

M A T R I C E S D E N S I T E D E P O L A R I S A T I O N

par

Louis MICHEL

Institut des Hautes Etudes Scientifiques
91. Bures-sur-Yvette - France

Ce manuscrit est un anti-résumé de la communication qui sera faite par l'auteur à la rencontre des 17 et 18 Novembre 1967, du groupe d'étude du problème à 2 corps.

N° R 1.1167

Reproduit par le Centre de Physique Théorique de l'Ecole Polytechnique.

Introduction

For the last few years, there is an increasing flow of experimental papers which give polarization measurements of produced particles with spin ≥ 1 (vector mesons, spin $3/2$ baryon resonances, etc...). Those measurements are generally given by the value of the spin density matrix. It is striking that the boundary of the domain of possible values for these elements is never drawn (on the contrary, it is always drawn for a Dalitz plot !). In experimental plots, it is even not uncommon to see points outside the allowed domain ! An inquiry among the different experimental groups showed that nearly all of them did not know the different boundaries corresponding to their experiment. This situation lead P. Minnaert⁽¹⁾ to give a general and elegant method for computing these boundaries for any spin $j > 1$. (For spin 1, this had been done by Lakin⁽²⁾ a long time ago ; in a recent paper Dalitz⁽³⁾ has also done it for spin $3/2$ and 2 for particular cases).

However, these papers may not be completely adapted to the practical needs of the experimental physicists. Indeed the situation is :

a) Spin density matrices for spin j depends on $4j(j+1)$ parameters

$$\begin{array}{cccccc} j = & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} \\ 4j(j+1) = & 0 & 3 & 8 & 15 & 24 & 35 \end{array}$$

b) Experimental physicists do not measure (and sometimes, cannot measure) all these parameters.

So, they do not need directly the equations, in the $4j(j+2)$ dimensional space, of the boundary of the domain of matrix elements values ; they need only the projection of this domain on the subspace of the parameters they measure.

Here we shall study this domain more geometrically and show that in many cases its symmetry properties help to obtain its projections. This geometrical method is independent of the choice of quantization axis.

(The provisory version of this paper is in French. It may be published in English next spring by inclusion in a book based on the Brandeis lectures (Summer 1965)).

SOMMAIRE

pages

Introduction	1
1. La matrice densité de polarisation pour une particule au repos.	4
2. Description covariante de la polarisation.	5
3. L'espace des opérateurs hermitiens sur l'espace à n dimensions. Action de SU_n .	8
3.1 Forme canonique des opérateurs hermitiques.	
3.2 L'espace euclidien \mathcal{E} des opérateurs hermitiques.	9
3.3 Action du groupe SU_n sur \mathcal{E}	11
4. L'ensemble des opérateurs hermitiens $n \times n$ et ≥ 0 . Ses propriétés de convexité.	13
4.1 Définition des opérateurs ≥ 0	13
4.2 Convexité	13
4.3 Invariance de \mathcal{E}_1^+ par \mathcal{U}_n	15
5. La forme du domaine \mathcal{E}_1^+ des matrices densités de polarisation.	15
5.1 La mesure physique de $R \in \mathcal{E}_1^+$	15
5.2 Sections et projections de \mathcal{E}_1^+	16
5.2.1 Les matrices densités diagonales	16
5.2.2 Les éléments symétries	17
5.2.3 Les 4-plans à 2 indices \mathcal{P}_{ij}	20
6. Les états physiques et leurs symétries.	23
6.2 Peut-on diagonaliser la matrice densité de polarisation ?	26
7. Les symétries de l'expérience	28
7.1 Reaction à 2 corps, cible non polarisée	28
7.2 Reaction à 2 corps, cible (ou faisceau) polarisée	30
7.3 Observation de la polarisation par une désintégration en 2 corps.	30
8. Le rang d'une matrice densité de polarisation.	31

Expliquons en quelques phrases le contenu de ce papier :

L'état de polarisation le plus général d'une particule (ou d'un système de particules) d'impulsion-énergie (s) fixée (s) et de spin j (spins j_i) est décrit par une matrice R , hermitique, positive à n lignes, n colonnes $n = 2j + 1$ ($n = \prod_i (2j_i + 1)$) et de trace 1. Chacune de ces matrice R est un point d'un domaine convexe \mathcal{E}_1^+ dans l'espace \mathcal{E} des n^2 paramètres réels. Dans une expérience de physique on ne mesure pas en général (ce serait même parfois impossible) tous les paramètres fixant R . On détermine donc seulement la projection du point R sur un sous espace \mathcal{V} de \mathcal{E} , cette projection doit se trouver dans le contour apparent de \mathcal{E} sur \mathcal{V} . (ce contour apparent forme la frontière dont nous parlions). L'étude de la forme géométrique de \mathcal{E}_1^+ peut être faite en remarquant qu'il possède de nombreuses symétries et que le groupe unitaire \mathcal{U}_n le transforme en lui-même. D'autre part des conditions expérimentales (par ex. emploi de faisceau et de cible non polarisée) peuvent réduire les états possibles à un sous-domaine de \mathcal{E}_1^+ , intersection de \mathcal{E}_1^+ par un sous-espace plan à k dimension ($n < k < n^2$) de \mathcal{E} .

Les changements de coordonnées de l'espace correspondent simplement à des notations, donc des transformations du sous groupe SU_2 (à trois paramètres) de \mathcal{U}_n (à n^2 paramètres).

Cela correspond essentiellement à choisir les axes de quantification des spins. Il est curieux que les physiciens ignorent tant la description covariante de la polarisation d'une particule de spin j (due essentiellement à Wigner, avant la guerre !), sujet qu'on traite rapidement au §2 .

Faire de la géométrie permet d'acquérir des idées intuitives sur le domaine \mathcal{E}_1^+ dont on veut connaître les frontières. Mais prouver des propriétés géométrique peut-être très fastidieux, comme on risque de s'en apercevoir si on lit ce papier jusqu'au bout.

1. La matrice densité de polarisation pour une particule au repos.

La polarisation d'une particule est ce qu'il nous faut connaître pour caractériser complètement son état cinématique lorsqu'on connaît déjà son énergie et son impulsion. Nous ne nous occuperons que de particules de masse $\neq 0$ dans cet article. Commençons dans ce § 1 par considérer la particule au repos. L'espace des états (purs) de polarisation d'une telle particule de spin j est l'espace d'Hilbert \mathcal{H}_j à $2j+1$ dimensions sur lequel agit la représentation unitaire irréductible D_j du groupe SU_2 (groupe de recouvrement des rotations de l'espace à 3 dimensions). Nous notons $|x\rangle \in \mathcal{H}_j$. Lorsqu'on a choisi une base de \mathcal{H}_j , on se donne $|x\rangle$ en se donnant ses composantes x_λ ($-j \leq \lambda \leq j$, $j-\lambda$ entier) soit $2j+1$ nombres complexes. Il est commode de normaliser x à 1 :

$$\langle x, x \rangle = \sum_{\lambda=-j}^j \bar{x}_\lambda x_\lambda = 1 \quad (1.1)$$

Deux vecteurs $|x\rangle$ et $|x'\rangle = e^{i\varphi}|x\rangle$ ne différant que par une phase décrivent le même état. En fait il y a correspondance biunivoque entre les états physiques et les projecteurs $P_x = |x\rangle\langle x|$, que l'on appelle matrice densité de polarisation.

Les P_x sont des projecteurs :

$P_x |y\rangle = |x\rangle \langle x, y \rangle$: tous les vecteurs transformés sont proportionnels à $|x\rangle$.

$$P_x^2 = |x\rangle\langle x|x\rangle\langle x| = |x\rangle\langle x| = P_x \text{ puisque } \langle x, x \rangle = 1. \quad (1.2)$$

Ils sont hermitiques. Par définition A^* est hermitique conjugué de A si $\forall |y\rangle, |z\rangle \in \mathcal{H}$ (quels que soient $|y\rangle, |z\rangle$) $\langle A^*y, z \rangle = \langle y, Az \rangle$ et l'hermitique conjugué de $|u\rangle\langle v|$ est ainsi $(|u\rangle\langle v|)^* = |v\rangle\langle u|$, leur trace est 1 ; $\text{Tr } P_x = \langle x|x\rangle = 1$.

$$(1.3)$$

De plus, leur valeur moyenne pour tout état est ≥ 0

$$\langle y, P_x y \rangle = \text{Tr } P_x P_y = \langle x, y \rangle \langle y, x \rangle = |\langle x, y \rangle|^2 \geq 0. \quad (1.4)$$

Lorsque la polarisation est partielle c'est une superposition incohérente d'états purs de polarisation. Par exemple $R = \sum_{i=1}^n c_i P_{x_i}$ les $|x_i\rangle$ formant une base orthonormale de \mathcal{H}_j : $\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij}$ ou encore $P_{x_i} P_{x_j} = \delta_{ij} P_{x_i}$; de plus $\sum_{i=1}^n c_i = 1$, les c_i étant les probabilités des différents états purs dans le mélange. En résumé, il y a une correspondance biunivoque entre les états quelconques de polarisation d'une particule de spin j au repos et les opérateurs R , hermitiens, positifs, de trace 1 :

$$R^* = R, \quad \text{Tr } R = 1, \quad \forall |y\rangle \in \mathcal{H}, \quad \langle y, Ry \rangle \geq 0, \quad (1.5)$$

agissant sur l'espace \mathcal{H}_j de la représentation de SU_2 .

La rotation, représentée à un signe près par $r \in SU_2$, transforme $|x\rangle$ en $D_j(r)|x\rangle$ et donc R en

$$R \rightsquigarrow D_j(r) R D_j(r)^* \quad (1.6)$$

où $D_j(r)$ est un opérateur unitaire

$$D_j(r)^* = D_j^{-1}(r) = D_j(r)^{-1}. \quad (1.7)$$

2. Description covariante de la polarisation.

Si la particule n'est pas au repos dans le système de coordonnées choisi il est facile de faire une transformation de Lorentz la ramenant au repos, et on sait alors décrire sa polarisation. C'est ce que semblent faire beaucoup de physiciens en parlant de polarisation. L'inconvénient est que le plus souvent, on est intéressé par plusieurs particules à la fois ne pouvant pas être ramenées au repos simultanément ! Le problème de la description covariante de la polarisation des particules a été

entièrement résolu par Wigner il y a trente ans (4,5). Résumons sa méthode : les vecteurs x de l'espace \mathcal{H}_j deviennent une fonction de l'impulsion-énergie p . L'espace d'Hilbert \mathcal{H} des états d'une particule de masse m et spin j est alors l'espace des fonctions définies sur la nappe de l'hyperboloïde de masse $p^2 = m^2$, $p^0 = E > 0$ et à valeur dans l'espace d'Hilbert \mathcal{H}_j . Le produit scalaire dans \mathcal{H} est

$$\langle\langle x, y \rangle\rangle = \int \langle x(p), y(p) \rangle \frac{d^3\vec{p}}{E} \quad (2.1)$$

où $\frac{d^3\vec{p}}{E} = \frac{1}{2} \int_{p>0} \delta(p^2 - m^2) d^4p$ est l'élément d'hyper-surface de l'hyperboloïde de masse.

Une translation a et une transformation Λ du groupe de recouvrement de Lorentz (groupe $SL(2, C)$) sont réalisées sur \mathcal{H} (de dimension infinie!) par un opérateur

$$[U(a, \Lambda) x](p) = e^{i a \cdot p} Q(p, \Lambda) | x(\Lambda^{-1} p) \rangle \quad (2.2)$$

L'opérateur Q est un opérateur unitaire sur l'espace \mathcal{H}_j (de dimension finie) et comme les x , lui aussi dépend de p . En fait Q n'est encore qu'une matrice $D_j(r)$ et le problème est de savoir écrire la "rotation" r qui correspond au couple p, Λ , (Nous l'avons étudié au § 2 pour $p = m \underline{t} = (m, 0, 0, 0)$ et Λ est une "rotation"). Il y a un certain arbitraire mais pour les particules de masse $\neq 0$, les physiciens choisissent en général la convention de Wigner

$$r(p, \Lambda) = \Lambda_{p, mt}^{-1} \wedge \wedge_{p, mt} \quad (2.3)$$

où $\wedge_{p', mt}$ est la transformation de Lorentz pure ("boost") qui fait passer l'impulsion énergie de la particule du repos $m \underline{t} = (m, \vec{0})$ à $p' = (E', \vec{p}')$.

$$(2.3')$$

Si $\Lambda p = p$ on dit que Λ est du petit groupe de p et la représentation par une rotation n'a aucune ambiguïté. Pour choisir une base on choisit une tétrade associée à la particule (repère mobile de Penet-Cartan)

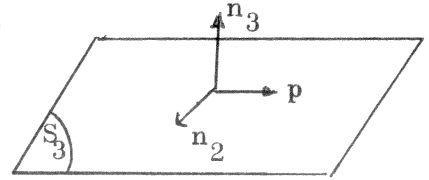
$\underline{n}_0 = \frac{P}{m}$, \underline{n}_1 , \underline{n}_2 , \underline{n}_3 , \underline{n}_α $\underline{n}_\beta = g_{\alpha\beta}$, n_3 étant l'axe de quantification du spin. Voici deux exemples de matrices $Q(p, \Lambda)$:

$$\begin{aligned} \Lambda_3(\theta) &= \text{"rotation" de } \theta \text{ autour de } n_3 \quad (Q^{(j)}(p, \Lambda(n_3, \theta)))_{\lambda\lambda'} = \\ &= e^{i \lambda \theta} \delta_{\lambda\lambda'} \quad -j \leq \lambda \leq j \quad (2.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_2(\pi) &= \text{"rotation" de } \pi \text{ autour de } n_2 \quad (Q^{(j)}(p, \Lambda(n_2, \pi)))_{\lambda\lambda'} = \\ &= e^{i \pi (j-\lambda)} \delta_{-\lambda\lambda'} \quad (2.5) \end{aligned}$$

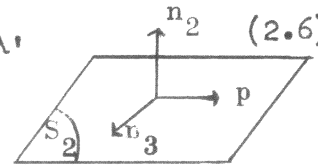
Il y a aussi des ambiguïtés pour définir la parité (on ne mesure en fait que des parités relatives). Nous adoptons la convention la plus simple $Q(p, P) = \eta \mathbb{1}$, η étant la parité, $\eta^2 = 1$. Nous étudierons la conservation de la parité en utilisant les deux symétries planes suivantes, qui font partie du petit groupe de p .

S_3 , symétrie par rapport à l'hyperplan n_3
(nous ne traçons pas le vecteur n_1)



$$S_3 = P \Lambda_3(\pi) = \Lambda_3(\pi) P, \quad (Q(p, S_3))_{\lambda\lambda'} = \eta e^{i\pi\lambda} \delta_{\lambda\lambda'} \quad (2.6)$$

S_2 , symétrie par rapport à l'hyperplan $\perp n_2$



$$S_2 = P \Lambda_2(\pi) = \Lambda_2(\pi) P, \quad (Q(p, S_1))_{\lambda\lambda'} = \eta e^{i\pi(j-\lambda)} \delta_{-\lambda\lambda'} \quad (2.7)$$

3. L'espace des opérateurs hermitiens sur l'espace à n dimensions.

Action de SU_n .

3.1. Forme canonique des opérateurs hermitiques.

L'étude des matrices densités de polarisation nous amène donc à étudier plusieurs problèmes mathématiques simples. Intéressons-nous d'abord à l'ensemble \mathcal{E} des opérateurs hermitiens agissant sur l'espace \mathcal{H}_n de dimension n. Toute combinaison linéaire à coefficients réels d'opérateurs hermitiens est un opérateur hermitien. L'ensemble \mathcal{E} a donc la structure d'un espace vectoriel réel; sa dimension est n^2 .

Rappelons une propriété caractéristique des opérateurs hermitiens : leurs valeurs propres sont réelles, les vecteurs propres correspondant à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux. En d'autres termes, tout $A \in \mathcal{E}$ s'écrit :

$$A = \sum_k \lambda_k P_k ; P_k^* = P_k , P_k P_l = \delta_{kl} P_k ; \lambda_k \text{ réel} \quad (3.1)$$

$P_k \mathcal{H}$ est l'espace des vecteurs propres appartenant à la valeur propre λ_k et $\text{Tr } P_k =$ la dimension de l'espace $P_k \mathcal{H}$. Cette décomposition (3.1) est indépendante du choix d'une base dans \mathcal{H} . Dès qu'on a choisi une base dans \mathcal{H} , A peut s'écrire comme une matrice d'éléments

$$\alpha_{ij} = \langle i | A | j \rangle = \bar{\alpha}_{ji} \quad . \quad (3.2)$$

On peut choisir les vecteurs d'une base orthonormée parmi les vecteurs propres de A, la matrice de A est alors diagonale :

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i |i\rangle \langle i| , \quad \alpha_{ij} = \lambda_i \delta_{ij} \quad (3.3)$$

on peut même numéroter les vecteurs de base de façon que

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \quad . \quad (3.3')$$

Exercice : Calculer la décomposition 3.1 pour A^2

$$A^2 = \sum_k \sum_l \lambda_k \lambda_l P_k P_l = \sum_{kl} \lambda_k \lambda_l P_k \delta_{kl} = \sum_k \lambda_k^2 P_k \quad (3.4)$$

3.2 L'espace euclidien \mathcal{E} des opérateurs hermitiques.

L'espace vectoriel réel \mathcal{E} des opérateurs hermitiques $n \times n$ peut être muni d'un produit scalaire euclidien :

$$\text{Tr } AB \quad (3.5)$$

En effet, cette expression est bien bilinéaire en A et B , symétrique

$\text{Tr } AB = \text{Tr } BA$, positive $\text{Tr } AA = \sum_i \lambda_i^2 \rho_i \geq 0$ et définie positive et de (3.4) $0 = \text{Tr } A^2 = \sum_i \lambda_i^2 \text{Tr } \rho_i \Rightarrow \lambda_i = 0$ donc $A = 0$.

Soit \mathcal{K} un sous espace de \mathcal{E} , on peut définir \mathcal{K}^\perp :

$$\mathcal{K}^\perp = \{A ; \forall B \in \mathcal{K}, \text{Tr } AB = 0\} \quad (3.6)$$

l'ensemble de tous les A orthogonaux à tous les éléments de \mathcal{K} .

On a bien $(\mathcal{K}^\perp)^\perp = \mathcal{K}$ et $\mathcal{K}^\perp \cap \mathcal{K} = \{0\}$.

Tout vecteur A de \mathcal{K} peut se décomposer de façon unique en

$$A = A_1 + A_2 \quad \text{avec } A_1 \in \mathcal{K}, A_2 \in \mathcal{K}^\perp \quad (3.7)$$

On note encore cette propriété

$$\mathcal{E} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}^\perp \quad (3.7')$$

Exemples de sous espaces mutuellement \perp .

a) Nous aurons souvent à utiliser l'exemple suivant, à partir d'un opérateur hermitique $S = S^*$ de carré I : $S^2 = I$, i.e. $S = S^{-1}$.

Soit \mathcal{Y}_+ les ensembles des $A \in \mathcal{E}$ tel que $SAS^{-1} = {}^+A$; ce sont deux espaces vectoriels. \mathcal{Y}_+ contient S ; si $S \neq I$] (il existe) A tel que $SAS^{-1} - A \neq 0$ et \mathcal{Y}_- contient $SAS^{-1} - A$.

Si $A \in \mathcal{Y}_+$, $B \in \mathcal{Y}_-$ $\text{Tr } AB = \text{Tr } SABS^{-1} = \text{Tr } SAS^{-1}SBS^{-1} = - \text{Tr } AB$ donc $\text{Tr } AB=0$.

De plus A se décompose uniquement en $A = A_+ + A_-$ $A_{\pm} \in \mathcal{Y}_{\pm}$ avec

$$A_{\pm} = \frac{1}{2}(A \pm SAS^{-1}) \quad (3.8)$$

b) Nous utiliserons aussi souvent l'exemple suivant qui se reconnaît lorsqu'une base a été choisie sur l'espace \mathcal{H}_n . Les opérateurs hermitiens sont alors des matrices d'éléments α_{ij} (pour A) satisfaisant $\bar{\alpha}_{ij} = \alpha_{ji}$ (en particulier $\alpha_{ij} = 0 \Rightarrow \alpha_{ji} = 0$).

Séparons les couples ij en 2 parties symétriques par rapport à la diagonale principale ($ij \leftrightarrow ji$). Les matrices hermitiennes ayant des éléments nuls pour les couples d'indices d'une partie forment l'espace orthogonal à celui des matrices ayant des zéros pour l'ensemble complémentaire des éléments. Par exemple :

Les matrices diagonales et les matrices ayant tous les éléments diagonaux nuls.
 Les matrices en damier à diagonale principale remplie et
 les matrices en damiers à diagonale principale vide (= avec des zéros)

$$\begin{array}{cccc}
 X & 0 & X & 0 & X & 0 & X & & 0 & X & 0 & X & 0 & X & 0 \\
 0 & X & 0 & X & 0 & X & 0 & & X & 0 & X & 0 & X & 0 & X \\
 X & 0 & X & 0 & X & 0 & X & & 0 & X & 0 & X & 0 & X & 0 \\
 0 & X & 0 & X & 0 & X & 0 & \text{et} & X & 0 & X & 0 & X & 0 & X \\
 X & 0 & X & 0 & X & 0 & X & & 0 & X & 0 & X & 0 & X & 0 \\
 0 & X & 0 & X & 0 & X & 0 & & X & 0 & X & 0 & X & 0 & X \\
 X & 0 & X & 0 & X & 0 & X & & 0 & X & 0 & X & 0 & X & 0
 \end{array}$$

c) On peut choisir une base orthonormée dans \mathcal{E} , c'est-à-dire un ensemble de n^2 opérateurs A_i tels que $\text{Tr } A_i A_j = \delta_{ij}$. L'espace sous-tendu par p vecteurs de base et celui sous-tendu par les $n^2 - p$ autres vecteurs sont mutuellement orthogonaux.

3.3 Action du groupe $S\mathcal{U}_n$ sur \mathcal{E}

La définition d'un opérateur unitaire U est $U^* = U^{-1}$.

Les opérateurs unitaires $n \times n$ forment un groupe, le groupe \mathcal{U}_n agissant sur $\mathcal{E} \mathcal{K}_n$. Il est le groupe des opérateurs conservant le produit scalaire hermitique : $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, U^*Uy \rangle = \langle x, y \rangle$.

Soit $|x'_i\rangle, |x_i\rangle$ deux bases orthonormées $\langle x'_i, x'_j \rangle = \delta_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle$ de \mathcal{E}_n .

Il existe une transformation unitaire transformant une base en l'autre :

$$U = \sum_j |x'_j\rangle \langle x_j| \quad (\text{en effet } U |x_i\rangle = |x'_i\rangle) \quad (3.9)$$

$$\text{Si } A = A^*, \quad (UAU^{-1})^* = UAU^{-1}$$

donc le groupe \mathcal{U}_n agit aussi sur l'espace \mathcal{E} des opérateurs hermitiens $n \times n$ par

$$A \rightsquigarrow UAU^{-1} \quad (3.10)$$

Des opérateurs unitaires proportionnels $U_1 = e^{i\varphi} U_2$ ayant la même action, on peut se contenter de considérer le sous groupe $S\mathcal{U}_n$ des matrices unitaires de déterminant 1.

Le groupe unitaire conserve le produit scalaire de \mathcal{E} :

$$\text{Tr } UAU^{-1} UBU^{-1} = \text{Tr } AB \quad (3.11)$$

Nous savons (3.3, et 3.3') qu'on peut choisir une base dans \mathcal{K} tel que A soit diagonal. Avec (3.9) cela nous permet d'affirmer qu'on peut diagona-

liser tout opérateur hermitien A par une transformation unitaire (3.10).

On appelle orbites d'un groupe agissant sur un espace les ensembles de points qui sont transformables l'un par l'autre par une opération du groupe. Deux orbites distinctes ne peuvent avoir de points commun (car deux orbites qui ont un point commun sont confondues !)

Pour classer les orbites de \mathcal{U}_n sur l'espace \mathcal{E} , il suffit de prendre un point de chaque orbite comme représentant. Nous le ferons en choisissant pour chaque orbite la matrice diagonalisée sous la forme (3.3 et 3.3') il y en a une et une seule par orbite.

Par exemple, tous les états de polarisation totale sont caractérisés par des matrices densités du type $|x\rangle\langle x|$ qui ont une valeur propre 1 (vecteur x) et toutes les autres nulles. Ils forment donc une seule orbite : $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_n = 0$.

L'étude géométrique des orbites est assez facile, mais nous ne l'entreprendrons pas ici. On appelle encore petit groupe d'un opérateur, le groupe des U commutant avec lui $A = UAU^{-1}$, on établit simplement que les petits groupes des points d'une même orbites sont conjugués l'un de l'autre (i.e. $B = VAV^{-1}, A = UAU^{-1}$ alors $B = VUV^{-1} A VU^{-1}V^{-1}$) et

$$\begin{array}{l} \text{dimension de l'orbite} + \text{dimension du petit groupe} = \text{dimension de } U_n \\ d + d' = n^2 \end{array}$$

Exemple : Etats purs de polarisation, petit groupe : $U_1 \times U_{n-1}$, $d' = 1 + (n-1)^2, d = 2(n-1)$; en effet, pour se donner la polarisation d'un état pur, on se donne n-1 nombres complexes. (L'espace des états purs est l'espace projectif complexe de dimension n-1).

Mélange le plus général (toutes les valeurs propres différentes et non nulles, petit groupe $U_1 \times U_1 \times \dots \times U_1$, $d = n$ $d = n^2 - n = n(n-1)$).

Notons que chaque opérateur multiple de l'identité forme une orbite réduite à un point.

4. L'ensemble des opérateurs hermitiens $n \times n$ et ≥ 0 . Ses propriétés de convexité.

4.1 Définition des opérateurs ≥ 0

Un opérateur hermitien est positif si toutes ses valeurs propres sont ≥ 0 . (Il serait plus correct de dire semi-positif, réservant positif pour la condition des valeurs propres > 0 ; mais c'est aussi plus long à dire !)

Exemple : $A \in \mathcal{E} \Rightarrow A^2$ est positif. (voir 3.4 , ses valeurs propres sont le carré de celles de A).

Nous notons \mathcal{E}^+ le sous ensemble de \mathcal{E} des opérateurs positifs. Nous avons déjà rencontré les opérateurs positifs : leurs valeurs moyennes sont ≥ 0 .

Lemme 1 : $R \geq 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{H}_n, \langle x, Rx \rangle \geq 0$.

sens \Rightarrow , en effet $\langle x, Rx \rangle = \sum_i \lambda_i \langle x, P_i x \rangle = \sum_i \lambda_i \langle x, P_i^2 x \rangle = \sum_i \lambda_i \langle P_i x, x \rangle \geq 0$.

sens \Leftarrow , s'obtient en prenant pour x un vecteur propre pour chaque valeur propre λ_i .

4.2 Convexité

Lemme 2 : $\alpha_i \geq 0, R_i \geq 0 \Rightarrow \sum_i \alpha_i R_i \geq 0$.

$$\forall x, \sum_i \langle x, \alpha_i R_i x \rangle = \sum_i \alpha_i \langle x, R_i x \rangle \geq 0.$$

En particulier $\forall R_1, R_2 \in \mathcal{E}^+ \Rightarrow R_1 + R_2 \in \mathcal{E}^+$, qu'on écrit $\mathcal{E}^+ + \mathcal{E}^+ \subset \mathcal{E}^+$ c'est-à-dire \mathcal{K}_+ est un cône. Aussi pour $i = 2$ et $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, l'ensemble des $\alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2$ décrit le segment de droite joignant R_1 à R_2 dans \mathcal{E}^+ . Un domaine qui contient tous les points des segments de droite joignant ses points est appelé convexe. \mathcal{E}^+ est donc un cône convexe.

De la définition de la convexité, on montre très aisément

Proposition 1 : toute variété linéaire est convexe,

1' : toute intersection de domaines convexes est convexe,

1'' : toute image par application linéaire d'un domaine convexe est convexe.

Notons \mathcal{E}_1^+ l'intersection de \mathcal{E}^+ et de l'hyperplan de \mathcal{E} défini par $\text{Tr } R = 1$. Par les propositions 1 et 1'', \mathcal{E}_1^+ est convexe. Or, comme nous l'avons vu en 1.9, \mathcal{E}_1^+ est l'ensemble des matrices densité $n \times n$ et ce domaine \mathcal{E}_1^+ de \mathcal{E} est l'objet de notre étude.

Points extrémaux d'un domaine convexe \mathfrak{D}

$R \in \mathfrak{D}$ est extrémal s'il n'admet aucune décomposition en combinaison linéaire à coefficients positifs d'autres éléments de \mathfrak{D} ; en d'autres termes

$$R = \alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2, \alpha_1 + \alpha_2 = 1, R, R_1, R_2 \in \mathfrak{D} \Rightarrow R = R_1 = R_2$$

Appliquons cela à \mathcal{E}_1^+ . Si R est de rang > 1 (le rang d'un opérateur est la dimension de l'espace image $R\mathcal{K}_n$) par (3.3) il peut être décomposé en combinaison linéaire de projecteurs de rang 1. Les seuls éléments de \mathcal{E}_1^+ de rang 1 sont les projecteurs de rang 1 (car $\text{Tr } R = 1$). On vérifie qu'ils sont les points extrémaux de \mathcal{E}_1^+ (et ce sont les matrices densités de

polarisation totale !). Réciproquement toute matrice densité ($\in \mathcal{E}_1^+$) est obtenue par combinaison linéaire à coefficients ≥ 0 des états extrémaux. On dit que \mathcal{E}_1^+ est leur enveloppe convexe.

4.3 Invariance de \mathcal{E}_1^+ par \mathcal{U}_n

Les valeurs propres de R étant invariantes par \mathcal{U}_n et \mathcal{E}_1^+ étant l'ensemble de R à valeurs propres ≥ 0 et de somme 1, si $R \in \mathcal{E}_1^+$ toute l'orbite de R par \mathcal{U}_n est dans \mathcal{E}_1^+ . Le domaine \mathcal{E}_1^+ est donc invariant par \mathcal{U}_1

5. La forme du domaine \mathcal{E}_1^+ des matrices densités de polarisation.

5.1 La mesure physique de $R \in \mathcal{E}_1^+$

Nous voici donc arrivé au coeur de notre problème : l'étude du domaine \mathcal{E}_1^+ ensemble de toutes les matrices $n \times n$ densité de polarisation possible dans une expérience. Nous examinerons plus en détail la physique dans les § suivants.

Dans une expérience, les physiciens mesurant des polarisations ne déterminent pas complètement la matrice densité correspondante R ; il est même parfois impossible de le faire (comme nous le verrons plus loin). Cette matrice R, comme nous l'avons vu est un point $\in \mathcal{E}_1^+$. Si on n'en mesure que quelques éléments (ou combinaison linéaire d'éléments), on peut dire en terme géométrique qu'on détermine la projection du point $R \in \mathcal{E}_1^+$ sur la variété linéaire \mathcal{V}^* engendrée par des éléments de matrices (ou leurs combinaisons linéaires) observés dans l'expérience donnée.

Souvent aussi des lois de conservations, des symétries de l'état

initial ou des appareils de mesure permettent d'affirmer que R n'est pas l'élément le plus général de \mathcal{E}_1^+ . Par exemple certains de ces éléments (ou combinaisons linéaires d'éléments) doivent être nuls. Cela définit une variété linéaire \mathcal{V}' et on sait alors que $R \in \mathcal{E}_1^+ \cap \mathcal{V}'$.

Nous verrons comment la physique détermine les variétés \mathcal{V}^* et \mathcal{V}' .
 Etudions d'abord les :

5.2 Sections et projections de \mathcal{E}_1^+

Soit \mathcal{V} une variété linéaire de \mathcal{E} (= plan à k dimensions $0 \leq k \leq n^2$, on dira brièvement k -plan), et $\rho_{\mathcal{V}}$ la projection sur cette variété. Explicitement, pour la décomposition $\mathcal{E} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}^\perp$, l'opérateur A se décompose en $A = A_{\mathcal{V}} + A_{\mathcal{V}^\perp}$ et $\rho_{\mathcal{V}} A = A_{\mathcal{V}}$.

Evidemment $\rho_{\mathcal{V}} \mathcal{V} = \mathcal{V}$. On en déduit donc que :

$$\mathcal{E}_1^+ \cap \mathcal{V} = \rho_{\mathcal{V}}(\mathcal{E}_1^+ \cap \mathcal{V}) \subset \rho_{\mathcal{V}}(\mathcal{E}_1^+) \quad (5.1)$$

c'est-à-dire l'intersection de \mathcal{E}_1^+ par \mathcal{V} est à l'intérieur du contour apparent de \mathcal{E}_1^+ sur \mathcal{V} . Il est possible qu'on ait une égalité : $\mathcal{E}_1^+ \cap \mathcal{V} = \rho_{\mathcal{V}}(\mathcal{E}_1^+)$.
 Etudions de tels cas, car ils seront intéressants pour nous.

5.2.1 Les matrices densités diagonales.

Un tel concept n'est pas indépendant du choix de base sur \mathcal{H} . Mais après avoir raisonné dans une base donnée on pourrait par transformation unitaire passer dans une base quelconque.

Les matrices hermitiennes diagonales forment un n -plan $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$. Pour les matrices ≥ 0 et de trace 1, les éléments diagonaux λ_i ($i=1$ à n) doivent

satisfaire aux conditions nécessaires et suffisantes :

$$0 \leq \lambda_i \quad , \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad (5.2)$$

Ces relations définissent l'intérieur d'un polyèdre convexe à n faces (pour n = 3, triangle !) qui est $\mathfrak{D} \cap \mathcal{E}_1^+$. Etudions maintenant $\mathcal{P}_{\mathfrak{D}}(\mathcal{E}_1^+)$, c'est-à-dire les éléments diagonaux r_{ii} des matrices $R \in \mathcal{E}_1^+$

$$\text{Tr } R = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^n r_{ii} = 1 \quad (5.2')$$

De plus

$$0 \leq r_{ii} \quad (5.3')$$

en effet, par le lemme 1 du §4, $\forall x \in \mathcal{K}_n$, $\langle x | R | x \rangle \geq 0$. Prenons successivement pour x les vecteurs de bases $|i\rangle$ de \mathcal{K}_n , on obtient $\langle i | R | i \rangle = r_{ii} \geq 0$. Les conditions (5.2' et 5.3') sont identiques à 5.2, donc

$$\mathfrak{D} \cap \mathcal{E}_1^+ = \mathcal{P}_{\mathfrak{D}}(\mathcal{E}_1^+) \quad (5.4)$$

En d'autres termes, bien connus j'espère de tous les physiciens, si on ne mesure que les éléments diagonaux d'une matrice densité R, les conditions sur ces éléments sont les mêmes que si la matrice était diagonale. On peut donc oublier les autres éléments.

Insistons qu'il n'en est pas ainsi en général, mais étudions encore d'autres cas où cela reste vrai.

5.2.2 Les éléments symétries.

Nous étudions maintenant un cas géométrique où nous n'avons pas besoin de choisir une base dans \mathcal{K}_n .

Soit \mathcal{V} un k -plan de \mathcal{E} ($0 \leq k \leq n^2$). La symétrie $\mathcal{J}_{\mathcal{V}}$ est l'involution ($\mathcal{J}_{\mathcal{V}}^2 = \mathbf{I}$ identité sur \mathcal{E}) qui laisse fixe chaque point de \mathcal{V} :

$$\mathcal{J}_{\mathcal{V}} = \rho_{\mathcal{V}} - \rho_{\mathcal{V}^\perp} = 2\rho_{\mathcal{V}} - \mathbf{I} \quad (5.5)$$

On dit que \mathcal{V} est un élément de symétrie d'un domaine \mathcal{D} si

$$\mathcal{J}_{\mathcal{V}}(\mathcal{D}) = \mathcal{D} \quad (5.6)$$

Théorème : Si \mathcal{V} est un élément de symétrie d'un domaine convexe \mathcal{D} alors $\mathcal{D} \cap \mathcal{V} = \rho_{\mathcal{V}}(\mathcal{D})$.

Nous avons évidemment (5.1) $\mathcal{D} \cap \mathcal{V} \subset \rho_{\mathcal{V}}(\mathcal{D})$. La convexité de \mathcal{D} va nous permettre de démontrer l'inclusion dans l'autre sens :

soit donc $A' \in \rho_{\mathcal{V}}(\mathcal{D})$ et supposons donc $A' \notin \mathcal{D} \cap \mathcal{V}$; il existe alors $A \in \mathcal{D}$ tel que $\rho_{\mathcal{V}}(A) = A'$ et $0 \neq A - A' = A'' \in \mathcal{V}^\perp$. Puisque \mathcal{V} est un élément de symétrie de \mathcal{D} , $\mathcal{J}_{\mathcal{V}}(A) = A' - A'' \in \mathcal{D}$ et puisque \mathcal{D} est convexe $1/2(A + \mathcal{J}_{\mathcal{V}}(A)) = A' \in \mathcal{D}$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc $\rho_{\mathcal{V}}(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D} \cap \mathcal{V}$.

Nous voici donc intéressés par tous les éléments de symétrie de \mathcal{E}_1^+ . Puisque ce domaine est invariant par le groupe \mathcal{U}_n , toute involution de \mathcal{U}_n est une symétrie de \mathcal{E}_1^+ .

Par exemple la matrice U de \mathcal{U}_n d'éléments $u_{ij} = (-1)^i \delta_{ij}$ donnent un élément de symétrie de \mathcal{E}_1^+ , la variété linéaire des matrices hermitiques A satisfaisant $UAU = A$, soit

$$a_{ij}(-1)^{i+j} = a_{ij} \quad (5.7)$$

Ce sont les matrices en damiers avec diagonale principale remplie, que

nous avons déjà rencontré en 3.2b. Toute matrice unitaire est diagonalisable par une conjugaison unitaire. Les involutions les plus générales de \mathcal{U}_n sont donc des conjugués VUV^{-1} , $V \in \mathcal{U}_n$, d'involutions U diagonales

$$U, \text{ éléments } u_{ij} = \varepsilon_i \delta_{ij}, \varepsilon_i^2 = 1$$

La variété linéaire élément de symétrie de \mathcal{E}_1^+ est alors définie par

$$\varepsilon_i a_{ij} \varepsilon_j = a_{ij} \quad (5.8)$$

En voici un autre exemple, les matrices

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A' & 0 \\ \hline 0 & A'' \end{array} \right) \quad (5.9)$$

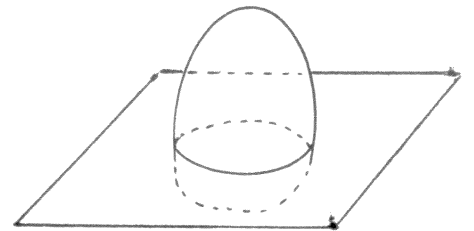
A' et A'' sont des matrices hermitiques $k \times k$ et $(n-k) \times (n-k)$.

Voici maintenant un exemple qui n'est pas de ce type.

Les opérateurs hermitiques R et $\bar{R} = R^T$ ont même valeurs propres. La variété \mathcal{V}_S des matrices hermitiques ≥ 0 et symétriques $R = R^T = \bar{R}$ est donc un élément de symétrie de \mathcal{E}_1^+ . La décomposition $\mathcal{E} = \mathcal{V}_S \oplus \mathcal{V}_S^\perp$ décompose les matrices hermitiques en partie symétrique et antisymétrique.

Remarquons que la réciproque du théorème 1 n'est pas vrai en général. C'est le cas du plan équatorial d'un oeuf

Le n -plan \mathcal{D} en fournit aussi un contre-exemple :



Nous avons vu que pour lui $\mathcal{D} \cap \mathcal{E}_1^+ = \mathcal{D}(\mathcal{E}_1^+)$. Par contre pour $n \geq 3$, il n'est pas un plan de symétrie. La matrice hermitique $n \times n$ (qui m'a été fournie par Pierre Renouard)

$$X = \frac{1}{5} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array} \right) \quad (5.10)$$

est bien $\in \mathcal{E}_1^+$ car ses valeurs propres, solutions de l'équation $\det(\lambda \mathbb{I} - X) = \lambda^{n-3}(\lambda^3 - \lambda^2 + \frac{1}{5}\lambda - (\frac{1}{5})^3) = 0$ sont toutes ≥ 0 (ce sont $(2 + \sqrt{3})/5, 1/5, (2 - \sqrt{3})/5, 0, 0 \dots$). Par contre :

$$X' = \mathcal{J}_{\mathcal{D}}(X) = \frac{1}{5} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array} \right) \notin \mathcal{E}_1^+ \quad (5.10')$$

en effet ses valeurs propres sont $3/5, 1+\sqrt{2}/5, 1-\sqrt{2}/5$, et $(n-3)$ fois zéro ; l'une d'elle est < 0 .

Nous allons étudier un autre cas d'égalité de la section et du contour apparent qui n'est pas non plus fourni par un élément de symétrie.

5.2.3 Les 4-plans à 2 indices \mathcal{T}_{ij}

Nous supposons qu'on a choisi une base de \mathcal{K}_n et qu'étant donnés i, j ($1 \leq i < j \leq n$) on s'intéresse aux quatre éléments de la matrice R ,

$$r_{ii}, r_{jj}, r_{ij} \text{ et } r_{ji} = \overline{r_{ij}} \quad (5.11)$$

définis par les 4 nombres réels

$$\rho_{ii} = r_{ii}, \rho_{jj} = r_{jj}, \rho_{ij} = \frac{1}{2}(r_{ij} + r_{ji}), \rho'_{ij} = \frac{1}{2i}(r_{ij} - r_{ji}) \quad (5.11')$$

Ils engendrent dans l'espace \mathcal{E} un 4-plan que nous notons \mathcal{T}_{ij} .

Les conditions 5.2 et 5.3' donnent

$$0 \leq \rho_{ii}, 0 \leq \rho_{jj} \quad \rho_{ii} + \rho_{jj} \leq 1 \quad (5.12)$$

et le lemme 1 du § 4, quelles que soient les composantes ξ_i et ξ_j du vecteur x

$$|\xi_i|^2 r_{ii} + |\xi_j|^2 r_{jj} + 2 \operatorname{Re}(\bar{\xi}_i \xi_j r_{ij}) \geq 0,$$

ce qui doit donc être vrai mais dans le cas le plus "défavorable" où $\bar{\xi}_i \xi_j r_{ij} \leq 0$, donc

$$|\xi_i|^2 r_{ii} + |\xi_j|^2 r_{jj} - 2|\xi_i||\xi_j||r_{ij}| \geq 0$$

ce qui est équivalent à

$$|r_{ij}|^2 = \rho_{ij}^2 + \rho'_{ij}{}^2 \leq r_{ii} r_{jj} = \rho_{ii} \rho_{jj}$$

$$\text{donc} \quad \rho_{ij}^2 + \rho'_{ij}{}^2 + \frac{1}{4}(\rho_{ii} - \rho_{jj})^2 - \frac{1}{4}(\rho_{ii} + \rho_{jj})^2 = 0 \quad (5.12')$$

Les équations 5.12 et 5.12' donnent donc la projection = contour apparent de \mathcal{E}_1^+ sur le 4-plan \mathcal{T}_{ij} .

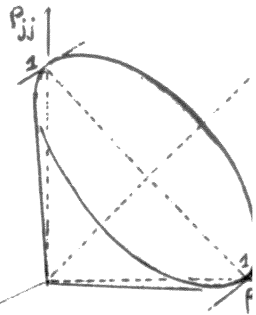
C'est un cône de sommet 0, d'équation

(5.12') et de base dans le 3-plan

$$\rho_{ii} + \rho_{jj} = 1$$

(Cette base est l'ellipse

$$|r_{ij}|^2 + \frac{1}{4}(\rho_{ii} - \rho_{jj})^2 = \frac{1}{4})$$



Ayant déterminé $\mathcal{T}_{ij}(\mathcal{E}_1^+)$, déterminons $\mathcal{E}_1^+ \cap \mathcal{T}_{ij}$. $\rho_{ij}^2 + \rho'_{ij}{}^2 = |r_{ij}|^2$

C'est l'ensemble des matrices hermitiques positives dont tous les éléments sont nulles sauf les 4 éléments de (5.11)

$$\operatorname{Tr} R = 1 \Rightarrow r_{ii} + r_{jj} = 1 \quad (5.13)$$

et la condition de positivité se réduit à

$$\det \begin{pmatrix} r_{ii} & r_{ij} \\ r_{ji} & r_{jj} \end{pmatrix} \geq 0 \text{ soit } r_{ii} r_{jj} - r_{ij} r_{ji} \geq 0$$

c'est la condition (5.12').

$(\mathcal{E}_1^+ \cap \mathcal{T}_{ij})$ est donc donné par (5.12') et (5.13) ; c'est l'ellipse, base du cône $\mathcal{C}_{ij}(\mathcal{E}_1^+)$.

Evidemment, dans ce cas nous n'avons pas l'égalité ; c'est ce qui nous arrivera toujours pour un k-plan qui ne contient pas le n-plan \mathfrak{D} des matrices diagonale. Mais si nous considérons le (n+2)-plan \mathcal{C}'_{ij} engendré par $\mathfrak{D} \cup \mathcal{T}_{ij}$, on déduit immédiatement de ce qui précède

$$\mathcal{C}'_{ij}(\mathcal{E}_1^+) = \mathcal{E}_1^+ \cap \mathcal{C}'_{ij}$$

ce domaine étant défini par les équations (5.2) et (5.12').

Cependant \mathcal{C}'_{ij} n'est pas non plus un élément de symétrie de \mathcal{E}_1^+ . Considérons à nouveau $X \in \mathcal{E}_1^+$ défini en 5.10. Alors

$$X'' = \mathcal{J}_{\mathcal{C}'_{ij}}(X) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \notin \mathcal{E}_1^+$$

puisque ses valeurs propres sont $\frac{3}{5}$, $\frac{1+\sqrt{2}}{5}$, $\frac{1-\sqrt{2}}{5}$, (n-3) fois 0 ; l'une d'elles est négative.

6. Les états physiques et leurs symétries

Nous avons fait une étude des opérateurs ≥ 0 agissant sur un espace d'Hilbert \mathcal{K}_n de dimension n . Ils représentent les matrices densité d'un système quantique à variable discrète prenant n valeurs. Pour $n = 12$ par exemple cela représente aussi bien les états de polarisation d'une particule de spin $11/2$ (et d'impulsion fixée) que les états de polarisation de deux particules (d'impulsions définies) de spin 1 et $3/2$. La différence s'exprime par l'action du groupe de Poincaré à travers les matrices unitaires $\mathcal{U}(r(p, \Lambda))$ qui appartiennent dans le 1er cas à la représentation $D_{11/2}$ de SU_2 et dans le 2ème cas à la représentation $D_1 \otimes D_{3/2}$ du même groupe. Dans ce dernier cas les opérateurs de la forme $R_1 \otimes I$ et $I \otimes R_2$ représentent respectivement les polarisations des particules 1 et 2, les autres opérateurs qui ne peuvent être ramenés à cette forme représentant les corrélations de polarisation. Les transformations unitaires ne respectent pas cette décomposition. Pour simplifier, considérons simplement les états de polarisation d'une particule d'impulsion énergie \underline{p} , bien définie ; ils sont représentés par \mathcal{E}_1^+ les opérateurs ≥ 0 de trace 1 agissant sur \mathcal{K}_n ; comme nous l'avons vu, le groupe \mathcal{U}_n peut transformer tout état pur en état pur, mais cela ne correspond pas à une transformation physique (sauf pour $n = 2$, c-à-d spin $1/2$).

En effet, le petit groupe de \underline{p} , isomorphe à SU_2 agit sur \mathcal{K}_n par les matrices unitaires de $D_{n-1/2}$ et qui forment donc un sous-groupe SU_2 de \mathcal{U}_n . Deux matrices densité peuvent représenter le même état physique, décrit dans deux système de coordonnées différents $(\underline{p}, n^{(i)})$ et $(\underline{p}', n'^{(i)})$ si et

seulement si elles sont sur la même orbite de SU_2 . (donc ces matrices densité sont transformables l'une dans l'autre par une "rotation" de petit groupe). Si ce groupe SU_2 agit sur l'espace \mathcal{K}_n suivant la représentation D_j (où $n = 2j + 1$), il agit sur l'espace vectoriel \mathcal{E} des opérateurs hermitiques sur \mathcal{K}_n suivant la représentations

$$D_j \otimes \bar{D}_j \sim D_j \otimes D_j \sim \bigoplus_{L=0}^{2j} D_L. \quad (6.1)$$

Le représentation D_0 correspond à la trace. La décomposition de l'espace \mathcal{E} des éléments de matrices densité en sous espaces irréductible pour les "rotations" du petit groupe de \mathfrak{p} s'appelle encore décomposition en multipoles. (L'action du groupe \mathcal{U}_n sur \mathcal{E} ne respecte pas cette décomposition). Au signe près, les physiciens sont tous d'accord pour écrire cette décomposition

$$R^{\lambda}_{\lambda'} = \frac{(-1)^{2j}}{\sqrt{2j+1}} \sum_{L=0}^{2j} \sum_{M=-L}^L (2L+1) \bar{t}_M^{(L)} (T_{(L)}^M)^{\lambda}_{\lambda'} \quad (6.2)$$

où les éléments des matrices $T_{(L)}^M$ sont définies par

$$T_{(L)}^M{}^{\lambda}_{\lambda'} = \left(\begin{matrix} M & \lambda & j \\ L & j & \lambda' \end{matrix} \right) \sqrt{2j+1} \quad (6.3)$$

ce dernier symbole est le coefficient de Wigner-Clebsch-Gordan

(on a $\lambda' - \lambda = M$)

(Pour une étude covariante des développements multipolaires voir

E. de Rafael, Référence 6.

Les $T_{(L)}^M$ ne sont pas hermitiques mais satisfont à $(T_{(L)}^M)^* = T_{(L)}^{-M}$.

L'hermiticité de R impose alors aux coefficients :

$$\overline{t_{-M}^{(L)}} = (-1)^M t_M^{(L)} \quad (6.4')$$

Les conditions imposées par la positivité sont données en réf 1 (et réf 2 pour le seul cas $j = 1$).

L'orthogonalité des coefficients de Wigner-Clebsch-Gordan, s'écrit :

$$\text{Trace } T_{(L)}^M T_{(L')}^{M'} = \delta_{LL'} \delta_{MM'} \frac{2j+1}{2L+1} \quad (6.5)$$

Ces $\sum_{L=0}^{2j} (2L+1) = (2j+1)^2$ matrices $T_{(L)}^M$ forment donc une base

orthogonale de l'espace \mathcal{E} des opérateurs hermitiques sur \mathcal{H}_n . Les $t_M^{(L)}$ sont les composantes de R. On les obtient ainsi :

$$t_M^{(L)} = \text{Tr } R T_{(L)}^M \quad (6.6)$$

Les états qui n'ont que des multipôles pairs dans leur développement sont dits alignés. Mais il n'y a pas de nom spécial pour les états qui, en plus de $L = 0$, n'ont que des multipôles impairs. Nous préférons donc les dénominations polarisation paire et impaire au vocable usuel "alignement" et le très ambigu "polarisation", (on emploie souvent en physique nucléaire "orientation" pour ce que nous appelons polarisation). Soit \mathcal{A} la variété linéaire engendrée par les $T_{(L)}^M$, L pair. L'ensemble des matrices densités de polarisation paire (= alignement) est le domaine $\mathcal{A} \cap \mathcal{E}_1^+$. Montrons que \mathcal{A} est un élément de symétrie de \mathcal{E}_1^+ . En appliquant sur $R \in \mathcal{E}_1^+$ la symétrie \mathcal{Y}_2 définie par l'équation (2.7) on a

$$\mathcal{Y}_2(R_{\lambda}^{\lambda'}) = (-1)^{\lambda-\lambda'} R^{-\lambda}{}_{-\lambda'} \quad (6.7)$$

Cette symétrie commute avec la symétrie $R \rightarrow R^T$ que nous avons définie en 5.2.2. nous la notons $\mathcal{C}(R) = R^T$. Le produit de ces deux involutions donne encore une involution :

$$\mathcal{C}\mathcal{Y}_2(R_{\lambda}^{\lambda'}) = \mathcal{Y}_2 \mathcal{C}(R_{\lambda}^{\lambda'}) = (-1)^{\lambda-\lambda'} R^{-\lambda'} - \lambda \quad (6.8)$$

Appliqué à l'équation (6.2), avec l'aide de (6.3) et (6.6), un court calcul algébrique nous montre que les composantes $t_M^{(L)}$ de R dans la base 6.6 de \mathcal{E} sont devenues

$$t_M^{(L)} \xrightarrow{\mathcal{C}\mathcal{Y}_2} (-1)^L t_M^{(L)} \quad \text{pour} \quad R \xrightarrow{\mathcal{C}\mathcal{Y}_2} \mathcal{C}\mathcal{Y}_2(R) \quad (6.9)$$

En résumé, nous avons exhibé une importante symétrie de \mathcal{E}_1^+ , (en multipliant par $(-1)^L$ les multipôles) dont les points fixes sont la variété et engendrés par les matrices densité d'alignement = polarisation paire.

Dans certaines expériences, on ne mesure pas la partie impaire de la polarisation. On pourra donc ne s'intéresser qu'aux conditions de positivité pour les polarisations paires.

6.2 Peut-on diagonaliser la matrice densité de polarisation ?

Nous avons vu que toute matrice hermétique pouvant être diagonalisée par une transformation unitaire $U \in \mathcal{U}_n$. Mais attention ! cette U peut ne pas correspondre à une transformation physique et nous n'avons à notre disposition que le sous groupe SU_2 de \mathcal{U}_n , qui correspond à un choix des axes. Aucun choix en général ne permet donc d'avoir R diagonal. Seules les R jouissant d'une symétrie de "rotation" peuvent être diagonalisées, il suffit de prendre pour axe de quantification l'axe de "rotation" (nous mettons rotation entre guillemets car il ne s'agit de rotations que dans le système au repos

de la particule ; pour une particule d'énergie impulsion \underline{p} il faut considérer les opérations correspondantes du petit groupe de \underline{p}). Par une "rotation" de Θ autour de l'axe de quantification (voir equation 2.4) R_{λ} est transformée en $e^{i(\lambda-\lambda')\Theta} R_{\lambda'}$ ce qui est invariant pour tout Θ si $\lambda = \lambda'$, c'est-à-dire R diagonal. Cette invariance par "rotation" existe lorsque les grandeurs qu'on observe forment un 2-plan de genre temps dans l'espace-temps. Elles sont bien alors invariante par le groupe (à un paramètre) des rotations dans le 2-plan .

Exemples d'une telle situation :

a) désintégration en deux corps : $\underline{p} \rightarrow \underline{p}_1 + \underline{p}_2$.

Si la particule initiale n'est pas polarisée, la matrice densité de l'ensemble des 2 particules finales (et à fortiori les matrices densités de polarisation de chaque particule si on n'observe pas les corrélations) est invariante par les "rotations laissant fixes les points du 2-plan \underline{p} , \underline{p}_1 , \underline{p}_2 . Si on prend donc comme axe de quantification des spins pour la particule 1, $\underline{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{\Delta'}} \left(\frac{\underline{p}_1 \cdot \underline{p}_2}{m_1} \underline{p}_1 - m_1 \underline{p}_2 \right)$ pour la particule 2 $\underline{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{\Delta'}} \left(\frac{\underline{p}_1 \cdot \underline{p}_2}{m_2} \underline{p}_2 - m_2 \underline{p}_1 \right)$, la matrice densité de polarisation pour l'état final sera diagonale (ces axes de quantification sont dits "hélicité"). $\Delta' = (m + m_1 + m_2)(m - m_1 - m_2)(m + m_1 - m_2)(m - m_1 + m_2)$.

b) vertex à 3 particules $\underline{p}_1 - \underline{p}_2 = \underline{k}$.

Dans un modèle périphérique par exemple ou une particule non polarisée (faisceau ou cible) échange, avec le transfert \underline{k} d'impulsion énergie, une particule de spin 0 , alors la matrice densité de polarisation de la particule finale a une symétrie de rotation !

c) Particule de spin 1/2.

Le seul multipole de polarisation d'une telle particule est $L = 1$, vecteur. Une description covariante de la polarisation, pour l'énergie impulsion \underline{p} , est donc entièrement faite par un pseudovecteur \underline{s} , orthogonal à \underline{p} : $\underline{p} \cdot \underline{s} = 0$ est dont la longueur est le degré de polarisation. $0 \leq \sqrt{-s^2} = d \leq 1$. Le 2-plan de genre temps est donc $(\underline{p}, \underline{s})$. En quantifiant le spin le long de \underline{s} on obtient une matrice densité diagonale

$$R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+d & 0 \\ 0 & 1-d \end{pmatrix}.$$

Dans une matrice densité de polarisation quelconque d'une particule de spin j on pourra donc toujours diagonaliser le multipole 1 (vecteur) et pour l'état le plus général rien d'autre simultanément. ⁽⁷⁾

7. Les symétries de l'expérience

Il peut n'en exister aucune. (Cependant les expériences les plus simples (par exemple cible et faisceau non polarisés) ont de telles symétries que nous allons identifier avec celles que nous avons étudiées. Mais pour éviter des biais on essaie souvent de garder une certaine symétrie dans les expériences les plus compliquées. Nous en dirons quelques mots. En tous cas l'observation de la polarisation des particules à résonance est faite en observant leur désintégration. Si la parité est conservée cela impose une symétrie à cette observation. Nous allons donc traiter quelques cas, parmi les plus fréquents.

7.1 Reaction à 2 corps, cible non polarisée

Les 4 impulsions-énergies $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$ qu'on observe sont dans un même 3-plan d'univers. Il est donc un plan de symétrie de l'état initial

et si la parité est conservée (la seule exception est donc les expériences neutrinos !) c'est un plan de symétrie de l'état final.

La normale au plan est la perpendiculaire commune aux quatre impulsions-énergies et il est assez naturel de la choisir comme axe de quantification.

Alors l'invariance par rapport à la symétrie S_3 (formule 2.6) impose à la matrice densité de l'état final (les indices sont les paires de nombres magnétiques : $-j_1 \leq \lambda_1 \leq j_1$, $-j_2 \leq \lambda_2 \leq j_2$)

$$R_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_1' \lambda_2'} = (-1)^{\lambda_1 + \lambda_2 - (\lambda_1' + \lambda_2')} R_{\lambda_1' \lambda_2'}^{\lambda_1 \lambda_2} \quad (7.1)$$

autrement dit sont nuls les éléments de matrices (non diagonaux) tels que " $\lambda_1 + \lambda_2 - (\lambda_1' + \lambda_2')$ soit impair". La matrice est en damier (voir référence 8). C'est aussi vrai pour la matrice densité de polarisation de chaque particule lorsque la polarisation de l'autre n'est pas observée

$$(R_1)_{\lambda_1'}^{\lambda_1} = \sum_{\lambda_2} R_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_1' \lambda_2'} \quad \text{et} \quad (R_2)_{\lambda_2'}^{\lambda_2} = \sum_{\lambda_1} R_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_1 \lambda_2'} \quad (7.2)$$

(Notons que pour une particule de spin $\frac{1}{2}$, cela impose à R d'être diagonale. Si de tels matrices sont développées en multipôles (équation 6.2) la symétrie s'exprime par

$$t_M^L = 0 \quad \text{si } M \text{ est impair} \quad (7.2')$$

Si on préfère quantifier en hélicité, c'est la symétrie S_2 qu'il faut appliquer à chaque particule, elle ne fait pas apparaître des zéros, mais seulement les conditions

$$R_{\lambda'}^{\lambda} = (-1)^{\lambda-\lambda'} R_{-\lambda'}^{-\lambda}$$

soit pour les $t_M^{(L)}$, en rappelant 6.4

$$\bar{t}_M^{(L)} = (-1)^L t_M^{(L)} = (-1)^M t_{-M}^L \quad (7.3')$$

7.2 Reaction à 2 corps, cible (ou faisceau) polarisée

La symétrie étudiée dans 7.1 disparaît donc, sauf dans le cas suivant où

1) la cible (ou le faisceau) a une polarisation invariante par un axe de rotation ; toujours vrai pour les particules de spin 1/2, ou encore si on polarise par un champ magnétique macroscopique (polarisation de multipole 1).

2) on observe les particules finales dans le plan \perp à la polarisation de la cible (ou à la polarisation transversale du faisceau).

7.3 Observation de la polarisation par une désintégration en 2 corps.

Si la parité est conservée dans la désintégration (ce qui est le cas des résonances) l'observation de la distribution angulaire des 2 produits de désintégration n'analyse que la polarisation paire. Pour analyser la polarisation impaire il faut de plus mesurer la polarisation des particules de la désintégration. Ce qui est impossible si elles ont spin zéro. Ainsi la polarisation impaire des $\rho \rightarrow 2\pi$, $\phi \rightarrow K+\bar{K}$, $K^* \rightarrow K+\pi$ etc..., ne peut être mesurée.

8. Le rang d'une matrice densité de polarisation

Rappelons que pour une application linéaire A d'un espace vectoriel \mathcal{K} dans un espace vectoriel \mathcal{K}' , on appelle noyau de A le sous espace des vecteurs $x \in \mathcal{K}$ tels que $Ax = 0$, image de A le sous espace des vecteurs $|x' \rangle$ de \mathcal{K}' pour lesquels il existe $x \in \mathcal{K}$, tel que $x' = Ax$.
On a

$$\dim \text{noyau} + \dim \text{image} = \dim \mathcal{K} \text{ (espace de départ)} \quad (7.1)$$

On appelle encore "rang de A" la dimension de son image.

Donc "rang de A" \leq dim espace de départ.

Le rang du produit de deux opérateurs $A_2 A_1$ est donc \leq au plus petit des deux nombres rang de A_2 , rang de A_1 , et plus généralement :

$$\text{rang}(A_n A_{n-1} \dots A_2 A_1) \leq \inf (\text{rang } A_i) \quad (7.2)$$

(inf = le plus petit des)

Pour des impulsions énergies fixées pour toutes les particules, de polarisation la matrice densité R' de l'état final (matrice $n' \times n'$ où $n' = \pi(2j'+1)$ pour les particules finales) est obtenue à partir de R de l'état initial par

$$R' = S R S^*$$

(la matrice "S" est fonction des impulsions énergie)

alors

$\text{rang } R' \leq \inf (\text{rang de } S, \text{ rang de } R, \text{ rang de } S^*) = \inf (n', \text{rang de } R, n)$
et puisque $\text{rang } R \leq n$

$$\text{rang de } R' \leq \inf (n', \text{rang de } R) \quad (7.3)$$

Puisque "n'" est la dimension de l'espace sur lequel agit R', cette équation impose effectivement une nouvelle condition au rang de R' si

$$\text{rang de R} \leq n' \quad (7.3')$$

Il nous faut donc tenir compte de cette condition par exemple : dans la désintégration d'une particule :

$$\begin{array}{l} \pi \rightarrow \mu + \nu, \pi^0 \rightarrow 2\gamma, K \rightarrow \mu + \nu + \pi \\ \Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma, \Xi \rightarrow \pi + \rho \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(état final totalement} \\ \text{polarisé)} \end{array}$$

dans les réactions en deux corps ; ce sera surtout très fréquent pour les faisceaux de mesons (π ou K) dans l'hydrogène, puisque c'est vrai toutes les fois qu'on produit une résonance mesonique de spin > 0 ou une résonance baryonique de spin $> 1/2$.

Si donc une matrice densité n'a pas son rang maximum, on sait alors qu'elle est sur une partie de la frontière de \mathcal{E}_1^+ et cette partie est d'autant plus petite que le rang est petit.

Evidemment, cette condition de rang disparaît dès qu'on intègre sur les énergies-impulsion (intégration angulaire, manque de résolution en énergie etc...) elle ne correspond à une bonne approximation qu'à condition que la matrice densité de polarisation varie peu sur le domaine d'intégration.

S'il y a deux particules finales à spin, elle n'est vraie que pour la matrice densité de polarisation de l'ensemble des particules et non pas pour la matrice de polarisation de chacune (obtenue par trace partielle ξ). On a une condition de rang sur la matrice d'une particule que si

$2j + 2$ de cette particule est $>$ que les produits de ces quantités $2j + 2$ sur toutes les autres particules de la réaction.

Par contre, tout travail théorique qui préserve la conservation du moment angulaire, doit respecter ces conditions. Elles sont si fortes $\pi + p$ ou $K + p$ que ce que les expériences vérifient en grande partie n'est essentiellement que la conservation du moment angulaire. Ce sont d'ailleurs ces conditions qui permettent de bon critère pour la détermination du spin des résonances.

Ces conditions sont données très généralement dans le travail de P. Minnaert⁽¹⁾. Voir note⁽⁹⁾ pour quelques remarques historiques et pertinentes.

Conclusion

La description de la polarisation des particules de spin 1/2 entier peut être entièrement géométrique et covariante. Il suffit pour cela d'utiliser un quadri-pseudovecteur \underline{s} , orthogonal à l'impulsion énergie \underline{p} , $\underline{p} \cdot \underline{s} = 0$ et dont la longueur est le degré de polarisation : exemple dans la désintégration $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$, la polarisation de μ^+ est

$$S^+ = \frac{1}{2} \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_\pi m_\mu} \left(\frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{m_\mu} \underline{p}_\mu - 2m_\mu \underline{p}_\pi \right)$$

Pour les spins supérieurs et aussi pour les correlations de polarisation la description des états de polarisation peut être faite de façon covariante par les matrices densités mais l'expression de ces matrices nécessite alors le choix d'une base (voir cependant un manuscrit de Fano pour le spin 1 ; l'utilisation en plus de \underline{s} d'un tenseur symétrique $s_{\mu\nu} = s_{\nu\mu}$, $s_{\mu\nu} p^\nu = 0$ $s_\mu^\mu = 0$ pour le spin 1 ne semble pas très utile). Cependant la forme géométrique du contour apparent du domaine de positivité est indépendante du choix de la base. Pour la polarisation d'une particule de spin 1 dans une réaction entre particules non polarisées, le domaine de positivité est un cône du 2ème degré (Voir Minnaert) et son contour apparent sur l'espace des multipoles d'ordre 2 (seuls observables pour un ρ , un K^* de spin 1 etc...) se réduit à un triangle !

Dans sa thèse Doncel a étudié le domaine correspondant aux particules de spin 3/2 produites dans les mêmes conditions et les contours apparents sont simples.

Dans les cas plus compliquées (spin supérieur, cible polarisée, corrélations de polarisation) on peut comme mesure provisoire se servir de plusieurs contours apparents du même domaine : les cônes du 2ème degré du § 5.2.3.

Mais dans les discussions concrètes qui se tiendront à cette réunion les théoriciens seront à même de mieux connaître les besoins des expérimentateurs et leur donner plus explicitement les frontières de domaines dont ils ont besoin.

Qu'on me permette de terminer par une question. Le développement d'une matrice densité en multipôles est un excellent choix physique pour une base dans l'espace \mathcal{E} des matrices densités et la mesure des polarisations par les distributions angulaires des produits de désintégrations s'analyse naturellement en multipôles. Pourquoi avoir abandonné ce choix physique des multipôles pour les éléments de matrices eux-mêmes ?

D'autre part, dans une collision $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ le choix de la normale au plan de collision, comme axe de quantification des spins était autrefois courant car il a beaucoup de vertus. Mais ce problème de choix d'axe de quantification est cependant très secondaire. Changer d'axe est une opération banale.

REFERENCES

1. P. MINNAERT, Phys. Rev. 151, 1306, (1966)
2. W. LAKIN, Phys. Rev. 98, 139 (1955)
3. R.M. DALITZ, Nucl. Phys. 87, 89 (1966) ;
voir aussi M. ADEMOLLO, R. GATTO et G. PREPARATA, Phys. Rev. 140B, 192 (1965) pour quelques considérations générales sur ce sujet.
4. E.P. WIGNER, Ann. Maths. 40, 149 (1939)
5. Pour des applications à la description covariante de la polarisation, voir Louis MICHEL et Arthur S. WIGHTMAN, Phys. Rev. 98, 1190 (1955)
Aussi : L. MICHEL : Suppl. Nu. Cim. 14, 95 (1959) et
A.S. WIGHTMAN : l'invariance dans la mécanique relativiste, dans les relations de dispersion et particules élémentaires, Paris (1960).
6. E. de RAFAEL, Ann. Inst. Poincaré 5, 83, 1963.
7. Diagonaliser une matrice n'est pas intrinsèque. C'est une opération bien définie dans les bases définies par l'appareillage des coefficients de Clebsch Gordan (les $T_{(L)}^0$ sont alors diagonales). Si on prenait des bases qui correspondent au choix des axes x, y, z (coordonnées cartésiennes, en opposition aux coordonnées sphériques) ce sont alors d'autres matrices qui pourraient être diagonalisées et la condition d'invariance par les rotations autour d'un axe n'est pas nécessaire (Tout quadrupole = quadrique réelle, peut alors être diagonalisé en prenant pour axes de coordonnées des axes principaux de la quadrique)
8. Ces conditions imposées par la conservation de la parité se déduisent directement de la référence fondamentale 4. Elles ont été entre autres élégamment utilisées par A. BOHR, Nucl. Phys. 10, 486 (1959). Ces conditions basées sur l'invariance de Poincaré ont été "retrouvées" par de nombreux physiciens en utilisant la théorie de la matrice S, les relations de dispersions, etc!
9. Cette très simple condition de rang semble avoir échappé aux physiciens phénoménologistes des particules élémentaires. Elle semble avoir été appliquée pour la première fois par P. EBERHARD et M.L. GOOD, Phys. Rev. 120, 1442 (1960). Elle a été réinventée par de nombreux physiciens mais en utilisant simplement la condition : pour tout $k > 0$,
 $\frac{1}{r^{k-1}} \leq \text{Tr } R^k \leq 1$ où r est k rang de k. Ce domaine est évidemment plus petit que le domaine $0 \leq \text{Tr } R^k \leq 1$, mais il reste encore "immense" par rapport au vrai domaine des matrices $n \times n$ hermitiques positives et de rang donné $r \leq n$.