Louis MICHEL

24 Février 1959

SEMINAIRE DE PHYSIQUE THEORIQUE ET PHYSIQUE NUCLEAIRE

Precession de la polarisation des particules en mouvement dans un champ électromagnétique homogène

Louis MICHEL
Laboratoire de Physique - Ecole Polytechnique

Le problème de precession du "spin" d'une particule chargée, ayant un moment magnétique et même un moment électrique dipolaire, en mouvement dans un champ électromagnétique homogène, est devenu récemment d'un grand intérêt expérimental. Il a déjà été traité pour les particules du "spin" ½ dans quelques cas particuliers [(1)]; le résultat était obtenu en utilisant l'équation de Dirac avec un terme de Pauli pour tenir compte du moment magnétique anormal.

Cependant, puisque les effets quantiques peuvent être négligés (ils ne peuvent d'ailleurs que dépolariser un faisceau, mais non changer la direction de sa polarisation), le mouvement de la particule polarisée est purement classique et peut être étudié par les équations classiques [(2)]. De telles équations ont été indiquées il y a longtemps par Frenkel [(3)] et sont discutées par Kramers [(4)]. Ces auteurs emploient le tenseur moment cinétique total $\underline{\underline{M}}_t$ comme la généralisation relativiste du moment cinétique intrinsèque observé dans le système où la particule est au repos, leur formalisme n'est donc pas directement utilisable pour notre problème puisque $\underline{\underline{M}}_t$ n'est pas décomposé en "spin" et en partie "orbitale" $\underline{\underline{M}}_o$ d'une façon covariante.

Nous pouvons écrire :

$$\underline{\underline{M}}_t = \underline{\underline{M}}_o + \underline{\underline{M}}_s = m\underline{x}\wedge\underline{u} + \underline{\underline{M}}_s \qquad (1)$$

où m est la masse de la particule.

$\underline{u} = \underline{\dot{x}} = \frac{dx}{d\tau}$, où τ est le temps propre de la particule. Nous posons $\hbar = c = 1$, alors $\underline{u} = \gamma(1, \vec{v})$ où $\vec{v}$ est la vitesse et $\gamma = (1-v^2)^{-1/2}$. La théorie de la relativité restreinte implique $\underline{u}^2 = 1$.

L'étude du groupe inhomogène de Lorentz montre qu'une façon commode et covariante de décrire la polarisation d'une particule est d'utiliser le pseudo-quadrivecteur $\underline{s}$ défini par :

$$\underline{s} = \underline{\underline{M}}_t^* \cdot \underline{u} = \underline{\underline{M}}_s^* \cdot \underline{u} \qquad (2)$$

(voir (8) pour la notation tensorielle)

On a donc :

$$\underline{s} \cdot \underline{u} = 0 \qquad (3)$$

Cette étude implique aussi que les propriétés intrinsèques de la particule doivent être décrites par le tenseur formé à partir de $\underline{u}$ et $\underline{s}$. On en déduit :

$$\underline{\underline{M}}_s = (u \wedge s)^* \qquad (4)$$

(Cela signifie en effet $\underline{\underline{M}}_s^* = -(\underline{u} \wedge \underline{s})$ et $\underline{\underline{M}}_t^* \cdot \underline{u} = \underline{s}$ de (3) et $\underline{u}^2 = 1$).

Dans le système au repos, $\underline{u} = (1,\vec{0})$, $\underline{s} = (0,\vec{s})$, $\underline{\underline{M}}_s = (\vec{0},\vec{s})$, $\underline{\underline{M}}_s^* = (-\vec{s},\vec{0})$ où $\vec{s}$ est le spin de la particule. Le moment magnétique au repos $\vec{\mu} = g \frac{e}{2m}\vec{s}$ peut être décrit d'une façon covariante par le tenseur antisymétrique dipolaire électromagnétique :

$$g \frac{e}{2m} \underline{\underline{M}}_s = g \frac{e}{2m} (\underline{u} \wedge \underline{s})^*$$

Si la particule dans le système au repos a aussi un moment électrique dipolaire $\vec{\delta} = g \frac{e}{2m} \vec{s}$ (qui ne peut évidemment exister que si l'interaction ne conserve pas la parité), son dipole électromagnétique est alors :

$$\frac{e}{2m}\left[g(\underline{u} \wedge \underline{s})^* + g'(\underline{u} \wedge \underline{s})\right] \qquad (5)$$

L'équation classique que nous voulons établir est aussi une bonne approximation pour un champ électromagnétique lentement variable, où l'équation non relativiste correspondante est valable (c'est-à-dire dans l'équation (6), le terme $\frac{1}{m}(\vec{\mu}.\overrightarrow{grad})\vec{B}$ peut être négligé) :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e}{m}(\vec{v} \times \vec{B} + \vec{E}), \quad \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{\mu} \times \vec{B} + \vec{\delta} \times \vec{E} = \frac{e}{2m}\vec{s} \times (g\vec{B} + g'\vec{E}) \qquad (6,6')$$

La généralisation relativiste de (6) est :

$$\dot{\underline{u}} = \frac{e}{m}\,\underline{\underline{F}}\cdot\underline{u} \qquad (7)$$

La généralisation de (6') peut être trouvée très facilement par la remarque suivante : elle doit préserver la bilinéarité du second membre en $\underline{\underline{F}}$ et $\underline{s}$ et être compatible avec (3), c'est-à-dire qu'elle doit satisfaire :

$$\dot{\underline{u}}\cdot\underline{s} + \dot{\underline{s}}\cdot\underline{u} = 0 \qquad (8)$$

L'équation covariante et bilinéaire la plus générale est :

$$\dot{\underline{s}} = \alpha_1\underline{\underline{F}}\cdot\underline{s} + \alpha_2(\underline{u}\underline{\underline{F}}\cdot\underline{s})\underline{u} + \alpha_3(\underline{\underline{F}}^*\cdot\underline{s}) + \alpha_4(\underline{u}\underline{\underline{F}}^*\cdot\underline{s})\underline{u}.$$

La condition (8) exige $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{e}{m}$, $\alpha_3 + \alpha_4 = 0$.

L'identification avec (6') dans le système au repos donne :

$$\alpha_1 = \frac{ge}{2m} \quad \text{et } \alpha_3 = g'\,\frac{e}{2m}$$

D'où l'équation cherchée :

$$\boxed{\dot{\underline{s}} = g\frac{e}{2m}\,\underline{\underline{F}}\cdot\underline{s} - (g-2)\,\frac{e}{2m}(\underline{u}\cdot\underline{\underline{F}}\cdot\underline{s})\underline{u} + g'\frac{e}{2m}\left[\underline{\underline{F}}^*\cdot\underline{s} - (\underline{u}\cdot\underline{\underline{F}}^*\cdot\underline{s})\underline{u}\right]} \qquad (9)$$

ou encore

$$\boxed{\dot{\underline{s}} = \frac{e}{m}\left[\underline{\underline{F}} + \frac{1}{2}\,(1-\underline{u}\otimes\underline{u})\left[\,(g-2)\underline{\underline{F}} + g'\,\underline{\underline{F}}^*\right]\right]\cdot\underline{s}} \qquad (9')$$

qui résoud complètement notre problème.

Nous nous proposons maintenant d'écrire cette équation sous une forme légèrement différente et de l'appliquer pour traiter quelques exemples simples.

Dans le système du laboratoire, le temps $t = \gamma\tau$. Dans ce système, nous décomposons la polarisation $\underline{s}$ (arbitrairement normalisée à $\underline{s}^2 = -1$ pour ce qui suit) en une partie longitudinale $\zeta_3\underline{n}_3$ et une partie transversale $\zeta_t\underline{n} = \zeta_1\underline{n}_1 + \zeta_2\underline{n}_2$ en choisissant dans (7) une base orthonormée directe :

$$\underline{n}_0 = \underline{u},\ \underline{n}_1,\ \underline{n}_2,\ \underline{n}_3 \ ; \quad \underline{n}_\alpha\cdot\underline{n}_\beta = g_{\alpha\beta}.$$

$$\underline{u} = (\gamma, \gamma\vec{v}),\ \underline{n}_1 = (0, \vec{n}_1),\ \underline{n}_2 = (0, \vec{n}_2),\ \underline{n}_3 = \left(\gamma v, \frac{\gamma\vec{v}}{v}\right) \qquad (10)$$

$$\underline{s} = \Sigma_i \; \zeta_i \underline{n}_i \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{10'}$$

L'équation (9) est très utile pour les protons, les noyaux, etc... Cependant, nous ne nous intéressons qu'au cas où les termes $g - 2$ et g' sont très petits (électrons ou mésons μ par exemple). Afin d'étudier l'influence de ces termes, nous pouvons procéder de la manière suivante. Laissons une base $\underline{u}_\alpha$ suivre la particule selon :

$$\gamma \frac{d}{dt} \underline{n}_\alpha = \dot{\underline{n}}_\alpha = \frac{e}{m} \underline{\underline{F}} . \underline{n}_\alpha \tag{11}$$

Cette équation est identique à (7) pour $\alpha = 0$, elle est aussi l'équation de $\underline{s}$ pour $g = 2$ et $g' = 0$.

Les composantes ζ_i peuvent alors être considérées comme celles d'un vecteur de l'espace à trois dimensions $\vec{\zeta}$. Dans ce système, nous introduisons aussi Ω et Ω^* avec les composantes définies par :

$$\Sigma_k \; \varepsilon_{ijk} \Omega_k = \underline{n}_i \, \underline{\underline{F}} . \underline{n}_j , \qquad \Sigma_k \; \varepsilon_{ijk} \Omega^*_k = \underline{n}_i . \underline{\underline{F}}^* . \underline{n}_j \tag{12}$$

où ε_{ijk} est la signature de la permutation $1, 2, 3, \longrightarrow i, j, k,$.

L'équation pour $\vec{\zeta}$ est alors :

$$\frac{d}{dt}\vec{\zeta} = \frac{1}{\gamma}\dot{\vec{\zeta}} = - \frac{e}{2m\gamma} \left[(g-2)\vec{\Omega} + g' \vec{\Omega}^* \right] \times \vec{\zeta} = \vec{\omega} \times \vec{\zeta} \tag{13}$$

qui indique la rotation lente de $\vec{\zeta}$ dans le système (11).

Dans les cas simples et intéressants, il est facile de voir que les seules composantes tournantes de $\underline{s}$ sont dans un hyperplan fixe à deux dimensions. Ecrivons la décomposition en partie longitudinale et transversale :

$$\underline{s} = \underline{n}_3 \; \cos\varphi + \underline{n} \; \sin\varphi \tag{14}$$

Evaluons $\underline{s}.\underline{n}_3$ à partir de (9) et de (14) et comparons le résultat (en tenant compte de $-\underline{n}_3.\dot{\underline{n}} = \dot{\underline{n}}_3.\underline{n} = \frac{1}{v}\,\dot{\underline{u}}.\underline{n}$). On trouve :

$$\dot{\varphi} = \frac{e}{m} \left[\left(\frac{g}{2}\underline{n}_3 - \frac{1}{v}\underline{u}\right) . \underline{\underline{F}} + \frac{g'}{2}\underline{n}_3 . \underline{\underline{F}}^* \right] . \underline{n} \tag{15}$$

où, plus explicitement, le taux $\frac{d\varphi}{dt}$, dans le système de laboratoire, de transformation de la polarisation est :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{e}{2m}\left[\frac{\vec{n}.\vec{E}}{v}\left(g-2-\frac{g}{\gamma^2}\right) + (g-2)(\vec{B}.\vec{n} \times \hat{v}) - g' \, v \, \vec{B}.\vec{n} + g'\,(\vec{E}.\vec{n} \times \hat{v})\right] \qquad (15')$$

où $\hat{v} = \frac{\vec{v}}{v}$.

Exemples

1. $\vec{E}//\vec{B}//\vec{v}$ (// signifie parallèle)

L'équation (15) montre que $\frac{d\varphi}{dt} = 0$. De (9) ou (11) et (13), on voit que la partie transversale de la polarisation tourne autour de $\vec{v}$ avec la vitesse angulaire dans le système du laboratoire :

$$\frac{e}{2m\gamma}\,(g\vec{B}.\hat{v} + g'\vec{E}.\hat{v})$$

2. $\vec{E}.\vec{v} = \vec{B}.\vec{v} = \vec{E}.\vec{B}. = 0$

La vitesse angulaire de la particule est $\frac{e}{m\gamma}(B + \varepsilon\,\frac{E}{v})$ où ε = le signe de $(\vec{v}.\vec{B} \times \vec{E})$ Avec $g = 2$, $g' = 0$, de (15'), résulte que la base (11) tourne autour des mêmes axes spaciaux $\vec{k}_1$ avec la vitesse angulaire $\frac{e}{m\gamma}\,(B - \varepsilon\,\frac{E}{\gamma v})$.

Posons $\vec{k}_2 = \hat{v} \times \vec{k}_1$ (c'est-à-dire $\vec{B} = |\vec{B}|\,\vec{k}_1$, $\vec{E} = \varepsilon\,|\vec{E}|\,\vec{k}_2$) L'équation (13) donne alors :

$$\vec{\omega} = \frac{e}{2m}\left[(g-2)(B + \varepsilon\, v\, E)\vec{k}_1 - g'(\varepsilon\, E + v\, B)\vec{k}_2\right]$$

Cela décrit essentiellement trois types d'expériences déjà effectuées :

a) - H. R. Crane, R. W. Pidd, W. H. Louisell, expérience proposée dans Phys. Rev. 91, 475 (1953), résultats préliminaires annoncés dans Bull. Am. Phys. Soc. 3, 369 (1958), expérience encore en cours.

Ici, $\vec{E} = 0$, la base (11) tourne avec la même fréquence (fréquence de Larmor $\frac{eB}{m\gamma}$) que la particule. Cette expérience est donc apte à mesurer $g - 2$ et g' directement.

b) - H. Frauenfelder, R. Bobone, E. Von Goeler, N. Levine, H. R. Lewis, R. N. Peacock, A. Rossi and G. D. Pasquali, Phys. Rev. 106, 386 (1957).
Ici, $\vec{B} = 0$

c) - P. E. Cavanagh, J. F. Turner, C. F. Coleman, G. A. Gard, B. W. Ridley, Phil. Mag. 2, 1105 (1957)
où $\varepsilon E + vB = 0$, donc $\vec{v}$ = constante.

Les expériences b) et c) sont effectuées pour changer la polarisation longitudinale des électrons β en polarisation transversale. L'expérience b) peut également servir à étudier g'. Si $g' \neq 0$, une polarisation transversale apparaît le long de $\vec{k}_1$ avec une fréquence $\frac{g'}{2} v\gamma$ fois de la fréquence orbitale de la particule.

3. Quand $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont des champs constants et que $\vec{E}.\vec{B} = 0$, nous pouvons toujours penser à un nouveau système où , soit $\vec{E}$, soit $\vec{B}$, est nul. En effet, $\vec{E}.\vec{B}$ et $\vec{E}^2-\vec{B}^2$ sont respectivement pseudo-scalaire et scalaire de Lorentz. Quand $\vec{E}.\vec{B} = 0$, si $\vec{E}^2-\vec{B}^2 = 0$, nous avons un champ de radiation pure. Si $\vec{E}^2-\vec{B}^2 < 0$, la transformation de Lorentz pure avec la vitesse $\frac{E}{B}$ le long de $\vec{E} \times \vec{B}$, nous donne $\vec{E}' = 0$.

Dans l'expérience c) par exemple, cela amène la particule au repos. Nous sommes en désaccord avec Farago(9) sur l'interprétation de l'expérience qu'il propose où $\vec{E}.\vec{B} = 0 = \vec{B}.\vec{v}$, $g' = 0$. Initialement, la polarisation de la particule est longitudinale. Une polarisation transversale apparaît le long de $\underline{n} = (0,\vec{n})$, défini par $\underline{n}.\underline{u} = 0$, $\vec{B}.\hat{n} = 0$, $\hat{n}.\hat{v} \times \vec{B} = \ddot{B} > 0$. Posons $\vec{E}.\hat{v} = \vec{E} \sin\phi$, $\vec{E}.\hat{n} = E\cos\phi$; $\frac{d\phi}{dt}$ est la vitesse angulaire de l'électron (elle peut être évaluée à partir de la projection de la partie spaciale de (7) sur $\vec{E}$). $\frac{d\varphi}{dt}$ donné par (15') est le taux de transformation de la polarisation longitudinale en polarisation transversale. Nous obtenons :

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{e}{m\gamma}\left(B + \frac{E}{v}\cos\phi\right) \tag{16}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{e}{m\gamma}\left[(g-2)\left(B + \frac{E}{v}\cos\phi\right) - \frac{g}{2\gamma^2}\frac{E}{v}\cos\phi\right] \tag{16'}$$

Comparons avec la formule (3) de Farago. Toutes les notations sont les mêmes, sauf son $\frac{\omega_1-\omega}{\omega}$ qui est notre $\frac{d\varphi}{d\phi}$, son β

= notre v, son H = notre B) :

$$\frac{d\varphi}{d\phi} = \frac{g-2}{2}\gamma - \frac{g}{2\gamma} \cdot \left(\frac{E}{vB}\cos\phi\right)\left(1 + \frac{E}{vB}\cos\phi\right)^{-1} \qquad (17)$$

En désaccord avec Farago, nous trouvons que la contribution du champ électrique à $d\varphi$ n'est pas seulement en valeur de γ (qui est multiplié par $\frac{g-2}{2}$), mais aussi en un autre terme proportionnel à g. En effet, nous pouvons évaluer v comme une fonction de ϕ. Appelons γ' la valeur de γ quand $\cos\phi = 0$. Posons $\varphi = 0$ quand $\phi = 0$. Quand la particule a fait n tours, (c'est-à-dire $\phi = 2n\pi$), nous trouvons :

$$\varphi = (g-2)n\pi\gamma' \left(1 - \frac{E^2}{B^2}\right)^{-1/2} \qquad (18)$$

ce qui signifie que l'expérience proposée par Farago est bien adéquate pour mesurer $g-2 \sim 10^{-3}$, puisque le terme en g donne en effet seulement des termes périodiques.

Ce travail a été fait par V. A. Telegdi et L. Michel. La présente version n'a pas été révisée par Telegdi. Il sera publié, en anglais, dans Physical Reviews Letters.

Nous remercions MM. Bargmann (Princeton), Froissard et Stora (C. E. A., Saclay) pour des discussions fructueuses.

Références

(1) a) H. A. Tolhoek et S. R. de Groot, Physica, 17, 17 (1951)
b) H. Mendlovitz et K. M. Case, Phys. Rev. 97, 33 (1955)
c) K. M. Case, Phys. Rev. 106, 175 (1957)
d) L. M. Carassi, Nuov. Cim. 7, 524 (1958).

(2) Dans un mouvement "classique", les valeurs moyennes de l'opérateur de la mécanique quantique décrivant la quantité physique A, satisfont aux mêmes équations classiques du mouvement que A. Ceci a été particulièrement souligné par F. Bloch, Phys. Rev. 70, 460 (1946) pour l'étude non-relativiste de la précession du spin.

(3) J. frenkel, Zs. f. Phys., <u>37</u>, 243 (1926). Voir aussi : J. Weyssenhof, A. Raabe, Acta Phys. Polonica, <u>9</u>, 7 (1948) - J. Weyssenhof, Acta Phys. Polonica, <u>9</u>, 26 (1948).

(4) H. A. Kramers, Quantum Mechanics, P. 226 et suiv. (North Holland Publishing Co, Amsterdam, 1957).

(5) L'équation discutée en référence (4) est valable seulement pour le rapport gyromagnétique $g = 2$.

(6) V. Bargmann, E. Wigner, Roc. Nat. Acad. Sc. <u>34</u>, 211 (1948) L. Michel, A. S. Wightman, Phys. Rev. <u>98</u>, 1190 (1955).

(7) C. Bouchiat, L. Michel, Phys. Rev. <u>106</u>, 170 (1955). Voir aussi L. Michel, Les Houches, cours de 1957.

(8) Le métrique $g^{oo} = 1$, $g^{11} = g^{22} = g^{33} = -1$, $\varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho}$ = signature de la permutation de 0, 1,2, 3. $(M^{*})_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}\, \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho}\, M^{\nu\rho}$. Pour un tenseur antisymétrique, nous notons $\underline{\underline{M}} = (\vec{a}, \vec{b})$ où $a^{i} = M^{oi}$, $b^{i} = M^{jk}$ et $i\,j\,k$ = une permutation paire de 1, 2, 3.
Exemple : $F = (-\vec{E}, -\vec{B})$, et $\underline{\underline{F}}^{*} = (\vec{B}, -\vec{E})$; $a \wedge b = (a^{o}\vec{b} - b^{o}\vec{a}, \vec{a} \times \vec{b})$ puisque $(a \wedge b)_{\mu\nu} = a_{\mu} b_{\nu} - a_{\nu} b_{\mu}$. Le point entre deux lettres signifie la contraction des indices voisins. Le produit tensoriel est noté $(\underline{a} \otimes \underline{b})_{\mu\nu} = a_{\mu} b_{\nu}$.

(9) P. S. Farago, Proc. Phys. Soc. (Lond.) <u>72</u>, 891 (1958).

Appendice - Etablissement de la formule (18)

Notation : $\vec{E}.\hat{v} = E \sin \phi \quad \vec{E}.\hat{n} = E \cos \phi \quad \hat{n}.\hat{v} \times \vec{B} = B > 0$

L'équation (7) donne :

$$\frac{d\gamma\vec{v}}{dt} = \frac{e}{m}(\vec{v} \times \vec{B} + \vec{E}) \tag{a}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{e}{m}\vec{E}.\vec{v} \tag{b}$$

De $\gamma^2 v^2 = \gamma^2 - 1$, on obtient $d(\gamma v) = \frac{1}{v} d\gamma$ (c) (c')

d'où $\gamma v \frac{d\hat{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma v \hat{v}) - \hat{v}\frac{d\gamma v}{dt} = \frac{e}{m}(\vec{v} \times \vec{B} + \vec{E} - \hat{v}\,\vec{E}.\hat{v})$

et $\vec{E}.\frac{d\hat{v}}{dt} = \cos \phi \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{\gamma v}\frac{e}{m}\left[v B \cos \phi + E(1 - \sin^2 \phi)\right]$

$$\text{où } \frac{d\phi}{dt} = \frac{e}{m\gamma}\left(B + \frac{E}{v}\cos \phi\right) \tag{16}$$

L'équation (15') donne directement :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{e}{2m}\left[(g-2)B + \left(g-2 - \frac{g}{\gamma^2}\right)\frac{E}{v}\cos \phi\right] \tag{16'}$$

$$\text{d'où } \frac{d\varphi}{d\phi} = \frac{g-2}{2}\gamma - \frac{g}{2\gamma}\left(\frac{E}{vB}\cos \phi\right)\left(1 + \frac{E}{vB}\cos \phi\right)^{-1} \tag{17}$$

La formule (3) de Farago, avec ces notations, s'écrit :

$$\text{Farago : } \frac{d\varphi}{d\phi} = \frac{g-2}{2}\frac{1}{\gamma^2}\left(1 - \frac{Ev}{B}\cos \phi\right)\left(1 - \frac{E^2}{B^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Calculons maintenant γ et v en fonction de ϕ, (b) peut aussi s'écrire :

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{e}{m} v E \sin \phi$$

d'où, tenant compte de (16) :

$$\frac{e}{m} v E \sin \phi \, d\phi = \frac{e}{m\gamma}\left(B + \frac{E}{v}\cos \phi\right) d\gamma$$

$$\text{où} \quad v\frac{E}{B}\, d(\cos \phi) = \frac{1}{\gamma}\left(1 + \frac{E}{Bv}\cos \phi\right) d\gamma$$

Pour simplifier les notations, posons $\alpha = \frac{E}{B}\cos\Phi$

$$\frac{d\alpha}{d\gamma} + \frac{\alpha}{\gamma v^2} + \frac{1}{\gamma v} = 0 \qquad (d)$$

La solution générale de l'équation $\frac{d\alpha}{d\gamma} + a\,\alpha + b = 0$ (d') est :

$$\alpha = - e^{-\int a d\gamma} \int_{\gamma'}^{\gamma} b\, e^{+\int a d\gamma}$$

où γ' est la constante d'intégration.

En utilisant (c') : $\int a d\gamma = \int \frac{d\gamma}{\gamma v^2} = \int \frac{d(\gamma v)}{\gamma v} = \mathrm{Log}(\gamma v)$

$$\text{d'où } \alpha = \frac{-1}{\gamma v}\int_{\gamma'}^{\gamma} \frac{1}{\gamma v}.\, \gamma v.\, d\gamma = \frac{\gamma' - \gamma}{\gamma v} = \frac{E}{B}\cos\Phi \qquad (e)$$

où γ' est la valeur de γ pour $\cos\phi = 0$

Avec (c), on obtient :

$$\gamma = \frac{\gamma' \pm \alpha\,(\gamma'^2 - 1 + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}}{1 - \alpha^2} \qquad (f)$$

et pour (17)

$$\frac{d\varphi}{d\Phi} = \frac{g-2}{2}\,\frac{\gamma' \pm \cos\Phi\,(\gamma'^2 - 1 + \frac{E^2}{B^2}\cos^2\phi)^{\frac{1}{2}}}{1 - \frac{E^2}{B^2}\cos^2\Phi} \pm \frac{g}{2}\,\frac{(\frac{E}{B}\cos\Phi)}{(\gamma'^2 - 1 + \frac{E^2}{B^2}\cos^2\Phi)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{d\varphi}{d\Phi} = \frac{\frac{g-2}{2}\,\gamma'\, d\Phi}{1 - \frac{E^2}{B^2}\cos^2\Phi} + I$$

où $I = \int f(\cos^2\Phi)\cos\Phi\, d\Phi = f(1 - \sin^2\Phi)\, d(\sin\Phi) = F(\sin\Phi) + C$ où F est une fonction impaire de $\sin\Phi$. Nous trouvons donc que I est nul pour un nombre entier n de tours. Supposons $\varphi = 0$ (polarisation longitudinale) quand $\Phi = 0$. Alors

$$\varphi = \frac{g-2}{2}\,\gamma'(1 - \frac{E^2}{B^2})^{-\frac{1}{2}}\ \mathrm{Arctg}\ (1 - \frac{E^2}{B^2})^{-\frac{1}{2}}\ \mathrm{tg}\,\Phi + I(\Phi)$$

et après n tours

$$\varphi = \frac{g-2}{2}\gamma' \frac{2\pi n}{\sqrt{1 - \frac{E^2}{B^2}}} \qquad (18)$$

où $\frac{\gamma'}{\sqrt{1 - \frac{E^2}{B^2}}}$ est la valeur de γ pour la particule dans le système de Lorentz où le champ électrique est nul, (c'est-à-dire, $\vec{E'} = 0$,

$\vec{B'} = B \left(1 - \frac{E^2}{B^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ considéré par Farago.)