

SPIN

- 1 *La découverte du spin*
- 2 *Spin atomique*
- 3 *Spin nucléaire*
- 4 *Physique des spins*
- 5 *Thermodynamique des spins*
- 6 *Description relativiste du spin*

On considère en mécanique rationnelle le point matériel qui est caractérisé par sa masse m et trois degrés de liberté correspondant aux trois coordonnées de sa position ou bien aux trois composantes de sa vitesse ou de son impulsion. Cette notion est insuffisante pour décrire la plupart des particules de la physique (atome, noyau, proton, photon, etc.), même lorsqu'on ne tient pas compte de leur structure interne. Ces particules ont un quatrième degré de liberté, le *spin*. Tandis que les coordonnées de l'impulsion sont des nombres réels qui peuvent changer continûment, les composantes de spin ne peuvent prendre pour les particules de masse non nulle qu'un

nombre entier fini ($n > 0$) de valeurs :
 $m = -j, -j + 1, -j + 2, \dots, j - 1, j$,
 c'est-à-dire :

$$-j \leq m \leq j,$$

où $j = (n - 1)/2$ est entier ou demi-entier et $j - m$ est un entier non négatif. Le nombre j est la valeur du spin de la particule ; celle-ci possède, même au repos, un moment cinétique intrinsèque de valeur $j\hbar$, où $2\pi\hbar = h$ est la constante de Planck. Pour les particules de masse nulle, m ne peut prendre soit qu'une valeur $1/2 = j$ pour les anti-neutrinos et $-1/2 = -j$ pour les neutrinos, soit deux valeurs $\pm j$, comme c'est le cas des photons avec $j = 1$.

Bien qu'on puisse introduire le spin en physique non relativiste, seule la description relativiste du spin est compatible avec toutes les propriétés des particules observées. L'état de spin de la particule s'appelle sa *polarisation*. La description complète des états totalement polarisés est donnée par une « fonction » de ces $n = 2j + 1$ valeurs de m , c'est-à-dire par un ensemble de n nombres complexes c_m . Ces états de polarisation forment donc un espace vectoriel de Hilbert \mathcal{H}_n de dimension n . Plus généralement, tous les états de polarisation sont représentés par les matrices densités, c'est-à-dire par les opérateurs sur \mathcal{H}_n hermitiens positifs, de trace normée à l'unité.

Le spin joue un grand rôle dans la spectroscopie, la valence chimique, le magnétisme atomique et nucléaire, comme nous le verrons après avoir esquissé l'histoire de sa découverte en 1925.



1 La découverte du spin

En 1911, E. Rutherford montra expérimentalement que les atomes étaient constitués d'un noyau et de Z électrons, ces derniers ayant chacun une charge électrique $-e$. On se rendit compte très vite que Z était le *nombre atomique*, c'est-à-dire le numéro d'ordre de l'atome dans la classification de Mendeleïev. Tandis que la dimension d'un atome est de quelque 10^{-8} cm, celle du noyau se situe entre 10^{-13} et 10^{-12} cm, et, à un millièème près, toute la masse de l'atome est concentrée dans le noyau. En 1913, N. Bohr proposa un modèle pour les atomes, expliquant que les états des électrons dans les atomes ne forment pas un ensemble continu mais discret ; on dit maintenant *quantifié*. Par exemple (cf. ATOME), l'énergie de liaison de l'électron de l'atome d'hydrogène ne peut prendre que les valeurs :

$$(1) E_n = -\frac{1}{2n^2} \frac{m_e c^4}{\hbar^2} = -\frac{1}{2n^2} \alpha^2 m_e c^2 = -\frac{1}{2n^2} \frac{e^2}{r_n}$$

où n est un entier positif, c la vitesse de la lumière, \hbar la constante de Planck ($\hbar = h/2\pi$) et m_e la masse de l'électron ; le nombre sans dimension $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137,036 \dots$ caractérise l'intensité des interactions électromagnétiques. Le rapport $\hbar/m_e c$ est une longueur valant $3,86 \dots \cdot 10^{-11}$ cm. Le rayon de Bohr :

$$r_n = \alpha \frac{\hbar}{m_e c} = 0,529 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$$

caractérise la taille des atomes.

Après quelques années, on savait décrire les atomes les plus complexes en enque-

tant les états de chaque électron par quatre nombres entiers, les *nombres quantiques* : l'entier n de l'équation (1) est l'un d'eux ; on l'appelle le nombre quantique *principal*. Deux autres, l et m , sont les nombres quantiques *orbital* et *magnétique*. Ce n'est qu'au début de 1925 que fut formulé le fameux *principe d'exclusion* de W. Pauli : « Il ne peut y avoir qu'un électron par état quantique. » Il était aussi devenu clair que les quatre nombres quantiques correspondaient à quatre degrés de liberté pour les électrons ; les trois premiers nombres concernent les trois dimensions de l'espace. Qu'était donc le quatrième, appelé par la suite *spin* ?

Effet Zeeman

Avant d'aborder la définition du spin, on décrira les deux nombres quantiques l et m , qui prennent toutes les valeurs entières autorisées par les inégalités :

$$(2) 0 \leq l \leq n-1, \quad -l \leq m \leq l.$$

Le nombre quantique orbital l donne la valeur (quantifiée) du moment cinétique de l'électron en unités \hbar . La valeur de la projection sur un axe de ce moment cinétique est aussi quantifiée et égale à $m\hbar$. Grâce à sa charge $-e$, la trajectoire fermée de l'électron correspond à un petit circuit électrique dont la valeur absolue du moment magnétique est :

$$(3) -\mu_l = \frac{e\hbar}{2m_e c} l = \mu_B l,$$

où μ_B est le *magnéton de Bohr*.

Entreprise d'abord par Zeeman, l'étude des atomes plongés dans un champ magnétique fut l'objet de très nombreux travaux. Dans un champ magnétique constant \mathbf{B} , un moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$ acquiert une énergie potentielle $\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$. A cause de la quantification, cette énergie magnétique a $2l + 1$ valeurs possibles :

$$(4) E_m' = m \frac{Be\hbar}{2m_e c}$$

Pour un champ de 2 000 G, le rapport $|E_m'/E_1|$ est un peu inférieur à 10^{-6} . Par effet Zeeman, les niveaux d'énergie atomiques sont donc remplacés par un nombre impair de niveaux d'énergie très voisine ; on observe donc une structure fine des raies spectrales (cf. effet ZEEMAN). Pour expliquer cette structure, il fallut encore raffiner la théorie, compte tenu des effets relativistes, la vitesse moyenne de l'électron étant :

$$v = Ze^2/\hbar \sim \alpha cZ,$$

donc non négligeable par rapport à c . Cela ne suffit pas. Des 1924, Pauli proposa de tenir compte du moment cinétique du noyau, qui a donc aussi un moment magnétique μ_n ; l'énergie d'interaction de deux moments magnétiques est :

$$\mu_n \cdot \mu_e r^{-3},$$

r étant leur distance moyenne. Mais l'existence d'un nombre pair de niveaux par effet Zeeman était devenue certaine et inexplicable.

Spin et moment magnétique de l'électron

Ce furent G. Uhlenbeck et S. Goudsmit qui résolurent, en 1925, cette énigme en suggérant que l'électron possède un *moment cinétique intrinsèque*, appelé depuis le *spin*, de valeur $s\hbar = 1/2\hbar$. En projection sur un axe, il ne prend que deux valeurs $m_s = \pm 1/2$ ou $\pm 1/2$. Cela expliquait le nombre pair de niveaux Zeeman et l'existence du quatrième degré de liberté des électrons, mais on se heurtait à deux

objections. D'une part, l'énergie correspondante E_{m_s} n'était pas égale à (4), en remplaçant m par m_s , mais au double de sa valeur ; d'autre part, les noyaux atomiques qui contenaient des protons et des électrons avaient un moment magnétique un millier de fois plus petit que celui de l'électron. Dès 1926, L. H. Thomas expliqua le facteur 2 par un effet relativiste. Si on définit le nombre g par le rapport :

$$(5) \frac{\mu_s}{\mu_B} = g s$$

pour une particule de spin s et de moment magnétique au repos μ_s , Thomas montra que g était égal à 2, ce que confirma l'équation de Dirac (cf. DIRAC) en 1927. Actuellement, l'électrodynamique quantique prédit pour l'électron :

$$(6) g_e = 2 \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} + 0,328 \dots \frac{\alpha^2}{\pi^2} + \dots \right),$$

valeur vérifiée expérimentalement avec une précision de 10^{-6} .

Spin et statistique

Dès 1925, E. Fermi montra qu'on pouvait généraliser le *principe d'exclusion* de Pauli à tous les systèmes d'électrons. La même année, Dirac montra que ce résultat pouvait être obtenu en mécanique quantique en décrivant le système d'électrons par un vecteur d'état (ou fonction d'onde) complètement antisymétrique pour les permutations des électrons (c'est-à-dire invariant par permutations paires et changeant de signe par permutations impaires). En conséquence, les électrons sont indiscernables les uns des autres (cf. SYMÉTRIE). On savait alors que les photons (indiscernables aussi les uns des autres) devaient satisfaire à la statistique de Bose-Einstein (cf. PLANCK), et Dirac montra que le vecteur d'état d'un système de photons est complètement symétrique (c'est-à-dire invariant) par permutations ; Pauli insista sur la relation entre spin et statistique, toujours confirmée empiriquement à chaque nouvelle découverte de particules (cf. *infra*) : les fermions, particules qui suivent la statistique de Fermi, ont des spins demi-entiers ; les bosons ont des spins entiers. Pauli put enfin prouver, en 1940, que cette relation était une conséquence de la théorie relativiste et quantique des champs.

2 Spin atomique

Le moment cinétique total \mathbf{J} d'un système de particules est obtenu en additionnant vectoriellement les moments cinétiques orbitaux (dont la somme est généralement notée \mathbf{L}) et les spins (somme \mathbf{S}) des constituants : $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$. En général, pour un système quantique isolé, seul \mathbf{J} a une valeur bien définie. Pour les atomes, on peut cependant considérer que, à une bonne approximation près, \mathbf{L} et \mathbf{S} sont conservés séparément, car le seul effet reliant le moment cinétique orbital et le spin des électrons est l'interaction des moments magnétiques μ_l et μ_s de chaque électron dont les valeurs respectives sont données par les équations (3) et (5). La grandeur caractéristique de cette interaction est :

$$\frac{\mu_l \mu_s}{r^3} \sim \frac{1}{2} \alpha^2 |E_1| \sim 0,3 \cdot 10^{-6} |E_1|;$$

on l'appelle *interaction spin-orbite*.

Lorsque tous les états électroniques correspondant à une valeur donnée de n (nombre quantique principal) sont occupés, on dit qu'on a une couche complète. Alors $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S} = 0$; c'est le cas des gaz rares dans leur état fondamental. Pour les états atomiques avec des couches incomplètes, si \mathbf{L} et \mathbf{S} ne sont pas nuls, les valeurs possibles \mathbf{J} de \mathbf{J} vont, par sauts

entiers, de $1/2$ à S , à $(1/2 - S)$. L'énergie croît alors avec la valeur de J , les niveaux magnétiques « antiparallèles » ($J = 1, 2, \dots$) devenant parallèles pour $J = 1/2, 3/2, \dots$. Les écarts d'énergie expliquent la structure fine des spectres atomiques.

Par exemple, le sodium n'a qu'un électron hors d'une couche complète. L'état fondamental est $L = 0, S = 1/2$, le premier état excité ($L = 1, S = 1/2$) est double en $J = 1/2$ et $J = 3/2$, d'où l'émission du doublement D_1, D_2 de la raie jaune brillante du spectre du sodium, due à la transition du premier état excité à l'état fondamental.

Dans une couche incomplète, la repulsion des électrons rend plus stables les états où ces électrons se rapprochent le moins possible. Leur probabilité de présence étant donnée par le carré du module de la fonction d'onde Ψ , ces états correspondent à une fonction d'onde la plus antisymétrique possible dans les coordonnées d'espace des électrons (le produit s'annule lorsque ces coordonnées sont égales pour deux électrons); la statistique de Fermi exige alors que cet état le plus stable soit le plus symétrique possible pour les coordonnées de spin, et ainsi S est le plus grand possible. Le nombre $|S|/(1/2) = 2S$ de spins symétriques correspond à la valence chimique de l'atome, car ces spins libres pourraient s'apparier avec ceux d'autres atomes pour former des molécules. La valence dépend donc de l'état atomique. Par exemple, dans son état fondamental ($L = 1, S = 1/2$), le carbone est divalent; l'énergie d'excitation pour atteindre l'état $L = 0, S = 2$ du carbone tétravalent est inférieure à l'énergie de deux nouvelles liaisons chimiques covalentes; ce qui explique l'abondance des composés tétravalents du carbone. Les molécules chimiquement saturées n'ont donc pas, en général, de moment magnétique, au contraire des atomes et des radicaux libres. Ces moments magnétiques jouent un grand rôle dans les propriétés magnétiques de la matière (cf. MAGNÉTISME).

3] Spin nucléaire

On appelle encore spin le moment cinétique total d'un système physique au repos, isolé ou formant lui-même un sous-système d'un système plus grand : atome d'une molécule et noyau d'un atome par exemple. Les noyaux des atomes ont donc eux-mêmes un spin J , somme des moments cinétiques orbitaux et de spins de ses constituants.

Dès 1927, D. M. Dennison établit expérimentalement que l'autre particule élémentaire connue, le proton, de charge e et de masse $m_p = 1.836,1 \dots m_e$, avait aussi un spin de valeur $1/2$. E. Kasimir, en 1930, mesura le spin du noyau d'azote ^{14}N ($Z = 7, A = 14$) et le trouva égal à 1 ; il vérifia en même temps que ^{14}N spin faisait à la statistique de Bose. Cela détruisait définitivement l'idée, en cours, selon laquelle les noyaux étaient composés de A protons et de Z électrons; dans le cas de ^{14}N , on a $A - Z = 21$, et le noyau d'azote aurait dû avoir un spin demi-entier. Mais, deux ans après, J. Chadwick découvrit le neutron, de masse $m_n = 1.839,0 \dots m_e$, de spin $1/2$.

Depuis, près de trois cents autres particules élémentaires ont été trouvées : les hadrons, qui forment la grande majorité, ont des interactions nucléaires et très probablement une structure complexe (cf. PARTICULES ÉLÉMENTAIRES); les autres systèmes neutres composés de particules chargées, les hadrons neutres, ont un spin différent de zéro, et un moment magnétique. Plus le poids absolu des hadrons (masse m_h) est grand, plus le moment $eh/2m_hc$ est petit. On doit donc attribuer aux hadrons le rapport g le plus général fort différent de 1 , qui est en fait $g_p = 5,58$ pour le proton et $g_n = 3,82$ pour le neutron, et un moment magnétique

$$\mu = g \frac{eh}{2m_h c} = 2.79276 \frac{m_e}{m_p} \mu_B$$

tel que le moment magnétique du neutron est :

$$\mu_n = -1,813 \frac{m_e}{m_p} \mu_B$$

Les valeurs du rapport g pour les hadrons seraient pouvoir être prédites par la théorie des forces nucléaires, mais elles ne le sont pas encore de façon absolue. Par contre (cf. SYMÉTRIE), la symétrie $SU(3)$ les prédit assez bien en fonction de deux d'entre elles.

On peut aussi reconnaître une structure en couches de protons et de neutrons dans les noyaux atomiques. L'interaction entre spin et orbite dans le cas nucléaire est très importante et de signe opposé à celle des atomes. Par contre, dans les noyaux atomiques, les forces entre nucléons étant attractives, les états les plus stables sont le plus symétriques possible dans les coordonnées d'espace; ils sont, par conséquent, très antisymétriques dans les coordonnées de spin. Aussi, tous les noyaux avec un nombre pair de protons et un nombre pair de neutrons ont un spin total nul. C'est le cas de la majorité (165 sur 274) des noyaux stables connus.

Comme l'avait prévu Pauli dès 1924 (cf. supra), l'interaction entre le moment magnétique nucléaire et le moment magnétique atomique produit une structure hyperfine dans les spectres atomiques, les états étant de l'ordre de m_i/m_p fois ceux de la structure fine. Pour l'état fondamental ($n = 1, l = 0$) de l'hydrogène (1 proton, 1 électron), la différence d'énergie entre les états $J = 0$ et $J = 1$ est $\epsilon_{11} = h\nu_{11}$, la fréquence ν_{11} de 1.420.405.6 MHz étant mesurée avec une très grande précision ($2 \cdot 10^{-11}$). Cette fréquence correspond d'ailleurs à la longueur d'onde de 21 cm, très observée par les radiotélescopes des astronomes qui étudient ainsi la distribution et la vitesse de l'hydrogène atomique dans l'Univers (cf. RADIOASTRONOMIE ET RADARASTRONOMIE, chap. 3).

4] La physique des spins

Soit μ le moment magnétique et a le moment cinétique d'un système physique S rigide. Un champ magnétique \mathbf{E} exerce sur S un couple $\mu \times \mathbf{E}$; on en déduit que la variation du moment cinétique en fonction du temps est :

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \mu \times \mathbf{E}$$

Au dynamisme de cette équation à une particule de masse m , de spin $S = a/h$ et de moment magnétique :

$$\mu = \gamma \mathbf{a} = \gamma a \frac{h}{2\pi m} \mathbf{s}$$

selon l'équation (13) :

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\gamma h}{2\pi m} \mathbf{S} \times \mathbf{B}$$

Elle implique, à une particule :

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{s} \times \mathbf{B}$$

On constate ainsi que le spin effectue une précession autour de \mathbf{B} à la fréquence de LARANGE :

$$\omega = \frac{\gamma h}{2\pi m} B = \frac{e\hbar}{2m} \frac{g}{c} B$$

On constate que, d'une part, le moment cinétique \mathbf{a} est constant dans l'équation (13) et, d'autre part, que la direction de \mathbf{a} est constante dans l'équation (14). On voit donc que la direction de \mathbf{a} est constante dans l'équation (13) et, d'autre part, que la direction de \mathbf{a} est constante dans l'équation (14). On voit donc que la direction de \mathbf{a} est constante dans l'équation (13) et, d'autre part, que la direction de \mathbf{a} est constante dans l'équation (14).

en un certain sens que nous allons préciser. En effet, l'étude des spectres atomiques avait montré qu'un moment cinétique quantique était un multiple jh de h , et que sa projection sur un axe n 'a que les valeurs $m_j h$, satisfaisant les conditions suivantes :

$$(11) \quad 2j \neq 0, \quad j = m_j,$$

où $2j$ et $j - m_j$ sont entiers, avec $-j < m_j < j$.

L'expérience de Stern et Gerlach, en 1922, montra que ces résultats établis pour les électrons des atomes étaient vrais pour tous les systèmes physiques : l'atome d'argent par exemple. En faisant passer un faisceau de particules dans un champ magnétique \mathbf{B} , de direction fixe (verticale) mais inhomogène, on devrait obtenir en physique classique un élargissement vertical du faisceau; on obtient en fait sa division en $2j + 1$ faisceaux, correspondant chacun à une valeur de m_j . La conservation du moment cinétique étant due à l'invariance par rapport aux rotations (cf. MÉCANIQUE QUANTIQUE, SYMÉTRIE), les composantes orthogonales du moment cinétique sont représentées par les générateurs J_i ($i = 1, 2, 3$) du groupe des rotations. Il satisfait donc à la loi d'algèbre de Lie de ce groupe, soit :

$$(12) \quad J_j J_i - J_i J_j \equiv [J_i, J_j] = i \epsilon_{ijk} J_k,$$

où $\epsilon_{ijk} = +1$ ou -1 (selon que i, j, k est une permutation paire ou impaire de $1, 2, 3$) et où $\epsilon_{ijk} = 0$ si i, j, k ne sont pas tous différents. Une écriture condensée de (12) est :

$$(12') \quad \mathbf{J} \times \mathbf{J} = i\mathbf{J};$$

le produit vectoriel \times est en effet la loi d'algèbre de Lie du groupe des rotations. Pour chaque valeur de n (entier ≥ 0), il existe trois matrices hermitiques J_i , n par n , solutions de (12) et (12'), ayant pour valeurs propres m_j de l'équation (11) où :

$$(13) \quad n = 2j + 1.$$

On trouve en outre, \mathbf{I} étant la matrice identité,

$$(14) \quad \Sigma J_i^2 \equiv \mathbf{J}^2 = j(j + 1)\mathbf{I}.$$

Pour $j = 1/2$, $n = 2$, on obtient $J_i = 1/2 \sigma_i$, où les σ_i sont les matrices introduites par Pauli (cf. ATOME, chap. 2) en 1926 :

$$(15) \quad \begin{cases} \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Ces matrices J_i agissent sur l'espace de Hilbert \mathcal{K}_j de dimension $n = 2j + 1$; les vecteurs $|x\rangle$ de \mathcal{K}_j représentent les états de spin « purs » (pour $n = 2$, ces $|x\rangle$ sont appelés *spineurs*). Un état quelconque de spin d'un système au repos de moment cinétique jh est représenté par une matrice densité ρ , hermitique ($\rho^* = \rho$), de trace unité ($\text{tr} \rho = 1$) et positive (telle que $\langle x, \rho x \rangle \geq 0$ quel que soit $|x\rangle$); on dit que ρ représente la polarisation du système. Pour $j = 1/2$, on a :

$$(16) \quad \rho = \frac{1}{2} (1 + s_1 \sigma_1 + s_2 \sigma_2 + s_3 \sigma_3) = \frac{1}{2} (1 + \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\sigma}),$$

avec $0 \leq s^2 \leq 1$.

Les composantes $s_i = \text{tr} \rho \sigma_i$ de \mathbf{s} sont les valeurs moyennes de l'opérateur $\boldsymbol{\sigma}$. Le pseudo-vecteur \mathbf{s} est appelé vecteur de polarisation et sa longueur est le degré de polarisation. Lorsque le système est dans le champ magnétique constant \mathbf{B} , le hamiltonien de l'interaction est :

$$H = \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\mu} - g\mathbf{B} \cdot \sigma \frac{1}{2} \mu_n$$

L'équation d'évolution :

$$(17) \quad i \frac{d}{dt} \rho = [H, \rho]$$

obtenue lorsqu'on écrit, comme dans l'équation (16), ρ en fonction de s , donne l'équation (9). On vérifie dans ce cas particulier le principe plus général selon lequel « l'équation classique d'évolution d'une grandeur physique s'applique aussi à la moyenne de l'opérateur quantique correspondant, pour un état physique donné ».

Pour les spins plus élevés, la polarisation est décrite non seulement par sa partie dipolaire s , mais aussi par toutes les composantes multipolaires :

$$s_{ij} \dots k = \text{tr}(\rho J_i J_j \dots J_k)$$

cette trace étant la valeur moyenne du produit de r opérateurs J_i , pour $1 \leq r \leq n = 2j + 1$.

La mesure de la fréquence ν_i (équation 10) peut être faite de façon très précise par une méthode de résonance (I. Rabi, F. Bloch); la résonance magnétique, et plus spécialement la résonance magnétique nucléaire, a reçu en vingt ans de très nombreuses applications : étude des structures chimiques et des états des noyaux atomiques, construction de magnétomètres très sensibles et peu fragiles, etc. (cf. SPECTROSCOPIE - Spectroscopie des radiofréquences).

5 La thermodynamique des spins

Les spins (atomiques ou nucléaires) d'un morceau de matière réagissent parfois entre eux, par l'intermédiaire des moments magnétiques qu'ils portent, beaucoup plus qu'avec le reste de la matière. L'étude du ferromagnétisme (cf. MAGNÉTISME) en est un exemple pour les spins atomiques. On peut donc étudier thermodynamiquement le système des spins, qui a une entropie et une température bien définie ne s'égalisant que lentement avec la température extérieure. Les meilleurs exemples de systèmes de spins bien isolés de l'extérieur sont fournis par les particules (électrons, protons) tournant dans le vide des anneaux de stockage pendant des heures et même des jours (cf. CYCLOTRONS ET SYNCHROCYCLOTRONS).

C'est pendant des temps comparables qu'on peut maintenir isolés certains systèmes de spins nucléaires. Dans un champ magnétique B , la distribution des états de spin satisfait à la loi de Boltzmann. Le nombre d'états de composante m , le long de B est proportionnel à :

$$\exp\left(-m_i g \mu_n \frac{B}{kT}\right)$$

où k est la constante de Boltzmann. A basse température, les spins sont très polarisés (pratiquement, seul l'état $m_i = -j$ est peuplé). En inversant le signe du champ magnétique, on obtient même une distribution correspondant, dans la formule de distribution statistique, à une « température absolue négative ». Une telle température est plus « chaude » que toute température positive. En échangeant de l'énergie avec l'extérieur, le système de spin tendra de nouveau peu à peu vers la distribution de Boltzmann de la température extérieure T .

On étudie de nombreux effets de transport d'énergie, de corrélation, etc. dans les systèmes de spin (par exemple, les ondes de spin). On peut aussi avoir des phases thermodynamiques distinctes, comme pour l'orthohydrogène et le parahydrogène, suivant que la somme des spins nucléaires (c'est-à-dire des deux protons) de la molécule est $J_{ortho} = 1$ ou $J_{para} = 0$. Dans les conditions ordinaires, on a l'équilibre statistique $3/1 = (2J_{ortho} + 1)/(2J_{para} + 1)$

pour les concentrations ; mais, à l'équilibre, l'hydrogène liquide est entièrement dans l'état para.

6 Description relativiste du spin

Le groupe d'invariance de la physique est le groupe de Poincaré \mathcal{P} (cf. SYMÉTRIE) de dix paramètres dont nous désignons les générateurs par P, E, J, N . Ces opérateurs représentent, en physique quantique, les grandeurs conservées correspondantes : l'impulsion, l'énergie, le moment cinétique et un autre vecteur associé correspondant aux transformations de Lorentz. Les générateurs E et N sont les composantes P_μ de temps ($\mu = 0$) et d'espace ($\mu = 1, 2, 3$) d'un quadrivecteur \mathcal{P} (cf. ESPACE-TEMPS). De même, les opérateurs J et N sont les six composantes d'un tenseur antisymétrique $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$. L'algèbre de Lie de \mathcal{P} est représentée par l'ensemble des relations :

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{J} \times \mathbf{J} = i\mathbf{J}, \quad \mathbf{J} \times \mathbf{N} = i\mathbf{N}, \\ \mathbf{J} \times \mathbf{P} = i\mathbf{P}, \quad \mathbf{N} \times \mathbf{N} = -i\mathbf{J}, \\ [P_i, N_j] = iE\delta_{ij}, \quad [\mathbf{J}, E] = 0, \\ [E, N] = i\mathbf{P}, \quad [E, \mathbf{P}] = 0, \\ \mathbf{P} \times \mathbf{P} = 0, \end{array} \right.$$

avec le symbole de Kronecker $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

Pauli introduisit le quadri-pseudovecteur \mathcal{B} de composantes :

$$(19) \quad W_\lambda = \frac{1}{2} \epsilon_{\lambda\mu\nu\rho} P_\mu M_{\nu\rho}$$

où $\epsilon_{\lambda\mu\nu\rho}$ est le tenseur complètement antisymétrique ; soit explicitement :

$$(20) \quad W_0 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{J}, \quad W = E\mathbf{J} - \mathbf{P} \times \mathbf{N}$$

On vérifie par le calcul que :

$$(21) \quad W_0 E - W \cdot \mathbf{P} \equiv \mathcal{B} \cdot \mathcal{B} = 0,$$

$$(22) \quad [W_\lambda, P_\mu] = 0,$$

et que $\mathcal{B} \cdot \mathcal{B} = E^2 - P^2$ et $\mathcal{B} \cdot \mathcal{B} = W_0^2 - P^2$ commutent avec les dix générateurs P_μ et $M_{\nu\rho}$.

Les états d'une particule correspondent à une représentation irréductible de (18). On démontre que, dans ce cas, $\mathcal{P} \cdot \mathcal{B}$ et $\mathcal{B} \cdot \mathcal{B}$ sont des multiples de l'opérateur identité I et prennent les valeurs correspondant aux relations :

$$(23) \quad \mathcal{P} \cdot \mathcal{B} = m^2 I, \quad \mathcal{B} \cdot \mathcal{B} = -m^2 j(j+1) I,$$

avec $2j$ entier ≥ 0 , où m et j sont la masse et le spin de la particule (il existe d'autres représentations de (18) qui ne correspondent pas à des particules). Pour les particules de masse nulle, $m = 0$, on a la relation :

$$(24) \quad \mathcal{B} \cdot \mathcal{B} = \lambda \mathcal{P}$$

avec 2λ entier.

La valeur de λ est ± 1 pour le photon et ± 2 pour le graviton, tous deux self-conjugués de charge (cf. SYMÉTRIE) ; elle est de -1 pour les neutrinos ν_e et $\bar{\nu}_\mu$, et égale à 1 pour les antineutrinos $\bar{\nu}_e$ et ν_μ (cf. PARTICULES ÉLÉMENTAIRES).

Les relations de commutation (22) montrent qu'on peut mesurer à la fois l'énergie-impulsion, représentée par l'opérateur \mathcal{P} , et des fonctions de \mathcal{B} ; cet opérateur représente la polarisation de la particule. Voici comment les composantes de \mathcal{B} sont reliées à celles du spin \mathbf{S} pour une particule dans l'état d'impulsion-énergie p (E, p) satisfaisant à $p \cdot p = (mc^2)^2 > 0$; la polarisation d'une particule de masse nulle est décrite dans l'article PHOTON. Soit p/m et $n^{(i)}$, avec $i = 1, 2, 3$, une base de quadrivecteurs orthonormés

dans l'espace-temps. Dans cette base, les composantes de l'opérateur de spin \mathbf{S} sont :

$$(25) \quad S = \frac{-1}{m} \mathcal{B} \cdot n^{(i)}$$

En effet, les relations (18) et (19) permettent de calculer :

$$(26) \quad [S_i, S_j] = iE_{ijk} S_k,$$

$$(27) \quad \Sigma S_i^2 = S^2 = -m^{-2} \mathcal{B} \cdot \mathcal{B} = j(j+1) I.$$

Ce sont les relations (12) et (14). Nous pouvons étendre à la particule relativiste tout ce que nous avons expliqué pour la particule au repos. Sa polarisation est complètement décrite par les tenseurs multipolaires $s_{\lambda\mu}, s_{\lambda\mu\nu}, \dots$ de rang $k = 1$ (dipolaire), $k = 2$ (quadripolaire), jusqu'à $k = 2j$; ces tenseurs sont complètement symétriques, orthogonaux à p et de trace nulle pour $k > 1$; ce sont les valeurs moyennes des k -ièmes puissances de $-\mathcal{B}/m$.

Considérons une particule de masse m , de spin quelconque j , de charge e , et dont le moment magnétique est donné par le rapport g défini par l'équation (5). Lorsque cette particule est dans un champ électromagnétique $\mathcal{F} = (\mathbf{E}, \mathbf{B})$ (ce tenseur relativiste antisymétrique est noté \mathcal{F} dans l'article ÉLECTRICITÉ-Electromagnétisme, chap. 3) variant lentement dans l'espace et le temps, la précession de sa polarisation ne dépend que du dipôle s . Le mouvement de la particule elle-même est donné par l'équation de Lorentz :

$$(28) \quad \frac{d}{d\tau} u = \frac{e}{mc} \mathcal{F} \cdot u$$

où $u = p/m$ (donc $u \cdot u = 1$) et τ est le temps propre de la particule : le temps du laboratoire est $t = \gamma\tau$, avec $\gamma = (1 - (v/c)^2)^{-1/2}$. L'équation d'évolution de s est (V. Bargmann, L. Michel et V. Telegdi, 1959) :

$$(29) \quad \frac{d}{d\tau} s = \frac{e}{2mc} [g\mathcal{F} \cdot s + (g-2)(s \cdot \mathcal{F} \cdot u)u]$$

Pour $g = 2$, comme l'avait déjà remarqué Thomas en 1926, s et u satisfont la même équation. Cette valeur est aussi remarquable dans une théorie non relativiste du spin (J.-M. Lévy-Leblond, 1963). Il est vrai que le spin peut être défini en physique dès qu'on introduit l'invariance euclidienne (cf. SYMÉTRIE) ; cependant, seule la description relativiste du spin est compatible avec toutes les propriétés des états de polarisation des particules que nous observons.

L. M.

Bibliographie

M. FIERZ & V. WEISSKOPF, dir., *Theoretical Physics in the Twentieth Century. A Memorial Volume to Wolfgang Pauli*, New York, 1960 (notamment les articles de R. Kronig & R. L. Van der Waerden) / S. GOUDSMIT, « La Découverte du spin de l'électron », in *Journ. Phys.*, vol. XXVIII, 1967 ; « Pauli and Nuclear Spin », in *Physics Today*, vol. XIV, 1961. Un traitement du spin élémentaire et fécond en applications est donné par R. P. FEYNMAN, R. B. LEIGHTON & M. SANDS in *Cours de physique*, t. III : *Mécanique quantique (The Feynman Lectures on Physics, 1963-1965)*, trad. B. Equer & P. Fleury, Paris, 1970.

Corrélat

ATOME, DIRAC (P.), ÉLECTRON, GROUPES (groupes de Lie), MAGNÉTISME, NEUTRON, NOYAU ATOMIQUE, PARTICULES ÉLÉMENTAIRES, PLANCK (M.), PROTON, QUANTIQUE (MÉCANIQUE), STATISTIQUE (MÉCANIQUE), SYMÉTRIE, ZEFMAN (EFFET).