Définissons

$$\lambda_{ABC} = \frac{1}{4} \mathrm{Tr}\ \Gamma_A \Gamma_B \Gamma_C \tag{15}$$

d'où

$$\lambda_{ABC} = \lambda_{CAB} = \lambda_{BCA} = \omega_{AB} \lambda_{BAC} \tag{16}$$

utilisant (13) on déduit :

$$\Gamma_A \Gamma_B = \lambda_{ABC} \Gamma^C \tag{17}$$

$$\Gamma_A = \lambda_{ABC} \Gamma^C \Gamma^B = \omega_{BC} \lambda_{ABC} \Gamma^B \Gamma^C \tag{18}$$

Et par simples manipulations algébriques

$$\lambda_{ABC} \lambda^{CBD} = \varepsilon_A^D \tag{19}$$

$$\lambda_{AB}{}^E \lambda_{ECD} = \frac{1}{4} \mathrm{Tr}\ \Gamma_A \Gamma_B \Gamma_C \Gamma_D \tag{20}$$

$$\lambda_{OAB} = \varepsilon_{AB} \tag{20'}$$

Notons enfin que de $(\Gamma^A)^2 = \varepsilon_{AA} = \pm 1$ et $\mathrm{Tr}\,\Gamma^A = \varepsilon_o^A$ (= 0 sauf si A = 0) on déduit

$$\det \Gamma^A = \varepsilon_{AA}^2 = 1 \tag{21}$$

D'où la possibilité de prendre les Γ^A unitaires.

Considérons deux ensembles de 4 matrices γ^μ et γ'^μ satisfaisant (5). Ils engendrent les bases Γ^A et Γ'^A. D'après le lemme de Schur, il existe une et une seule, à un facteur près, matrice d'entrelacement X satisfaisant à

$$\gamma'^\mu = X \gamma^\mu X^{-1} \tag{22}$$

et

$$\Gamma'^A = X \Gamma^A X^{-1} \tag{22'}$$

Nous donnons la définition, à un facteur près, de tels opérateurs d'entrelacement.

γ'^{μ}	$-(\gamma^{\mu})^{*}$	$(\gamma^{\mu})^{T}$	$\bar{\gamma}^{\mu}$	$-(\gamma^{\mu})^{T}$	$[(\gamma^{\mu})^{-1}]^{*}$
X	A	B	C	D	F

Notons encore que pour $\gamma'^{\mu} = -\gamma^{\mu}$	$\gamma_{\mu} = -(\gamma^{\mu})^{-1}$	$-\gamma_{\mu} = (\gamma^{\mu})^{-1}$
nous pouvons choisir pour $X = \gamma^{5}$	$i\gamma^{o}$	$\gamma^{5}\gamma^{o} = \gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3}$ (24)

Les matrices B, C ont été définies par Pauli (en 1935 et aussi Ann. I. H. P. 1936). Ce que Schwinger a appelé C (en 1948) est $(B\gamma^{5})^{-1}$. Nous définirons les matrices A, B, C, D, F sans facteur arbitraire par la suite. Nous pouvons toutes les définir en fonction de deux d'entre elles en utilisant des transformations $\gamma^{\mu} \to \gamma'^{\mu}$ successives différentes (une de 22 et une de 23 par ex.) et en appliquant le lemme de Schur. Nous obtenons :

$$A = Fi\gamma^{o} \qquad D = B\gamma^{5} = C^{T}A \tag{25}$$

En appliquant deux fois la même transformation $\gamma^{\mu} \to \gamma'^{\mu}$ et en notant que $\gamma''^{\mu} = \gamma^{\mu}$ nous obtenons par la même méthode (utilisation du lemme de Schur)

$$F^{*} = c_{F}\,F, \quad A^{*} = c_{A}\,A, \quad B^{T} = c_{B}\,B, \quad D^{T} = c_{D}\,D, \quad \bar{C}\,C = c_{C}\,\mathbb{1} \tag{26}$$

Nous pouvons modifier c_F et c_A en multipliant F par un facteur convenable (et A est alors donné par 24). Nous verrons que l'on peut prendre F défini positif ; alors $c_F = 1 = c_A$. Par itération : $(B^{T})^{T} = c_B^{2}\,B = B$, on voit que $c_B^{2} = c_D^{2} = 1$. Les nombres c_B et c_D sont canoniques. Nous allons montrer que $c_B = c_D = -1$. Enfin le signe de c_C est canonique (c_C est évidemment réel). Si l'on considère le groupe multiplicatif de 32 éléments engendré par les γ^{μ}, les 32 matrices correspondantes forment une représentation irréductible de ce groupe. (Les éléments S sont ± 1, $\pm i\gamma^{(1,\mu)}$, $\pm i\gamma^{(2,\mu\nu)}$, $\pm \gamma^{(3,\mu)}$, $\pm \gamma^{5}$). Avec l'aide de (5) on calcule aisément le critère de Frobenius et Schur (Berl. Berichte 1906, p. 186) : $1/32\sum \mathrm{Tr}\, S^{2} = 1$, ce qui montre que l'on peut choisir les γ^{μ} réels et que de plus $c_C > 0$.

Une représentation où les γ^μ sont réels est dite : de Majorama (Cf. N. Cim. 14, 171, 1937) ; alors $C = 1$. Nous normaliserons C (en le multipliant par un facteur convenable) de façon que :

$$\bar{C}\, C = 1 \qquad \mathrm{Tr}\, C \geq 0 \tag{27}$$

(Si $\mathrm{Tr}\, C = 0$, C n'est déterminé qu'à une phase près ; on exigera alors $\det C = 1$, ce qui le définit à $1^{1/4}$ près).

Nous devons encore introduire les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \theta_A &= \theta_{(i,a)} = 1, -1, -1, 1, 1 \\ &\text{pour } i = 0, 1, 2, 3, 4 \\ \chi_A &= \chi_{(i,a)} = 1, -1, 1, -1, 1 = (-1)^i \end{aligned} \tag{28}$$

Nous pouvons ainsi complèter 22 et 23 en

γ'^μ	$-(\gamma^\mu)^*$	$(\gamma^\mu)^T$	$\bar{\gamma}^\mu$	$-(\gamma^\mu)^T$	$[(\gamma^\mu)^{-1}]^*$	$-\gamma^\mu$	$-(\gamma^\mu)^{-1}$	$(\gamma^\mu)^{-1}$
X	A	B	C	D	F	γ^5	$i\gamma^o$	$\gamma^5\gamma^o$
Γ'^A	Γ^{A*}	$\theta_A \chi_A \Gamma^{AT}$	$\theta_A \bar{\Gamma}^A$	$\theta_A {\Gamma^A}^T$	Γ^*_A	$\chi_A \Gamma^A$	Γ_A	$\chi_A \Gamma^{\cancel{A}}_A$

(29)

En utilisant $D^T = c_D D$ on obtient de $\theta_A {\Gamma^A}^T = D \Gamma^A D^{-1}$

$$(D\Gamma^A)^T = c_D\, \theta_A\, D\Gamma^A$$

Les $D\Gamma^A$ sont symétriques ou antisymétriques. Elles sont linéairement indépendantes. Il y a donc 10 symétriques et 6 antisymétriques. Donc $c_D = -1$. Par un argument semblable, ~~on a $B = \gamma^5$~~ on a $c_B = -1$.

Posons

$$X = \Gamma^{A}\,\Gamma_{A} = \Gamma'_{A}\Gamma^{A} \quad \text{et} \quad X' = \Gamma'^{A}\Gamma'_{A} = \Gamma_{A}\Gamma'^{A} \tag{30}$$

(Sommation sur A, évidemment !)

On a (grâce à 16 et 17)

$$\Gamma'^{B}X = \Gamma'^{B}\Gamma'^{A}\Gamma_{A} = \lambda^{BAC}\Gamma'_{C}\Gamma_{A} = \Gamma'_{C}\Gamma^{C}\Gamma^{B} = X\Gamma^{B} = \Gamma'^{B}X \tag{31}$$

et de même

$$X'\Gamma'^{B} = \Gamma^{B}X' \qquad \text{Donc} \qquad XX' = X'X = x\,\mathbb{1} \tag{31'}$$

Si $x \neq 0$, X et X' sont donc des opérateurs d'entrelacement pour passer de Γ^{A} à Γ'^{A} et vice-versa.

En appliquant celà à F dans (25) on a

$$F = \Sigma_{A}\ \Gamma'^{*}_{A}\,\Gamma'_{A} \qquad \text{donc défini positif.}$$

Nous normaliserons son déterminant à 1. Donc en résumé, nous exigeons (26) et

$$F, \text{ défini positif}, \quad \det F = 1 \tag{32}$$

Alors (24) définit A, B, D. Nous avons les propriétés non déjà écrites explicitement,

$$A^{*} = A, \quad \det A = 1 \qquad D^{T} = -D, \quad B^{T} = -B \tag{33}$$

$$\det D = \det B = \det C \qquad |\det C| = 1 \tag{34}$$

Enfin :

$$(A\,\Gamma^{(i,a)})^{*} = A\,\Gamma^{(i,a)} \tag{35}$$

$$(D\Gamma^{(i,a)})^T = -\theta_i \, D\Gamma^{(i,a)} \tag{36}$$

$$\overline{\Gamma^{i,a}} = \theta_i \, C \, \Gamma^{(i,a)} \, C^{-1} \tag{37}$$

Généralement, les physiciens choisissent toujours une représentation où $F = 1$. (Comme nous l'avons dit, $F = 1 \Leftrightarrow$ les Γ^A sont unitaires). Insistons encore sur l'existence des représentations de Majorana.

$$F = 1 = C \qquad D = A = i\gamma^o \qquad B = -i\gamma^o\gamma^5 \tag{38}$$

Alors les γ^μ sont réels. La possibilité pour les γ^μ d'être réels permet de nombreuses vérifications de calcul (ex : les termes donnant une polarisation sont, en représentation de Majorana, les termes imaginaires de l'amplitude de transition.

Rappelons les notations traditionnelles

$\alpha^k = \gamma^k\gamma^o$

$$\begin{aligned} \beta &= i\gamma^o, \quad \alpha^k = -i\,\sigma^{ok}, \quad \vec{\sigma} = (\sigma^{23}, \sigma^{31}, \sigma^{12}) \\ -\gamma^o\vec{\gamma} = \vec{\alpha} &= i\,\gamma^5\,\vec{\sigma}, \quad \sigma^k = \gamma^5\sigma^{ok} = -i\gamma^5\gamma^o\gamma^k \end{aligned} \tag{39}$$

et d'autres relations utiles.

$$\gamma^5\gamma^\lambda = -\frac{1}{3!}\,\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}\,\gamma_\mu\,\gamma_\nu\,\gamma_\rho \tag{40}$$

$$\gamma^5\,\sigma^{\lambda\mu} = +\frac{1}{2}\,\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}\,\sigma_{\nu\rho} = +\frac{1}{2i}\,\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}\,\gamma_\nu\,\gamma_\rho \tag{41}$$

$$\frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\,\gamma^5\,\gamma^\lambda\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\rho = -\,\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho} \tag{42}$$

Nous noterons, pour un quadrivecteur $\underline{a}$

$$i\gamma^\mu\,a_\mu = i\gamma_\mu\,a^\mu = \not{a} = \gamma^o(i\,a^o + \gamma^5\,\vec{\sigma}.\vec{a}) \tag{43}$$

d'où

$$\not{a}.\not{b} = \underline{a}.\underline{b} - i\,\sigma^{\mu\nu}\,a_\mu\,b_\nu, \quad \not{a}^2 = \underline{a}^2 \tag{44}$$

et

$$\not{a}\,\not{b} + \not{b}\,\not{a} = 2\,\underline{a}.\underline{b} \tag{44'}$$

et nous rappelerons que pour n vecteurs a_1, a_2 ... a_n

$$\frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\,\not a_1 \not a_2 \dots \not a_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ impair} \\ \text{Pfaffian } (\underline{a}_1, \underline{a}_2 \dots a_n) \text{ si } n \text{ est pair} \end{cases} \quad (45$$

V. 2 REPRESENTATION SPINORIELLE DE DIRAC DU GROUPE DE LORENTZ

2. 1 Le groupe $\mathcal{L}$

(Nous réservons le nom de Lorentz au groupe de Lorentz homogène et de Poincaré au groupe de Lorentz inhomogène).

Il ne s'agit pas exactement d'une représentation du groupe de Lorentz, mais d'une représentation à un signe près. Nous notons $\mathcal{L}^{\uparrow}$ le sous-groupe orthochrone ($\Lambda^0{}_0 \geq 1$)et $\mathcal{L}_{\downarrow}$ l'ensemble des Λ tels que $\Lambda^0{}_0 \leq -1$. Nous notons $\mathcal{L}_+$ sous-groupe tel que $\Lambda \in \mathcal{L}$, det $-\Lambda = 1$ et $\mathcal{L}_-$ l'ensemble des matrices Λ tel que det $\Lambda = -1$.

$\mathcal{L}_+^{\uparrow} = \mathcal{L}^{\uparrow} \cap \mathcal{L}_+$ est le groupe connexe de Lorentz. Les autres nappes sont notées $\mathcal{L}_-^{\uparrow}$, $\mathcal{L}_+^{\downarrow}$, $\mathcal{L}_-^{\downarrow}$. Si G est la matrice $g^{\mu\nu}$. Rappelons que les Λ satisfont à

$$\Lambda^T G \Lambda = G \tag{46}$$

Parmi les opérations de $\mathcal{L}_-$ il y a les symétries planes. Soit n tel que $\underline{n}^2 \neq 0$. La symétrie par rapport au plan $\perp \underline{n}$ est définie par

$$(\Sigma_{\underline{n}})^{\mu}_{\nu} = g^{\mu}_{\nu} - \frac{2n^{\mu} n_{\nu}}{\underline{n}^2} \qquad \Sigma_{\underline{n}} = 1 - 2\underline{n} \otimes \underline{n}\,(\underline{n})^{-2} \tag{47}$$

Propriétés

$$\Sigma_{\underline{n}} = \Sigma_{-\underline{n}}\ ; \quad \Sigma_{\underline{n}}\,\underline{a} = \underline{a} \Leftrightarrow \underline{n}.\underline{a} = 0 \tag{48}$$

$$\Lambda \Sigma_{\underline{n}} \Lambda^{-1} = \Sigma_{\underline{n}'} \quad \text{où} \quad \underline{n}' = \Lambda \underline{n} \tag{49}$$

Ces symétries engendrent $\mathcal{L}$ (tout $\Lambda \in \mathcal{L}$ est au plus le produit de 4-symétries planes).

Soit
$$\underline{x}' = \Sigma_{\underline{n}}\, \underline{x} \tag{50}$$

en utilisant (43) et (44') nous obtenons

$$\not{x}' = - \not{n}\, \not{x}\, \not{n}^{-1} \tag{51}$$

Définissons

$$S(\Sigma_n) = \varepsilon_n \gamma^5 \not{n} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_n^4 = 1 \text{ donné} \tag{52}$$

Alors
$$\not{x}' = S(\Sigma_n)\, \not{x}\, S(\Sigma_n)^{-1} \tag{53}$$

et puisque les Σ_n engendre le groupe $\mathcal{L}$, la correspondance $\Sigma_n \to S(\Sigma_n)$ engendre une représentation de $\mathcal{L}$. Cette représentation est au signe près puisque $\Sigma_n = \Sigma_{-n}$ et $S(\Sigma_n) = - S(\Sigma_{-n})$.

De plus, puisque (53) est valable pour tout vecteur **x**

$$\gamma_\mu\, \Lambda^\mu{}_\nu = S(\Lambda)\, \gamma_\nu\, S^{-1}(\Lambda) \tag{54}$$

ou encore, en utilisant (46)

$$S^{-1}(\Lambda)\, \gamma^\mu\, S(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu\, \gamma^\nu \tag{55}$$

Exemples de $S(\Lambda)$ pour $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$.

Rotation d'angle θ autour de $\vec{n}$

$$S = e^{-\frac{i}{2}\theta.\vec{\sigma}.\vec{n}} \tag{56}$$

transformation de Lorentz pure le long de $\vec{1}$, de vitesse

$$\frac{v}{c} = \text{th}\,\chi \qquad S = e^{\frac{\chi}{2}\vec{\alpha}.\vec{1}} \tag{57}$$

Soit $\quad \underline{p}^2 = \underline{p}'^2 = m^2 \qquad p^o p'^o > o$ et $\Lambda_{p'p} \in \mathcal{L}_+^{\uparrow}$

tel que

$$\underline{p}' = \Lambda_{p'p}\,\underline{p} \quad \text{et} \quad \Lambda_{p'p}\,\underline{n} = \underline{n} \Leftrightarrow \underline{n}.\underline{p} = \underline{n}.\underline{p}' = 0$$

Alors

$$\Lambda_{p'p} = \Sigma_{\underline{p}'+\underline{p}}\ \Sigma_p$$

et

$$S(\Lambda_{p'p}) = m^{-1}[2(m^2 + \underline{p}.\underline{p}')]^{-1/2}(m^2 + \not{p}'\not{p}) \tag{58}$$

Par (56) et (57) on engendre tout S pour $\Lambda \in \mathcal{L}_+^{\uparrow}$

Définissons

$$P \qquad t' = t \quad \vec{r} = -\vec{r} \qquad \text{et} \qquad S(P) = \varepsilon_P \gamma^o \tag{59}$$

$$T \qquad t' = -t \quad \vec{r}' = +\vec{r} \qquad\qquad S(T) = \varepsilon_T \gamma^o \gamma^5 \tag{59'}$$

$$PT \qquad t' = -t \quad \vec{r}' = -\vec{r}, \qquad\qquad S(PT) = -\varepsilon_{ST}\gamma^4 \tag{59''}$$

c'est-à-dire $\underline{x}' = -\underline{x}$

avec $\varepsilon^4 = 1$. Les matrices S forment (pour chaque ensemble de valeurs de ε) un groupe homomorphe à $\mathcal{L}$. Nous obtenons ainsi plusieurs groupes. Mais cette ambiguité inhérente, à la théorie de Dirac, n'a pas de conséquences physiques essentielles.

Par simple calcul algébrique on établit facilement la table :

TABLE 1

$$S(\Lambda) = (\det \Lambda)\gamma^5 \, S(\Lambda)(\gamma^5)^{-1}$$

$$S(\Lambda)^{*} = a(\Lambda) \; A \; S(\Lambda)^{-1} \; A^{-1}$$

$$\bar{S}(\Lambda) = c(\Lambda) \; C \; S(\Lambda) \; C^{-1}$$

$$S^T(\Lambda) = b(\Lambda) \; B \; S(\Lambda)^{-1} \; B^{-1}$$

$$S^T(\Lambda) = b(\Lambda)(\det A) \; D \; S(\Lambda)^{-1} \; D^{-1} = a(\Lambda) \; c(\Lambda) \; D \; S(\Lambda)^{-1} \; D^{-1}$$

avec	$\mathcal{L}_+^\uparrow$	$\mathcal{L}_-^\uparrow$	$\mathcal{L}_-^\downarrow$	$\mathcal{L}_+^\downarrow$
$a(\Lambda)$	1	1	-1	-1
$b(\Lambda)$	1	$-\varepsilon_P^2$	ε_T^2	$-\varepsilon_{PT}^2$
$c(\Lambda)$	1	ε_P^2	ε_T^2	ε_{PT}^2
$\det(\Lambda)$	1	-1	-1	1

notons : $a(\Lambda) \; b(\Lambda) \; c(\Lambda) \; \det \Lambda = 1$

Pour les opérations de $\mathcal{L}_\downarrow$ nous définirons des opérations antilinéaires.

On voit que γ^5 commute avec tous les $S(\Lambda)$ pour $\Lambda \in \mathcal{L}_+$. Cette représententation spinorielle linéaire de $\mathcal{L}_+$ à 4 dimensions est donc réductible pour $\mathcal{L}_+$. De plus, $\mathrm{Tr}\,\gamma^5 = 0$, $(\gamma^5)^2 = -1$ implique que c'est la somme directe de 2 représentations de dimension 2.

2. 2 Champ spinoriel de Dirac

Un champ à quatre composantes défini sur l'espace temps et se transformant suivant

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = S(\Lambda)\ \psi(\Lambda^{-1}x) \tag{60}$$

est un champ spinoriel de Dirac.

Si $\psi(x)$ est solution de l'équation de Dirac

$$(\gamma^{\mu} \frac{\partial}{\partial_{x}^{\mu}} + m)\ \psi = (\gamma^{\mu}\partial_{\mu} + m)\ \psi = 0 \tag{61}$$

on vérifie aisément que $\psi'(x)$ est une autre solution.

Définissons

$$\psi^{+}(x) = \bar{\psi}(x)\ A \tag{62}$$

il est solution de l'équation adjointe

$$-\frac{\partial}{\partial_{x}^{\mu}}\ \psi^{+}(x)\ \gamma^{\mu} + m\ \psi^{+}(x) = \psi^{+}(-\gamma^{\mu}\overleftarrow{\partial}_{\mu} + m) = 0 \tag{63}$$

Il en est de même de $\psi'^{+}(x)$ qu'on trouve égal à

$$\psi'^{+}(x) = \psi^{+}(\Lambda^{-1}x)\ S(\Lambda)^{-1}\ a(\Lambda) \tag{64}$$

On voit ainsi que

$$\psi'^{+}(\Lambda x)\ \psi'(\Lambda x) = a(\Lambda)\ \psi^{+}(x)\ \psi(x) \tag{65}$$

et de façon plus générale, pour

$\psi^+(x)\ \psi(x)$ est un champ scalaire

$\psi^+(x)\ i\gamma^\mu\ \psi(x)$ est un champ vectoriel

$\psi^+(x)\ \sigma^{\mu\nu}\ \psi(x)$ est un champ tensoriel antisymétrique

$\psi^+(x)\ \gamma^5\ \gamma^\mu\ \psi(x)$ est un champ pseudovectoriel

$\psi^+(x)\ \gamma^5\ \psi(x)$ est un champ pseudo scalaire.

Il faut noter que ce résultat est indépendant de la valeur choisie pour ε_P. Si l'on veut former ces champs tensoriels à partir de deux champs spinoriels de Dirac, y aurait-il un sens physique à choisir des ε_P différents pour chaque champ ? (Cf. Yang et Tiomno, Phys. Rev. 79, 495, 195[illegible] Il semble que ce choix est plutôt matière d'une convention, et la plus simple est de prendre le même ε_P pour différents champs de Dirac.

Par contre, le choix de ε_P pour l'ensemble des champs de Dirac pourrait être observables dans les champs de la forme $\psi_1\ D^{(i,a)}\ \psi_2$. Par exemple, pour $i = 0$, ce champs se transforme pour $\Lambda \in \mathcal{L}^\uparrow$, suivant

$$\begin{aligned} \psi_1'(\Lambda x)\ D\ \psi_2'(\Lambda x) &= b(\Lambda)\ \det(\Lambda)\ \psi_1(x)\ D\ \psi_2(x) \\ &= \varepsilon_P^2\ \psi_1(\Lambda)\ D\ \psi_2(x) \end{aligned} \tag{66}$$

Dire que ce champs est scalaire plutôt que pseudo scalaire, c'est faire la convention $\varepsilon_P^2 = 1$. Cette convention est plus courante dans la littérature.(Quoique le champ (66) soit très rarement utilisé. Il le fut par Fermi dans son article historique de 1934, mais avec la convention contraire $\varepsilon_P^2 = -1$).

Les intéractions faibles ne conservant pas la parité, les distinctions entre covariants et pseudo-covariants sont superflues. Ce qui est nécessaire est de préciser les conventions de notations.

Si un champ $\psi_{(x)}$ satisfaisant à l'équation de Dirac (60), chacune de ses 4 composantes spinorielles satisfait à l'équation de Klein-Gordon, car (en notant $\mathbb{1}$ la matrice unité 4 par 4) on obtient de (5)

$$(\gamma^\mu \partial_\mu - m)\ (\gamma^\mu \partial_\mu + m) \;=\; \mathbb{1}\,(\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \tag{67}$$

Par transformation de Fourier l'opérateur (67) devient :

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \longleftrightarrow -\underline{p}^2 + m^2 \tag{68}$$

et chaque composante de la transformée de Fourier de $\psi(x)$ a donc son support sur l'hyperboloïde de masse m. Nous ne nous intéresserons qu'aux solutions à énergie positive et nous définirons donc la transformée de Fourier de $\psi(x)$ par

$$\psi(x) \;=\; (2\pi)^{-3/2} \int v(\underline{p})\ e^{-ipx}\ d\,\Omega_m \tag{69}$$

(rappelons, (II.4) que $d\,\Omega_m = 2(2\pi)^{-3}\delta(\underline{p}^2 - m^2)\ \theta(\underline{p})\ d^4\underline{p}$, c'est-à-dire l'intégration est faite sur la couche positive de l'hyperboloide de masse). La transformée de Fourier $v(p)$ satisfait l'équation de Dirac transformée :

$$(\not p - m)\ v(\underline{p}) \;=\; 0 \tag{70}$$

(En accord avec la notation introduite par Feynmann en 1949).

On définira de même

$$v^+(\underline{p}) \;=\; \bar{v}(\underline{p})\ A \tag{71}$$

qui satisfait à (voir 34) pour i = 1)

$$v^+(\underline{p})\ (\not p - m) \;=\; 0 \tag{72}$$

(Attention : $v^+(p)$ n'est pas la transformée de Fourier $\psi^+(x)$ suivant (69)).

Terminons par l'étude de la covariance pour le groupe de Poincaré. Par la transformation (a, Λ)

$$\underline{x} \rightarrow \underline{x}' = \Lambda\underline{x} + \underline{a} \quad \text{ou bien} \quad \underline{x} = \Lambda^{-1}(\underline{x}' - \underline{a})$$

et

$$\psi(\underline{x}) \rightarrow \psi'(\underline{x}) = \psi_{[\underline{a},\Lambda]}(\underline{x})$$

avec

$$\psi'(\underline{x}) = S(\Lambda)\,\psi(\Lambda^{-1}(\underline{x} - \underline{a})) \qquad (73)$$

soit, pour la transformée de Fourier

$$v'_S(\underline{p}) = v_{[\underline{a},\Lambda]}(\underline{p}) = e^{i\underline{a}\cdot\underline{p}}S(\Lambda)\; v(\Lambda^{-1}\underline{p}) \qquad (74)$$

et pour $\Lambda \in \mathcal{L}^{\uparrow}$ (en utilisant la 2e ligne de la table 2)

$$v^+_{[\underline{a},\Lambda]}(\underline{p}) = v^+(\Lambda^{-1}\underline{p})\; S(\Lambda)^{-1}\; e^{-i\underline{a}\cdot\underline{p}} \qquad (75)$$

V. 3 L'ESPACE $\mathcal{K}$ DES ETATS D'UNE PARTICULE DE DIRAC

Cet espace $\mathcal{K}$ est formé des fonctions définies sur Ω_m^+ (nappe positive de l'hyperboloïde de masse $m > 0$ ou du cone de lumière, $m = 0$) à valeur spinorielle de Dirac, et satisfaisant à (70). Pour transformer cet espace vectoriel en espace d'Hilbert il faut introduire un produit scalaire. Or la seule forme positive que nous connaissons pour les spineurs de Dirac est (voir 37) :

$$\bar{v}\, F\, v = v^+\, i\, \gamma^o\, v \qquad (76)$$

On peut donc définir comme produit scalaire

$$(v_1, v_2) = \int_{\Omega_m^+} \bar{v}_1(\underline{p})\; F\; v_2(\underline{p})\; \frac{d\,\Omega\,m}{p^o} \qquad (77)$$

$$= (2\pi)^{-3}\int_{\Omega_m^+} v_1^+(\underline{p})\; i\;\gamma^o\; v_2(\underline{p})\; \frac{d^3\vec{p}}{(p^o)^2} \qquad (77')$$

Le p^o a été introduit au dénominateur pour que ce produit scalaire soit invariant par les transformations (74) et (75) représentant le groupe de Poincaré. Nous allons démontrer qu'il en est bien ainsi. Afin que notre démonstration soit valide pour $m = 0$, il nous faut introduire les résultats suivants :

Soit

$$P(\underline{p}) = \frac{\not{p} + m}{2p^o} i\gamma^o \tag{78}$$

C'est un projecteur : $P(\underline{p})^2 = P(p)$, qui projette tout spineur $w(p)$ sur une solution de l'équation de Dirac, puisque

$$(\not{p} - m)\, P(\underline{p}) = (\underline{p}^2 - m^2)\, \frac{i\gamma^o}{2p^o} = 0 \tag{79}$$

Ses vecteurs propres sont donc les solutions de l'équation de Dirac (70)

$$(\not{p} - m)\, v(\underline{p}) = 0 \Rightarrow P(\underline{p})\, v(\underline{p}) = v(\underline{p}) \tag{80}$$

De

$$0 = \overline{P(\underline{p})}\ \overline{v(\underline{p})} = \overline{v}\ P(\underline{p})^*$$

on déduit

$$v^+(\underline{p})\, P^+(\underline{p}) = v^+(\underline{p}) \tag{81}$$

avec

$$P^+(\underline{p}) = \frac{i\gamma^o}{2p^o}(\not{p} + m) \tag{81'}$$

et l'équation 77' peut s'écrire

$$\begin{aligned}(v_1, P v_2) &= \int v_1^+ i\gamma^o P v_2 d\,\Omega_m = \int v_1^+ P^+ i\gamma^o v_2 d\,\Omega_m \\ &= \int (P v_1)^+ i\gamma^o v_2 d\,\Omega_m\end{aligned} \tag{82}$$

c'est-à-dire :

$P(\underline{p})$ est self adjoint dans $\mathcal{K}$.

De

$$\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu = -g^{\mu\nu}\gamma^\lambda + g^{\lambda\nu}\gamma^\mu - g^{\lambda\mu}\gamma^\nu + \varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}\gamma_e\gamma^5 \quad . \tag{83}$$

on établit

$$P^+(\underline{p})\ i\gamma^\mu\ P(\underline{p}) = \frac{p^\mu}{p^o}\ i\gamma^o P(p) = \frac{p^\mu}{p^o}\ P^+(\underline{p})\ i\gamma^o \tag{84}$$

En posant $\underline{p}' = \Lambda^{-1}\underline{p}$, le produit scalaire (77') est transformé par $\{a, \Lambda\} \in \mathcal{L}^\uparrow$ en :

$$\int_{\Omega_m^+} v_1^+(\underline{p}')\ S(\Lambda)^{-1} i\gamma^o\ S(\Lambda)\ v_2(\underline{p}')\ \frac{1}{p^o}\ d\ \Omega\ (\underline{p}')$$

soit (voir équation 54, 80, 82)

$$\Lambda^o{}_\mu \int_{\Omega_m^+} v_1^+(\underline{p}')\ P^+(p')\ i\gamma^\mu\ P^+(\underline{p}')\ v_2(\underline{p}')\ \frac{1}{p^o}\ d\ \Omega(\underline{p}')$$

et par (84), notant que $\Lambda^o{}_\mu p'^\mu = p^o$

$$\int_{\Omega_m^+} v_1^+\ (\underline{p}')\ i\gamma^o\ v_2(\underline{p}')\ \frac{d\ \Omega_m(\underline{p}')}{p'^o}$$

Ce qui montre que ce produit scalaire (77) ou (77') est invariant par la transformation (77')

$$v(\underline{p}) \rightarrow v_{[\underline{a},\ \Lambda]}(\underline{p})$$

C'est donc une transformation unitaire dans $\mathcal{H}$ que nous noterons par l'opérateur unitaire $U(a, \Lambda)$ avec

$$[U(a, \Lambda)\ v]\ (\underline{p}) = v_{[a,\ \Lambda]}(\underline{p}) = e^{i\underline{a}\cdot\underline{p}}\ S(\Lambda)\ v(\Lambda^{-1}\underline{p}) \tag{85}$$

Vérifions que le produit scalaire dans l'espace des $\psi(x)$ solution de l'équation de Dirac est

$$(\psi_1, \psi_2) = \int_\sigma d\sigma_\mu(x)\ \psi_1^+(\underline{x})\ i\gamma^\mu\ \psi_2(\underline{x}) \tag{86}$$

où l'intégrale est sur une surface de genre espace σ, homeomorphe à l'hyperplan $t = 0$, et

$$d\sigma_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \left| \frac{D(x^\mu, x^\rho, x^\sigma)}{D(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)} \right| d\zeta_1\ d\zeta_2\ d\zeta_3$$

la surface tridimensionnelle σ étant paramétrisée par $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$.

Montrons d'abord que (ψ_1, ψ_2) est indépendant du choix de σ. Pour cela il nous faut utiliser la distribution $S_m(x)$,

$$S_m(\underline{x}) = (-\gamma^\mu \partial_\mu + m)\ \Delta_m(\underline{x}) \tag{87}$$

avec

$$\Delta_m(\underline{x}) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int e^{-i\underline{p}\cdot\underline{x}} \varepsilon(\underline{p})\ \delta(\underline{p}^2 - m^2)\ d^4\underline{p} \tag{88}$$

où

$$\varepsilon(\underline{p}) = \theta(\underline{p}) - \theta(-\underline{p}) = \text{signe de } p^0$$

On vérifie que :

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\ S(\underline{x}) = 0 \tag{89}$$

et si $\psi(x)$ est solution de l'équation de Dirac

$$\int_\sigma S(\underline{x} - \underline{x}')\ \gamma^\mu\ d\ \sigma_\mu(\underline{x}')\ \psi(\underline{x}') = \psi(\underline{x}) \text{ pour } x \in \sigma \tag{90}$$

ce qui est vrai aussi pour la distribution S

$$\int_{\sigma} S(\underline{x} - \underline{x}')\ \gamma^{\mu}\ d\sigma_{\mu}(\underline{x}')\ S(\underline{x}' - \underline{x}'') = S(\underline{x} - \underline{x}'') \tag{91}$$

De même

si $\underline{x} \in \sigma$
$$\psi^{+}(\underline{x}) = \int_{\sigma} \psi^{+}(\underline{x}')\ \gamma^{\mu}\ d\sigma_{\mu}(\underline{x}')\ S(\underline{x}' - \underline{x}) \tag{92}$$

d'où, si σ_1 et σ_2 sont deux surface σ

$$(\psi_1, \psi_2)_{\sigma_1} = (2\pi)^{-3} \int_{\sigma_1} \left[\int_{\sigma_2} \psi^{+}(\underline{x}')\ d\sigma_2^{\ \nu}(\underline{x}')\ \gamma_{\nu} S(\underline{x}' - \underline{x}) \right] i d\sigma_{\mu}(\underline{x})\ \gamma^{\mu} .$$

$$\cdot \left[\int_{\sigma_2} S(\underline{x} - \underline{x}'')\ \gamma^{\lambda}\ \psi_2(\underline{x}'')\ d\sigma_{\lambda}(\underline{x}'') \right]$$

et par (91)

$$(\psi_1, \psi_2)_{\sigma_1} = (2\pi)^{-3} \int_{\sigma_2} \int_{\sigma_2} \psi^{+}(\underline{x}')\ d\sigma_2^{\nu}(x')\ i\gamma_{\nu}\ S(\underline{x}' - \underline{x}'')\ \gamma_{\lambda}\ \psi_2(\underline{x}'')\ d\sigma_2^{\ \lambda}\ (\underline{x}'')$$

$$= \int_{\sigma_2} d\sigma_2^{\nu}\ (x')\ \psi^{+}(\underline{x}')\ i\gamma_{\nu}\ \psi(\underline{x}') = (\psi_1, \psi_2)_{\sigma_2}$$

Nous pouvons prendre pour σ le 3-plan $t = 0$ et remplacer ψ_1, ψ_2 par leur transformée de Fourier (Eq. 69 pour ψ_2 et pour ψ_1^{+} remplacer $e^{-i\underline{p}.\underline{x}}$ par $e^{i\underline{p}.\underline{x}}$)

$$(\psi_1, \psi_2) = \frac{\cancel{(2\pi)^3}}{3} \int_{t=0} d^3 \vec{x} \iint v_1^+(\underline{p}) e^{i\underline{p}\cdot\underline{x}} d\,\Omega_m(\underline{p}) i\gamma^o v_2(\underline{p}') e^{-i\underline{p}\cdot\underline{x}} d\,\Omega_m(\underline{p}')$$

$$= \int v_1^+(\underline{p})\ i\gamma^o\ v_2(\underline{p})\ d\,\Omega(\underline{p}) \int \delta(\vec{p} - \vec{p}')\ \frac{d^3\vec{p}'}{p'^o}$$

$$(\psi_1, \psi_2) = \int v_1^+(\underline{p})\ i\gamma^o\ v_2(\underline{p})\ \frac{d\,\Omega(\underline{p})}{p^o} = (v_1, v_2)$$

ce qui est bien le produit scalaire (77').

En résumé nous avons établi par la transformation de Fourier (69) un isomorphisme entre deux espaces d'Hilbert celui des $\psi(x)$, solutions de (61), avec la norme (86) et celui des $v(p)$ definis sur Ω_m^+, avec la norme (77) ou (77'). Il ne faut évidemment pas confondre cette transformation de Fourier avec celle à 4-dimension

$$\psi(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{-i\underline{p}\cdot\underline{x}}\ \hat{\psi}(\underline{p})\ d^4\underline{p} \tag{93}$$

et

$$\hat{\psi}(\underline{p}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{i\underline{p}\cdot\underline{x}}\ \psi(\underline{x})\ d^4\underline{x} \tag{93'}$$

Pour cette transformation, à $\psi(x)$ solution de l'équation de Dirac (61) correspond la distribution :

$$\hat{\psi}(\underline{p}) = \frac{1}{\pi}\ v(\underline{p})\ \theta(\underline{p})\ \delta(\underline{p}^2 - m^2) \tag{94}$$

V. 4 LA POLARISATION D'UNE PARTICULE DE DIRAC

4. 1 L'opérateur $\underline{W}$

Puisque nous avons une realisation explicite de $\mathcal{K}$, l'espace des états d'une particule, nous pouvons appliquer la théorie générale de la polarisation, établie en III, à la particule de Dirac.

L'opérateur

$$P_\mu = \frac{1}{i}\left[\frac{\partial}{\partial a^\mu} U(\underline{a}, 1)\right]_{\underline{a}=0} \tag{95}$$

agit ainsi dans $\mathcal{K}$

$$(P_\mu v)\ (\underline{p}) = \frac{1}{i}\left[\frac{\partial}{\partial a^\mu} e^{i\underline{a}\cdot\underline{p}}\ v(\underline{p})\right]_{\underline{a}=0} = p_\mu v(\underline{p}) \tag{96}$$

Le calcul que nous faisons de $M_{\mu\nu}$ en appendice montre que

$$W^\lambda = -\frac{1}{2}\,\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}\ p_\mu \frac{1}{2}\,\sigma_{\nu\rho} \tag{97}$$

soit, grâce à (41)

$$W^\lambda = -\frac{1}{2}\,\gamma^5\,\sigma^{\lambda\mu}\ p_\mu = +\frac{1}{4}\,\gamma^5[\gamma^\lambda, \not p] \tag{97'}$$

Nous trouvons bien

$$W^\lambda W_\lambda = -m^2\,\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}\,m^2$$

Soit $\underline{s}$ un pseudovecteur tel que

$$\underline{p}\cdot\underline{s} = 0 \qquad \underline{s}^2 = -1 \tag{98}$$

ainsi $\underline{s}$ est une fonction de $\underline{p}$ dans $\mathcal{K}$.

Alors

$$\underline{W}.\underline{s} = -\frac{1}{2}\gamma^5\sigma^{\lambda\mu}s_\lambda p_\mu = -\frac{i}{2}\gamma^5 \not{s} \not{p} \tag{99}$$

et nous avons bien

$$(2\underline{W}.\underline{s})^2 = m^2$$

4. 2 L'espace h_p

Pour un $\underline{p}$ fixé, les spineurs de Dirac $w(\underline{p})$ forment un espace linéaire à 4 dimensions $h_{\underline{p}}^D$. Le sous-espace $h_{\underline{p}}$ des solutions de l'équation de Dirac est donné par le projecteur $P(\underline{p})$ défini en (78)

$$h_{\underline{p}} = P(\underline{p})\, h_{\underline{p}}^D \tag{100}$$

qui est bien à 2 dimensions ($\mathrm{Tr}\, P(\underline{p}) = 2$). La métrique hermitienne de h_p est donné par

$$\langle v_1(p),\ v_2(p)\rangle = \frac{1}{p^o}\, \bar{v}_1(\underline{p})F v_2(\underline{p}) = \frac{1}{p^o}\, v^+(\underline{p})\ i\gamma^o v(\underline{p}) \tag{101}$$

$$= \frac{1}{2(p^o)^2}\, v_1^+(\underline{p})\ i\gamma^o(\not{p} + m)\ i\gamma^o\ v_2(\underline{p}) \tag{101'}$$

Notons que dans les notations du livre de Dirac $\underline{p} = (\mathbf{E}, \vec{p})$ l'équation de Dirac s'écrit :

$$(\mathbf{E} - \vec{\alpha}.\vec{p} - \beta m)\ v(p) = 0 \tag{102}$$

$$P(\underline{p}) = \frac{\not{p} + m}{2p^o}\, i\gamma^o = \frac{\mathbf{E} + \vec{\alpha}.\vec{p} + \beta m}{2\mathbf{E}} \tag{102'}$$

C'est le projecteur, dit de Casimir, sur les états d'énergie positive.

L'opérateur W_p agissant sur $\mathcal{h}_{\underline{p}}$ est simplement

$$\underline{W}_p = \underline{W}P(\underline{p}) \qquad (103)$$

soit, en effectuant :

$$W_p^\lambda = P(\underline{p}) \frac{p^o}{2} i\gamma^o \gamma^5 \gamma^\lambda P(\underline{p}) \qquad (103')$$

ou encore, d'après (39)

$$(W_p^o, \vec{W}_p) = \frac{p^o}{2} P(\underline{p})(i\gamma^5, \vec{\sigma}) P(\underline{p}) \qquad (103'')$$

qui se réduit, pour une particule au repos à

$$(0, \vec{\sigma})(1 + i\gamma^o)\frac{m}{4}$$

4. 3 Matrice densité pour la polarisation lorsque m > 0

Nous avons vu que dans ce cas

$$\rho(\underline{p}, \underline{s}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{m} \underline{W}_p \cdot \underline{s}$$

où

$$0 \leq - \underline{s}^2 \leq 1 \quad \text{et} \quad \underline{p} \cdot \underline{s} = 0 \qquad (104)$$

soit, en remplacant W_p par sa valeur

$$\rho(\underline{p}, \underline{s}) = (\frac{1 + i\gamma^5 \not{s}}{2})(\not{p} + m)\, i\gamma^o \qquad (105)$$

$$\boxed{\rho(p, s) = \frac{1}{4p^o} (1 + i\gamma^5 \not{s})(\not{p} + m)\, i\gamma^o} \qquad (105')$$

Dans le cas d'un état pur ($\underline{s}^2 = -1$), $\rho^2 = \rho$. Comme Tr $\rho = 1$, ρ est un projecteur hermitique sur un vecteur de $\mathcal{h}_p^D$. Par définition, son vecteur propre à droite est $v(\underline{p},\underline{s})$, le spineur de Dirac correspondant à l'énergie impulsion $\underline{p}$ est polarisation totale $\underline{s}$

$$\underline{s}^2 = -1 \qquad \rho(\underline{p},\ \underline{s})\ v(\underline{p},\ \underline{s}) \ = \ v(\underline{p},\ \underline{s}) \tag{106}$$

et par conjugaison complexe

$$\bar{v} \ = \ \overline{\rho v} \ = \ \bar{v}\rho^*$$

on trouve

$$s^2 = -1 \qquad \bar{v}(\underline{p},\underline{s})F \ = \ \bar{v}(\underline{p},\underline{s})F\ \rho(\underline{p},\underline{s}) \tag{107}$$

c'est-à-dire

$$v^+(p,s)i\gamma^o \ = \ v^+(p,s)\ i\gamma^o\rho(\underline{p},\underline{s}) \tag{107'}$$

Par un théorème simple sur les projecteurs de rang 1 on déduit aisément

$$\rho_{\alpha\beta} \ = \ v_\alpha(\bar{v}F)_\beta\ (\bar{v}\ F\ v)^{-1}$$

ce qu'on notera

$$\rho \ = \ v \otimes \bar{v}F\ \ (\bar{v}\ F\ v)^{-1}$$

Notons que $\bar{v}\ F\ v > 0$ puisque F est défini positif.

Nous normaliserons ainsi les spineurs de Dirac (voir équation 101)

$$\langle v(p),\ v(p)\rangle \ = \ \frac{1}{p^o}\ \bar{v}(p,s)F\ v(p,s) \ = \ \frac{1}{p^o}\ v^+(p,s)\ i\gamma^o v(p,s) \ = \ 1 \tag{108}$$

d'où la formule fondamentale

$$\boxed{v(\underline{p},\underline{s}) \otimes v^+(p,s) \ = \ \frac{1}{4}\ (1 + i\gamma^5\ \not{s})\ (\not{p} + m)} \tag{109}$$

4. 4 Matrice densité pour la polarisation lorsque $m = 0$

Notons que la normalisation (108) est aussi valable si $m = 0$. Nous avons vu au chap. III, theorie générale de la polarisation, que $-\underline{W}.\underline{s}_T/m$, lorsque $\underline{s}_T$ est un vecteur transverse, avait une limite bien définie, correspondant à la polarisation transverse de la particule de masse nulle. Nous avons vu de plus que $-2\underline{W}.\underline{l}/m = L \rightarrow \Sigma$ polarisation longitudinale. Il nous est donc possible de déduire la matrice ρ pour la masse nulle, de sa valeur (105) pour $m \neq 0$.

Nous pouvons établir très facilement cette limite sur (105) directement, en suivant la méthode de III.

Soit $\underline{t}(1, \vec{0})$ le vecteur unitaire de temps. Dans ce repère $\underline{p} = (E, \vec{p})$ et nous notons $|\vec{p}| = p$. Le vecteur unité de polarisation longitudinale est alors

$$\underline{l} = \frac{1}{p}\left(\frac{E}{m}\,\underline{p} - m\,\underline{t}\right)$$

et l'état le plus général de polarisation peut être représenté par le vecteur

$$\underline{s} = \underline{s}_T + \xi\underline{l} \quad \text{avec} \quad 0 \leq -\underline{s}^2 = -\underline{s}_T^2 + \xi^2 \leq 1 \qquad (110)$$

où s_T est transverse

$$\underline{s}_T.t = 0 = \underline{s}_T.p \qquad (110')$$

La matrice densité de polarisation ρ pour $m \neq o$ s'écrit alors (ρ en 105)

$$\rho(\underline{p}, \underline{s}_T, \xi) = \frac{1}{4p^o}\left[1 + i\gamma^5 \not{s}_T + i\gamma^5\xi\frac{E}{p}\left(\frac{\not{p}}{m} - \frac{m}{E}i\gamma^o\right)\right](\not{p} + m)i\gamma^o$$

$$= \frac{1}{4p^o}\left[1 + i\gamma^5 \not{s}_T + i\gamma^5\xi\frac{E}{p}\left(1 - \frac{m}{E}\,i\gamma^o\right)\right](\not{p} - m)i\gamma^o$$

ce qui est bien défini à la limite $m \to 0$

$$\boxed{\rho(\underline{p},\underline{s}_T,\xi) = \frac{1}{4p^o}\left[1 + i\gamma^5(\not{s}_T + \xi)\right]\not{p}\, i\gamma^o} \qquad (111)$$

et par la même méthode qu'en V.4 3, on établit pour un état pur, en utilisant la normalisation 108

$$-s_T^2 + \xi^2 = 1, \quad v(\underline{p}, \underline{s}_T, \xi) \otimes v^+(\underline{p}, s_T, \xi) = \frac{1}{4}(1 + i\gamma^5\not{s}_T + i\gamma^5\xi)\not{p} \qquad (112)$$

Les formules encadrées 105, 109, 111, 112 ont été établies par L. Michel et A.S. Wightman, Phys. Rev. 98, 1190, 1955. La plus grande partie de ce chapitre est extraite de notes de ces deux auteurs, ronéotypées à Princeton en 1954-55.

4. 5 Formules encore plus générales

Si l'on veut ne pas avoir à distinguer les deux cas on peut les englober dans les deux formules suivantes

$$\underline{p}^2 = m^2, \quad \underline{p}\cdot\underline{s} = 0, \quad 0 \le (-\underline{s}^2 + \xi^2)^{\frac{1}{2}} = d \le 1, \quad m\xi = 0 \qquad (113)$$

$$\rho(\underline{p},\underline{s},\xi) = \frac{1}{4p^o}(1 + i\gamma^5\not{s} + i\gamma^5\xi)(\not{p} + m)\, i\gamma^o \qquad (113')$$

$$\text{si } d = 1, \mathcal{P}(\underline{p},\underline{s},\xi) = v(\underline{p},\underline{s},\xi) \otimes v^+(\underline{p},\underline{s},\xi) = \frac{1}{4}(1 + i\gamma^5\not{s} + i\gamma^5\xi)(\not{p} + m) \qquad (113'')$$

où $m\xi = 0$ signifie évidemment m ou $\xi = 0$.

On voit de plus que lorsque $m = 0$, on peut rajouter a $\underline{s}$ un vecteur arbitraire colinéaire à $\underline{p}$, puisque la contribution serait nulle dans (113').

De
$$\rho(\underline{p},\ \underline{s},\ \xi)\ \rho(\underline{p},\ -\underline{s},\ -\xi) = 0$$

lorsque $-\underline{s}^2 + \xi^2 = 1$, nous déduisons que $v(\underline{p},\ \underline{s},\ \xi)$ et $v(\underline{p},\ -\underline{s},\ -\xi)$ forment une base orthogonale dans l'espace d'Hilbert $h_{\underline{p}}$ a deux dimensions.

Soit
$$\varepsilon^2 = \varepsilon'^2 = 1$$

nous résumons par $v(\varepsilon)$, $v(\underline{p}, \varepsilon \underline{s}, \varepsilon \xi)$;

$$\langle v(\varepsilon),\ v(\varepsilon')\rangle = \langle v(\underline{p},\ \varepsilon\underline{s},\ \varepsilon\xi),\ v(\underline{p},\ \varepsilon'\underline{s},\ \varepsilon'\xi)\rangle = \delta_{\varepsilon\varepsilon'} \quad (114)$$

Considérons d'abord le cas $m \neq 0$. Nous avons établi en III que pour une tétrade $\underline{p}/m$, $\vec{\underline{n}}$ nous avions une représentation dans $h_{\underline{p}}$ des trois opérateurs $\vec{S} = -2/m\ \underline{W}_p \cdot \vec{\underline{n}}$ par les 3 matrices de Pauli $\vec{\tau}$.

De $\mathrm{Tr}\ \vec{\tau} = 0$ nous déduisons de façon analogue à (13) que les opérateurs 1, $\vec{\tau}$ forment une base pour les opérateurs linéaires sur h_p et si X est l'un d'eux

$$X = \mathbb{1}\,\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}X + \Sigma_i\,\frac{1}{2}\,\tau^{(i)}\,\mathrm{Tr}\ x\ \tau^{(i)} \quad (115)$$

Dans la représentation usuelle des $\tau^{(i)}$, $\tau^{(3)}$ est diagonale. Notons $|\varepsilon\rangle = v(\underline{p},\ \varepsilon\ \underline{n}^{(3)})$ la base correspondante dans $h_{\underline{p}}$.

Nous notons les éléments de matrice des τ :

$$\vec{\tau}_{\varepsilon\varepsilon'} = \langle\varepsilon|\vec{\tau}|\varepsilon'\rangle = \mathrm{Tr}\ |\varepsilon'\rangle\langle\varepsilon|\ \vec{\tau}$$

En appliquant à $|\varepsilon'\rangle\langle\varepsilon|$ l'équation (115), nous avons

$$|\varepsilon'\rangle\langle\varepsilon| = \frac{1}{2}(\mathbb{1}\,\delta_{\varepsilon\varepsilon'} + \Sigma_i\,\tau^{(i)}\ \tau^{(i)}_{\varepsilon\varepsilon'})$$

et en remplaçant $\tau^{(i)}$ par $-2/m\ \underline{W}_p \cdot \underline{n}^{(i)}$, nous obtenons

$m \neq 0$

$$v(\underline{p},\ \varepsilon'\ \underline{n}^{(3)}) \otimes v^{+}(\underline{p},\ \varepsilon\ \underline{n}^{(3)}) = \frac{1}{4}\left(\delta_{\varepsilon\varepsilon'} + i\gamma^5\ \not{n} \cdot \vec{\tau}_{\varepsilon\varepsilon'}\right)(\not{p} + m) \quad (116$$

chaque membre de cette équation peut être considéré à la fois comme une matrice de Dirac 4 x 4 ou encore comme une matrice 2 x 2 d'éléments $\varepsilon\varepsilon'$. Cette équation est la clé pour passer du formalisme de Dirac au formalisme du Chap. III pour les particules de spin 1/2.

En prenant $\underline{n}^{(3)}$ longitudinal on obtient aisément dans le cas limite de la masse nulle :

$m = 0$

$$v(\underline{p},\ \varepsilon') \otimes v^{+}(\underline{p},\varepsilon) = \frac{1}{4}\left[\delta_{\varepsilon\varepsilon'} + i\gamma^5(\not{n}^{(1)}\ \tau^{(1)}_{\varepsilon\varepsilon'} + \not{n}^{(2)}\tau^{(2)}_{\varepsilon\varepsilon'} + \tau^{(3)}_{\varepsilon\varepsilon'})\right]\not{p} \quad (116$$

ε' et ε étant les polarisations circulaires pures.

4. 6 Propriétés de transformations pour $\mathcal{L}^{\uparrow}$

Des équations (74) ou (84) et (75) nous déduisons pour (113')

$$v_{[a,\underline{\Lambda}]}(\Lambda p,\ \Lambda s,\ \Lambda\xi) \otimes v^{+}_{[a,\underline{\Lambda}]}(\Lambda\underline{p},\ \Lambda\underline{s},\ \Lambda\xi) = S(\Lambda)\,\mathcal{P}(\underline{p},\underline{s},\xi)S^{-1}(\Lambda)$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{P}(\Lambda\underline{p},\ \Lambda\underline{s},\ \Lambda\xi) = S(\Lambda)\,\mathcal{P}(\underline{p},\ \underline{s},\ \xi)\ S^{-1}(\Lambda) \quad (117)$$

ce qui nous permet de retrouver que

$(\Lambda p)^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu}\ p^{\nu}$ c'est-à-dire $\underline{p}$ est un vecteur

$(\Lambda s)^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu}\ s^{\nu}(\text{dét}\Lambda)$ $\underline{s}$ est un pseudovecteur

$(\Lambda\xi) = \xi\ \text{dét}\Lambda$ ξ est un pseudo scalaire