COLLÈGE
DE
FRANCE

CHAIRE
D'ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

Paris, le 2 avril 1960

Chers Lurçat et Michel,

Votre groupe de Lorentz n'est vraiment pas commode à manipuler ! J'ai essayé à plusieurs reprises de vérifier ce qu'il y avait dans votre lettre, et j'ai été arrêté par plusieurs difficultés. Voici où j'en suis pour le moment :

1) Au sujet de la notation $H^q(B,A)$.

Les groupes de cohomologie $H^q(B,A)$ ne sont définis (dans la littérature existante) que lorsque B est un groupe <u>discret</u> (fini ou non), opérant sur le groupe abélien A. Il n'y a aucune difficulté à traiter le cas où A est topologique : on garde les mêmes définitions, à l'aide des cochaînes par exemple. Par contre, j'ignore comment on pourrait définir $H^q(B,A)$ lorsque B et A sont tous deux des groupes topologiques, ce qui est exactement le cas dont vous avez besoin ! La définition par cochaînes continues, à laquelle on pense tout naturellement, ne marche pas : $H^2(B,A)$ ne serait pas le groupe de toutes les extensions E de B par A, mais seulement le sous-groupe formé des extensions E telles qu'il existe une <u>section continue</u> $s : B \to E$, hypothèse inutilement restrictive (penser au cas où B est connexe, et A fini : on ne trouverait alors aucune extension !).

Il y a toutefois un moyen de s'en tirer si l'on ne veut définir que les H^q pour $q \leq 2$: on définit $H^o(B,A)$ comme A^B, $H^1(B,A)$ comme le groupe des homomorphismes croisés continus de B dans A (modulo les triviaux), et $H^2(B,A)$ comme le groupe des classes d'extensions de B par A. On ne peut alors plus s'appuyer sur les théorèmes généraux de cohomologie des groupes, et il faut vérifier directement que les suites exactes usuelles se définissent bien (ce qui n'est même pas évident), et sont encore exactes. C'est un travail qui est sans doute faisable, mais sûrement fastidieux ; je l'ai commencé, mais je ne m'en suis pas tiré complètement.

Vu les applications, je me suis surtout intéressé à la suite exacte:

$$0 \to H^1(B'',A^{B'}) \to H^1(B,A) \to H^1(B',A)^{B''} \xrightarrow{d} H^2(B'',A^{B'}) \to H^2(B,A) \quad .$$

Il faut d'abord définir les opérations de B'' sur $H^1(B',A)$, ce qui n'est pas difficile, puis définir les homomorphismes : XX ils sont tous évidents, sauf d dont je ne me suis pas sorti. Je n'ai donc pû vérifier l'exactitude que jusqu'en $H^1(B',A)^{B''}$: ça marche. Pour d je vais peut-être me borner au cas où B' opère trivialement sur A, car c'est le cas dans toutes vos applications.

Malheureusement, même si la suite précédente était exacte, cela ne suffirait pas pour les applications ; il vous faut l'image du dernier homomorphisme (et si possible montrer que c'est tout le groupe, ou que le quotient est plongé dans $H^2(B',A)$). Dans le cas discret, il XXXXXXXXXXXXXXX y a des conditions : il suffit que $H^1(B',A)$ soit nul [illegible] comme le montre la suite [illegible] ; je n'ai pas regardé [illegible] qu'il en est dans le cas non discret.

2) Soit T le groupe des translations (je garde vos notations). Vous écrivez que $H^i(T,A) = 0$ pour $i \geq 1$. C'est inexact pour $i = 1,2$ (pour $i \geq 3$, je ne sais pas ce que ça veut dire). C'est bien clair pour $i = 1$: il peut y avoir des homomorphismes non triviaux de T dans A, si $A = S_1$ par exemple (prendre $x \to e^{iu(x)}$, où $u(x)$ est une forme linéaire réelle sur T).

Pour i=2, on peut construire des extensions non triviales de T par (*) S_1 en prenant le produit $T \times S_1$, et en le munissant de la structure de groupe suivante :

$$(x,\theta).(x',\theta') = (x+x',\theta + \theta' + u(x,x')) \quad ,$$

où $u(x,x')$ est une forme bilinéaire réelle sur $T \times T$. Si u n'est pas symétrique, le groupe ainsi obtenu n'est pas commutatif, et l'extensionM n'est pas triviale (sauf erreur, on obtient ainsi toutes les extensions de T par S_1, et on peut même se borner aux formes bilinéaires u qui sont alternées).

Comme T joue le rôle du B' du n°1), c'est très ennuyeux ; heureusement, on vérifie que $H^1(T,A)^{B''} = 0$; je n'ai pas regardé $H^2(T,A)^{B''}$, mais je crois que c'est zéro (le groupe de Lorentz homogène ne doit laisser invariante aucune forme bilinéaire alternée).

Conséquence : je ne vois pas comment démontrer que le calcul des extensions de $\mathcal{X}'$ par A se ramène à celui de L' (groupe homogène). Avez-vous une raison "de physciens" pour penser que c'est vrai

3) Je n'ai rien à dire pour le moment sur le reste de vos diagrammes, ayant eu suffisamment d'ennuis avec les premiers ! J'espère tout de même qu'ils offriront moins de difficultés.

J'espère pouvoir vous donner des commentaires un peu moins négatifs un de ces jours.

Bien à vous

J.-P. Serre

J-P.Serre
6, avenue Montespan
PARIS, 16