $\underline{p}_1(\tau) + \underline{p}_2(\tau) \longrightarrow \underline{p}'_1(\tau) + \underline{p}'_2(\tau)$ : pour qu'il y ait invariance par renversement du sens du temps, il faut qu'en mesurant ces deux pouvoirs on trouve des valeurs moyennes égales, puisqu'il faut que

$$\lambda_{12}(\underline{p}_1 + \underline{p}_2 \longrightarrow \underline{p}'_1 + \underline{p}'_2) = \lambda_{21}^{(\tau)}(\underline{p}_1^{(\tau)} + \underline{p}_2^{(\tau)} \longrightarrow \underline{p}'_1^{(\tau)} + \underline{p}'_2^{(\tau)})$$

Dans le cas d'une désintégration,  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  décrivent deux systèmes physiques différents. On aura donc, pour les matrices densités  $\rho_1$  et  $\rho_2$  correspondantes, la relation

$$\rho_1 \rho_2 = \rho_2 \rho_1 = 0 \quad (17)$$

Cela résulte de ce que chacun des états possibles du système initial est orthogonal à chacun de ceux du système final (on travaille maintenant dans l'espace de tous les états possibles de tout système physique).

Il est très difficile, dans une désintégration par couplage faible, de tester l'invariance par  $T$  en comparant  $\lambda_{12}$  et  $\lambda_{21}(\tau)$  : il faudrait reconstituer la particule initiale à partir de ses produits de désintégration ! C'est pourquoi l'on doit se contenter d'un test approximatif : on compare  $\lambda_{12}$  et  $\lambda_{12}(\tau)$ . Les deux relations  $\lambda_{12} = \lambda_{12}(\tau)$  et  $\lambda_{12} = \lambda_{21}(\tau)$  ne sont équivalentes que pour autant que  $\lambda_{12} = \lambda_{21}$  pour toute transition, ce qui est vrai à l'ordre le plus bas des perturbations, comme nous allons le montrer.

On sait que

$$\lambda_{12} = \text{Tr } S \rho_1 S^* \rho_2 \quad \text{tandis que} \quad \lambda_{21} = \text{Tr } S \rho_2 S^* \rho_1$$

En développant  $S$  en

$$S = I + i H + O(H^2)$$

$$\text{avec} \quad H = H^* \quad \text{puisque} \quad SS^* = I \quad (18)$$

on a, à l'ordre le plus bas des perturbations :

$$\lambda_{12} = \text{Tr } H \rho_1 H \rho_2 = \text{Tr } H \rho_2 H \rho_1 = \lambda_{21} \quad (19)$$

en vertu de (17). Il est tout à fait justifié de faire l'approximation (18) dans le cas d'une interaction faible. Cela étant, pour observer une violation de la symétrie par T, il faut, comme le montre la Table 1, observer un déterminant. Ce n'est pas possible dans la désintégration du  $\pi$  s'il est admis que les neutrinos n'ont pas de polarisation transverse  $\underline{s}_\pi$ . Comment faire dans la désintégration du  $\mu$ ? Comme il est actuellement extrêmement difficile d'observer les deux neutrinos, les seules observables dont nous disposons sont  $\underline{p}_\mu, \underline{s}_\mu, \underline{p}_e, \underline{s}_e$ .

Mesurer  $(\underline{p}_\mu, \underline{s}_\mu, \underline{p}_e, \underline{s}_e) \neq 0$ , c'est mettre en évidence une violation de l'invariance par T (et d'ailleurs aussi de l'invariance par P). Etant une combinaison linéaire de  $\underline{p}_\mu$  et  $\underline{p}_e$ , la composante longitudinale de  $\underline{s}_e$  ne contribue pas à ce déterminant. Il faut donc mesurer une composante transverse de la polarisation de l'électron : la composante transverse orthogonale, dans le système du  $\mu$  au repos, au plan  $(\vec{p}_e, \vec{s}_\mu)$  puisque, dans ce système :

$$(\underline{p}_\mu, \underline{s}_\mu, \underline{p}_e, \underline{s}_e) = m_\mu \vec{s}_\mu \cdot (\vec{p}_e \times \vec{s}_e) \quad (20)$$

Mais c'est une expérience très difficile qui n'a pu encore être réalisée !

Dans la désintégration du neutron polarisé, le groupe d'Argonne (Chicago) a étudié le déterminant

$$\left( \underline{p}_n, \underline{s}_n, \underline{p}_p, \underline{s}_\pi \right) = m_n \left( \vec{s}_n \times \vec{p}_p \right) \cdot \vec{s}_\pi \quad (21)$$

dans le système au repos du neutron. Ils ont trouvé une valeur moyenne nulle, c.à.d. n'ont mis en évidence aucune violation de l'invariance par  $T$  dans la désintégration du neutron.

Il convient d'insister sur le fait que cette absence de violation de l'invariance par  $T$  n'a été établie qu'au premier ordre des perturbations pour les couplages faibles. Mais dans les désintégrations faibles fournissant plusieurs particules interagissant fortement dans l'état final, l'approximation au premier ordre des perturbations des couplages forts n'a pas de sens et nous ne pouvons considérer que  $\lambda_{12} = \lambda_{21}$ ; l'invariance par  $T$  n'exige pas que  $\lambda_{12}^\tau = \lambda_{12}$ . Ainsi, dans la désintégration d'un hyperon polarisé en un nucléon et un  $\pi$ , la valeur moyenne de  $(\underline{p}_y, \underline{s}_y, \underline{p}_N, \underline{s}_N)$  peut être différente de zéro (sa valeur mesurée est petite dans la désintégration du  $\Lambda^0$  et non encore connue dans celle du  $\Sigma^\pm$ ) sans que cela implique une violation de l'invariance par  $T$ .

#### 4.- INVARIANCE PAR $TP$

Soient  $\Sigma(\underline{p}_i, \underline{s}_i)$  et  $\Sigma'(\underline{p}'_i, \underline{s}'_i)$  deux états,  $\lambda$  et  $\lambda_{TP}$  les probabilités de transition respectivement de  $\Sigma(\underline{p}_i, \underline{s}_i) \rightarrow \Sigma'(\underline{p}'_i, \underline{s}'_i)$  et de  $\Sigma'(\underline{p}'_i, -\underline{s}'_i) \rightarrow \Sigma(\underline{p}_i, -\underline{s}_i)$ .

L'invariance par TP exige  $\lambda = \lambda_{TP}$ , c.à.d., dans le cas particulier où l'on n'observe pas de polarisation,  $\lambda(\underline{p}_i \rightarrow p'_j) = \lambda(\underline{p}'_j \rightarrow \underline{p}_i)$ , ce qui est l'expression du principe du bilan détaillé. La propriété bien établie des désintégrations faibles de ne pas conserver la parité entraîne une violation de l'invariance par TP puisque, au premier ordre des couplages faibles, elles sont compatibles avec l'invariance par T.

#### 5.- INVARIANCE PAR CONJUGAISON DE CHARGE C et PAR CP.

Soient  $\Sigma_C$  et  $\Sigma'_C$  les états obtenus à partir de deux états  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  en remplaçant dans chacun d'eux toutes les particules par leurs antiparticules (sans changer ni les énergies-impulsions ni les polarisations). L'invariance par conjugaison de charge exige que la probabilité de transition  $\lambda_C$  de  $\Sigma_C \rightarrow \Sigma'_C$  soit égale à  $\lambda$  de  $\Sigma \rightarrow \Sigma'$ . En particulier, l'invariance par C impose  $\tau = \tau_C$ , c.à.d. que les vies moyennes d'une particule et de son antiparticule soient égales.

Les désintégrations  $\beta^-(n \rightarrow p + \Sigma^- + \bar{\nu})$  et  $\beta^+(p \rightarrow n + \Sigma^+ + \nu)$  ne sont pas conjuguées de charge. On peut par contre tester l'invariance par C sur les désintégrations  $\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu'_\mp$ . Du fait que  $\underline{p}_\pi \cdot \underline{s}_\mu$  ne change pas par C, l'invariance par conjugaison de charge entraînerait que l'on obtienne la même valeur moyenne en mesurant la polarisation longitudinale du  $\mu^+$  et du  $\mu^-$  provenant respectivement de la désintégration du  $\pi^+$  et du  $\pi^-$ .

Le signe de cette polarisation ne fut mesuré pour la première fois qu'en 1960 par des physiciens russes en utilisant des  $\mu$  des rayons cosmiques. Ils trouvèrent des signes opposés pour  $\mu^\pm$  dans le système au repos du  $\pi^\pm$ ,  $\mu^-$  ayant la polarisation longitudinale + 1 tandis que  $\mu^+$  a la polarisation longitudinale - 1, c.à.d. que

$$\underline{s}_{\mu^\pm} = \mp (K_1 \underline{p}_\mu - K_2 \underline{p}_\pi) \quad (22)$$

avec

$$K_1 = \frac{1}{m_\mu} \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{m_\pi^2 - m_\mu^2} \quad \text{et} \quad K_2 = \frac{2 m_\mu}{m_\pi^2 - m_\mu^2} \quad (22')$$

en vertu de (12) et (12'), en tenant compte de ce que  $(\underline{p}_\pi - \underline{p}_\mu)^2 = 0$  puisque  $\underline{p}_\pi - \underline{p}_\mu$  est l'énergie-impulsion d'un neutrino. On peut donc dire que la désintégration du  $\pi$  présente une violation maximale de l'invariance par conjugaison de charge. Par contre, elle est compatible avec l'invariance par CP (mais cela n'établit pas CP !) puisque  $\underline{p}_\pi \cdot \underline{s}_\mu$  est un pseudoscalaire.

Le signe de la polarisation longitudinale de l'électron de désintégration du  $\mu^\pm$  a été mesurée mais peut-être pas avec certitude absolue. Tenant compte de ce que l'invariance par C est violée dans la désintégration du  $\pi$ , la mesure de l'asymétrie dans la désintégration du  $\mu$  polarisé a établi que celle-ci viole aussi l'invariance par C. En effet, dans les deux cascades  $\pi \rightarrow \mu + \nu \rightarrow e + \nu + \nu'$ , on observe la même asymétrie  $\sim \underline{s}_\mu \cdot \underline{p}_e$ , que l'électron provienne de la désintégration du  $\pi^\pm$

ou du  $\pi^-$  (négative, sauf pour les quelques électrons de basse énergie). Puisque, dans la désintégration du  $\pi$ , la valeur moyenne de  $\underline{p}_\pi \cdot \underline{s}_\mu$  change de signe avec la charge, on peut en conclure qu'il en est de même de celle de  $\underline{s}_\mu \cdot \underline{p}_e$  dans la désintégration du  $\mu$ . La désintégration du  $\mu$  présente donc elle aussi une violation maxima de l'invariance par conjugaison de charge, et elle est compatible avec l'invariance par CP.

#### 6.- INVARIANCE PAR C P T.

Il semble bien que l'invariance par CPT soit d'une nature plus fondamentale que celles précédemment étudiées dans ce chapitre. La théorie quantique des champs locaux établit l'invariance CPT, c.à.d.

$$\lambda(\Sigma \rightarrow \Sigma') = \lambda(\Sigma'_{\text{CPT}} \rightarrow \Sigma_{\text{CPT}}) \quad (23)$$

à partir de l'invariance par  $\mathcal{P}_0$ , le groupe connexe de Poincaré.

Dans les processus de désintégration, on ne peut la tester qu'au premier ordre des couplages faibles. Elle prédit un changement de signe de  $\underline{p}_\mu \cdot \underline{s}_e$  (c.à.d. de la polarisation longitudinale de l'électron) dans la désintégration du  $\mu^\pm$  non polarisé, et de  $\underline{s}_\mu \cdot \underline{p}_e$  (c.à.d. de l'asymétrie de l'impulsion de l'électron) dans la désintégration du  $\mu^\pm$  polarisé,  $\mu^+$  et  $\mu^-$  ayant la même polarisation. Dans ce dernier cas, elle prédit encore un changement de signe de la polarisation transverse de l'électron

orthogonale au plan  $(\vec{s}_\mu, \vec{p}_\varepsilon)$  (dans le système au repos du  $\mu$ ); mais nous avons vu que l'invariance par  $T$  exige que cette polarisation soit nulle. R.G. Sachs a proposé un test direct et absolu (= non limité au premier ordre des perturbations) de la violation de l'invariance par  $CPT$  dans la désintégration du  $K^0$ . Nous étudierons ce point dans la suite.

Pour conclure, disons que tous les résultats expérimentaux obtenus à ce jour sont compatibles avec les invariances par  $T$ ,  $CP$  et  $CPT$ .

AMPLITUDES DANS LA THEORIE DE DIRAC

-----

|  | <u>Pages</u> |
|--|--------------|
| V.0 REMARQUES PRELIMINAIRES  | V. 1         |
| V.1 L'ALGEBRE DES MATRICES DE DIRAC                                      | V. 2         |
| V.2 REPRESENTATION SPINORIELLE DE DIRAC DU GROUPE DE LORENTZ             | V. 10        |
| 2.1 Le groupe $\mathcal{L}$  | V. 10        |
| 2.2 Champ spinoriel de Dirac   | V. 14        |
| V.3 L'ESPACE D'HILBERT $\mathcal{H}$ DES ETATS D'UNE PARTICULE DE DIRAC  | V. 17        |
| V.4 LA POLARISATION D'UNE PARTICULE DE DIRAC                             | V. 23        |
| 4.1 L'opérateur $\underline{W}$  | V. 23        |
| 4.2 L'espace $\mathcal{h}_p$   | V. 24        |
| 4.3 Matrice densité pour la polarisation lorsque $m > 0$                 | V. 25        |
| 4.4 " " " " " " $m = 0$  | V. 27        |
| 4.5 Formules encore plus générales                                       | V. 28        |
| 4.6 Propriété de transformation pour $\mathcal{L}^\uparrow$              | V. 30        |
| V.5 LA CONJUGAISON DE CHARGE   | V. 32        |
| 5.1 Définition de la conjugaison dans $\mathcal{h}_p^D$                  | V. 32        |
| 5.2 Une notation encore plus générale                                    | V. 34        |
| 5.3 La transformation de Pauli GURSEY                                    | V. 35        |
| V.6 LES AMPLITUDES COVARIANTES DE DIRAC                                  | V. 37        |
| 6.1 But et méthode générale  | V. 37        |
| 6.2 Amplitude pour deux particules de masses $\neq 0$ et tétrade associé | V. 38        |
| 6.3 Une particule de masse $\neq 0$ et une particule de masse nulle      | V. 40        |
| V.7 LE RENVERSEMENT DU TEMPS T (OU RENVERSEMENT DU MOUVEMENT)            | V. 41        |
| ERRATA   | V. 43        |

## V. 0 REMARQUES PRELIMINAIRES

Les notations standard ont constamment changé en théorie de Dirac depuis vingt ans (sans parler depuis 1927 !). Souvent ces changements n'ont pas été délibérés, mais ont simplement suivi une mode. Il n'est d'ailleurs pas difficile de lire des articles écrits en des notations différentes. Il est un peu plus difficile de travailler avec des conventions différentes de notation. J'utilise donc les miennes et je recommande au lecteur qui voudra vérifier certains calculs d'utiliser les siennes !

Il me semble qu'un bon système de notation doit :

- 1) refléter au maximum la structure mathématique (ex : utilisation d'une notation covariante, possibilité d'utilisation des  $\gamma$  ne dépendant que de leur algèbre et non d'une représentation particulière.
- 2) notations aussi condensées que possible, mais laissant facilement la possibilité de spécialiser à un système particulier de coordonnées ou une représentation particulière. Cela intéresse toujours le physicien de faire des calculs simples.
- 3) la notation doit avoir, en tant que code, une propriété de correction des erreurs (par ex. homogénéité dimensionnelle, réalité apparente des expressions réelles, etc...)

Nous rappelons que  $\hbar = c = 1$

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = \nu = 0 \\ -1 & \text{si } \mu = \nu = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{si } \mu \neq \nu \end{cases} \quad \text{respectivement} \quad g_{\nu}^{\mu} = \begin{cases} 1 \\ 1 \\ 0 \end{cases}$$

$$\epsilon_{\lambda\mu\nu\rho} = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda, \mu, \nu, \rho \text{ ne sont pas tous différents} \\ 1 & \text{si " sont une permutation paire de } 0, 1, 2, 3 \\ -1 & \text{si " sont une permutation impaire de } 0, 1, 2, 3 \end{cases}$$

Convention de sommation :

Tout indice qui apparaît deux fois dans un produit, en position supérieure et inférieure, est sommé, sauf mention explicite du contraire. Il est alors muet. Un indice non muet doit donc apparaître dans chacun des deux membre d'une égalité.

Exemple :

$$g_{\mu}^{\mu} = 4 \quad g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = g^{\mu}_{\rho} \quad -1)$$

On peut abaisser ou lever les indices avec les  $g^{\mu\nu}$ .

Noter que :

$$\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho} = -\epsilon_{\lambda\mu\nu\rho} \quad (2)$$

$$\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho} \epsilon_{\lambda\mu\nu\rho} = -4! \quad (3)$$

$$\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho} \epsilon_{\lambda\mu\nu\rho'} = -3! g^{\rho}_{\rho'} \quad (3')$$

$$\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho} \epsilon_{\lambda\mu\nu'\rho'} = -2! (g^{\nu}_{\nu'} g^{\rho}_{\rho'} - g^{\nu}_{\rho'} g^{\rho}_{\nu'}) \quad (3'')$$

$$\begin{aligned} \epsilon^{\lambda\mu\nu\rho} \epsilon_{\lambda\mu'\nu'\rho'} = & -g_{\mu'}^{\mu} g_{\nu'}^{\nu} g_{\rho'}^{\rho} - g_{\rho'}^{\mu} g_{\mu'}^{\nu} g_{\nu'}^{\rho} - g_{\nu'}^{\mu} g_{\rho'}^{\nu} g_{\rho'}^{\rho} - g_{\rho'}^{\mu} g_{\nu'}^{\nu} g_{\mu'}^{\rho} \\ & + g_{\nu'}^{\mu} g_{\mu'}^{\nu} g_{\rho'}^{\rho} + g_{\rho'}^{\mu} g_{\mu'}^{\nu} g_{\nu'}^{\rho} + g_{\rho'}^{\mu} g_{\nu'}^{\nu} g_{\mu'}^{\rho} \end{aligned} \quad (3''')$$

### Pour les matrices

En général on n'écrira pas les indices. Sinon, ils seront inférieurs et à sommer explicitement s'il y a lieu.

$$\text{Transposé de } A \quad : \quad A^T; (A^T)_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha} \quad (4)$$

$$\text{Complexe conjugué} \quad : \quad \bar{A}; (\bar{A})_{\alpha\beta} = \bar{A}_{\alpha\beta}$$

$$\text{Hermitique conjugué} \quad : \quad A^* = \bar{A}^T; (A^*)_{\alpha\beta} = \bar{A}_{\beta\alpha}$$

V. 1 L'ALGÈBRE DES MATRICES DE DIRAC

Il est défini par

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = -2g^{\mu\nu} \quad (5)$$

on peut écrire aussi

$$\gamma_\mu = \varepsilon_{\mu\nu} \gamma^\nu \quad (6)$$

On montre que cet algèbre est de dimension 16, une base étant notée

$$\Gamma^A \text{ avec } A = 0 \text{ à } 15 \quad (7)$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \Gamma^{(0)} &= 1, \quad \Gamma^{(1,\mu)} = i\gamma^\mu, \quad \Gamma^{(2,\mu\nu)} = \sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2i}(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) \\ \Gamma^{(3,\mu)} &= \gamma^5 \gamma^\mu \quad \Gamma^{(4)} = \gamma^5 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{où } \gamma^5 = -\frac{1}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \quad (9)$$

noter que :

$$\gamma_5 = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = -\gamma^5 \quad (9')$$

On notera encore la base :

$$\begin{aligned} \Gamma^{(i, a)} \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4 \text{ indique le nombre} \\ \text{de } \gamma^\mu \text{ (} \mu = 0, 1, 2, 3 \text{) dans le produit)} \end{aligned} \quad (9'')$$

On peut évidemment baisser les indices :  $\Gamma_{(i, a)}$ ,  $\Gamma_A$  en baissant celui de chaque  $\gamma^\mu$ .

On a :

$$\Gamma^{(A)} \Gamma_{(A)} = 1 \quad (\text{sans sommation sur } A) \quad (10)$$

Définissons

$$\omega(A, B) \subset \omega(B, A) = \pm 1$$

par

$$\Gamma^{(A)} \Gamma^{(B)} = \omega(A, B) \Gamma^{(B)} \Gamma^{(A)} = \omega(i, a; j, b) \Gamma^{(i, a)} \Gamma^{(j, b)} \quad (11)$$

en utilisant la notations 9".

Notons que  $\sum_b \omega(i, a; j, b)$  ne dépend pas de  $a$ ; nous noterons donc

$$\sum_b \omega(i, a; j, b) = \omega_{ij} \quad (11')$$

Cet algèbre à 16 dimensions est isomorphe à celui des matrices 4 par 4 et cette représentation à 4 dimensions est sa seule représentation irréductible, à une équivalence près.

De  $\text{Tr}AB = \text{Tr}BA$  et du fait que tout  $\Gamma^A$  (sauf  $\Gamma^0$ ) peut être mis sous forme de produit de deux matrices qui anticommulent on a

$$A \neq 0 \quad \text{Tr} \Gamma^A = 0 \quad (12)$$

et pour toute matrice 4 x 4

$$X = c_A \Gamma^A = c^A \Gamma_A \quad \text{avec} \quad c_A = \frac{1}{4} \text{Tr} X \Gamma_A \quad (13)$$

Définissons

$$\epsilon_{AB} = \frac{1}{4} \text{Tr} \Gamma_A \Gamma_B = \epsilon_{BA} \quad \epsilon^{AB} = \frac{1}{4} \text{Tr} \Gamma^A \Gamma^B \quad (14)$$

$$\epsilon^A_B = \frac{1}{4} \text{Tr} \Gamma^A \Gamma_B \quad (14')$$

De (10) et (11) on voit que  $\epsilon^A_B$  est le symbole de Kronecker ( $\epsilon^A_B = 1$  si  $A = B$ , 0 si  $A \neq B$ ),  $\epsilon_{AB} = \epsilon^{AB}$  et ces symboles peuvent servir à élever ou abaisser les indices  $A = 0, \dots, 15$ , ( $\epsilon_{AB}$  est une matrice diagonale avec 8 éléments 1 et 8 éléments -1)